Hurra Mathematik! V 7.7 September 2026 978-3-912198-02-7

Abitur + Klassenarbeits- Vorbereitung (Sd)

Ihr Notendurchschnitt aus den Halbjahren $11_1, 11_2$ und 12_1 bildet die sogenannte Anmeldenote, die eine Prognose für Ihr Abschneiden im Abitur ist. Deshalb wird (ab Klasse 11) jede Arbeit, die ich mit Ihnen schreibe, etwa Abiturniveau sowie einen Pflicht und einen Wahlteil haben. Zur Vorbereitung auf eine Klausur sollten Sie **dringend** alte Abituraufgaben rechnen. Aber

K e i n e P a n i k !

Abituraufgaben finden Sie z.B. hier! Die Lösungen finden Sie unter AbiErg.slt.biz.
Es folgen weitere 10 Gründe diese Abiturvorbereitung zu verwenden:

1) Sie beantwortet die Frage: **'Was sollte ich nach welcher Unterrichtseinheit können?'**;
2) Sie enthält das Formeldokument mit Verweisen
   Den **Plan, 0 NP zu verhindern** finden Sie jetzt im Abschnitt 15/1.1.11
3) Zu den meisten Aufgaben gibt es Basisaufgaben (BAg) zur Vorübung
4) Sie enthält die Abituraufgaben + Musteraufgaben der letzten drei Jahre inclusive Schwierigkeitsgrad als Index
5) Mit Englisch-Mathe Vokabeln (für IFC + Studium)
6) Die Abivorbereitung ist gratis; Download unter Abitur.slt.biz
7) Mit einer Vorbereitung auf das mündliche Basiskurs-Abitur (Abs. 1055/16.8)
8) Nicht Basiskurs geeignete Aufgaben und Abschnitte sind in der Regel durch Index $_{LK}$ oder durch (Nur LK) gekennzeichnet
9) Sie enthält eine Operatorenliste, das WTR Curriculum und die inhaltsbezogenen Kompetenzen für den LK (mit Aufgaben-Verweisen)
10) Sie enthält auch eine komplette chronologische Formelsammlung der Klassen 8-12

Fast alle Aufgaben haben Indizes Beispiel c_2), die sich (normalerweise) auf den LK beziehen.
1+2 bedeutet Basisniveau (Bereich 'ausreichend'); 3+4=Könnerniveau (Bereich 'gut').
Ohne Gewähr: Für ≥ 5 NP sollten Sie im BK das Niveau 2; im LK das Niveau 2-3 beherrschen.

Die Seiten der Abivorbereitung sind: 1155, 1015-1055, 1125-1133, 385-389, 2-16

Alle Seiten der Abivorbereitung sind: 1155, 1015-1133, 385-389, 2-16

Wettbewerbe:
Mitte November: Informatik Biber, Kl 8-12;
Anfang Dezember: Mathe im Advent, Kl 8-10;
3. Do im März: Mathe Känguru, Kl 8-12;
September: Landeswettbewerb, Kl 9+10;
1. Dezember - März: Bundeswettbewerb, Kl 10-12;
Anfang Februar: Mathe ohne Grenzen, Kl 9+10;

Die Filme finden Sie auf den Kanälen **'Mathe Schmid'** oder **'Schmid happens'**.

Mein Buch und auch die Lösungsvorschläge finden Sie auf meinem Internetauftritt: Sd.SLT.biz bei den jeweiligen Klassen. User Schueler, Pass erfragen Sie unter Sd@SLT.biz. Zugang für die online-Version von Hurra Mathe (Version 7.4) = Mobile Mathe: User: Jan@slt.biz

Mehr Mathe gibt es in 1) Mathe AG, 2) Mathe Vertiefung, 3) Seminarkurs Statistik, 4) $M \cup M \in M$.

Alle meine Projekte finden Sie unter mathe.slt.biz.

12_4	10.5	Geometrie	Schnittwinkel und Abstände	272
$M{+}_1$	3.1	Algebra	Komplexe Zahlen	45
$M{+}_2$	6.3.11	Analysis	Die Regel von de l'Hospital	170
$M{+}_3$	7.1.18	Integrale	Regeln der Integralrechnung	184
$M{+}_{4+5}$	8.1-8.3	Dgln	Taylor und Differenzialgleichungen	198
M-AG$_1$	4.4	Folgen	Vollständige Induktion ($M{+}_0$)	63
M-AG$_2$	4.5	divers	Vorbereitung auf Wettbewerbe	64
BA 3_1	13.2	Wth	Normalverteilung	358
BA 3_2	13.3	Wth	Statistik	364

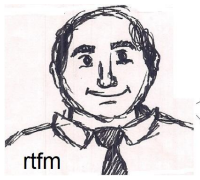
1 Einleitung Willkommen!

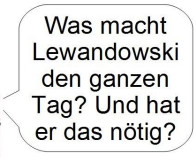
Mathematik macht Spaß + glücklich! Mathematik steckt in mir (und Dir) und muss heraus. Bedenke aber: Beglückender, als Mathematik zu machen, ist es, Mathematik zu lehren.

Zum Geleit: *Hurra Mathematik* besteht aus zwei Teilen: Einem Schulteil, der im Großen und Ganzen aus Aufgaben (oft notiert als Seite/Aufgabennummer) besteht und einem Hochschulteil welcher den Stoff noch einmal auf höherem Niveau wiedergibt. Der Unterrichtsteil zeigt meinen Unterricht der Klassen 8-12. Die erwarteten Schülerlösungen zu fast allen Aufgaben finden Sie auf meiner Internetseite sd.slt.biz. User: Schueler. Das Passwort kann bei mir erfragt werden. Bitte beachten Sie dabei die Version; die Aufgabennummern können sich laufend ändern. Sollte bei einer Aufgabe eine Längenmaßeinheit fehlen, so ist für diese *cm* zu wählen. Der Platz im Buch ist knapp, deshalb bitte ich die dichte Darstellung zu entschuldigen. Online finden Sie eine übersichtlichere Version (Thx Alice .. mit gleichen AgNr + anderen Seitenzahlen) und die Online-Version 'Mobile Mathe' mit Aufgaben, LöVo + Filmlinks: User Jan@slt.biz Handys sind im Unterricht und in der Vorlesung untersagt = die Handys grundsätzlich wegpacken.

Der Bezug zu den eingeführten Lehrwerken: Als ich mich wieder einmal über die Bücher der Mittelstufe beschwert habe, sagte mein Kollege Frohberg: '*Wieso*? Mit diesen Büchern können die Schüler sehr gut *zu Hause* lernen'. Es dauerte etwas, bis ich begriff, dass die Bücher zur Eigenarbeit gedacht sind und nicht (unbedingt) zum Unterrichten. Deshalb arbeiten wir in der Schule allein mit *Hurra Mathematik* und die Schüler sollen zu Hause den Unterrichtsstoff mit den Schulbüchern weiter vertiefen. Den Bezug zu den eingeführten Schulbüchern finden Sie am Anfang vieler Abschnitte:

Klasse 8,9:	Neue Wege 4,5, 2007	(=NW4, NW5),
Klasse 8,9,10:	Lambacher Schweizer 8,9,10, 2017	(=LS8 .. LS10),
Klasse 10:	Elemente der Mathematik 6, 2009	(=EM6),
oder Klasse 10:	Lambacher Schweizer 11, 1998	(=LS11),
Klassen 10-12:	Lambacher Schweizer Kursstufe, 'Jahr'	(=KS$_{\text{Jahr}}$),





Folgende Taschenrechner sind Basis der LöVo des Buches: GTR: Texas TI 83; **WTR:** Casio fx-87DEX

Binnendifferenzierung (BD): (thx Trl) BD bezeichnet die individuelle Förderung Einzelner innerhalb einer Lerngruppe. BD kann nur im offenen Unterricht wirkungsvoll praktiziert werden. Also ist es beim lehrerzentrierten Unterricht sinnvoll, diese in die Hausaufgaben zu verlegen. Deshalb finden Sie bei fast allen Aufgaben Indizes, Bsp: c_2). Die Nr. sagt etwas über deren Niveaustufe aus: 1+2=Basisniveau (bis Note 3-4; 6 NP), 3+4=Könnerniveau (bis Note 1-2, 12 NP), 5(+6)=Profiniveau. Bitte beachten Sie dabei, dass für die Niveaustufe nicht nur relevant ist, *was* gefragt wird, sondern auch *wann* es gefragt wird. Die Minimalanforderungen sind immer auf Niveau 1-2. Sonderniveau sind a=Algorithmus, b=Beispiel, e=Einführung, L=nur LK, r=Regel, und w= Wiederholung (Niveau b und r müssen als HA ins Regelheft (s.u.) übertragen werden). Eine Niveaukonkretisierung bei Einführungsaufgaben ist schwierig, denn die Agstellungen sind eher leicht, es wird aber ein Transfer erwartet. Ag mit Index Q (Querrichtung) bauen teilweise aufeinander auf und sollen noch auf weitere Ergebnisse führen.

Das Regelheft: (thx Lor, Wg) Sie sollten ein Regelheft (als Hausheft) führen. Im Regelheft sollten alle wichtigen Formeln, sowie Regeln und Algorithmen des Unterrichtes kompakt, evtl. mit einem

Beispiel, notiert sein. Sollte eine Aufgabe (idR Lückentext) den Niveauindex r haben, so schreiben Sie die ausgefüllte Variante als Hausaufgabe in Ihr Regelheft ab. Eine Aufgabe mit Index $'b'$ sollte im Unterricht gerechnet werden; die Lösung dieser Aufgabe (eventuell mit Aufgabentext) gehört zu einer Regel und ist ebenfalls ins Regelheft zu übertragen. Außerdem sollten Sie in das Regelheft alle Formeln der Formelsammlung abschreiben, die während des Unterrichtes besprochen wurden. Im Gegensatz zum Regelheft ist das Schulheft ein Arbeitsheft und darf (soll) auch falsche Ansätze oder Durchgestrichenes enthalten. Hausaufgaben und Übungsaufgaben gehören ins Schulheft.

Hausaufgabe sind grundsätzlich alle im Unterricht ausgelassenen Aufgaben, bei welchen mindestens ein Teil markiert ist ($\boxed{\mathbf{f}_2}$). Faustregel: Ein Schüler mit Note n sollte (mindestens) n Aufgaben (pro Unterrichtsstunde) als Hausaufgabe machen (auch wenn dies nicht kontrolliert wird). Der markierte Teil $\boxed{\mathbf{f}_2}$) wird kontrolliert und muss von jedem Schüler als HA präsentabel vorbereitet werden. Damit hat (fast) jede Stunde Hausaufgaben. Ag mit $\textcircled{a}_2$) (auch (f) (U) oder Index 'f') sind gefilmt worden (Youtube Kanäle Mathe Schmid + Schmid happens). Während des Filmens ist die Mitarbeit freiwillig und es werden keine mündlichen Noten gemacht. Zu allen Aufgaben gibt es Lösungsvorschläge im Netz; diese sollten aber erst konsultiert werden, wenn Sie einige Zeit erfolglos versucht haben, die Aufgabe zu bearbeiten. Damit entfällt auch die Ausrede: 'Ich konnte die Hausaufgabe nicht machen, weil ich diese nicht verstanden habe'. Sollten Sie (trotz auswendig gelernter Formeln) einmal eine Ag (Ihres Niveaus) nicht herausbekommen, gehen Sie wie folgt vor:

1) Schreiben Sie die Lösungsvorschläge ab.
2) Mailen Sie an Sd@slt.biz die Aufgabe - ich versuche dann die LöVo zu ergänzen; (goto 1).
3) Erwirken Sie über den Kurssprecher im Unterricht eine Besprechung der Aufgabe (bis Niveau 3).
Bitte melden Sie mathematische Fehler und auch Rechtschreibfehler sofort (per Mail).

