3. Sei $f(x)=\sqrt{x}$, dann ist $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$:

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \tfrac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h} && \text{Differenzenquotient}\\
&= \lim_{h\to 0} \tfrac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h}\cdot\tfrac{(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})}{(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})} && \text{siehe Abschnitt 3.2.3}\\
&= \lim_{h\to 0} \tfrac{x_0+h-x_0}{h(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})} && \text{binomische Formel}\\
&= \lim_{h\to 0} \tfrac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}} && h \text{ gekürzt}\\
&= \tfrac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}} && h\to 0\\
&= \tfrac{1}{2\sqrt{x_0}}
\end{aligned}$$

4. Sei $f(x)\equiv c$, dann gilt $f'(x_0)\equiv 0$:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

**Hausaufgabe 25** Zeigen Sie: Sei $f(x)=\frac{1}{x^n}$, dann ist $f'(x)=-n\cdot x^{-n-1}$ für $n\in\mathbb{N}$.

### 7.1.3 Die Ableitung von Exponentialfunktionen

Sei $a>0, a\neq 1$ $a\in\mathbb{R}$ gegeben, dann heißt die Funktion $f(x)=a^x$ **Exponentialfunktion**.
Wir wollen deren Ableitung berechnen.

$$(a^x)' = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^x\cdot a^h-a^x}{h} = a^x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}.$$

Dies bedeutet, dass es eine Konstante $c$ abhängig von $a$ (unabhängig von $x$) gibt, sodass $(a^x)'=c\cdot a^x$, mit $c=c(a)=\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$, sofern der Limes existiert. Wenn wir de l'Hospital anwenden, sehen wir, dass der Limes genau dann existiert, wenn die Ableitung von $a^x$ endlich ist und dies nehmen wir an. Wir berechnen diesen Limes (näherungsweise) für die Werte $a=2$ und $a=3$: Wir erhalten $c(2)\approx 0,7$ und $c(3)\approx 1$. Wenn $c(a)$ (als Funktion von $a$ betrachtet) stetig ist, so muss es eine Stelle $a_0$ geben mit $c(a_0)=1$ und $2<a_0<3$. Es gilt folgende Plausibilitätsbetrachtung (für kleine $h$):

$$1 \approx \frac{a_0^h-1}{h} \Leftrightarrow h \approx a_0^h-1 \Leftrightarrow (h+1)^{\frac{1}{h}} \approx a_0.$$

Mit $h=\frac{1}{n}$ ist $\quad a_0 = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e \quad$ nach Abschnitt 3.2.6.

### 7.1.4 Beispiel: Die Wurzelfunktion

$\sqrt[3]{x}$ ist bei $x_0=0$ nicht differenzierbar, weil dort der Differenzenquotient $\frac{\sqrt[3]{x_0+h}-\sqrt[3]{x_0}}{h}$ gegen $\infty$ geht.