

Aufgabe

(a) (10 P) Begründen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. Die Angabe von 'ja' oder 'nein' ohne Begründung ergibt keine Punkte (je 2 P). In dieser Aufgabe ist A immer eine $n \times n$ Matrix mit den Koeffizienten $a_{ij}, i, j = 1..n$:

(1) Sei A eine obere Dreiecksmatrix, das heißt $a_{ij} = 0$ für $i > j$, dann ist A invertierbar.

(2) A ist invertierbar $\Rightarrow A^2$ ist invertierbar.

(3) Das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{x}$ ist immer lösbar.

(4) Sei A invertierbar, dann gilt: $A\vec{x} = A\vec{y} \Rightarrow \vec{x} = \vec{y}$.

(5) Sei B eine $n \times m$ Matrix mit $n \neq m$, dann ist es möglich, dass das lineare Gleichungssystem genau eine Lösung hat.

(b) (2 P) Gegeben sei die Matrix $B = (2/0/3) \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$. Berechnen Sie $B^T \cdot B$.

(c) (2 P) Gegeben sei die Matrix $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Geben Sie eine Formel für C^n an (ohne Beweis).

(d) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Geben Sie die allgemeine Lösung für das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{0}$ an (4 P). Welche Eigenschaften muss $\vec{b}$ erfüllen, damit das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ lösbar ist (1 P)?

(e) Sei $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie $\det(A)$ (3 P) und $\det(A^{-1})$ (1 P). Sei $B = A^{-1}$ mit den Koeffizienten b_{ij} . Bestimmen Sie b_{23} (3 P).

(f) (4 P) Seien A, B, X $n \times n$ Matrizen. Lösen Sie folgende Gleichung nach X auf:

$$3X^T + (B \cdot X)^T = X^T \cdot A^{-1}.$$

Vorausgesetzt sei, dass die dabei entstehenden inversen Matrizen immer existieren.

Bei allen Lösungen wird eine Begründung erwartet - nur richtige (oder falsche) Ergebnisse sind wertlos. Eine Begründung kann z.B. die Angabe einer Formel sein, die in der Vorlesung bewiesen (und in der Aufgabe nicht ausgeschlossen) wurde. Sinnvolle nicht zu Ende geführte Ansätze können bepunktet werden. Streichen Sie eine Lösung erst dann durch, wenn Sie dafür Ersatz haben. Wenn Sie nicht weiter kommen: Wechseln Sie die Aufgabe. Für jeden Punkt haben Sie rund 1 Minute Zeit.

- (a) (1) nein Gegenbeispiel $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat Det 0
 (2) ja $\det A^2 = \det A \cdot \det A \neq 0$
 (3) ja $\vec{x} = \vec{0}$
 (4) ja $A\vec{x} = A\vec{y} \Rightarrow A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}A\vec{y} \Rightarrow \vec{x} = \vec{y}$
 (5) ja zB $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dann ist $B\vec{x} = \vec{0}$ genau von $\vec{x} = \vec{0}$ lösbar

(b) $b^T \cdot b = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ (c) $C^k = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) LGS $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 0$

$x_3 + 2x_4 = 0$

$x_5 + 2x_6 + 3x_7 = 0 \Rightarrow$

$\begin{cases} x_3 = -2x_4 \\ x_5 = -2x_6 - 3x_7 \\ x_2 = x_4 + x_6 + 2x_7 - x_8 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_7 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_8 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Eigenschaft
 $b_4 = b_5 = 0$

(e) $\det A = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \quad \det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = -1$

$b_{23} = \frac{1}{\det A} \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 0$

(f) $3X^T + (B \cdot X)^T = X^T A^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow X^T 3E + X^T B^T - X^T A^{-1} = 0$

$\Rightarrow X^T (3E + B^T - A^{-1}) = 0$

$\Rightarrow X^T = 0 \cdot (3E + B^T - A^{-1})^{-1} = 0 \Rightarrow X = 0^T = 0$