Cartoon 1

Im **Krankheitsfalle** streame ich gerne. Der versäumte Stoff soll unter anderem mit Hilfe der Filme und der Lösungen nachgearbeitet werden. Dazu gehören auch die Hausaufgaben. Im Falle des **Onlineunterrichts** beginnen wir zur gleichen Zeit wie beim Präsenzunterricht unter stream.slt.biz. Den Plan des Tages finden Sie dann unter 'Klasse'.slt.biz. Mein Onlinekonzept finden Sie unter ou.slt.biz.

Notentransparenz: Im Regelfall schreibe ich pro Halbjahr 1 bis 3 Tests (diese zählen einfach → Heft) und 2 KA (diese zählen doppelt). Wer wiederholt bei einem Test oder einer KA oder bei der letzten KA fehlt, muss damit rechnen, diese (oder diesen) während der nächsten Unterrichtsstunde nachschreiben zu müssen. Die mündliche Leistung werte ich wie einen Test. Mit der letzten Arbeit jedes Halbjahres können Sie einen Papier-Streifen mit Ihren bisherigen Leistungen (ohne Gewähr!) erhalten. Das Erstellen dieses Streifen kann den Datenschutz leicht verletzen. Bitte melden Sie rechtzeitig, wenn Sie sich vor diesen Daten schützen wollen also keinen Streifen wünschen. Wenn Sie einen Streifen haben, können Sie sich in meiner Sprechstunde (nicht im Unterricht - zusammen mit Ihrer besten Freundin) zur erteilten Note äußern. Wenn alle KA/Tests mitgeschrieben wurden, kann die Note eventuell durch einen Vortrag bzw. GFS aufgewertet werden. Goto 390/3a+4a; if Kl11 then goto 159/6.3.1.

Zwillingsaufgaben (markiert durch einen Index Z) kommen verstärkt ab der Version 6.8 vor und sind Textaufgaben, die neben der eigentlichen Mathematik noch ein kleines Rätsel beinhalten. Gesucht ist meist eine Person (oft mit einem verfremdeten Namen oder anderem Geschlecht), eine Erzählung oder ein Ereignis; die Lösung wird im Unterricht nicht besprochen und kann in den LöVo auf Sd.SLT.biz nachgeschlagen werden. Aufgaben mit Index 'g' haben einen geschichtlichen Bezug. Goto 16/1.3.2

Is nich gibts nicht: Grundsätzlich findet jeder Unterricht (auch das Tutorium) statt, selbst wenn auf dem Vertretungsplan 'Entfall' steht. In der Regel werde ich dann von einem Schüler vertreten (SZU), der mit Ihnen Übungsaufgaben oder KA Besprechungen macht. Manchmal übernehme ich Stunden von Kollegen, die sonst entfallen würden. Dem, der das nicht so toll findet sei gesagt: 'Wer keine Lust auf Lernen hat, der gehe bitte arbeiten'.

Ein **Hauptfach** definiert sich u.a. dadurch, dass Sie zur Nacharbeit (zu Hause) etwa die Zeit benöti-

gen, die Sie das Fach in der Schule haben (für Mathematik sind dies also etwa 4-5 Schulstunden). Dazu gehört das Rechnen der Hausaufgaben (das waren die im Unterricht ausgelassenen Aufgaben), das Auswendiglernen der Formeln und (als Abivorbereitung) das Rechnen alter Abituraufgaben. Optimalerweise tun Sie dies zu festen Zeiten in der Woche (Stundenplan; gleichverteilt, nicht blockweise) und in Gruppen (wenn Sie nicht zusammen arbeiten, beaufsichtigen Sie sich wenigstens gegenseitig).

1.1 Formelsammlung

Matheformeln auswendig lernen - ist in Mathe nicht viel mehr das Verständnis entscheidend? Man muss doch nicht wissen wie's geht sondern nur wissen wo's steht. **NEIN!** Entscheidend ist, dass man überhaupt weiß, wofür es eine Formel gibt und durch die Formeln Zusammenhänge erst klar werden. Wissen Sie, was die Formel $a^2 + b^2 = |a + ib|^2$ bedeutet? Nein? Aber Sie wissen, dass diese Formel von Formel 29 abstammt, und damit haben Sie schon einen Großteil verstanden. Und Formeln geben Ihnen die Sicherheit in einer Prüfung das Richtige zu tun. Eine gute Idee entsteht durch die überraschende Verbindung zweier Dinge, die Sie sich **gemerkt** haben. Übrigens: Bei einer Sprache verzichten Sie auch nicht aufs Vokabeln lernen, wenn Sie doch ein Wörterbuch haben :).

Mathematik(unterricht) besteht aus 'Erkenntnis, Formulierung, Verallgemeinerung und Beweis'. Diese Inhalte erfordern Transferleistungen und sind daher in einer KA nur schwer abzufragen. In einer KA frage ich deshalb mindestens $\frac{2}{3}$ Reproduktion, also die Anwendung von Formeln bzw. theoretischen Inhalten auf Aufgaben aus Theorie und Praxis. Zu meiner Schulzeit war die Gewichtung etwa '50% Reproduktion, 40% Transfer und 10% etwas ganz Verrücktes'. Bitte beachten Sie, dass sowohl die Formelsammlung als auch die Minimalanforderungen (am Ende jeder Unterrichtseinheit) nur als Basis für die weiteren Kapitel zu verstehen sind. Eine KA Vorbereitung sollte weit mehr beinhalten. Besonders relevant zur KA Vorbereitung (für den Reproduktionsteil) sind Aufgaben mit der Markierung (KA_X) ($X \in \{$ 'T'ransfer, 'l'okal, 'B'asis, 'G'lobal, 'Z'entral$\}$; optional bis zur Markierung ($\overline{\mathrm{KA}}$)). Und denken Sie immer dran: Wenn Sie in einer KA nur Falsches hinschreiben, gibt es 0 Punkte, wenn Sie aber nichts hinschreiben, werden es auch nicht mehr (falsch $\geq$ nichts).

Folgende Formeln sind unbedingt auswendig zu lernen; (W) bedeutet dabei 'wichtig'; (A) 'auswendig'; (Z) 'zentral'. Zentrale Formeln sind praktisch Voraussetzung für jede Unterrichtseinheit. Die Formelsammlung ist nicht unbedingt vollständig. Weitere Formeln dürfen gerne auch gelernt werden. Taucht im Aufgabentext der Hinweis **(Formel 1)** auf, so wird die Formel 1 an dieser Stelle eingeführt. Weitere Erwähnungen sind mit F1 gekennzeichnet. Vielen Dank an Familie Tressel und allen Formelsammlern für die Mithilfe.

1.1.1 Formelsammlung bis Klasse 7

Merkwürdig wenn Sie das Wort hören, denken Sie an sonderbar skurril - im eigentlichen Sinne bedeutet es aber es ist würdig, es sich zu merken. Wenn Sie Information mit einem durchaus merkwürdigen Bild kombinieren, so können Sie sich diese oft viel besser merken. Ziel ist es, jede Formel mit einem merkwürdigen erklärenden Bild zu versehen. Vorschläge sind willkommen (zB Formel 10).

1. (A) Die ersten 20 Quadratzahlen sind: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400; $25^2 = 625$; Kubikzahlen: $2^3 = 8, 3^3 = 27, 4^3 = 64, 5^3 = 125$.

   (A) Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl >1, die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist. Die ersten acht Primzahlen sind 2,3,5,7,11,13,17,19.

2. (A) Ein Term ist immer nach der Verknüpfung benannt, die als letztes ausgeführt wird.

3. (Z) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, dann gilt das Kommutativgesetz $a+b = b+a$, $a \cdot b = b \cdot a$, das Assoziativgesetz $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ und das Distributivgesetz $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;

4. (A, Ag 51/134) (Vermehrter / verminderter Grundwert) Ein Bestand wächst mit p Prozent pro Zeitschritt, dann gilt für den Wachstumsfaktor q: $q = 1 + \frac{p}{100}$.

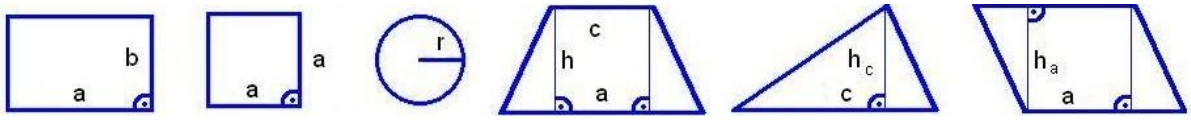


Abb. 1 Rechteck Quadrat Kreis Trapez Dreieck Parallelogramm

5. FD 3: (A) Flächenberechnung von Dreiecken, Vierecken und Kreisen:

Kreis:	$A = \pi \cdot r^2$, $U = 2 \cdot \pi \cdot r$	
Quadrat:	$A = a^2$,	
Rechteck:	$A = a \cdot b$	Länge mal Breite,
Parallelogramm:	$A = g \cdot h$	Grundseite mal Höhe,
Dreieck:	$A = \frac{c \cdot h_c}{2}$	Grundseite mal Höhe durch zwei,
Trapez:	$A = \frac{a+c}{2} \cdot h$	mit $a \| \| c$ und Höhe h.

6. (W) Der Schwerpunkt S eines Dreiecks teilt die Schwerlinie im Verhältnis 2:1.
Die Winkelsumme im Dreieck ist $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

7. (W) $a \cdot b = \text{ggt}(a, b) \cdot \text{kgV}(a, b) =$ größter gemeinsamer Teiler · kleinstes gemeinsames Vielfaches.

8. (W) 'Der kleine Gauß:' $1 + 2 + 3 + 4 + .. + n = \frac{n^2+n}{2}$;

9. (Z) Die Steigung m einer Geraden durch $P(x_1; y_1)$ und $Q(x_2; y_2)$ mit $x_1 \neq x_2$ berechnen wir mit

$$\text{Zwei-Punkte-Formel (ZPF):} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Die Steigung m das merk' dir fix, ist delta yps durch delta x!

10. (Z) Die Gleichung einer Geraden mit der Steigung m durch $P(x_1; y_1)$ ist

$$\text{Punkt-Steigungs-Form (PSF):} \quad y = m \cdot (x - x_1) + y_1.$$

Ein Sektglas $[y]$ steht auf zwei Skiern $[=]$ und fährt einen Berg hinauf. Oben steht Angela Merkel $[m]$ mit einem roten Muttermal $[\cdot]$ am Bein. Sie öffnet eine Türe $[\ (\ ]$ und man sieht eine Straßenkreuzung $[x]$. Ein Speer $[-]$ fliegt mitten in eine andere Kreuzung hinein und trifft dort eine Kerze $[x_1]$. Vom Luftzug wird die Türe wieder zugeschlagen $[\ )\ ]$. Draußen findet eine Party statt auf der Spaten $[+]$ tanzt. Alle Partygäste haben in der rechten Hand ein Sektglas und in der linken Hand eine Kerze $[y_1]$.

