

Aufgaben Schmid

1. Komplexe Zahlen (34 Punkte)

- (a) Berechnen Sie alle komplexen Lösungen z der Gleichung

$$\cos z + j \cdot \sin z = 2 \cdot e^{\frac{j\pi}{6}} \quad (6 \text{ P}).$$

- (b) Geben Sie alle komplexen Zahlen z an, für die gilt: $z^4 = -j$ (4 P).

- (c) Addieren Sie die harmonischen Schwingungen

$$\sqrt{2} \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 2 \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$$

rechnerisch so, dass sich ein Ergebnis der Form $A \cos(2x + \phi)$ ergibt (6 P).

- (d) Skizzieren Sie die Ortskurve der komplexwertigen Funktion $z(t)$:

$$z(t) = 1 - j + \sqrt{2}e^{jt} \quad (6 \text{ P}).$$

- (e) Skizzieren Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen mit z komplex:

$$-2 < |z - 3j| \leq 3 \quad (4 \text{ P}),$$

$$|z^2| < 3 \operatorname{Re}(z^2) - (\operatorname{Re}(z))^2 \quad (4 \text{ P}).$$

- (f) Beweisen Sie die Formel

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

NICHT mit Hilfe der Additionstheoreme, sondern mit Hilfe der komplexen e Funktion (3 P). Was können Sie auf der Basis dieses Beweises über $\cos(2x)$ aussagen (1 P)?

2. Reihen (6 Punkte)

Sei a_n eine reelle Folge. Sei $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$ die zugehörige Reihe. Wir betrachten die Teilreihen mit den geraden Indizes $T_{2n} := \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = a_2 + a_4 + a_6 + \dots$ und mit den ungeraden Indizes $T_{2n-1} := \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = a_1 + a_3 + a_5 + \dots$

Begründen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen (je 1,5 P). Die Angabe von 'ja' oder 'nein' ohne Begründung ergibt keine Punkte.

(1) S konvergent $\Rightarrow T_{2n}$ ist konvergent

(2) S divergent $\Rightarrow T_{2n}$ ist divergent

(3) T_{2n} und T_{2n-1} sind beide konvergent $\Rightarrow S$ ist konvergent und für die Reihenwerte gilt $T_{2n} + T_{2n-1} = S$.

(4) Die Teilsummenfolge von S ist streng monoton wachsend $\Rightarrow$ die Teilsummenfolge von T_{2n} ist streng monoton wachsend.

Studienjahrgang 2006 2. Halbjahr Nachklausur =

Aufgabe 1a $\cos z + j \sin z = e^{jz} = 2e^{j\pi/6 + 2k\pi j}$ (2)

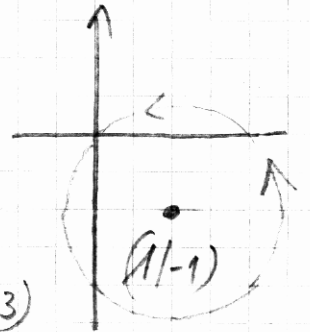
(2) $\Rightarrow jz = \ln 2 + j\frac{\pi}{6} + 2k\pi j$ (2) $\Rightarrow z = -j \ln 2 + \pi/6 + 2k\pi$

Bitte beachten Sie dass $e^x = e^{x+2k\pi j}$! $k \in \mathbb{Z}$

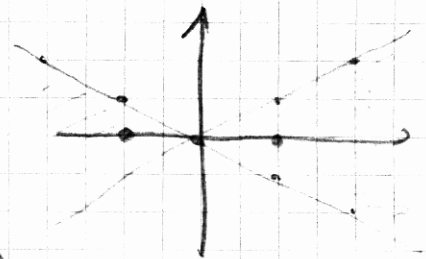
Aufgabe 1b $z^4 = e^{-j\pi/2} \Rightarrow z = \sqrt[4]{1} \cdot e^{\frac{2\pi k - \pi/2}{4} \cdot j}$ (4)
 $\Rightarrow z_1 = e^{-j\pi/8}$; $z_2 = e^{j3\pi/8}$; $z_3 = e^{j5\pi/8}$; $z_4 = e^{j7\pi/8}$

Aufgabe 1c $\sqrt{2} \cos(2x + \pi/4) = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \sin 2x = \cos 2x - \sin 2x$
 $2 \cos(2x - \pi/6) = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \cos 2x + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 2x = \sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x$
 $\Rightarrow \sqrt{2} \cos(2x + \pi/4) + 2 \cos(2x - \pi/6) = (1 + \sqrt{3}) \cos(2x + 0)$ (6)

Aufgabe 1d $z(t) = 1 - j + \sqrt{2} e^{jt} = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \cos t \\ -1 + \sqrt{2} \sin t \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ Kreis um $(1/-1)$ $r = \sqrt{2}$ (6)



Aufgabe 1e $-2 < |z - 3j| \leq 3 \hat{=}$ Kreis mit Radius 3 um $(0/3)$
 $|z|^2 = x^2 + y^2$ $z^2 = x^2 + 2jxy - y^2$ $\text{Re}(z^2) = x^2 - y^2$ $(\text{Re}(z))^2 = x^2$
 $\Rightarrow x^2 + y^2 < 3x^2 - 3y^2 - x^2 \Rightarrow 4y^2 < x^2 \Rightarrow$ Idee nach Knepp
 $y = \pm x/2$ $(-1/0)$ ja $(1/0)$ ja $(0/1)$ nein (4)
 (6) da ohne Rand



Aufgabe 1f $e^{2jx} = (e^{jx})^2 = (\cos x + j \sin x)^2$
 $= \cos^2 x + 2j \sin x \cos x - \sin^2 x = \cos 2x + j \sin 2x$ (3)

Aus Gleichheit der Imaginärteile folgt Beh und $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ (1)

Aufgabe 2.1 Nein $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ konvergiert aber T_{2n} divergiert

2.2 Nein zB $a_{2n} = 0$ $a_{2n+1} = 1$ $\sum a_n$ div aber T_{2n} konv.

2.3 Ja Sei S_n die Teilsummenfolge von T_{2n} und t_n die Teilsummenfolge von T_{2n+1} dann gilt die Folge $u_n := S_n + t_n$ ist als Summe konvergenter Folgen wieder konvergent $\Rightarrow$ Beh

2.4 Ja TSF $\uparrow \Rightarrow a_n > 0 \forall n \Rightarrow S_n \uparrow$

alle 1.5P