Aufgabe 1:

Für die Inversion $w = f(z) := \frac{1}{z}$ mit $z \neq 0$ bestimme man das Bild

(i) der Geraden $\mathrm{Re}(z) = 2$,

(ii) des Strahls $\mathrm{Re}(z) > 0 \wedge \mathrm{Im}(z) = 0$,

(iii) des Kreises $|z| = 3$,

(iv) des Kreises $|z - 2i| = 2$ und

(v) des Kreises $|z - 2i| = 1$.

Bestimmen Sie das Bild des Kreises

$$K : x^2 + (y-3)^2 = 9$$

unter der Inversion am Einheitskreis.

Aufgabe 2:

Zeigen Sie, dass die *Koebe-Funktion* $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ den Einheitskreis auf das Schlitzgebiet $\mathbb{C} \setminus \{w = u + iv : \; u \leq -\frac{1}{4}\}$ abbildet. *Hinweis:* $k(z) = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - 1\right]$.

Aufgabe 3:

Abbildungen von $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ der Form $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $a, b, c, d, \in \mathbb{C}$ und $ad - bc \neq 0$ heißen *Möbius-Abbildungen.*

Zeigen Sie: Jede Möbius-Abbildung lässt sich schreiben als eine Hintereinanderausführung von (endlich vielen) Abbildungen folgender Art: Drehstreckung $(z \to Az)$, Translation $(z \to z + B)$ und Inversion $z \to \frac{1}{z}$ (sie sind deshalb "kreistreu").

Die stereographische Projektion