Die $x-$Achse hat die Gleichungsdarstellung $y = 0$, die $y-$Achse: $x = 0$.

1.1.2 Formelsammlung Klasse 8

11. (Z, Ag 20/4, FD 2) **Binomische Formeln: i)** $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$; **ii)** $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$; **iii)** $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$; (W, Ag 20/5) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

12. (Z, Ag 21/10) Bei Äquivalenzumformungen sind die Multiplikation mit 0 sowie die Division durch 0 und durch x (Tipp: Ausklammern + F14) verboten.

13. (W, Abs 227/9.1.8, FD 9) **Satz des Thales**: Genau die Dreiecke in einem Halbkreis sind rechtwinklig. **Umfangswinkelsatz**: (auf dem Themenfriedhof) Jeder Umfangswinkel ist halb so groß wie der Mittelpunktswinkel. Also sind alle Umfangswinkel auf einer Seite gleich groß.

14. (Z, Ag 23/15) Satz vom Nullprodukt: Sei $a \cdot b = 0$, dann ist $a = 0$ oder $b = 0$.

15. (A, Ag 29/38) Sei $n \geq 0$, $\sqrt{n}$ ist diejenige positive Zahl, die quadriert $= n$ ergibt.
$x^2 = n$ wird von $x = \pm\sqrt{n}$ gelöst. Damit ist $(\sqrt{n})^2 = n$ und für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sqrt{x^2} = |x|$.

(A, Ag 30/45) Seien $a, b \geq 0$, $n > 0$ dann gilt: i) $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$; ii) $\sqrt{\frac{a}{n}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{n}}$;

16. (W, Ag 86/214) Für den Scheitel $S(x_s; y_s)$ einer Parabel $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ gilt: $x_s = \frac{-b}{2a}$. Die Scheitelform der Parabel ist: $y = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$.

17. (A, Ag 316/788) Es werden k aus n Kugeln mit Berücksichtigung der Reihenfolge gezogen. Mit Zurücklegen ergeben sich n^k mögliche Ergebnisse, ohne Zurücklegen $\frac{n!}{(n-k)!}$. Die Anzahl der Permutationen von n Elemente ist $n!$.

18. (A, Ag 319/796) Gegeben sei ein mehrstufiges Zufallsexperiment mit zugehörigem Baum.

    Die Pfadregel:
    In einem mehrstufigen Zufallsexperiment erhält man die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses, indem man die Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades multipliziert: Die 'Malrichtung' ist von links nach rechts.

    Der spezielle Additionssatz:
    Die einzelnen Ergebnisse eines Ereignisses dürfen addiert werden: Die 'Plusrichtung' ist von oben nach unten.

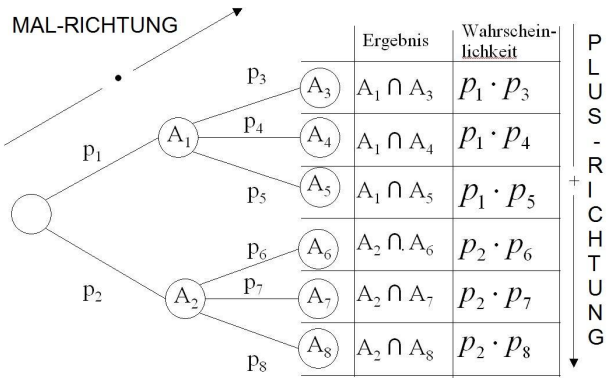


Abb. 2 Pfadregel

19. (Z, Ag 32/57, FD 6) Mitternachtsformel: Seien $a \neq 0$, $D := b^2 - 4ac \geq 0$ (Diskriminante) dann

$$\text{gilt} \qquad ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

    (W, Ag 33/60) Wenn $D > 0$ ist, hat $ax^2 + bx + c = 0$ zwei (verschiedene) Lösungen, bei $D = 0$ hat sie (genau) eine Lösung und bei $D < 0$ hat sie keine Lösung.

20. (A, Ag 33/62) **Linearfaktorzerlegung:** Hat $p(x) = ax^2 + bx + c$ die Nullstellen x_1 und x_2, dann ist $p(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$;
    (W, Ag 34/67) **Satz von Vieta:** $x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \Leftrightarrow p = -(x_1 + x_2), q = x_1 \cdot x_2$.

21. (A, Ag 229/559, FD 1) Der (zweite) Strahlensatz: Seien Z, A, B und Z, A', B' je auf einer Geraden (oder kollinear), $A'A || B'B$, dann gilt: $k = \frac{ZA'}{ZA} = \frac{ZB'}{ZB} = \frac{A'B'}{AB}$. k ist dabei der Streckfaktor der zentrischen Streckung, die das ΔZAB auf das $\Delta ZA'B'$ abbildet.

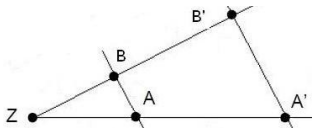


Abb. 3 Strahlensatzfig.

22. (W, Abs 229/9.2.4) Bei einer zentrischen Streckung mit Streckfaktor k wird aus einer Fläche mit dem Inhalt A eine Fläche mit dem Inhalt $k^2 \cdot A$ (aus einem Körper mit Volumen V ein Körper mit Volumen $k^3 \cdot V$).

1.1.3 Formelsammlung Klasse 9

23. (A, Abs 38/2.3.2, FD 5) Seien $a, b > 0$, $n, m \in \mathbb{R}$, dann gilt:
    1 PG $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$; $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$; 2 PG $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$; $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$;
    3 PG $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$; $(a^n)^m = (a^m)^n$; 4 PG $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$;
    5 PG $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$; 6 PG $a^n \cdot b^m$ kann nicht zusammengefasst werden

24. (A, Ag 39/94) Die Gleichung $x^n = a$ hat für ungerades n genau eine Lösung $x = \sqrt[n]{a}$; falls n gerade ist, so hat die Gleichung für $a < 0$ keine Lösung, für $a > 0$ gilt $x = \pm \sqrt[n]{a}$ und für $a = 0$ ist $x = 0$.

25. (W, Abs 224/9.1) Wenn zwei Dreiecke in
    (sss) allen drei Seiten
    (sws) zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel
    (wsw) einer Seite und den zwei anliegenden Winkeln

(Ssw) zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, dann sind sie kongruent (deckungsgleich).

Jede der oben angegebenen Kombinationen legt ein Dreieck in Form und Größe eindeutig fest (thx Cf).

26. (W, Abs 41/2.4.1) Seien $a, b > 0$, $a \neq 1$, dann gilt $a^x = b \Leftrightarrow x = \frac{\log b}{\log a} \left(= \frac{\ln b}{\ln a}\right) = \log_a(b)$.
Insbesondere ist $\log(10^c) = c$ (für alle $c \in \mathbb{R}$) und $10^{\log(c)} = c$ (nur für $c > 0$) (thx Trs).
(W) Spezielle Werte: $\log(1) = 0$, $\log(10) = 1$, $\log(100) = 2$, $\log(1000) = 3$, usw.
($*$) Limites: $\log(0) = -\infty$, $\log(\infty) = \infty$, (Klasse 11: $\ln(e) = 1$).

27. (A, Abs 41/2.4.2, FD 5) Seien $a, b > 0$, $n \in \mathbb{R}$, dann gilt:
1 LogG $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$; $\log(\frac{a}{b}) = \log(a) - \log(b)$;
2 LogG $\log(a^n) = n \cdot \log(a)$; 3 LogG $\log(a + b)$ kann iA nicht vereinfacht werden.

28. (A, Ag 233/580, FD 21) $y = m_1 \cdot x + c_1$ und $y = m_2 \cdot x + c_2$ sind orthogonal $\Leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$.

29. (Z, Ag 234/584, FD 8) Der Satz von Pythagoras: Im rechtwinkligen Dreieck A, B, C mit $\gamma = 90°$ gilt $a^2 + b^2 = c^2$ oder die Summe der Kathetenquadrate ist gleich dem Hypotenusenquadrat.
(W, auch Ag 237/601) Die Zahlen (3;4;5) (und entsprechende Vielfache) bilden ein pythagoreisches Tripel, d.h. es gibt ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seitenlängen 3; 4 und 5. Es hat die weiteren Winkel 36.87° und 53.13°. Die Zahlen 1;2;2;3 bilden ein pythagoreisches Quadrupel, d.h. $1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$ oder ein Quader mit den Seitenlängen 1;2;2 hat Diagonale 3.

30. (W, Ag 235/589) Die Diagonale d eines Quadrates mit der Seitenlänge a ist $d = a\sqrt{2}$.
Die Höhe h eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a ist $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, $A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.

31. (A, Ag 235/593) Die Pkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ haben den Abstand $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
(W, Ag 236/595) Jeder Punkt $P(x; y)$ eines Kreises K um $M(m_1; m_2)$ mit Radius r erfüllt
die Gleichung $(x - m_1)^2 + (y - m_2)^2 = r^2$ oder $x^2 + y^2 = r^2$ falls $M(0; 0)$.

32. (A, Ag 237/601) Die Diagonale d eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b ist $d = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Die Raumdiagonale d_R eines Quaders (Seitenlängen a, b, c) ist $d_R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

33. (W, Ag 94/236) $f(\overline{f}(x)) = \overline{f}(f(x)) = x$ bzw. $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$ (falls $f^{-1}(x)$ existiert).

34. (Z, Ag 240/613, FD 7) Im rechtwinkligen Dreieck gilt (Regel: GAGA HühnerHof AG)
$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$; $\cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$; $\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$;
Nach dem Satz des Pythagoras gilt $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.

35. (W, Ag 241/617) (auch Ag 108/278) Winkel - spezielle Werte:

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin(\alpha)$	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = 0.5$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

36. (W, Ag 241/619) (auch Ag 112/287) Sinus und Kosinus sind 360° periodisch:
Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\sin(\alpha) = \sin(\alpha + k \cdot 360°)$ und $\cos(\alpha) = \cos(\alpha + k \cdot 360°)$.
Eine Gleichung der Form $\sin(x) = a$ wird von $x_1 = \arcsin(a)$ und $x_2 = 180° - x_1$ gelöst.
Eine Gleichung der Form $\cos(x) = a$ wird von $x_1 = \arccos(a)$ und $x_2 = 360° - x_1$

In diesem Abschnitt (Formeln 37, 39, 38) sind A, B beliebige Ereignisse.

37. (W, Ag 322/804) Additionssatz: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

38. (W, Ag 323/809, FD 26) Eine Zufallsgröße $\mathcal{X}$ ist ein Wkraum mit reellen Ergebnissen; hier x_1, x_2, x_3 und sei $P(\mathcal{X} = x_1) = p_1$ usw. Erwartungswert $\mu = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3$.
Varianz: $(x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + (x_3 - \mu)^2 \cdot p_3$; Standardabweichung $\sigma = \sqrt{V(\mathcal{X})}$.

