Der Erwartungswert (Durchschnitt)

Wir würfeln. Welches Ergebnis erwarten Sie?

$$3{,}5 = \frac{1+2+3+4+5+6}{6}$$

Schnitt "alle zusammenzählen und durch die Anzahl teilen" SCHNITT

Würfel nach Sch 1 2 3

da geht es nicht 1 | 2 | 3 | 2

Wkverteilung

Ergeb.	1	2	3
Wk	3/6	2/6	1/6

↑ ↑ ↑

Gewichtung

$$\text{Erwartungswert} = \frac{3}{6}\cdot 1 + \frac{2}{6}\cdot 2 + 3\cdot\frac{1}{6}$$

"gewichtetes Mittel"

gilt auch beim normalen Würfel

$$3{,}5 = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 2 + \frac{1}{6}\cdot 3 + \frac{1}{6}\cdot 4 + \frac{1}{6}\cdot 5 + \frac{1}{6}\cdot 6$$

Definition: Sei $\Omega = \{x_1, \dots, x_n\}$

$(x_i \in \mathbb{R})$ (Zufallsvariable)

dann bezeichnen wir den Erwartungswert

μ (Müh – Mittelwert)

$$\mu = x_1 \cdot P(x_1) + x_2 \cdot P(x_2) + \dots + x_n P(x_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i)$$


Beispiel Silvestermillionen
1 Million €
100000 €
1000 €
1 zu 250000
1 zu 149999
1 zu 750
3 mal
5 mal
1000 mal
Es gibt also 750000 Lose
Sie haben ein Los geschenkt bekommen. Berechnen Sie den Erwartungswert.
X
1000000
100000
1000
0
3/750000
5/750000
1000/750000
748992/750000
μ = 1000000 · 3/750000 + 100000 · 5/750000 + 1000 · 1000/750000 + 0 · ...
= 1/750000 (3000000 + 500000 + 1000000)
= 4500000/750000 = 6 Erwartungswert
Was kostet ein Los? 10€
Interpretieren Sie das Ergebnis
Mit dem Kauf eines Loses macht man einen Verlust von 4€
jetzt S19 Aufg 2.4

x_i	1	2	4	5	7
$P(X=x_i)$	0,2	0,1	0,3	0,3	0,1

$\mu = 1\cdot 0{,}2 + 2\cdot 0{,}1 + 4\cdot 0{,}3 + 5\cdot 0{,}3 + 7\cdot 0{,}1$
$= 3{,}8$

Varianz (Wie stark weichen die tatsächlichen Ergebnisse vom Erwartungswert ab (Durchschnitt). Bsp Würfeln

x	1	2	3	4	5	6
Abweichung vom μ	$-2{,}5$	$-1{,}5$	$-0{,}5$	$0{,}5$	$1{,}5$	$2{,}5$

3,5

Die D.[ifferenzen] sind im Mittel $= 0$!

Wir eliminieren das Vorzeichen durch $\frac{1}{...}$ quadrieren und definieren

$$V(X) = (1-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6} + (2-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6} + (3-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6} + (4-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6} + (5-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6}$$

zuerst $+ (6-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6} = \frac{17{,}5}{6} \approx \boxed{2{,}916}$

Diese Zahl ist nicht aussagekräftig

Wie beim Satz von Pythagoras ziehen wir die Wurzel $\sqrt{\frac{17{,}5}{6}} \approx 1{,}7$ Standardabweichung

Das Ergebnis weicht durchschnittlich um 1,7 vom Erwartungswert ab.

