Mathematikvorkurs Mittwochsvorlesung

"Die binomische Formel" 21.09.2011

?? im Raum V55.22 28.09.2011

?? im Raum V38.01 05.10.2011

?? ——〃—— 12.10.2011

mögliche Themen Taylorreihen, Differenzialgleichungen

www.vorkurs.de.vu Schmid (FSG)

$(4x-3y)^2-(4x+3y)^2$

$(a+b)^4 = ?$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

2.1.6

a_1+a_2

$\sum_{i=2}^{5} 2i+$

2.1.7

$\sum_{i=1}^{n} (a_i$

Bsp

$(a_1+$

$\sum_{i=1}^{n} c$

$n=2$

$c \cdot a$

2.1.6 Definition Summenzeichen

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

i Summationsindex
(for-Schleife)

$$\sum_{i=2}^{5} 2i + a_i = 4 + a_2 + 6 + a_3 + 8 + a_4 + 10 + a_5$$

2.1.7 Rechenregeln

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + \left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)$$

AG + KG

Bsp $n = 2$

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$$

DG

$n = 2$

$$c \cdot a_1 + c \cdot a_2 = c\left(a_1 + a_2\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{j=1}^{m} b_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j \quad \text{DG}$$

"ausmultiplizieren"

$n=2 \quad m=3$

$$(a_1+a_2)\cdot(b_1+b_2+b_3) = a_1b_1+a_1b_2+a_1b_3+a_2b_1+a_2b_2+a_2b_3$$

$$= a_1b_1+a_1b_2+a_1b_3+a_2b_1+a_2b_2+a_2b_3$$

2.1.8 Indexverschiebung

$$\sum_{i=2}^{i=7} i = 2+3+4+5+6+7 = \sum_{j=0}^{5} (j+2)$$

SUBSTITUTION

$$\boxed{i = j+2}$$

$i = j+k$ ~ Indexverschiebung

$$\sum_{j+2=2}^{j+2=7} j+2 = \sum_{j=0}^{5} j+2$$

2.1.9

A B C

n Person

n Perso

n_1 ling

$(n_1+n_2$

$n_1! \cdot$

ziern"

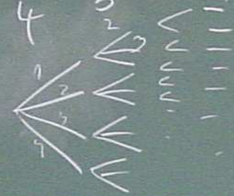
$b_2 + a_2 b_3$

bung

2.1.9 Binomialkoeffizienten

A B C D

4 3 2 1



$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$

Zwilling $\frac{4!}{2!}$

Drilling $\frac{4!}{3!}$

Zwei Zwillinge $\frac{4!}{2!\,2!}$

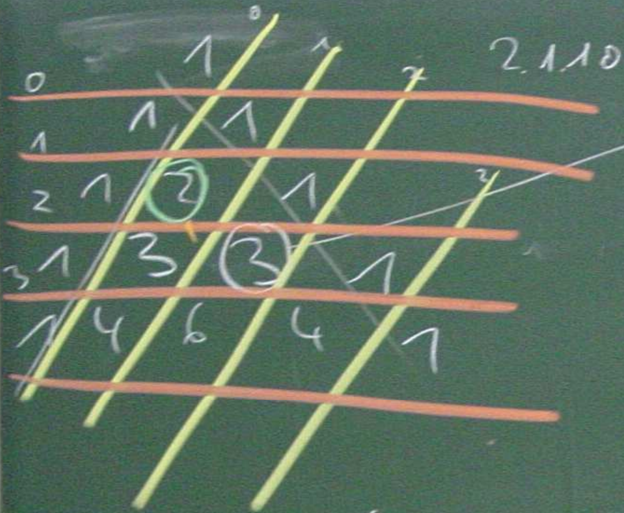
n Personen 1 k-ling … $\frac{n!}{k!}$

n Personen 1 k-ling und 1 $(n-k)$ling $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$

n_1 ling .. n_2 ling, … n_k lin $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k$ Personen

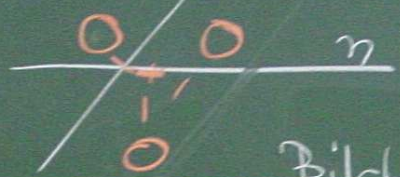
$$\frac{(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$ Permutationen