39. (W, Ag 327/817, FD 24) Def. bedingte Wk: $P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

(W, Ag 328/819) A und B sind unabhängig $\Leftrightarrow P_B(A) = P(A)$ oder $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

40. (W, Ag 331/825) Man muss mindestens $\lceil \frac{\log(1-p)}{\log(1-p_0)} \rceil$ mal ein Experiment mit Erfolgswk p durchführen um mit einer Wk von mind. p_0 ein Mal oder öfter erfolgreich zu sein.

41. (A, Ag 243/632) Die Fläche A eines Kreissektors mit Öffnungswinkel α ist $A = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$, die Bogenlänge b ist $b = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$ (Sektorformel).

42. (A, Ag 244/639) Für Prismen und zylinderförmige Körper (Säulen) mit Grundfläche G gilt $V = G \cdot h$, für kegelförmige Körper gilt $V = \frac{G \cdot h}{3}$. Für Kugeln gilt $V = \frac{4\pi}{3} r^3$; $O = 4\pi \cdot r^2$.

1.1.4 Formelsammlung Klasse 10 teilweise vorgelesen unter http://fs10.slt.biz

43. (A, Ag 98/248) $f(x - a)$ bedeutet 'statt x schreibe $(x - a)$'.

Beispiel: $f(x) = 2x^2 - 4x \quad \rightarrow \quad f(x - a) = 2(x - a)^2 - 4(x - a)$.

(W, Ag 98/248) Wenn das Schaubild von f um a nach rechts und um b nach oben verschoben werden soll, so hat der resultierende Graph die Funktionsdarstellung $y = f(x - a) + b$.

(W, Ag 99/250) Soll K_f an der x-Achse gespiegelt werden, so gilt $f_{neu}(x) = -f(x)$; wenn K_f an der y-Achse gespiegelt wird, so gilt $f_{neu}(x) = f(-x)$;

44. (A, Ag 101/256) Die Vielfachheit von Nullstellen (siehe Abb. 4). Einfache Nullstellen x_0 treten als Linearfaktor $(x - x_0)^1$ doppelte Nst als $(x - x_0)^2$ und dreifache Nst als $(x - x_0)^3$ in der Linearfaktorzerlegung auf.

45. (W, Ag 104/264) **Fundamentalsatz** der Algebra: Eine ganzrationale Funktion n-ten Grades hat höchstens n Nullstellen. Eine ganzrat. Fktn ungeraden Grades hat mindestens eine Nullstelle.

Satz der Linearfaktorzerlegung: $p(x) = 0 \Leftrightarrow p(x)$ ist durch $(x - x_0)$ teilbar.

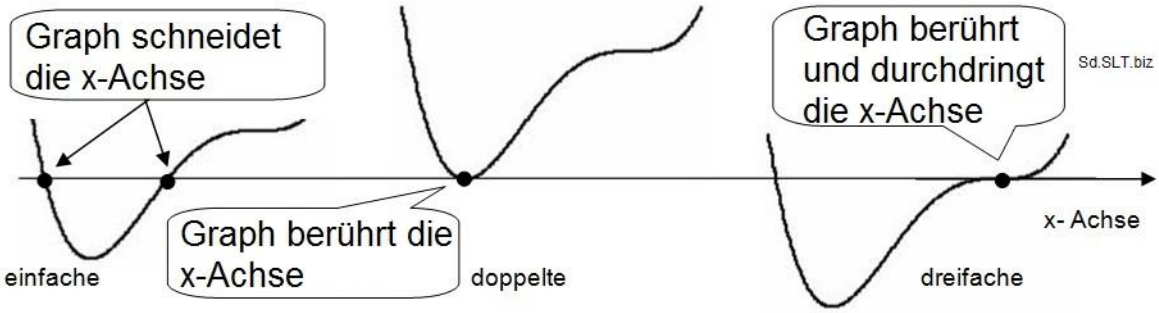


Abb. 4 Vielfachheit von Nullstellen

46. (A, Ag 105/269) Formel der speziellen Symmetrie: Sei f eine Funktion, mit Schaubild K_f.
K_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse $\Leftrightarrow f(-x) = f(x)$; (gerade Funktion);
K_f ist punktsymmetrisch zum Ursprung $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$; (ungerade Funktion).

47. (A, Ag 333/12.3.1, FD 25) $0! = 1, 1! = 1, \quad 2! = 1 \cdot 2 = 2, \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.

Das n-Tupel $\underbrace{E, .., E}_{k} \; \underbrace{\bar{E}, .., \bar{E}}_{n-k}$ kann auf $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$ Weisen angeordnet werden.

Das Tupel $\underbrace{1, .., 1}_{n_1} \; \underbrace{2, .., 2}_{n_2} \; \underbrace{3, .., 3}_{n_3} \; \underbrace{4, .., 4}_{n_4}$ kann auf $\frac{(n_1+n_2+n_3+n_4)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot n_4!}$ Weisen angeordnet werden.

48. (W, Ag 337/843) Wir ziehen k aus n Kugeln, dann gilt für die Anzahl der möglichen

Permutationen: (das Quadrat)	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen (Tupel)
mit Berücksichtigung der Anordnung (Baum)	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
ohne Berücksichtigung der Anordnung	$\binom{n-1+k}{k}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

49. (A, Ag 339/849) Ein Experiment mit den Ergebnissen Erfolg und Misserfolg und gleichbleibender Erfolgswahrscheinlichkeit p heißt Bernoulliexperiment. Dieses wird n mal durchgeführt. Sei $\mathcal{X}$ die Anzahl der Erfolge, dann gilt die Formel von Bernoulli: $P(\mathcal{X}=k) = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ $[= binompdf(n,p,k)]$. $\mathcal{X}$ heißt dann $B_{n,p}$verteilt oder $\mathcal{X} \sim B_{n,p}$.

50. (A, Ag 340/853) Sei $\mathcal{X} \sim B_{n,p}$, d.g.: $P(\mathcal{X} \geq k) = 1 - P(\mathcal{X} \leq k-1)[= 1 - binomcdf(n,p,k-1)]$. Für $1 \leq a \leq b \leq n$ $(a,b \in \mathbb{N})$ gilt: $P(a \leq \mathcal{X} \leq b) = P(\mathcal{X} \leq b) - P(\mathcal{X} \leq a-1)$.

51. (A, Ag 343/856, FD 26) Sei $\mathcal{X} \sim B_{n,p}$, dann gilt: Der Erwartungswert von $\mathcal{X}$ ist $E(\mathcal{X}) = \mu = n\cdot p$, $V(\mathcal{X}) = \sigma^2 = n\cdot p\cdot(1-p)$ ist die Varianz und $\sigma(\mathcal{X}) = \sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$ ist die Standardabweichung.

52. (W, Ag 344/858) Sei $\mathcal{X} \sim B_{n,p}$, dann gilt: $P(\mathcal{X} \leq k) \approx \Phi\left(\frac{k - n\cdot p + 0.5}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}\right)$.

53. (W, Ag 135/319) $\infty \notin \mathbb{R}$, sei $a \in \mathbb{R}$ $\quad a \pm \infty = \pm\infty, \quad \frac{a}{\infty} = 0, \quad a\cdot\infty = \begin{cases} \infty & (a>0) \\ \text{undefiniert} & (a=0) \\ -\infty & (a<0) \end{cases}$; undefiniert sind $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^0, 1^\infty$

54. (W, Ag 136/324) Die mittlere Geschwindigkeit (Änderungsrate) oder **Sekantensteigung** einer Weg/Zeitfunktion f zwischen x_0 und x_1 ist $\bar{v} = m = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ **(Differenzenquotient)**.
(FD 13) Die Momentangeschwindigkeit **(Tangentensteigung)** einer Weg/Zeitfunktion f ist $v(x_0) = m(x_0) = f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-(f(x_0))}{h} = \lim\limits_{x_1\to x_0}\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ **(Differenzialquotient)**.

55. (W, Ag 138/333) Eine Funktion $f(x)$ hat an der Stelle x_0 den Steigungswinkel ihrer Tangente: $\alpha = \arctan(f'(x_0))$ bzw. falls $f(x) = mx + c$ gilt $\alpha = \arctan(m)$. ⟦Der Winkel zwischen den Geraden $y = m_1x + c$ und $y = m_2x + c$ ist $|\arctan m_1 - \arctan m_2|$ eigentlich: $\arctan\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1\cdot m_2}\right|$.⟧

56. (Z, Ag 137/327, FD 14) Die Potenzregel der Ableitung: $(x^n)' = n\cdot x^{n-1}$, für alle $n \in \mathbb{R}$.

57. (A, Ag 137/329, FD 15) Die Linearität der Ableitung: $(r\cdot f(x) + s\cdot g(x))' = r\cdot f'(x) + s\cdot g'(x)$.

58. (A, Abs 138/6.1.7) Tangente in $B(u/f(u))$ (allgemeine Tggleichung): $y = (\,f'(u)\,)\,(x-u)+f(u)$; Normale: $y = \frac{-1}{f'(u)}\cdot(x-u)+f(u)$. **Faustregel:** Ist $P(a;b)$ ein Punkt der Funktion, so setze $u = a$, sonst (externer Punkt) setze $x = a$ und $y = b$; im Zweifelsfalle setze $u = a$.

59. (W, Abs 108/5.4.2, FD 12) Umrechnung (Bogenmaß ↔ Gradmaß): $\frac{\alpha}{360} = \frac{x}{2\pi}$.

x	$0 \mathrel{\hat{=}} 0°$	$\frac{\pi}{6} \mathrel{\hat{=}} 30°$	$\frac{\pi}{4} \mathrel{\hat{=}} 45°$	$\frac{\pi}{3} \mathrel{\hat{=}} 60°$	$\frac{\pi}{2} \mathrel{\hat{=}} 90°$	$\pi \mathrel{\hat{=}} 180°$	$\frac{3\pi}{2} \mathrel{\hat{=}} 270°$	$2\pi \mathrel{\hat{=}} 360°$
$\sin(x)$	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = 0.5$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$	0	-1	0
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

60. (A, Abs 109/5.4.3, FD 11) $\sin(-x) = -\sin(x)$, d.h. $\sin(x)$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung; $\cos(-x) = \cos(x)$, d.h. $\cos(x)$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse.
$\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ $\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}$. (für alle $k \in \mathbb{Z}$)

61. (A, Ag 110/284) $f(x) = a\sin(b(x-c)) + d$ hat Periode $p = \frac{2\pi}{b}$.
K_f entsteht aus $K_{\sin(x)}$ durch Streckung mit dem Faktor a in y-Richtung und mit dem Faktor $\frac{1}{b}$ in x-Richtung sowie einer Verschiebung um $(c;d)$ Regel: Erst strecken, dann verschieben.

62. (W, Ag 113/291) Von $f(x) = a\sin(b(x-c)) + d$ sind zwei aufeinanderfolgende Extrema $T(x_{min}, y_{min})$ und $H(x_{max}, y_{max})$ gegeben, dann gilt:
$a = \frac{y_{max}-y_{min}}{2}$; $c = \frac{x_{max}+x_{min}}{2}$; $d = \frac{y_{max}+y_{min}}{2}$; $p = 2\cdot(x_{max} - x_{min})$;

63. (A, Ag 114/293, FD 14) $(\sin(x))' = \cos(x)$, $(\cos(x))' = -\sin(x)$, $(\sin(bx+c))' = b\cos(bx+c)$.