Nicht ...
1 2
2,5 -1,5
Standard...
Idee ...
aller 1, ...
Aus ...
Quadr...
$\sqrt[4]{(\mu ...}$
1,5


Nicht mitschreiben
1 2 3 4 5 6
2,5 – 1,5 – 0,5 – 0,5 – 1,5 – 2,5
Standardabw. = 9/6 = 1,5
Idee mit den Quadrieren liefert
aber 1,7. Warum?
Ausreisser werden beim
Quadrieren höher bewertet.
Aufgabe 2.4 ... Varianz
x_i 1 2 4 5 7
P(x_i) 0,2 0,1 0,3 0,3 0,1
x_i - μ -2,8 -1,8 0,2 1,2 3,2
"gedacht"
(1-3,8)²·0,2+(2-3,8)²·0,1+(4-3,8)²·0,3+(5-3,8)²·0,3
+(7-3,8)²·0,1
= 3,36 (Varianz)
σ = √3,36 ≈ 1,83
Standardabweichung
Sigma

[redacted] inearität des Erwartungswertes

Wir $\boxed{\text{verdoppeln}}$ jede

Berechne Sie den Erwartungswert

$2 \cdot 3{,}5$

[redacted] $2 \cdot 2 \frac{1}{6} + 3 \cdot 2 \frac{1}{6} + 4 \cdot 2 \frac{1}{6} + 5 \cdot 2 \frac{1}{6} + 6 \cdot 2 \cdot \frac{1}{6}$

[redacted] $2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6})$

[redacted] alten Erwartungswert

[redacted] $= \alpha \cdot E(X) = \alpha \mu$

[redacted] rwartungswert von

$$V(\alpha X) = \alpha^2 V(X)$$

Würfel Wir addieren zu jeder Zahl 5 dazu. $\mu = ?$

6	7	8	9	10	11
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$\mu = (1+5)\frac{1}{6} + (2+5)\frac{1}{6} + (3+5) \cdot \frac{1}{6} + (4+5)\frac{1}{6}$
$+ (5+5)\frac{1}{6} + (6+5)\frac{1}{6} = 8{,}5 = 3{,}5 + 5$

$= \underbrace{(1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \frac{1}{6} + 4 \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6})}_{\text{alten Erwartungswert}} + 5\underbrace{(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \ldots \frac{1}{6})}_{\text{muss 1 sein}}$

$= \mu + 5 \qquad E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$

Di…

Wir…

me…

Y…

We…

sum…

E(X…

E(Y…

E(X…

E(X…

Die Summe von Zufallsvariablen

Wir haben eine ZV X und eine ZV Y

X	2	3
$P(X)$	0,3	0,7

Y	1	5
$P(Y)$	0,6	0,4

Wie sieht die Wkverteilung von $X+Y$ aus?

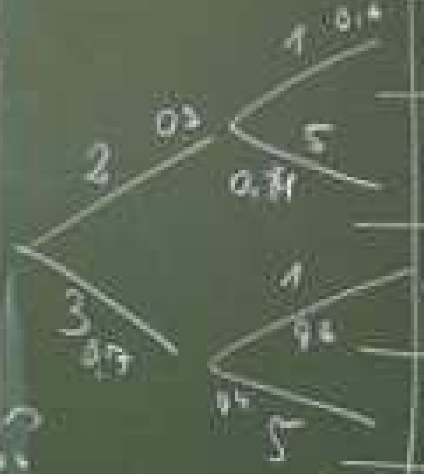
sowie $E(X)$ und $E(Y)$ und $E(X+Y)$

$E(X) = 2\cdot 0{,}3 + 3\cdot 0{,}7 = 2{,}7$

$E(Y) = 1\cdot 0{,}6 + 5\cdot 0{,}4 = 2{,}6$

$E(X\cdot Y) = 7{,}02 = 2{,}7\cdot 2{,}6$

$E(X\cdot Y) = E(X)\cdot E(Y)$



	$X+Y$		$X\cdot Y$
2 1	3	0,18	2
2 5	7	0,12	10
3 1	4	0,42	3
3 5	8	0,28	15

Wkverteilung

$E(X+Y) = 3\cdot 0{,}18 + 7\cdot 0{,}12 + 4\cdot 0{,}42 + 8\cdot 0{,}28$
$= 5{,}3$

Interpretation $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

Beweis B 1. 14

Die Ungleichung von Tschebyscheff

Wir produzieren Quarkbecher, die 150 g Quark enthalten sollen. $\mu = 150$ (± 5 g) noch ok

X: Gewicht eines Quarks (auf 1 Gramm genau)

Wir haben auf Grund langjähriger Erfahrung eine Standardabweichung $= \sigma$ (Varianz $= \sigma^2$) festgestellt.

