BERUFSAKADEMIE
STUTTGART
University of Cooperative Education

Studiengang Elektrotechnik

Studienjahr:	2007 / 2008	Kurs: TEL07GR1
Semester:	1	☐ 1. Klausur ☒ Wiederholungsklausur

Fach:	Mathematik.............
Datum:	04.2008 ....
Prüfer:	W. Schmid..............

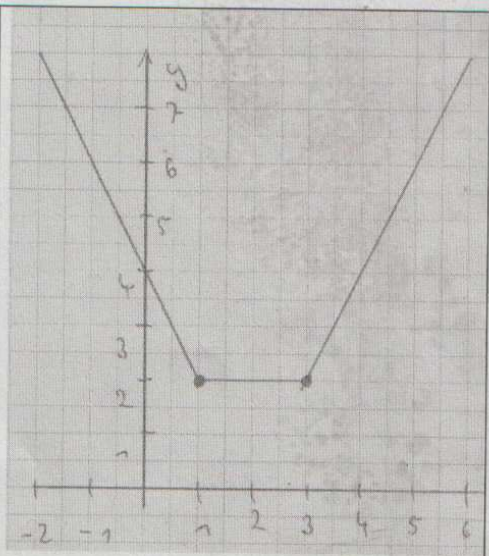
Themen: Relationen, Hornerschema, Cramersche Regel, Interpolation, Vektorraum (1. Teil)

Aufgabe 1 (16 P) Gegeben sei die Matrix $\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Lösen Sie die Gleichung $\det(\underline{A} - x\cdot\underline{1}_3) = 0$ nach x auf (7 P).
b) Sei $\underline{B} = \underline{A}^{-1}$ die inverse Matrix $\underline{A}$. Berechnen Sie das Element b_{23} von $\underline{B}$ (5 P).
c) Berechnen Sie $\det((\underline{A}^3)^{-1})$ (2 P) und $\det(3\cdot\underline{A})$ (2 P) .

Aufgabe 2 (12 P) Nebenstehend ist das Schaubild einer Funktion vom Typ $y = |x-a| + |x-b| + c$ gegeben.

a) Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b und c (a<b) (5 P).
b) Ist die Umkehrung dieser Funktion wieder eine Funktion, eine Relation oder keines von beiden (2 P) (Begründung erwartet)?
c) Skizzieren Sie die Umkehrung (3 P).
d) Geben sie den Definitionsbereich und den Wertebereich der Umkehrung an (2 P).



Aufgabe 3 (8 P)

a) Welche Dimension hat der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 (1 P)?
b) Zeigen Sie, dass der Raum aller Polynome vom Grad 2 kein Vektorraum ist (2 P).
c) Zeigen Sie die lineare Unabhängigkeit der Polynome $f_1(x)=x^2$, $f_2(x)=x^2+x$ und $f_3(x)=x^2-1$ (3 P).
d) Stellen Sie $f_4(x)=-1$ ($f_4(x)$ ist also konstant) als Linearkombination von f_1, f_2 und f_3 dar (2 P).

Aufgabe 4 (9 P)

a) Berechnen Sie das Polynom möglichst niedrigen Grades, welches durch die Punkte (-1/0), (3/0), (5/-36) und (7/-160) geht in der Form $p(x)=a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1x + a_0$ (6 P).
b) Bestimmen Sie auch die dritte Nullstelle von p(x) (2 P).
c) Warum hat p(x) keine weiteren Nullstellen (1 P)?

Aufgabe 1

Nachklausur WS 07/08
Mathe Sd Lösungshinweise

ⓐ

$$\det(\underline{A} - x\,\underline{1}_3) = \det\begin{pmatrix} -x & 0 & -6 \\ 1 & -x & -1 \\ 0 & 1 & 4-x \end{pmatrix} = -x^3+4x^2-x-6$$ 2

~~mit~~ Nullstelle -1 geraten: 1

$$(-x^3+4x^2-x-6):(x+1) = -x^2+5x-6$$ 2

$$\begin{array}{l} \;\; x^3 + x^2 \\ \hline \qquad 5x^2 \\ \quad -5x^2-5x \\ \hline \qquad\quad -6x-6 \end{array}$$

MNF: $\dfrac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{-2}$ $\begin{array}{l} \nearrow +3 \\ \searrow +2 \end{array}$ 2

$\Longrightarrow \mathbb{L} = \{ x = -1 \text{ oder } 2 \text{ oder } 3 \}$

ⓑ $\det A = -6$ 1 $\left[\text{Kontrollergebnis } A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$

$$b_{23} = \frac{(-1)^{2+3} \cdot \det S_{32}}{\det A}$$ 1

$$S_{32} = \begin{pmatrix} 0 & \cancel{0} & -6 \\ 1 & \cancel{0} & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{4} \end{pmatrix}$$ 1 $\det S_{32} = 6$ 1

$$= \frac{-1 \cdot 6}{-6} = 1$$ 1

ⓒ

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = -\frac{1}{6} \qquad \det\left(\left(A^3\right)^{-1}\right) = \left((-6)^3\right)^{-1} = \frac{-1}{216}$$ 2

$$\det(3 \cdot A) = 3^3 \cdot \det A = 27 \cdot (-6) = -162$$ 2

Aufgabe 2

a) Die "Knickstellen" sind bei $x = 1$ und $x = 3$

Für $x \leq 1$ gilt $f(x) = -(x-a) - (x-b) + c = -2x + a + b + c$

Für $1 \leq x \leq 3$ gilt $f(x) = (x-a) - (x-b) + c = 0x - a + b + c$

Für $x \geq 3$ gilt $f(x) = x - a + x - b + c = 2x - a - b + c$

$\Rightarrow$ (mit Punktprobe oder Argumentation, dass Knickstellen bei $x = 1$, $x = 3$ sind) $a = 1$, $b = 3$ $\Rightarrow$ $c = 0$

