BA Stuttgart Elektrotechnik (Sd) Klausur in Mathematik Teil 1 06.02.2008

Aufgabe 1) (analytische Geometrie – 30 P)

Gegeben sind die Punkte $P_1(0;0;0), P_2(2;0;-2), P_3(2;2;-4)$ und $P_4(0;4;-4)$.

a) (4 P) Zeigen Sie, dass die Gerade g_1 durch die Punkte P_1 und P_4 parallel zur Geraden g_2 durch P_2 und P_3 ist. Bestimmen Sie den Abstand von g_1 und g_2.

b) (3 P) Bestimmen Sie eine Koordinatenform der Ebene E_1, in der die Punkte P_1, P_2 und P_3 liegen. Liegt P_4 auch in dieser Ebene?

c) (3 P) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten P_1, P_2 und P_3.

d) (6 P) Zeigen Sie: P_1, P_2 , P_3 und P_4 sind Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks mit den Eckpunkten $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$. Fertigen Sie eine Planskizze an.

e) (4 P) Bestimmen Sie den Mittelpunkt M, sowie die fehlenden Eckpunkte P_5 und P_6 des Sechsecks. Verwenden Sie dabei die Plankizze aus d).

f) (6 P) Gegeben sei die Ebene $E_2 : 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 5$. Spiegeln Sie den Punkt $P_7(0;0;2)$ an der Ebene E_2 (6 P).

g) (2 P) Wie groß ist der Abstand von P_7 zu E_2 (2 P)?

h) (2 P) Seien $\vec{u}$ und $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$.

Bei allen Lösungen wird eine kurze Begründung oder Rechnung erwartet - nur richtige (oder falsche) Ergebnisse sind wertlos. Eine Begründung kann z.B. die Angabe einer Formel sein, die in der Vorlesung bewiesen (und in der Aufgabe nicht ausgeschlossen) wurde. Die Ersatzaufgaben können statt der tatsächlichen Aufgaben gewählt werden. Bei diesen können nicht die vollen Punkte erreicht werden. Sinnvolle nicht zu Ende geführte Ansätze können bepunktet werden. Streichen Sie eine Lösung erst dann durch, wenn Sie dafür Ersatz haben. Wenn Sie nicht weiter kommen: Wechseln Sie die Aufgabe. Für jeden Punkt haben Sie rund 1 Minute Zeit.

Aufgabe 2) (LGS – 17 P) Gegeben seien die Matrizen

$$\underline{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Dimensionen der Vektoren $\vec{x} = (x_1, x_2, .., x_k)^T$ und $\vec{b} = (b_1, b_2, .., b_m)^T$ sind der jeweiligen Teilaufgabe anzupassen.

a) (5 P) Für welche Vektoren $\vec{b}$ ist das LGS $\underline{A}_1\vec{x} = \vec{b}$ lösbar?
Bestimmen Sie für den Fall der Lösbarkeit die Lösungsmenge des LGS (abhängig von $\vec{b}$).
Welchen Rang hat die Matrix $\underline{A}_1$?

b) (1 P) Für welche Vektoren $\vec{b}$ ist das LGS $\underline{A}_2\vec{x} = \vec{b}$ lösbar?

c) (7 P) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem (LGS) $\underline{A}_2\vec{x} = \lambda\vec{x}$ nicht trivial (d.h. für $\vec{x} \neq 0$) lösbar?

d) (3 P) Berechnen Sie die allgemeine Lösung des LGS $\underline{A}_2\vec{x} = \vec{-x}$.

e) (1 P) Ist die Abbildung $\vec{y} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \underline{A}_2\vec{x}$ eine lineare orthogonale Transformation (LOT)?
Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3) (Interpolation – 6 P)

Lösen Sie möglichst effektiv und exakt!

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 \quad = \quad n \cdot (x_1 + x_2 \cdot n + x_3 \cdot n^2)$$

Ersatzaufgabe (statt Aufgabe 3 – 4 P)

Finden Sie das Polynom möglichst niedrigen Grades durch die Punkte $(0;0)$, $(1;0)$, $(2;6)$ und $(3;24)$.

Aufgabe 4) (Funktion / Relation – 7 P)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = 2 \cdot |x+1| - 5$.

a) (1 P) In welchem Punkt S hat die Funktion einen Knick?

b) (3 P) Welche Funktionen bilden zusammen die Umkehrrelation? Eine Skizze ist erlaubt, aber nicht verlangt.

c) (3 P) Geben Sie den Definitionsbereich und den Wertebereich der Umkehrrelation an. Warum ist die Umkehrrelation keine Funktion?

Aufgabe 5) (10 P) Begründen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. Die Angabe von 'ja' oder 'nein' ohne Begründung ergibt keine Punkte (je 2 P) :

a) Es gibt 2×2 Matrizen $M \neq \underline{E}_2$, so dass für alle 2×2 $\underline{B}$ gilt: $\underline{M} \cdot \underline{B} = \underline{B} \cdot \underline{M}$.

b) Der Rang einer 2×2 Matrix ist stets > 0.

c) Sei $\underline{A}_3$ eine nicht invertierbare 2×2 Matrix, dann ist $\underline{A}_3$ von der Form

$$\underline{A}_3 = \begin{pmatrix} a & r \cdot a \\ c & r \cdot c \end{pmatrix} \quad \text{mit } a, c, r \in \mathbb{R}.$$

d) Sei V der Vektorraum aller Polynome vom Grad ≤ 2, dann bilden die die Polynome mit Nullstelle 1 einen Untervektorraum U von V, das heißt für alle Polynome f und g in U und $r \in \mathbb{R}$ gilt $r \cdot f + g \in U$.

e) Es gibt Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$, so dass $\underline{A}_4 = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ eine LOT ist.

LOT = lineare orthogonale Transformation

Aufgabe 6) (Funktionenräume – 7 P)

a) (4 P) Gegeben seien die Polynome $P_a(x) = a_0$, $P_b(x) = b_0 + b_1 x$,
$P_c(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ und $P_d(x) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3$. Welche Bedingung müssen die Koeffizienten $a_0, b_0, b_1, c_0, c_1, c_2, d_0, d_1, d_2$ und d_3 erfüllen, damit $P_a, ..P_d$ den Vektorraum der kubischen Polynome (Polynome vom Grad ≤ 3) erzeugen?

b) (3 P) Stellen Sie x^2 als Linearkombination der Polynome $p_0 = 1$, $p_1 = x - 1$ und $p_2 = (x-1)^2$ dar.

Aufgabe 7) (LOT im $\mathbb{R}^2$ – 8 P)

$$\text{Sei} \quad \underline{A}_5 \quad = \quad \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}.$$

a) (4 P) Zeigen Sie: $\underline{A}_5$ ist eine Rotation.

b) (2 P) Um welchen Winkel wird gedreht?

c) (2 P) Wie lautet die inverse Matrix?

Aufgabe 8) (Matrixgleichung – 5 P)

Seien $\underline{A}, \underline{B}, \underline{X}$ $n \times n$ Matrizen. Lösen Sie folgende Gleichung nach X auf:
$\underline{X} \cdot \underline{A} + (\underline{A} \cdot \underline{X}^T)^T + \underline{X} - (\underline{X} \cdot \underline{B})^{-1} \cdot \underline{X} = \underline{0}$.
Vorausgesetzt sei, dass die dabei entstehenden inversen Matrizen immer existieren.