Jetzt kommt der WKD und Tscheb

Ob wir gut arbeiten

Wie groß ist die WK von "gut" bzw. von schlecht.

$P(|X - \mu| \geq 5) = ?$ "schlechte"

Beachten Sie: Wir kennen die WKvert nicht nur μ und σ Sigma

$V(X$

$V(X$

$5 =$

$P(1$

$$V(X) = \underbrace{(140-150)^2\cdot p(140) + (141-150)^2\cdot p(141) + \dots + (144-150)^2\cdot p(144)}_{\text{rot}} + \underbrace{(145-150)^2\cdot p(145) + \dots + (155-150)^2\cdot p(155)}_{\text{grün}} + \underbrace{(156-150)^2\cdot p(156) + \dots + (160-150)^2\cdot p(160)}_{\text{rot}}$$

$$V(X) \geq \underbrace{\underbrace{(140-150)^2}_{\geq 5}\cdot p(140) + \dots + \underbrace{(144-150)^2}_{\geq 5}\cdot p(144)}_{\text{rot}} + \underbrace{\underbrace{(156-150)^2}_{\geq 5}\cdot p(156) + \dots + (160-150)^2\cdot p(160)}_{\text{rot}}$$

$$\geq 5^2\cdot p(140) + \dots + 5^2\cdot p(144) + 5^2\cdot p(156) + \dots + 5^2\cdot p(160)$$

$$= 5^2\,\underbrace{\big(p(140) + \dots + p(144) + p(156) + \dots + p(160)\big)}_{\text{alle möglichen Schwankungen}}$$

$5 \mathrel{\hat{=}}$ Toleranzgrenze

$$\boxed{p(140) + \dots + p(144) + p(156) + \dots + p(160)} \leq \frac{\text{Varianz}}{(\text{Toleranzgrenze})^2} \mathrel{\hat{=}} \text{Tschebyscheff}$$

Sigma

σ

Satz (Die Ungleichung von Tschebyscheff)

Gegeben sei eine (unbekannte) Wahrscheinlichkeitsverteilung (Zufallsvariable) mit Erwartungswert $= \mu$, Standardabweichung $= \delta$ und Toleranzgrenze c [[Varianz $= \delta^2$]], wichtig

dann gilt

$$\boxed{P(|X-\mu| > c) \leq \frac{\delta^2}{c^2}} = \frac{\text{Varianz}}{c^2}$$

Abweichung ist mind. c

Zum Beispiel Sei $\delta = 2$ bekannt

$$P(|X-\mu| > c) \leq \frac{\delta^2}{c^2} = \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25} = 0{,}16$$

Zu höchstens 16 % wird eine Probe beanstandet

Kontinuierliche Wahrscheinlichkeit

Wir haben bisher nur diskrete Probleme behandelt. Wir stellen uns jetzt (wir) folgendes vor: Wir haben einen Dartpfeil und werfen auf ein Zahlenintervall $[0,1]$ und die Wkverteilung soll "gleichverteilt" sein. Wie groß ist $P(0.5)$?

Wk Gleichverteilung

$$P = \frac{\text{Anzahl Günstige}}{\text{Anzahl Mögliche}}$$

also hier $P(0.5) = \frac{1}{\infty} = 0$

egal was

$P(X) = 0$ Problem

Wir können die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl aus einem bestimmten Intervall getroffen wird, angeben.