64. (A, Ag 249/652) Seien $A(a_1|a_2|a_3)$ und $B(b_1|b_2|b_3)$, dann ist $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1-a_1 \\ b_2-a_2 \\ b_3-a_3 \end{pmatrix}$ (Ende − Anfang).

65. (A, Abs 440/14.20.16) **Die Parallelogrammgesetze:**

(1 PaG) Für die Mitte M von A und B gilt $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$;

(2 PaG) A, B, C, D ist ein Parallelogramm $\Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$;

(3 PaG) Für jede Spiegelung gilt: Sei A' der an einem Gebilde G (Punkt, Gerade, Ebene) gespiegelte Punkt von A, dann ist $\overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OA}$, wobei L der Lotfußpunkt von A auf G ist.

(4 PaG) Für den Schwerpkt S eines Dreiecks A, B, C gilt $\overrightarrow{OS} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$; (einer Dreieckspyramide A, B, C, D gilt $\overrightarrow{OS} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{4}$); dies sind Verallgemeinerungen vom (1 PaG).

Nur bei den Parallelogrammgesetzen dürfen sinnvollerweise Ortsvektoren (Punkte) addiert werden.

66. (Z, Ag 253/669) Die Gerade durch A und B in Parameterform ist $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\cdot(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$, $(t \in \mathbb{R})$. Für $t = 0$ ist $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA}$, für $t = 1$ ist $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OB}$, für $t = 0.5$ zeigt $\overrightarrow{OX}$ auf die Mitte von A und B. Falls $t < 0$ ist, liegt X 'links' von A; falls $0 < t < 1$ ist, liegt X 'zwischen' A und B und falls $t > 1$ ist, liegt X 'rechts' von B.

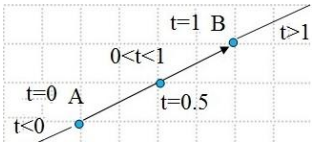


Abb. 5 Skalierung

(A) Die x_1-Achse ist $\overrightarrow{OX} = t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; x_2-Achse: $\overrightarrow{OX} = t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$; x_3-Achse: $\overrightarrow{OX} = t\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$;

67. (W, Ag 254/674) ('Der Baum:') Seien $g_1 : \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP}_1 + t\cdot\vec{r}_1$ und $g_2 : \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP}_2 + t\cdot\vec{r}_2$.

Es gilt: $\vec{r}_1 \parallel \vec{r}_2 \Leftrightarrow g_1 || g_2$, wenn zusätzlich das LGS $\overrightarrow{OP}_1 = \overrightarrow{OP}_2 + t\cdot\vec{r}_1$ lösbar ist, so ist $g_1 = g_2$, ansonsten sind g_1 und g_2 echt parallel.

Falls $\vec{r}_1 \nparallel \vec{r}_2$ so ist $g_1 \nparallel g_2$, wenn zusätzlich das LGS $\overrightarrow{OP}_1 + s\cdot\vec{r}_1 = \overrightarrow{OP}_2 + t\cdot\vec{r}_2$ lösbar ist, so schneiden sich g_1 und g_2 ansonsten sind g_1 und g_2 windschief.

68. (W, Ag 257/684, 275/753) Ein Objekt bewegt sich vom Punkt P aus geradlinig in Richtung $\vec{r}$ mit konstanter Geschwindigkeit v, so befindet es sich zum Zeitpunkt t bei $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t\cdot\frac{v}{|\vec{r}|}\cdot\vec{r}$.

Bogenlängenparametrisierung: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \frac{d}{|\vec{r}|}\cdot\vec{r}$. X hat von P den (orientierten) Abstand d.

69. (A, Ag 144/354) f ist bei x_0 (lokal) extremal $\Leftrightarrow f'(x)$ wechselt bei x_0 das Vorzeichen $\Rightarrow f'(x_0) = 0$; VZW $+ \to -$ bedeutet Maximum; VZW $- \to +$ bedeutet Minimum. Signalwort maximal (minimal) bedeutet: 'Ableiten und die Ableitung =0 setzen'.

70. (A 6.2.4) $f''(x_0) < 0$ und $f'(x_0) = 0 \Rightarrow H(x_0; f(x_0))$ ist Hochpunkt; [$f''(x_0) > 0$ usw. . . . Tiefpunkt].

$f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$ ist eine hinreichende Bedingung für Extremwert, $f'(x_0) = 0$ ist eine notwendige Bedingung: $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0 \Rightarrow E(x_0; f(x_0)) \Rightarrow f'(x_0) = 0$.

71. (A, Ag 147/365) $W(x_0; f(x_0))$ ist ein Wendepunkt $\Leftrightarrow$ VZW von $f''(x)$ bei $x_0 \Rightarrow f''(x_0) = 0$;

72. (W, Ag 149/377) Sei f differenzierbar auf $(a; b)$ mit $f'(x) > 0$ (für alle $x \in (a; b)$), dann ist f streng monoton wachsend ($f'(x) > 0 \Rightarrow f$ smw); smf analog. Im Abitur gibt es nur strenge Monotonie! Innere Extrempunkte zerstören die strenge Monotonie; Terrassen(Sattel)punkte hingegen nicht. Monotoniebereiche: Zwischen einem Minimum und einem Maximum ist f smw und umgekehrt. Streng monotone Funktionen sind umkehrbar (injektiv).

1.1.5 Formelsammlung Klasse 11

73. (Z, Ag 159/405, FD 14) $(e^x)' = e^x$, $(e^{ax+b})' = a \cdot e^{ax+b}$ und (A, Ag 163/422) $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$.

74. (A, Ag 160/407) Seien $a, b > 0; a \neq 1$, dann gilt $a^x = b \Leftrightarrow x = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$; $e^{\ln b} = b; \ln(e^b) = b$;
(W) [$\ln(0) = -\infty$,] $\ln(1) = 0$, $\ln(2) \approx 0.693$, $\ln(e) = 1$ [, $\ln(\infty) = \infty$].

75. (A, Ag 161/409, FD 18) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0$ (waagrechte Asymptote $y = 0$),
$\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \ln(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$; $e^x > 0$, $e^{-x} > 0$.

76. (A, Ag 161/411, FD 15) Die Kettenregel: $(f(g(x)))' = g'(x) \cdot f'(g)$ oder $\frac{df}{dx} = \frac{dg}{dx} \cdot \frac{df}{dg}$
$\Leftrightarrow (f \circ g)'^x(x) = f'^g(g(x)) \cdot g'^x(x)$. Beachten Sie, dass bei $f'(g)$ nach g abgeleitet wird. Die innere Funktion $g(x)$ ist immer das, was zuerst berechnet wird.
Bsp: $(e^{x^2})'$ sagt $g(x) = x^2, f(g) = e^g$, $(e^{x^2})' = 2x \cdot e^g = 2x \cdot e^{x^2}$;
$(a^x)' = (e^{x\ln(a)})' = \ln(a) \cdot e^{x\ln(a)} = \ln(a) \cdot a^x$ $(a > 0)$.

77. (A, Ag 162/415, FD 15) Die Produktregel: $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$.

78. (A, Ag 164/425) Quotientenregel: $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.

79. (W, Ag 174/454, FD 16) Der Hauptsatz der Differenzial und Integralrechnung:
'Ableiten ist das Gegenteil vom Integrieren' oder $\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = (F_a(x))' = f(x)$.

80. (W, Ag 175/455, FD 17) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =$ (orientierte) Fläche begrenzt von K_f und den Geraden $x = a, x = b$ und $y = 0$.

81. (A, Ag 176/460) Potenzregel: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ bzw. $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a\cdot(n+1)} + c$, falls $n \neq -1$;
(A, Ag 183/495) für $n = -1$ gilt: $\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$.
(A, Ag 176/461) Die Linearität des Integrals: $\int (r \cdot f(x) + s \cdot g(x))dx = r \cdot \int f(x)dx + s \cdot \int g(x)dx$.

82. (A-Z, Ag 178/473) Lineare Substitution: Sei $F'(x) = f(x)$, dann gilt für $a \neq 0$:
$\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$; **Bsp:** $\int \sin(ax+b)dx = \frac{-\cos(ax+b)}{a} + c$; $\int e^{ax+b}dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c$;

83. (W, Ag 181/487, FD 19) Rotiert der Graph einer Funktion f um die $x-$ Achse, so gilt für das Volumen des entstehenden Rotationskörpers im Intervall $[a; b]$: $V = V_a(b) = \pi \cdot \int_a^b f^2(t)dt$.

84. (W, Ag 182/492) Der Mittelwert m einer Funktion f auf $[a, b]$ ist $m = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx$.

85. (A, Ag 252/664, FD 22) Das Skalarprodukt: $\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$; $\vec{a} \circ \vec{a} = |\vec{a}|^2$.
$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}} = \sqrt{(\vec{a})^2}$. Multipliziere zwei Vektoren **nie** komponentenweise.
Normierter Vektor: Sei $\vec{a} \neq \vec{0}$ dann zeigt $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ in Richtung $\vec{a}$ und hat Länge 1.

86. (Z, Ag 259/691) Für den von $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ eingeschlossenen Winkel γ gilt: $\cos(\gamma) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.
Insbesondere gilt $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 0$. Hinweis: Teile **nie** durch einen Vektor!

87. (W, Ag 260/699) Sei $\vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b}$, dann ist deren Winkelhalbierende: $\vec{w} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$.

88. (A, Ag 354/881) Bei einen linksseitigen Hypothesentest mit ($\alpha = 0.1$) ist $H_0 : p \geq p_0$, $H_1 : p < p_0$.
Das Quantil k der Ordnung 0.1 (= die Grenze) ist $k \approx n \cdot p - 1.282\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} - 0.5$.
Etwa bei k wird in der Wertetabelle $P(\mathcal{X} \leq k)$ das Signifikanzniveau $\hat{\alpha}$ übersprungen.
Rechtsseitiger Test: $H_0 : p \leq p_0$, $H_1 : p > p_0$; Quantil $k \approx n \cdot p + 1.282\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} + 0.5$.
H_1 generiert die Wertetabelle: $p < p_0 \to P(\mathcal{X} \leq k)$; $\alpha_1 = P_{p_0}(Abl)$, $\beta_1 = P_{p_1}(\overline{Abl}\ )$.

89. (W, Abs 358/13.2.1) Sei F eine Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße $\mathcal{X}$ mit Dichte f, dann gilt: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, $P(a < \mathcal{X} \leq b) = F(b) - F(a)$, $\lim_{n\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{n\to\infty} F(x) = 1$, $(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1)$ $F(x)$ ist monoton wachsend und rechtsseitig stetig. $\mu = E(\mathcal{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)dt$; (nur HM III) $\sigma = \sqrt{V(\mathcal{X})} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}(t-\mu)^2 \cdot f(t)dt}$;

90. (W, Abs 361/13.2.2, FD 26) Sei $\mathcal{X} \sim N(0;1) \Rightarrow \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}; \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$. Sei $\mathcal{X} \sim N(\mu,\sigma)$(normalverteilt), dann gilt: Dichte$= \varphi(x) = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$; $P(\mathcal{X} \leq k) = \Phi(\frac{k-\mu}{\sigma})$, $P(a \leq \mathcal{X} \leq b) = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ und $\bar{\Phi}(1-\alpha_0) = -\bar{\Phi}(\alpha_0)$; $\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.4$.

