Lineare Gleichungssysteme

10.1.1 Definition Matrix

Seien $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, dann heißt das Zahlenfeld

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

eine $m \times n$ Matrix

erster Index = Zeilenindex

zweiter Index = Spaltenindex

a_{37} Zeile 3, Spalte 7

$\boxed{\text{V38.04}}$

Auf Matrizen definieren wir die S-Multiplikation & Addition

$$s\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sa_{11} & sa_{12}\\ sa_{21} & sa_{22}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23}\end{pmatrix}$$

10.1.6 Matrixmultiplikation (Falksches Schema)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix} =$$

2 Z 5 Sp

n Z m Sp

	1	2	0	0	1
	0	1	2	0	1
1 2	1·1+2·0	4	4	0	3
3 4	3·1+4·0	10	8	0	7
5 6	5·1+6·0	16	12	0	11
7 8	7	22	16	0	15

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 0 & 3\\ 3 & 10 & 8 & 0 & 7\\ 5 & 16 & 12 & 0 & 11\\ 7 & 22 & 16 & 0 & 15\end{pmatrix}$$

k Z m Sp

$$\underline{A}_{4\times 2} \cdot \underline{B}_{2\times 5} = \underline{C}_{4\times 5}$$

4 Z 2 Sp

k Z n Sp

4 Z 5 Sp

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = 1\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6 = 32$$

	4
	5
	6
1 2 3	32

Das Skalarprodukt (der Schule) ist ein spezielles Matrixprodukt

LGS der Form 3 Gln 3 Unbekannte

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \iff \underline{A}_{3\times 3}\vec{x} = \vec{b}$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

$$\begin{array}{c|l} & \begin{matrix}x_1\\x_2\\x_3\end{matrix} \\ \hline \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} & \begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \vdots \\ \checkmark \end{matrix}\end{array}$$

Jetzt 2×2 ausrechnen

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \xrightarrow{\cdot a_{22}} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1 \cdot a_{22}$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \xrightarrow{\cdot(-a_{12})} -a_{12}\cdot a_{21}x_1 - a_{12}a_{22}x_2 = -a_{12}b_2$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$$

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$ falls $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$

Determinante ist toll

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{pmatrix}\right)\vec{x} = \vec{b}$$

Zäsur

Simples Beispiel

$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$

$$\left|\det\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}\right)\right| = |-6|$$

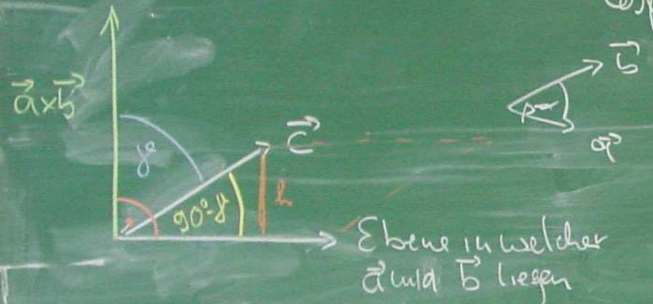
Spat = 3 dim Parallelogramm

www.Vorkurs.de.vu

Additionstheorem $\cos(\beta \pm \alpha) = \cos\beta\cos\alpha \mp \sin\beta\sin\alpha$

Zweidimensional

$\vec a = \begin{pmatrix}|\vec a|\cos\alpha\\ |\vec a|\sin\alpha\end{pmatrix}$ $\quad \vec a\cdot\vec b = |\vec a||\vec b|\underbrace{(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)}_{\cos(\beta-\alpha)}$



$(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c = |\vec a\times\vec b|\cdot|\vec c|\cos(\gamma)$

$V = G\cdot h = \text{Parallelogramm}\cdot\underbrace{|\vec c|\cdot\sin(90^\circ-\gamma)}_{h}$

$\sin(90^\circ-\gamma) = \overset{=1}{\sin 90^\circ}\cos\gamma - \overset{=0}{\cos 90^\circ}\sin\gamma$

$\vec a,\vec b,\vec c$ l.a. $\Rightarrow (\vec a\times\vec b)\cdot\vec c = 0$ (nicht räumlich

Lösen von LGS mit dem Spatprodukt

$(\vec a_1\times\vec a_2)\,x_1 + (\vec a_2\times\vec a_2)\,x_2 + (\vec a_3\times\vec a_2)\,x_3 = \vec b\times\vec a_2 \quad |\times\vec a_2$

