Das Bankerschockbeispiel 3.2.5

Wir legen 1€ zu 100% Zinsen an

1.1	31.03	30.06.	30.09	31.12
1€				2€
1€		1,50€		2,25€
→ 1€		1,56€	1,95€	2,44€
1€	1,25€			e

a_n

Lohnt es sich, statt arbeiten zu gehen nur noch auf der Bank Geld abzuheben + wieder einzuzahlen. Nein

Es entsteht eine Folge a_n, die SMW aussieht. Konvergiert diese?

$$\underbrace{1€\left(1+\tfrac{1}{2}\right)}_{1{,}50€}\cdot\left(\tfrac{1}{2}+1\right) = 2{,}25 = 1€\left(1+\tfrac{1}{2}\right)^2$$

$$1€\left(1+\tfrac{1}{4}\right)\left(1+\tfrac{1}{4}\right)\left(1+\tfrac{1}{4}\right)\left(1+\tfrac{1}{4}\right) = 2{,}44 = \left(1+\tfrac{1}{4}\right)^4$$

n-ter Schritt

$$1€\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e$$

Wir müssen zeigen, dass $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ konvergiert und das ist schwer. HA

a_n scheint $\boxed{\text{(s)mw}}$ (mit) + $\boxed{\text{beschränkt}}$ zu sein [$a_n \uparrow$ & $a_n < C \Rightarrow a_n$ konv]

2.2.3 Die Bernoullische Ungleichung

Sei $n \in \mathbb{N}$ (≥ 1) und ~~$x > 0$~~ $x > -1$

dann gilt

Mathematiker auswendig

$$\boxed{(1+x)^n \geq 1 + nx}$$

Beweis Induktion nach n

$n=1 \quad (1+x)^1 \geq 1+1\cdot x$ ✓

Induktionsschritt Es gilt $(1+x)^n \geq 1+nx$ Ind. vor

IndBeh $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x)^1 \overset{IV}{\geq} (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1+(n+1)x$$

qed

Hier Bew fertig jetzt kommt Neues

$$\boxed{\frac{n}{n+1} = 1-\frac{n+1}{(n+1)^2}} \overset{BU}{\leq} \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \qquad x = -\frac{1}{(n+1)^2}$$

n entspricht dem '$n+1$'

$$\left(\frac{n}{n+1}\right) \leq \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} = \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1}$$

$$\frac{n}{n+1} \le \frac{n^{n+1}\cdot(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}\,(n+1)^{n+1}} \quad \Big| : n^{n+1}\cdot(n+1)^{n+1} \cdot n+1$$

$$\frac{\cancel{n}\cdot(n+1)^{n+\cancel{1}}}{n^{n+\cancel{1}}} \le (\cancel{n+1})\cdot\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$$

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} \le \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$$ Was steht da?

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \le \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ smw}$$

Die Beschränktheit zeigt man, indem man zeigt, dass $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ streng monoton fällt und $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \le 4$

definieren $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

wollen wissen, was ~~[illegible]~~ 2^x abgeleitet ergibt und stellen uns vor, wir wüssten es nicht.

$) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ hier $(2^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{2^{x+h}-2^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2^x(2^h-1)}{h} = 2^x \lim_{h\to 0}\frac{2^h-1}{h}$

$\frac{\;^{01}-1}{\;001} \approx 0{,}69 \Rightarrow (2^x)' = 0{,}69 \cdot 2^x$ (etwa) $\qquad \frac{3^{0{,}001}-1}{0{,}001} \approx 1{,}1$

$' = \lim_{h\to 0}\frac{3^{x+h}-3^h}{h} = 3^x \lim_{h\to 0}\frac{3^h-1}{h} = 3^x \cdot 1{,}1$

$x)' = 0{,}69 \cdot 2^x$ $\qquad (a^x)' = k(a)\cdot a^x$

$x)' = 1{,}1 \cdot 3^x$

$x)' = 1{,}39 \cdot 4^x$

$k(a)$ hat vermutlich eine '1' stelle wir nennen diese 'e'

$(e^x)' = e^x \cdot \frac{e^h-1}{h} \xrightarrow{h\to 0} 1$

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{h}-1}{h} = 1$$

$n \to \infty \Rightarrow \frac{1}{n} \to 0$

$h \to 0$

$$\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = 1 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{n}} - 1 = \frac{1}{n} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} + 1 \Leftrightarrow e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

Beim Bänkerschockbeispiel gilt: Nach x Jahren haben wir bei ständigem Abheben und Einzahlen e^{x} €

Die Lösung des BS Bsp

Problem: Scheinbar ist es so, dass man zur Hälfte des Jahres weniger als 50% Zinsen bekommt. Man bekommt x % zum halben Jahr $-\sqrt{2}$ wäre auch ok

$$1€ \left(1+\frac{x}{100}\right)^{2} = 2€ \Leftrightarrow \left(1+\frac{x}{100}\right)^{2} = 2 \Leftrightarrow x = (\sqrt{2}-1)\cdot 100 \approx 41\ \%$$

Auf das ganze Jahr umgerechnet bekommt man also nur 2 · 41% = 82% Zinsen

Es gibt

1 Jahr

$\frac{1}{2}$ Jahr

$\frac{1}{3}$

↓

0

Es ergibt also eine Verzinsung nach

1 Jahr 100%

$\frac{1}{2}$ Jahr 82%

$\frac{1}{3}$

↓ ↓

0 $\boxed{69\%}$ $= \ln 2$

Stetige Verzinsung

BSBsp.: f(x) ist das Kapital nach x Jahren

Wir haben 100% Zinsen also wäre $f(x) = 2^x$

Ansatz aus der Schule

Exponentielles Wachstum

Originalbestand

Zins

$$\underline{B(t+1)} = \underline{c \cdot B(t)} = (1+k)\, B(t) = \underline{B(t) + k\, B(t)}$$

so falsch $k(h)$ stehen

$$B(t+h) = B(t) + h \cdot k \cdot B(t)$$

$$B(t+h) - B(t) = h \cdot k \cdot B(t) \quad | : h$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{B(t+h) - B(t)}{h} = k\, B(t)$$

$$B'(t) = k \cdot B(t)$$

B(t) genügt der Dgl

$$y' = k \cdot y$$

Die Dgl löst $y = e^{kx} \cdot c$

Bei uns ist $k = 1 \Rightarrow y = e^{1x}$

löst die Dgl

Statt 2^x habe ich e^x

$$e^{\boxed{0{,}69x}} = 2^x$$

Nach Sd

$$k_n = \frac{(k_1 + 1)^{\frac{1}{n}} - 1}{1/n} \xrightarrow{n \to \infty} \boxed{\ln(k_1 + 1)}$$

$$k_2 = \frac{(1+1)^{1/2} - 1}{1/2} = 82\%$$