Sigmaregel: (FD 27) Mit Wk 68% hat ein Wert höchstens Abstand σ vom Erwartungswert μ, mit Wk 95% Abstand 2σ und mit Wk 99% Abstand 3σ.

1.1.6 Formelsammlung Klasse 12

91. (W, Ag 262/704, FD 23) Die Ebene durch (drei) nicht kollineare Punkte A, B und C in Parameterform ist $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC} = \vec{a} + r \cdot \vec{s}_1 + t \cdot \vec{s}_2$ $(r, t \in \mathbb{R})$.

    Es gibt (mindestens) drei Darstellungsformen der Ebene:
    a) Die Parameterform (s.o.) wenn aus drei Punkten eine Ebene berechnet werden soll;
    b) Die Punktnormalenform $(\vec{x} - \vec{p}) \circ \vec{n} = 0$ ($\vec{n}$ heißt Normalenvektor, bei Verfahren Abs. 10.5.8);
    c) die Koordinatenform $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = e$ (sonst immer gut).

    Es gilt $\vec{n} \perp \vec{s}_1$ und $\vec{n} \perp \vec{s}_2$; Ein möglicher Normalenvektor $\vec{n}$ kann durch $\vec{s}_1 \times \vec{s}_2$ berechnet werden.

92. (A 255/678+265/717) Die Koordinatenebenen sind: x_1x_2-Ebene: $x_3 = 0$; x_1x_3-Ebene: $x_2 = 0$; x_2x_3 Ebene: $x_1 = 0$. Die Ebene $x_1 + x_3 = 1$ ist echt parallel zur x_2- Achse.

93. (A-Z, Ag 263/708) Seien $\vec{a}, \vec{b}$ dreidimensional, dann definieren wir $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$ (Vektor- oder Kreuzprodukt). Zweidimensional gilt: $\binom{x}{y} \perp \binom{-y}{x}$

    Sei $E : \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \vec{s}_1 + t \cdot \vec{s}_2$ eine Ebene (in Parameterform mit $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ l.u.). Berechne $\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2$; setze P in die Koordinatenform $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = e$ ein und berechne so e.

94. (A, Abs 263/10.3.3) Seien $\vec{a}, \vec{b}$ dreidimensional, dann gilt: i) $\vec{a} \perp (\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$;
    ii) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}$ und $\vec{b}$ sind parallel (linear abhängig);
    iii) $|\vec{a} \times \vec{b}|$ = die Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.
    iv) Die Fläche eines Dreiecks A, B, C ist $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$.

95. (A, Ag 269/731) Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ dreidimensional, dann gilt: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ ist das (orientierte) Volumen, des von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten Spates (räumliches Parallelogramm). Dabei ist $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} > 0 \Leftrightarrow$ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden ein Rechtssystem; $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind linear abhängig.

    Das Volumen V einer Pyramide mit Spitze S und
    parallelogrammförmiger Grundfläche A, B, C, D ist: $V = \frac{1}{3}\left|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \circ \overrightarrow{AS}\right|$.
    dreieckiger Grundfläche A, B, C, ist: $V = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \circ \overrightarrow{AS}|$.

96. In den Formeln 96-98 sind $g_i : \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP}_i + t \cdot \vec{r}_i$ (Geraden) und $E_i : (\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OQ}_i) \circ \vec{n}_i = 0$ (Ebenen). (A-Z, Ag 272/741)

    $\sphericalangle\,(g_1, g_2) = \arccos\left(\left|\frac{\vec{r}_1 \circ \vec{r}_2}{|\vec{r}_1|\cdot|\vec{r}_2|}\right|\right)$, $\sphericalangle\,(E_1, E_2) = \arccos\left(\left|\frac{\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}\right|\right)$,
    $\sphericalangle\,(E_1, g_1) = \arcsin\left(\left|\frac{\vec{n}_1 \circ \vec{r}_1}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{r}_1|}\right|\right)$. aber $\sphericalangle\,(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \arccos\left(\frac{\vec{v}_1 \circ \vec{v}_2}{|\vec{v}_1|\cdot|\vec{v}_2|}\right)$.

    $g \perp E \Leftrightarrow \vec{r} || \vec{n}$; $\quad g || E \Leftrightarrow \vec{r} \perp \vec{n}$; $\quad E_1 || E_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 || \vec{n}_2$; $\quad E_1 \perp E_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$.

97. (A, Ag 273/749) Sei $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = e$ eine Ebene, dann ist deren Abstandsform (HNF): $d = \left|\frac{n_1\cdot x_1 + n_2\cdot x_2 + n_3\cdot x_3 - e}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}}\right|$ oder $d_{\text{orient}} = \frac{n_1\cdot x_1 + n_2\cdot x_2 + n_3\cdot x_3 - e}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}}$ (Orientierung in Richtung von $\vec{n}$).

98. (W, Ag 274/751) Der Abstand windschiefer Geraden ist $d = \left|(\overrightarrow{OP}_2 - \overrightarrow{OP}_1) \circ \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|}\right|$.

1.1.7 Formeln des Themenfriedhofs, die früher auswendig zu lernen waren

99. (Kl. 9, Ag 233/577) Sei A, B, C ein rechtwinkliges Dreieck, $q = c_a$ und $p = c_b$ die Hypotenusenabschnitte, dann gilt: $h^2 = p{\cdot}q$ Höhensatz $a^2 = c{\cdot}p$, $b^2 = c{\cdot}q$ Kathetensätze.

100. (Kl. 9, Abs 242/9.4.5) Sei A, B, C ein allgemeines Dreieck, R dessen Umkreisradius, dann gilt

$$\text{Sinussatz: } \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2R \qquad \text{Kosinussatz: } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

Damit ist der Kosinussatz eine Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras.

101. (Kl. 9+10, Ag 108/276) Die Additionstheoreme lauten:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta) \qquad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

102. (Kl. 9+10, Ag 331/823 + 55/148) Geometrische Summe: $1 + q + q^2 + q^3 + .. + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
Für $|q < 1|$ geht $q^{n+1} \to 0$: Damit gilt: $1 + q + q^2 + q^3 + ... = \frac{1}{1-q}$ (geometrische Reihe).
3. binomische Formel: $(a-b) \cdot (a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + a^{n-3}b^3 + ... + ab^{n-1} + b^n) = a^{n+1} - b^{n+1}$.

103. (Kl. 10, Ag 106/272 + 107/274) Formel der allgemeinen Symmetrie:
K_f ist achsensymmetrisch + zur Achse $x = a \Leftrightarrow f(a-t) = f(a+t)$;
K_f ist punktsymmetrisch zum Punkt $(a; b) \Leftrightarrow f(a-t) + f(a+t) = 2b$; ($t$ hebt sich weg).

104. (Kl. 8+11, Ag 21/9 + 259/689) $\det\left(\binom{a_1}{a_2}, \binom{b_1}{b_2}\right) = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \mathrel{\hat{=}}$ der (orientierten) Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

105. (A, Abs 199/8.2) Ein exponentielles Wachstum wird durch die Funktion $f(x) = y = c \cdot e^{kx}$ beschrieben. Es genügt der Dgl $y' = k \cdot y$. Ein beschränktes Wachstum (mit Schranke S) wird durch die Funktion $y = S - c{\cdot}e^{kx}$ beschrieben. Es genügt der Dgl $y' = k{\cdot}S - k{\cdot}y \Leftrightarrow y' = k{\cdot}(S-y)$.

1.1.8 Formeln von M_+ oder aus HM

106. (A $\to$ 3.1.2, S. 46) Komplexe Zahlen: **Die vierte Binomische Formel:** $(a+ib){\cdot}(a-ib) = a^2+b^2$;
$|z| = |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$; $\tan(\varphi) = \frac{b}{a}$; **Eulerformel:** $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$;
$e^{2\pi i} = e^{2k\pi i} = 1$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. **Moivreformel:** $z^n = r \cdot e^{i\varphi} \Leftrightarrow z = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$ $k = 0..n-1$.

107. (A 198/8.1.1) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$; $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!}$; $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k}}{(2k)!}$;
$\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}}$ für $|x < 1|$ gilt: $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$; $-\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$;

108. (A 184/502) Partielle Integration: Seien u, v, f, g diffbar, dann gilt: $\int u'v dx = uv - \int uv' dx$;
Substitutionsregel der Integration: $\int f(g) \cdot dg = \int f(g(x)) \cdot g'(x) \cdot dx$ oder $dg = g'(x) \cdot dx$.

109. Sei $\underline{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine 2×2 Matrix mit $\det(\underline{A}) = ad - bc \neq 0$, dann gilt $\underline{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

110. ($\to$ 12.4, S. 347) Es werden n aus N Kugeln ohne Zurücklegen gezogen; M der N Kugeln sind Erfolge. Sei $\mathcal{X}$ die Anzahl der gezogenen Erfolge, dann ist $P(\mathcal{X} = k) = \binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k} : \binom{N}{n}$; $E = \frac{n \cdot M}{N}$.

111. (W) (366/13.3.2) Seien $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ Zufallsgrößen, $|\mathcal{X}| = n$, $P(\mathcal{X} = x_i) = p_i$, $(i = 1..n)$, $a, b \in \mathbb{R}$,
$\mu = E(\mathcal{X}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$; Standardabweichung: $\sigma = \sigma(\mathcal{X}) = \sqrt{V(\mathcal{X})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot p_i}$
$E(\mathcal{X} + \mathcal{Y}) = E(\mathcal{X}) + E(\mathcal{Y})$, $E(a\mathcal{X} + b) = a \cdot E(\mathcal{X}) + b$, $V(\mathcal{X}) = E(\mathcal{X}^2) - (E(\mathcal{X}))^2$,
$V(a\mathcal{X} + b) = a^2 \cdot V(\mathcal{X})$, $z = \Phi\left(\frac{x-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$, $\chi^2 = \sum \frac{(n_O - n_e)^2}{n_e}$, $t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s} \cdot \sqrt{n}$.
Falls $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ unabhängig sind, gilt $E(\mathcal{X} \cdot \mathcal{Y}) = E(\mathcal{X}) \cdot E(\mathcal{Y})$, $V(\mathcal{X} + \mathcal{Y}) = V(\mathcal{X}) + V(\mathcal{Y})$.
Eine **Stichprobenverteilung** $\bar{\mathcal{X}} = \frac{\mathcal{X}_1 + .. + \mathcal{X}_n}{n}$ ($\mathcal{X}_i$ identisch verteilt mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ) ist näherungsweise $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ verteilt ($\sigma(\bar{\mathcal{X}}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$).

112. (A) (374/930) **Satz von Schwarz:** Sei $z = f(x, y)$ diffbar, dann gilt $\frac{d}{dx}(\frac{d}{dy}(f)) = \frac{d}{dy}(\frac{d}{dx}(f))$. Die Hessematrix ist symmetrisch.

113. (L) (375/932, 377/934 und 376/933) Sei $P_i(x_i; y_i)$ $(i = 1..n)$ eine Punktwolke.