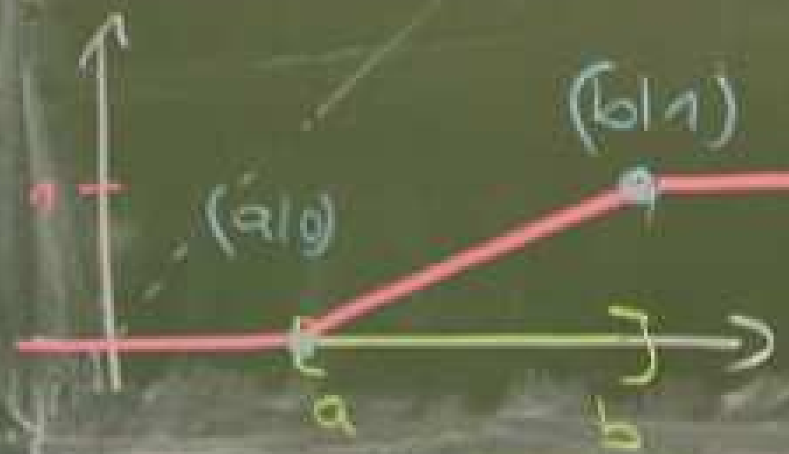
Sei $[0,\frac{1}{4}]$ das Intervall, dann gilt $P[0,\frac{1}{4}] = \frac{1}{4}$

$$P[0,g] = \begin{cases} 0 & g<0 \\ g & \text{falls } 0 \le g \le 1 \\ 1 & g>1 \end{cases}$$

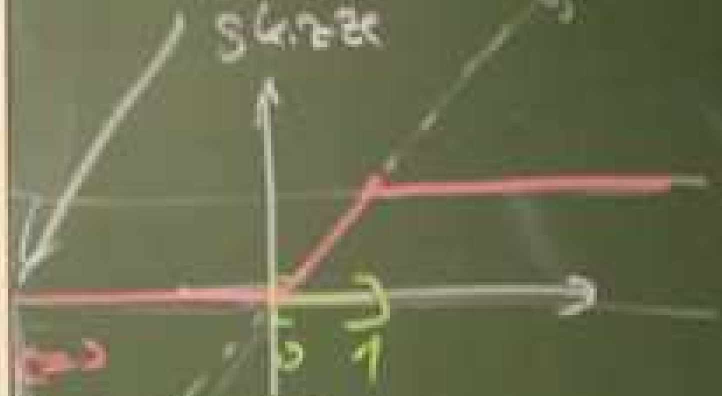
Die Mathematiker schreiben dies so:

$$\boxed{P(X \le g)} = \begin{cases} 0 & \text{falls } g<0 \\ g & \text{falls } 0 \le g \le 1 \\ 1 & \text{falls } g>1 \end{cases}$$