$(\vec a_1\times\vec a_2)\cdot\vec a_3\,x_1 + \underbrace{(\vec a_2\times\vec a_2)\cdot\vec a_3}_{0}\,x_2 + \underbrace{(\vec a_3\times\vec a_2)\cdot\vec a_3}_{0}\,x_3 = (\vec b\times\vec a_2)\cdot\vec a_3 \quad |\cdot\vec a_3$

$(\vec a_1\times\vec a_2)\,\vec a_3\cdot x_1 = (\vec b\times\vec a_2)\cdot\vec a_3$

$$x_1 = \frac{(\vec b\times\vec a_2)\cdot\vec a_3}{(\vec a_1\times\vec a_2)\,\vec a_3} = \frac{\det(\vec b\;\vec a_2\;\vec a_3)}{\det(\vec a_1\;\vec a_2\;\vec a_3)}$$

$|\det(\vec a_1 \dots \vec a_n)|$ = Volumen des n-dim Spates, das von $\vec a_1\dots\vec a_n$ aufgespannt wird.

n Dim

Satz Die Determinante von $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ berechnet den orientierten Flächeninhalt des Parallelogramms, das von $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ aufgespannt wird.

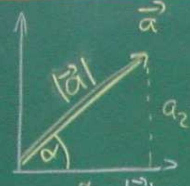
$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} |\vec{a}_1| \cos\alpha \\ |\vec{a}_1| \sin\alpha \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} |\vec{a}_2| \cos\beta \\ |\vec{a}_2| \sin\beta \end{pmatrix}$$

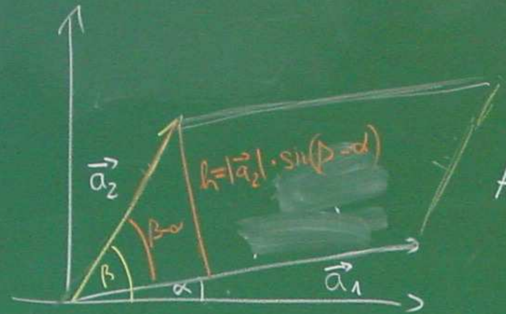
Beweis mit Hilfe der Additionstheoreme (auswendig)

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

Polarkoordinaten (toll)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} |\vec{a}| \cos\alpha \\ |\vec{a}| \cdot \sin\alpha \end{pmatrix}$$





$$\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = |\vec{a}_1||\vec{a}_2| \underbrace{(\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta)}_{\sin(\beta-\alpha)}$$

$$A = \left| |\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2| \sin(\beta - \alpha) \right| \quad \text{qed}$$

$$\vec{a}_1 x_1 + \vec{a}_2 x_2 = \vec{b} = \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{\det(\vec{b}\ \vec{a}_2)}{\det(\vec{a}_1\ \vec{a}_2)} \quad \text{Cramersche Regel}$$

$$x_2 = \frac{\det(\vec{a}_1\ \vec{b})}{\det(\vec{a}_1\ \vec{a}_2)}$$

Weiter verallgemeinert 3 Gln 3 Unbek

$$\vec{a}_1 x_1 + \vec{a}_2 x_2 + \vec{a}_3 x_3 = \vec{b}$$

$$x_1 = \frac{\det(\vec{b}\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3)}{\det(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3)} \qquad x_2 = \frac{\det(\vec{a}_1\ \vec{b}\ \vec{a}_3)}{\det(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3)}$$

gilt auch n-Dimensional ← Top of VL

9.3.7

3 dimensional

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0 \quad ((\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a})$$

9.3.8

$|\vec{a} \times \vec{b}|$ = Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms

(Kugelkoordinaten)

$$\left| \begin{pmatrix} |\vec{a}| \cos\alpha \\ |\vec{a}| \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} |\vec{b}| \cos\beta \\ |\vec{b}| \sin\beta \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |\vec{a}||\vec{b}| (\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta) \end{pmatrix} \right| = \text{Det} = \text{Fläche}$$

9.3.9 Das Spatprodukt

Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ dreidimensional, dann heißt die Zahl

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \in \mathbb{R}$ das Spatprodukt von $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ entspricht genau dem Volumen des von $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Spates