Die RGP optimierte Regressionsgerade berechnen wir mit folgendem LGS:

$$\begin{array}{lll} m \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & +c \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i & = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \\ m \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i & +c \cdot n & = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{array}$$

Kovarianz: $Cov(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{n}$; Korrelationskoeffizient $r_{x,y} := \frac{Cov(\mathcal{X},\mathcal{Y})}{\sigma(\mathcal{X}) \cdot \sigma(\mathcal{Y})}$;

114. **Lambertsche W-Funktion:** $W(x)$ ist die UKF von xe^x; $e^x + ax = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a} - W(\frac{e^{b/a}}{a})$ $(a, b > 0)$.

115. **(Vorbereitung auf Wettbewerbe)** Wichtige Zahlen sind: $e \approx 2.718$, $\pi \approx 3.1416$, $\sqrt{2} \approx 1.414$, $\sqrt{3} \approx 1.732$, $\sqrt{5} \approx 2.236$, $\sqrt{10} \approx 3.162$, $\ln(2) \approx 0.693$, $\arcsin(0.6) \approx 36.87°$, $\arcsin(0.8) \approx 53.13°$. Ein n-Eck hat $\frac{n}{2}(n-3)$ Diagonalen. Wichtige Zahlenfolgen sind:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	natürliche Zahlen $\cup \{0\}$
$\sum_{i=1}^{n}$	0	1	3	6	10	15	21	28	Dreieckszahlen
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5040	Fakultäten
$\frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$	1	1	2	3	5	8	13	21	Fibonacci-Zahlen

1.1.9 Fehlercodes und Abkürzungen

Folgende Fehlercodes verwende ich in der Regel bei der Korrektur von Arbeiten.

Kürzel	Erklärung	Punktabzug
R, *Vz*, *PvS*, ug	Rechenfehler, Vorzeichen, Punkt vor Strich, ungenau	manchmal
uv / *ub* / *D* / !	unvollständig / unbrauchbar / Denkfehler / schlimmer Fehler	normal ja
Alg = Algorithmus; *Arg*= Argumentation; *AS*= Antwortsatz; *EH*=Einheit; *Erg*=Ergebnis; *Int*=Interpretation; *MA*= mathematischer Ansatz; *Rg* = Rechnung; *Tg*=Tangente sind Zusätze z.B. bei *uv*		
Deshalb	Deshalb bringe ich Ihnen es anders bei	ja
Ad, *FS* , *S*, *SF*, *Sw*	Ausdruck, Fachsprache, Schreibfehler, Schreibweise	nein
Agtxt / *f* / *uk*	Aufgabentext - in der Aufgabe steht etwas anderes / falsch / unklar	meistens
folgenschwer	auch *fatal* R oder SF mit problemändernden Folgen	ja
$\surd$ / ($\surd$)	richtig / mit falschem Wert richtig weitergerechnet	nein
PRWT	die Produktregel (der Ableitung) gilt auch im Wahlteil	ja
Algebra!	die Algebra der Mittelstufe ist mangelhaft	normal ja
GTR	GTR Befehle sind (im Abitur) nicht zugelassen	nein
'I hope so'	hier wurde der Aufgabentext vom Schüler falsch (oder eben anders) interpretiert, was aber leider möglich war	nein
naja	falsche oder dürftige Ausdrucksweise, vermutlich richtig gedacht	nein
wdh, *kü*, *un*	**Hinweise:** wiederholen, kürzen, unnötig, $\ddot{U}$ = Übertrag (aktuelle Punktzahl)	

Die volle Punktzahl ohne Korrekturzeichen bedeutet meist, dass alles richtig ist.

Abkürzungen:
Abs= Abschnitt, Ag = Aufgabe oft als Seite/Nummer,
as = achsensymmetrisch, BAg= Basisaufgabe, BD = Binnendifferenzierung,
ber = berechnen, best=bestimmen, beschr = beschreiben, BFS = Banachscher Fixpunktsatz,
$\overline{DHBW}$= kein Stoff der DHBW Dgl = Differenzialgleichung, diffbar = differenzierbar,
ExAg = Extremwertaufgaben, exp = exponentielles, Fkt = Funktion,
GTR = grafischer Taschenrechner, HA = Hausaufgabe, HP = Hochpunkt,
HgV = hypergeometrische Vert. ia = im allgemeinen, idR = in der Regel,
ihlDglmkK = inhomogene lineare Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten,
KA=Klassenarbeit, KF = Koordinatenform, kü = kürzen
LFZ = Linearfaktorzerlegung, LGS = lineares Gleichungssystem, l.a. (l.u.) linear(un)abhängig

LöVo = Lösungsvorschläge mBdA (oBdA) = mit (ohne) Berücksichtigung der Anordnung
mEn = meines Erachtens nach, MNF = Mitternachtsformel, mf = monoton fallend,
MK = Mathe Känguru Ne = Nenner, **Nst** = Nullstelle,
oZ = ohne Zurücklegen, PFZ = Primfaktorzerlegung, Pkt = Punkt,
PNF = Punktnormalenform, PF = Parameterform ps = punktsymmetrisch,
PSF = Punktsteigungsform, sA= senkrechte Asymptote, smw = streng monoton wachsend,
twwz = teilweise Wurzelziehen SvN = Satz vom Nullprodukt, SvP = Satz von Pythagoras,
TdV = Trennung der Variablen, Tg = Tangente, **TP** = Tiefpunkt,
trig = trigonometrische, UE = Unterrichtseinheit, UKF = Umkehrfunktion,
VdK = Variation der Konst. Vert = Verteilung, Vorber= Vorbereitung,
VZW = Vorzeichenwechsel, wA= waagrechte Asymptote, Wk= Wahrscheinlichkeit,
WP=Wendepunkt, $\lightning$=Widerspruch, Wt = Wachstum, Wth =Wahrscheinlichkeitstheorie
Zä = Zähler **Zch** = Zeichnung ZPF = Zweipunkteformel ZG=Zufallsgröße.

1.1.10 Die Vorbereitung zwischen den Schuljahren

Wie soll ich mich auf das nächste Schuljahr vorbereiten? Was soll ich in den Sommerferien wiederholen? Diese Fragen versuche ich in diesem Abschnitt zu beantworten. Zu einer guten Vorbereitung gehört auch die Wiederholung (Beherrschung) der bis zu diesem Zeitpunkt bekannten Formeln.

Vorbereitung auf Klasse 9: 20/2, 22/11, 31/51, 95/238f, 319/797, 25/28 und 34/65.

Klasse 10: 33/64, 86/214 ab f, 95/238f, 243/629, 333/833, später 89/219, 91/227 und 241/617.

Vorbereitung auf Klasse 11 (GK + LK) 106/271, 116/301, 143/351, 158/402, 258/687, 333/833, 346/863, danach 91/227, 139/338, 145/358, 147/366, 255/676, (255/677, 257/685), LK: 153/389.

Vorbereitung auf den SemKu bzw. auf HM2 für den Abs. 'Die Normalverteilung' 358/13.2
95/238, 110/285, 155/394, ((I*) 163/417, 184/502a), 320/798, nur SemKu: 323/809 + 346/863.

Klasse 12: 337/843, 333/833, 341/854, 345/12.3.11.

Vorbereitung auf das Ingenieurstudium

Sie möchten sich auf ein MINT Studium vorbereiten? Dann ist dieses Buch für Sie genau richtig. Aus dem Schulteil empfehle ich Ihnen besonders folgende Abschnitte:

Klasse 9: Ungleichungen (Abs: 2.2.7), Anwendungen des Umfangswinkelsatzes (Abs: 9.2.11 nur M+I), der Kosinussatz (Abs: 9.4.6), Kugeln (Abs: 9.6.4), Restklassenringe (Abs: 2.4.5, nur M+I);

Klasse 10: das komplette Wachstum (Abs: 4.2), Linearfaktorzerlegungn (Abs: 5.3.11), Symmetrie + Additionstheoreme (Abs: 5.4.3), trigonometrische Gleichungen (Abs: 5.4.6), der Monotoniesatz (Abs: 6.2.6, nur M+I; ja, diesen unterrichte ich in Klasse 10 (jetzt 11) tatsächlich!);

Klasse 11: Folgen (Abs: 4.3), implizites Differenzieren (Abs: 6.3.7, oder wie haben Sie bewiesen, dass $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$?), die komplette Integralrechnung (Abs: 7.1) - beachten Sie hierbei, dass die schweren Themen (184/502) kein Schulstoff mehr sind, Beweise mit Vektoren (Abs: 10.2.4, nur M+I);

Klasse 12 inkl. Vertiefungskurs: Komplexe Zahlen (Abs: 3.1), die Regel von de l'Hospital (Abs: 6.3.11), Taylor und Dgln (Abs: 8.1), das Spatprodukt (Abs: 10.4), die HNF (Abs: 10.5.5).
Falls Sie Mathe, Informatik oder Wirtschaft studieren möchten, sollten Sie auch die komplette Wahrscheinlichkeitstheorie Abs. 12.1 bis 13.2.2 wiederholen.

Vorber **HM1:** 124f, 127g, 129j, 351, 6.2.5, 414, 416, 426, 443, 687, 726, 732, 758, 767b, 771, 776f, 778g.
Vorber **HM2:** 499, 502 a,b,d, 507, 525g, 526gh, 527e, 530e, 532e, 533e, 818, 824, 833, 860f, 863, 869, 873.
Vorber **HM3:** 301, 876, 893, 901, 902e, 906, 916d, 919b, 13.3.4, 13.3.5, 931, 932, 933fk.

1.1.11 Der Versuch eines 1 NP Plans für LK oder BK (ohne Garantie)

Das Abi ist sicher, nur es besteht die Gefahr 0 NP im Mathe-LK-Abi zu schreiben? Dann ist dieser Abschnitt für Sie! Wenn Sie folgende Aufgaben (Themen) beherrschen sollte 1 NP (oder mehr) drin

sein. Grundsätzlich empfehle ich die Minimalanforderungen am Ende vieler Kapitel.

Analysis: 143/351; 170/441; 179/480; 179/481; 106/271; 116/301; 121/317$_{LK}$; 158/402; 184/499;

Geometrie: (241/616$_{LK}$); 258/687; 260/695; 267/726; 272/738$_{LK}$; 276/758; 282/773;

Wahrscheinlichkeit: 333/833$_{LK}$; 346/863; 357/893$_{LK}$; 364/908;

1.2 Der Themenfriedhof (GFS)

Dieser Abschnitt soll an die Themen einnern, die zu meiner Zeit noch Schulstoff waren und inzwischen ersatzlos aus dem Lehrplan gestrichen wurden - (sie nennen es 'entrümpeln'). Ich vermisse Euch alle!

2020: Differenzialgleichungen, (gebrochenrationale)

2016: Folgen (+ Differenzialgleichungen), beschränktes Wachstum; rekursive Darstellungen; Heronverf.