Lösen Sie dieses Problem für das Intervall $[a,b]$



Skizze

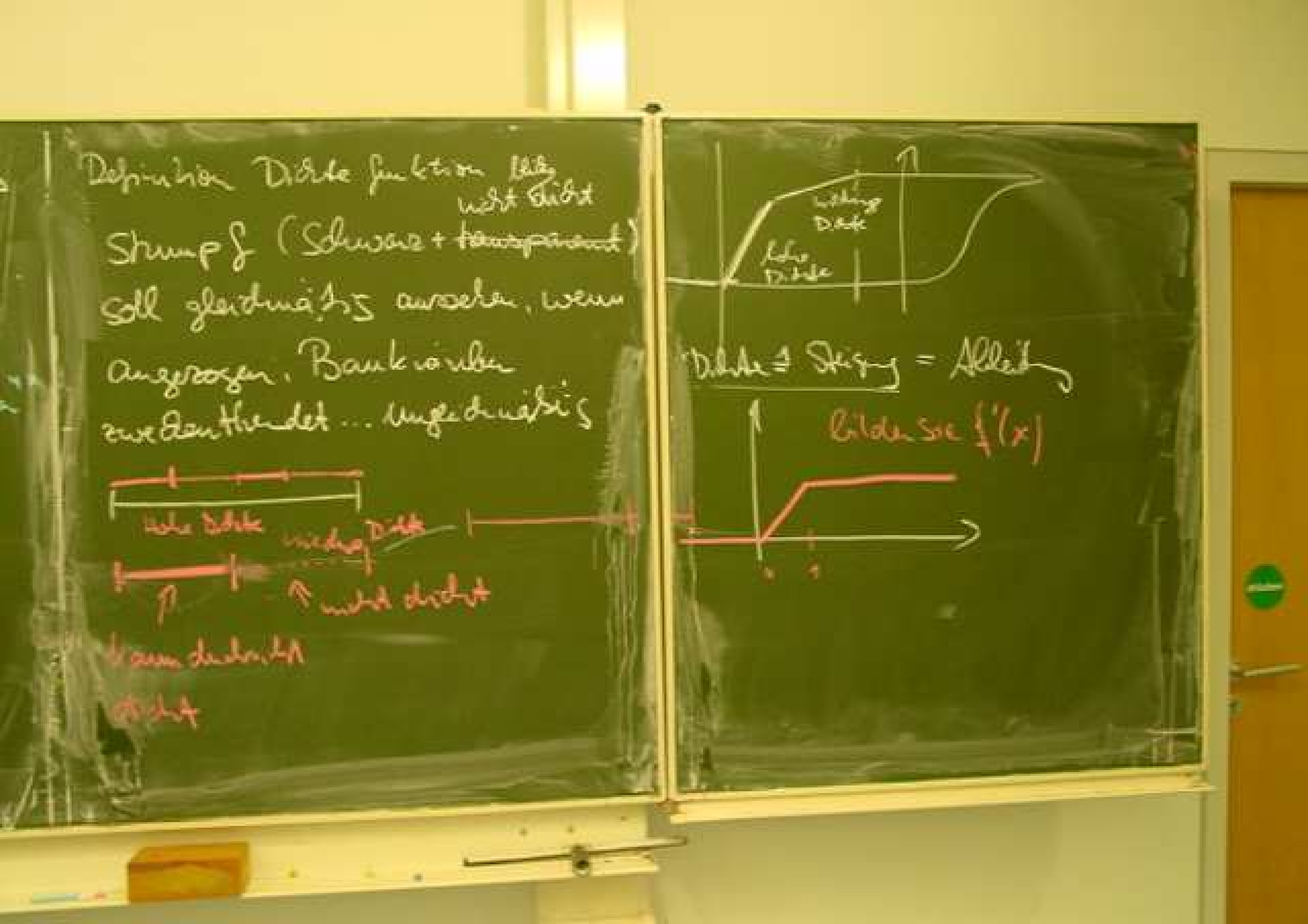


$P(X \le x)$

≙ Die ZU X nimmt einen Wert $\le x$ an

$$P(X \le x) = \begin{cases} 0 & x<a \\ \boxed{\frac{1}{b-a}(x-a)+0} & \\ 1 & x>b \end{cases}$$


Wiederholung Klasse 7
auswendig
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ZPF
Zwei Punkte Formel
Punktsteigungsformel
PSF $y = m(x - x_1) + y_1$
$y = mx + \underbrace{y_1 - mx_1}_{y\text{-Achsenabschnitt}}$
$(a|0)$ $(b|1)$
$m = \frac{1-0}{b-a} = \frac{1}{b-a}$
$y = \frac{1}{b-a}(x-a) + 0$
Im Gegensatz zur diskreten Verteilung haben wir hier eine kontinuierliche Verteilung - eine sogenannte stetige Verteilungsfunktion.
Stetig heißt "ohne Absetzen zeichnen"
Im "Hama Mathe" gibt es ein Kapitel worin bewiesen wird, dass dem nicht gilt.