2.1.10



Zeile 3 k

Spalte 2 $= \binom{3}{2}$ Ü



$$\boxed{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}}$$

Bildungsgesetz des Pascalschen Dreieck

Es gilt $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ Ü

2.2.5 Die Binomische Formel

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} \cdot b^i \ *}$$

auswendig

IV

$n=2$

$$(a+b)^2 = \sum_{i=0}^{2} \binom{2}{i} a^{2-i} b^i = \binom{2}{0} a^{2-0} \cdot b^0 + \binom{2}{1} a^{2-1} \cdot b^1 + \binom{2}{2} a^{2-2} b^2$$

$$\checkmark \quad = 1 \cdot a^2 + 2ab + 1 b^2$$

$n=1$

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a^{1-0} b^0 + \binom{1}{1} a^{1-1} b^1 = a+b \ \checkmark$$

$n=0$ $(a+b)^0 = \binom{0}{0} a^{0-0} b^0 = 1 \ \checkmark$

Induktion

Wir zeigen (In

und wir ze

wirft diese

IA ✓ I

$(a+b)^{n+1}$

$(a+b)^{n+1} = ($

$\underline{\underline{DG}}$ $a \sum_{i=0}^{n} ($

DG $= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} ($

Ü

$\ldots\binom{\ldots}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

…e des Pascalschen

$\ldots b^1 + \binom{2}{2} a^{2-2} b^2$

$\ldots + 1 b^2$

Induktion (Dominoeffekt)

Wir zeigen (Induktionsanfang) Der erste Stein fällt
und wir zeigen, dass wenn Stein n fällt dann
wirft dieser den Stein $n+1$ um

IA ✓ IS $n \Longrightarrow n+1$

$$(a+b)^{n+1} \overset{\text{Beh}}{=} \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^{n+1-i} b^i$$ dies ist zu zeigen

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\boxed{(a+b)^n} \overset{\text{IV}}{=} (a+b)\left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i\right)$$

$$\overset{\text{DG}}{=} a \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i + b \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

$$\overset{\text{DG}}{=} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n+1-i} b^i + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i+1} \to j$$

$j =$

$=$

ers…

$j = i+1$ in der zweiten Summe $(\Leftrightarrow i = j-1)$

$$\sum_{i=0}^{i=n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i+1} = \sum_{j-1=0}^{j-1=n} \binom{n}{j-1} a^{n-(j-1)} b^{j}$$

$$\binom{n+1}{n+1}$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^{n+1-j} \cdot b^{j} \underset{j \to i}{=} \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} a^{n+1-i} b^{i} + \binom{n}{n} a^{0} b^{n+1}$$

$$\binom{n+1}{n+1} = \binom{n}{n}$$

erste Summe

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n+1-i} b^{i} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^{n+1-i} b^{i} + \binom{n}{0} \cdot a^{n+1} b^{0}$$

$$\binom{n+1}{0} = \binom{n}{0}$$

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{0} \cdot a^{n+1} b^{0} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^{n+1-i} b^{i} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} a^{n+1-i} b^{i} + \binom{n+1}{n+1} a^{0} b^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{0} \cdot a^{n+1} b^{0} + \sum_{i=1}^{n} \left(\binom{n}{i} a^{n+1-i} b^{i} + \binom{n}{i-1} a^{n+1-i} b^{i} \right) + \binom{n+1}{n+1} a^{0} b^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{0} a^{n+1} b^{0} + \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right) a^{n+1-i} b^{i} \right) + \binom{n+1}{n+1} a^{0} b^{n+1} =$$

$$\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i}$$

$$= \binom{n+1}{0} a^{n+1} b^{0} + \sum_{i=1}^{n} \Big(\ldots$$

$i=0$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^{n+1-\ldots}$$

2BINF $(a-b)^n = \ldots$

3BINF $(a-b)(a^n + a \ldots$

$-1)$

$b^j \quad \binom{n+1}{n+1}$

$\|$

$b^i + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1}$

$^{n+1} b^0$

$$\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i}$$

$$= \binom{n+1}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} a^{n+1-i} b^i + \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1}$$

$i=0$ $\qquad$ $i=n+1$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^{n+1-i} b^i \quad \text{qed}$$

$(-1)^i \cdot b^i$

2BINF $(a-b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} (-b)^i$

3BINF $(a-b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + a^0 b^n) = a^{n+1} - b^{n+1}$

$\binom{n}{-1}) a^{n+1-i} b^i + \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1}$

$^i b^i) + \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1}$

$) + \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1} =$