

Aufgaben Schmid

2. Sem Datei 2

1. Grenzwerte und Folgen

1.1. Berechnen Sie folgende Grenzwerte (sofern sie existieren) oder zeigen Sie, dass der Grenzwert nicht existiert (je 3 P):

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^3} - \sqrt{n^3 - 2n^2}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-4}{2n+2} \right)^{3n}$

1.2. Begründen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. Die Angabe von 'ja' oder 'nein' ohne Begründung ergibt keine Punkte (je 1,5 P). Im Folgenden seien (a_n) und (b_n) reelle Folgen.

- (1) Sei $a_n > n$, dann folgt $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$.
- (2) Seien $(a_n), (b_n)$ divergent, dann gilt $(a_n - b_n)$ ist konvergent.
- (3) Konvergente Folgen können ihren Grenzwert nicht erreichen.
- (4) Sei (a_n) konvergent, dann gilt $((-1)^n a_n)$ ist divergent.

2. Reihen

Bestimmen Sie den Grenzwert der folgenden Reihe. Eine Konvergenzbetrachtung ist nicht erforderlich (3 P).

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{2^{2n-1}}$

3. komplexe Zahlen

3.1. Gegeben sind die harmonischen Schwingungen

$$x_1(t) = A \cos(\pi \cdot t + \phi) \quad x_2(t) = -\sqrt{2} \sin(\pi \cdot (t-1)) \quad x_3(t) = \sqrt{2} \sin(\pi(t-0.5))$$

Wie müssen A und ϕ gewählt werden, damit $x_1(t) + x_2(t) = x_3(t)$ gilt? Bestimmen Sie A und ϕ rechnerisch (6 P).

3.2. Skizzieren Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen mit z komplex:

$$2 < |z + j + 1| \leq 3 \quad (4 \text{ P}) ,$$

$$\operatorname{Re}(z) \leq \operatorname{Im}(z^2) \quad (4 \text{ P}) .$$

Bei allen Lösungen wird eine Begründung erwartet - nur richtige (oder falsche) Ergebnisse sind wertlos. Eine Begründung kann z.B. die Angabe einer Formel sein, die in der Vorlesung bewiesen (und in der Aufgabe nicht ausgeschlossen) wurde. Die Ersatzaufgaben können statt der tatsächlichen Aufgaben gewählt werden. Bei diesen können nicht die vollen Punkte erreicht werden. Sinnvolle nicht zu Ende geführte Ansätze können bepunktet werden. Streichen Sie eine Lösung erst dann durch, wenn Sie dafür Ersatz haben. Wenn Sie nicht weiter kommen: Wechseln Sie die Aufgabe. Für jeden Punkt haben Sie rund 1 Minute Zeit.

1. Grenzwerte und Folgen

Berechnen Sie folgende Grenzwerte (sofern sie existieren) oder zeigen Sie, dass der Grenzwert nicht existiert (je 3 P):

$$(c) \quad \lim_{n \rightarrow 0} (3n)^{4/n} \quad n > 0$$

$$(d) \quad \lim_{n \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(n) + e^{-n}}{\ln(2n) + e^{-n}} \right) \quad n > 0$$

2. Reihen

2.1 Begründen Sie, ob folgende Reihen konvergieren (existieren) oder nicht. Eine Grenzwertberechnung ist nicht erforderlich (je 3 P).

$$(c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$(d) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{\ln n} + \frac{1}{n} \right)$$

2.2 Bestimmen Sie den Grenzwert der folgenden Reihen. Eine Konvergenzbetrachtung ist nicht erforderlich (je 3 P).

$$(e) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n!}$$

$$(f) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n}{(2n+1)!}$$

2.3 (h) Begründen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. Die Angabe von 'ja' oder 'nein' ohne Begründung ergibt keine Punkte (je 1,5 P). Im Folgenden sei (a_n) eine reelle Folge.

(1) $a_n \rightarrow 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ist konvergent.

(3) Es gibt Folgen (a_n) mit $a_n \rightarrow 0$ für die $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ divergent ist.

(4) Es gibt divergente Folgen (a_n) für die $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergent ist.

3. Integralrechnung

3.1 (a) Begründen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. Die Angabe von 'ja' oder 'nein' ohne Begründung ergibt keine Punkte (ja 1,5 P). Im Folgenden seien $F, f, G, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen.

(1) Wenn $|f(x)| < \frac{1}{x}$ ist, existiert folgendes Integral: $\int_1^\infty f(x) dx$.

(2) Seien $F(x)$ und $G(x)$ Stammfunktionen von $f(x)$, dann gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit $|F(x) - G(x)| < c$.

(3) Sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ und sei $G(x)$ eine Stammfunktion von $g(x)$ und es gelte $F'(x) = G(x)$ für alle x , dann gilt auch $f(x) = g(x)$.

(4) Sei $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ $f(x) \geq x$, $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$. V_x sei das Volumen des Rotationskörpers von f um die x -Achse begrenzt durch die Geraden $x = 0$ und $x = 1$ und sei V_y das Volumen des Rotationskörpers von f um die y -Achse begrenzt durch die Geraden $y = 0$ und $y = 1$, dann gilt $V_x \geq V_y$.

(5) Es gibt (mindestens) eine Funktion $f(x)$ mit $f(x) > 0$, für die das Integral $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ existiert.

3.2 Bestimmen Sie eine Stammfunktion der folgenden Funktionen $f_i: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ maximal:

(c) $f_1(x) = \frac{x}{e^x}$ (1 P)

(d) $f_4(x) = \frac{\tan x}{\cos^2 x}$ (1 P)

Bei allen Lösungen wird eine Begründung erwartet - nur richtige (oder falsche) Ergebnisse sind wertlos. Eine Begründung kann z.B. die Angabe einer Formel sein, die in der Vorlesung bewiesen (und in der Aufgabe nicht ausgeschlossen) wurde. Die Ersatzaufgaben können statt der tatsächlichen Aufgaben gewählt werden. Bei diesen können nicht die vollen Punkte erreicht werden. Sinnvolle nicht zu Ende geführte Ansätze können bepunktet werden. Streichen Sie eine Lösung erst dann durch, wenn Sie dafür Ersatz haben. Wenn Sie nicht weiter kommen: Wechseln Sie die Aufgabe. Für jeden Punkt haben Sie rund 1 Minute Zeit.