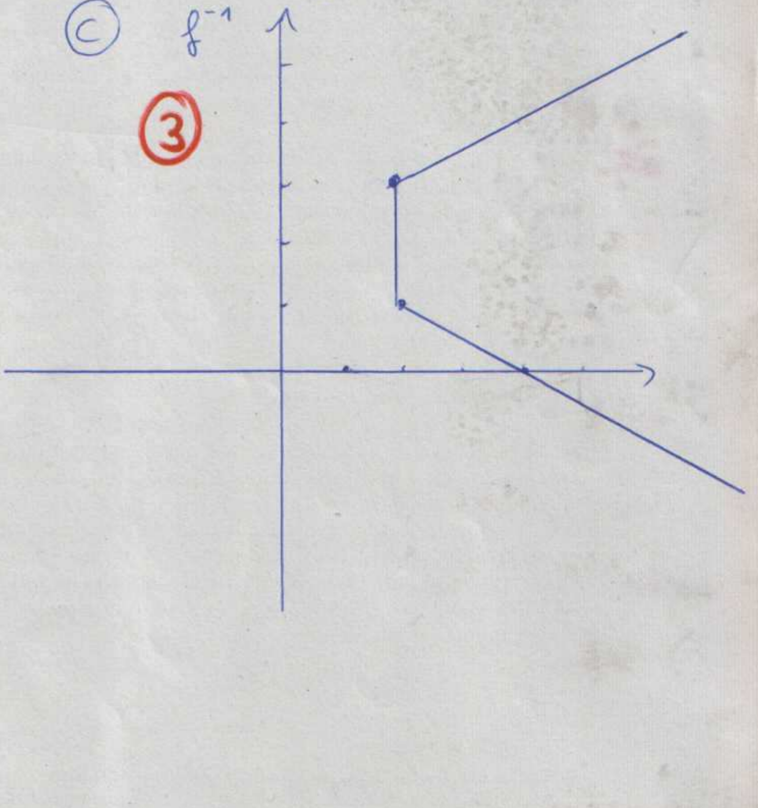
2 2 1

$\Rightarrow f(x) = |x-1| + |x-3|$

b) Die Umkehrung einer Relation (auch Funktion) ist <u>immer</u> eine Relation 1

Weil $f(1) = f(3) = 2 \Rightarrow$ die Umkehrung kann keine Funktion sein. 1

c) f^{-1} 3



d) $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$ 1

$\mathbb{W} = \mathbb{R}$ 1

Aufgabe 3

(a) Dimension 3 (1)

(b) $\vec{0} = 0x^2+0x+0$ hat nicht grad 2 ist also $\notin V$ (2)

(c) $f_1 \hat{=} \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $f_2 \hat{=} \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $f_3 \hat{=} \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ (1) sind l.u. weil

$\det\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix} = -1 \neq 0$ (1) (1)

(d) $\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0 = a+b+c \\ 0 = a+b+0 \\ -1 = 0+0+c \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=1 \\ b=0 \\ c=-1 \end{array}$ (2)

Aufgabe 4 (Verfahren nach Newton)

$x_1=-1,\ y_1=0,\ x_2=3,\ y_2=0,\ x_3=5,\ y_3=-36,\ x_4=7,\ y_4=-160$

$P_1 \equiv y_1 \Rightarrow P_1 \equiv 0$ (1) $P_2: y = P_1 + c_1(x+1)$ durch $(3|0)$

$\Rightarrow 0 = 0 + c_1 \cdot 4 \Rightarrow c_1 = 0$ und $P_2 \equiv 0$ (1)

$P_3: y = P_2 + c_2(x+1)(x-3)$ durch $(5|-36)$:

$-36 = c_2 \cdot 6 \cdot 2 \Rightarrow c_2 = -3$ (1)

$P_4: y = P_3 + c_3(x+1)(x-3)(x-5)$ durch $(7|-160)$

$-160 = -3 \cdot 8 \cdot 4 + c_3 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 2 \Rightarrow c_3 = -1$ (2)

$y = -3(x+1)(x-3) - (x+1)(x-3)(x-5) = (x+1)(x-3)\{-3-x+5\} =$

$= -(x+1)(x-3)(x-2) = -(x^2-2x-3)(x-2) = -x^3+4x^2-x-6$ (1)

Dritte Nst ist $x=2$ (2)

4c) Fundamentalsatz sagt maximal 3 Nullstellen (1)