Definition Dichtefunktion
Strumpf (Schwarz +
soll gleichmäßig aussehen, wenn
angezogen. Bankräuber
hohe Dichte
nicht dicht
niedrige Dichte
Dichte ≙ Steigung = Ableitung
Bilden Sie f'(x)

Dichte $f'(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{4} & 0<x<2 \\ \frac{1}{2} & 2<x<3 \\ 0 & x>3 \end{cases}$

$\int 0\,dx = 0 + C_1$ $\qquad C_1 = 0$

$\int \frac{1}{4}\,dx = \frac{1}{4}x + C_2 \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{4}x}$

$\int \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}x + C_3$

$\int 0\,dx = 0 + C_4$

$\overset{0}{y} = \frac{1}{4}\overset{0}{x} + C_2 \rightarrow C_2 = 0$

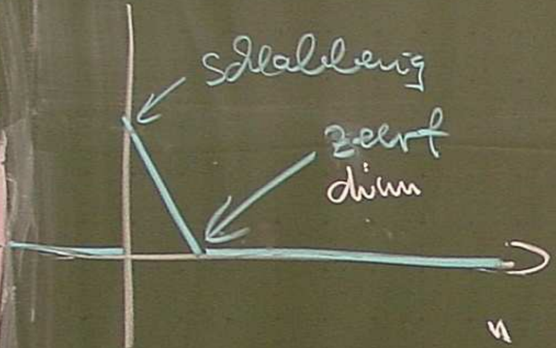
$\overset{0.5}{y} = \frac{1}{2}\overset{2}{x} + C \Rightarrow C_3 = -\frac{1}{2}$

Probe 3 eingesetzt

$\Rightarrow 1 = \frac{1}{2}3 - \frac{1}{2}$ ✓

$\Rightarrow C_4 = 1$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -2x+2 & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

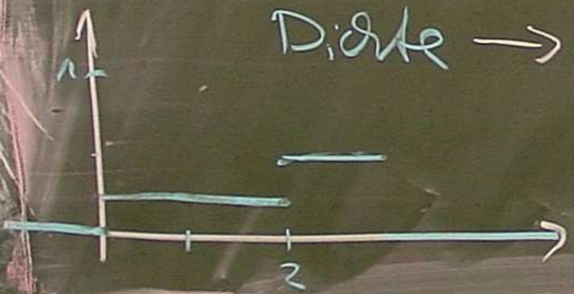


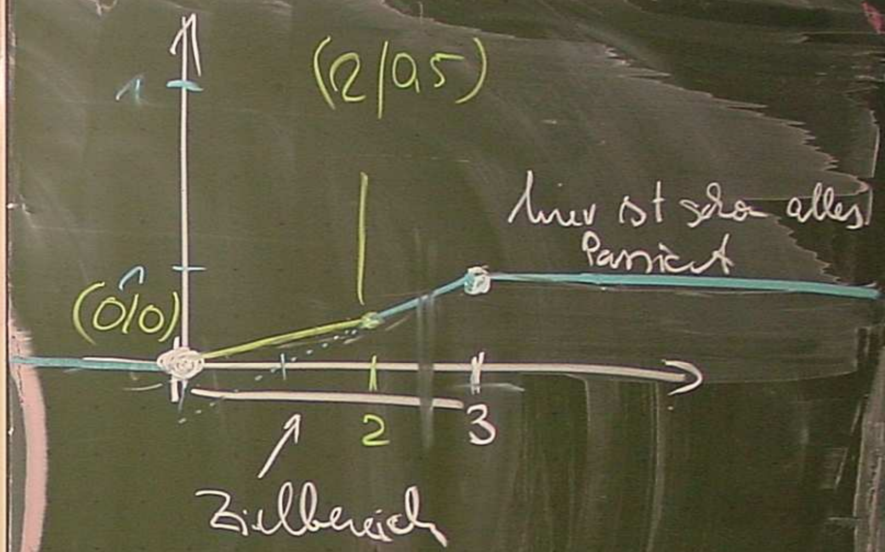
ich bin noch nicht da

niedrige Dichte = "dünn"

jetzt 2.6 Seite 20

Dichte → Verteilung





Hier steht im Bereich [0,2] Dichte 1/4 im Bereich (2,3] Dichte 1/2