2012: zweiseitiger Hypothesentest, schiefe Asymptoten (stetige Ergänzung) und Näherungskurven, LGS mit Parameter, rechnerischer Nachweis der linearen Abhängigkeit, die Sehnentrapezregel, Kepler-Fass-Regel (Simpsonregel), Polynomdivision, vollständige Induktion;

2011: ε, n_0- Definition der Konvergenz, ε, δ-Definition der Stetigkeit, logistisches Wachstum;

2004: äußere nicht lineare Substitutionsregel der Integration, partielle Integration, lineare Optimierung, Kreisgleichungen, Kugelgleichungen, Additionstheoreme, Sinussatz, Kosinussatz, Boolesche Algebra, Schalteralgebra, Körper und Gruppentheorie auch zyklische Gruppen, Schubspiegelungen, Drehstreckungen inkl. Konstruktion eines Drehstreckzentrums, Ellipsen inkl. Gärtnerkonstruktion und Krümmungskreiskonstruktion, affine Abbildungen, affine Koordinatensysteme, Eigenwerte und Eigenvektoren, Invariantes Rechtwinkelpaar, Nichtdiagonalisierbarkeit von Scherstreckungen, Hauptachsentransformation auch von Kegelschnitten, Konstruktionen bei Achsenaffinitäten, allgemeine Skalarprodukte, Die Cantorschen Diagonalverfahren, Die Russellsche Antinomie, Innere Substitution der Integration, Rotationskörper um die y-Achse, Diskussion von Wurzel und Betragsfunktionen, Aussagenlogik inkl. Isomorphie zur Mengenlehre, Zahlensysteme, Aufbau eines Zahlenbereiches mit den Peanoaxiomen, Satz von Bolzano-Weiherstraß (Weiherstraß'sches Halbierungsverfahren), geometrische Summe, geometrische und die harmonische Reihe, Potenzmengen, Mengenlehre, Determinante;

Bemerkung: 2012 war in BW der flächendeckende Übergang von G9 auf G8 und dieser sollte eigentlich keinen Stoff kosten. Die Einführung des LK 2019 brachte (eigentlich) keinen neuen Stoff.

1.3 Vorworte

1.3.1 Vorwort zur Version 7.0 (2019): mobile Mathe

Hurra Mathe gab es von V7 bis V7.4 (Probe V6.9) als online Version mobile Mathe und wurde von Pascal Köstler entwickelt (vielen Dank). Gezeigt werden Aufgabe, Lösung und zugehörige Videos. Jetzt kann Hurra Mathe überall hin mitgenommen werden und ist auch im Unterricht Tablet-fähig. Leider ist der Support für Mobile Mathe seit 2024 eingestellt worden; daher gibt es keine neuen Versionen.

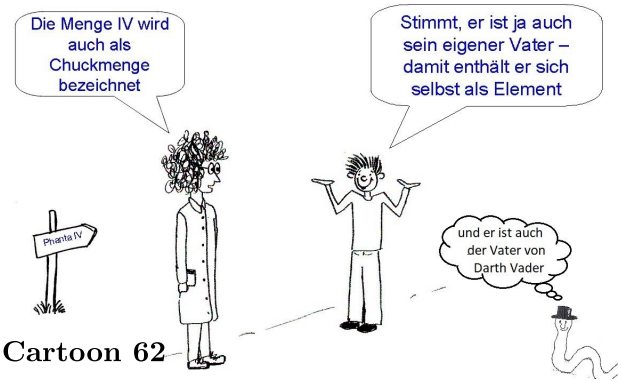
1.3.2 Vorwort zur Version 6.7 (2016): Die Mathematik ist ein Rosamunde-Pilcher-Film

Welche Filme schauen Sie am liebsten? Einen, bei dem am Ende der Held nicht seine Angebetete bekommt, gar stirbt und die Welt in Schutt und Asche liegt? Nein! Deshalb braucht auch jede Mathematikaufgabe ein Happy End. Mein neues Ziel ist es, dass bei allen Aufgaben 'schöne' Ergebnisse (was auch immer das sein mag) herauskommen, auch wenn das mit der Realität nur selten etwas zu tun hat. Es ist wichtig dem Schüler ein gutes Gefühl zu vermitteln. Die Beschreibung der Wirklichkeit ist nicht unsere Aufgabe, sondern die der anwendenden Wissenschaften. Der Mathematik-Unterricht ist wie ein Rosamunde-Pilcher Film: Die Probleme scheinen anfangs unlösbar, am Ende werden alle (manchmal noch mehr) gelöst, und nie geglaubte Verwandtschaften treten zu Tage. Bei Winkelaufgaben (und bei Ag mit ($\overline{\text{RP}}$)) kann dies leider kaum gelingen, deshalb sind diese von diesem Umbau ausgenommen.

In unserem Beispiel wäre $H(P,5)$=false und $H(P,3)$=true.

Betrachten wir wieder ein stark vereinfachtes Programmstück:

```
procedure Y(A:program);
begin
  if H(A,A) then while true do skip
            else skip;
end;
```



Cartoon 62

Das Programm Y hält bei Eingabe von A genau dann, wenn $A(A)$ nicht hält. Es stellt sich die Frage, ob $Y(Y)$ hält oder nicht:

1.Fall: $Y(Y)$ hält, dies bedeutet $H(Y,Y) = true$, dass heißt $Y(Y)$ bleibt beim Durchlauf in der Endlosschleife hängen, hält also nicht an. Dies ist ein Widerspruch.

2.Fall: $Y(Y)$ hält nicht, dies bedeutet $H(Y,Y) = false$, dass heißt $Y(Y)$ bleibt beim Durchlauf nicht in der Endlosschleife hängen, hält also an. Dies ist wiederum ein Widerspruch.

Die Lösung dieses Problems ist, dass es keine Prozedur H geben kann, das Halteproblem ist also unlösbar. Es gibt noch weitere unlösbare Probleme, wie z. B. das Totalitätsproblem. Mehr zu diesen Themen finden Sie in der theoretischen Informatik.

Nachwort

Hurra Mathematik ist kein statisches Werk. Sie halten nur eine Momentaufnahme in den Händen. Einige Lösungen zu den Aufgabenkapiteln und aktuelle Informationen finden Sie auf meiner Webseite: Sd.SLT.biz :-) Leider fehlt weiterhin das Ende von Kapitel 14 (weil ich mich nicht zur Veröffentlichung traue). EVP: 21 € printed in Backnang

14 Anekdoten

14.1 Erziehungs- und Bildungsauftrag

14.1.1 Gleichwertige Feststellung von Schülerleistungen (oder ganze Familie schafft)

Ich freue mich über Ihr Interesse an einer GFS im Fach Mathematik. Besonders empfehlenswert ist eine GFS für Schüler, die auf der Kippe stehen, oder die in Mathematik zu kämpfen haben. Voraussetzung für eine GFS ist, dass alle Klassenarbeiten mitgeschrieben (oder nachgeschrieben) wurden.

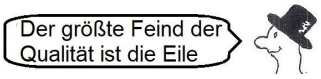
1) Ich nehme nur GFS in Form einer Unterrichtsstunde (45') entgegen. Wenn die Zeugnisnote 'ausreichend' angestrebt wird, ohne dass eine Klassenarbeit mit 'ausreichend' oder besser erreicht wurde, gehört zur GFS auch eine mündliche Prüfung, die zu 50% in die Gesamtnote einfließt. Eine schriftliche Ausarbeitung muss nicht gemacht werden. Bitte schieben Sie die GFS nicht zu sehr nach hinten.

2) Das Thema der GFS muss folgenden Kriterien genügen:
a) Ich muss es verstehen (+ die Klasse muss es verstehen können).
b) Es darf noch nicht im Unterricht behandelt worden sein.
c) Es muss (genügend) mathematischen Gehalt haben.

Somit sind 'Geschichte der Mathematik' oder Wiederholungen normalerweise nicht GFS-fähig. Die GFS sollte (mindestens) ein eigenes Beispiel (also nicht aus meinem Buch) enthalten.

3) Im Allgemeinen hat jede GFS zwei Vortreffen und (wenn gewünscht) ein Nachtreffen: Beim ersten Vortreffen sollten Sie sich ins Thema eingearbeitet haben und eine Unterrichtsstunde im Großen und Ganzen geplant haben. Das Vortreffen sollte spätestens 1 Woche vor dem GFS-Termin stattfinden.

Beim zweiten Vortreffen sollten Sie meine Änderungswünsche eingearbeitet haben. Bitte halten Sie sich an vereinbarte Termine - Termintreue wird mit bewertet.



4) Eine Unterrichtsstunde besteht in der Regel aus (vielen Dank an Frau Straub)
a) einer Problemdarstellung (wichtig: Wecken Sie ein Problembewusstsein beim Schüler) ($\approx$ 5 min),
b) einer Problemlösung am Beispiel (oft wird Teil a gelöst) ($\approx$ 10 min),
c) einer Verallgemeinerung ($\approx$ 5 min),
d) einer Formulierung als Satz (mit Voraussetzung) - arbeiten Sie dies als **Höhepunkt** heraus ($\approx 5'$),
e) dem Beweis (dieser kann auch in der Herleitung b), c) stecken) ($\approx$ 10 min),
f) Beispiele und Übungsaufgaben; eine Aufgabe dauert ca 5 Minuten, ($\approx$ 10 min).

Bemerkung für Referendare: Der vorgestellte Unterrichtsaufbau ist nur als Richtlinie zu sehen. Beachten Sie, dass Sie kurze Zeit für Hausaufgaben einplanen. Überhaupt ist ein guter Unterricht das Ergebnis eines guten **Zeitmanagements.** Es ist wichtig, dass Sie lernen Ihren eigenen Stil zu finden und zu unterrichten und bleiben Sie sich treu, sonst enden Sie als schlechte Kopie. Wenn Sie bei mir hospitieren, machen Sie bitte ein Stundenprotokoll und planen Sie danach Zeit für Fragen + Kritik ein.

5) Die GFS sollte frei (und nicht abgelesen) gehalten werden. Bitte schreiben Sie Wichtiges wie Definitionen und Sätze an und sagen Sie diese nicht nur. Verwenden Sie gerne auch Folien, vor allem an Stellen, an welchen Sie unsicher sind; aber: Sagen Sie etwas dazu und legen Sie die Folie nicht nur auf. Wichtige Teile (oft 4 e) sollten von Ihnen im Unterricht vorgerechnet werden. Es ist kein guter Stil, Folien aufzulegen und 'abschreiben' zu sagen (und sonst nichts); auch angeschriebene Lösungen sollten erklärt und nicht nur reproduziert werden.

6) Sprechen Sie wenn möglich zum Publikum nicht zu schnell und nicht zu leise und schreiben Sie Arbeitsaufträge an. Und reden Sie nicht, wenn andere reden (Ruhe einfordern). Vergewissern Sie sich (eventuell durch Rückfragen), ob etwas beim Zuhörer angekommen ist. Stellen Sie gegebenenfalls Querverweise her. Sollten Sie mein Buch verwenden (oder der Klasse Fragen stellen) sollten Sie die Antwort nicht gleich nach der Fragestellung geben, sondern der Klasse erst Zeit zur Besinnung geben. Bauen Sie etwas 'Spannung' auf und geben Sie die Ergebnisse nicht sofort preis ('überlegt euch, wie das geht'), die Zuhörer sollen die Möglichkeit haben, selbst auf das Ergebnis zu kommen (siehe entdeckendes Lernen). Bitte geben Sie bei Übungsaufgaben nicht nur das Ergebnis, sondern auch noch dessen Rechenweg an.

7) Machen Sie in jedem Falle **Probevorträge** - am besten mit interessiertem Publikum. Fragend entwickelnder Unterricht ist erwünscht (aber nicht notwendig). Achten Sie auch auf angemessene Zeit bei den Arbeitsphasen; vor allem gegen Ende sollten diese nicht zu lang sein.

8) Wichtig: Stellen Sie Kontakt zu den Schülern her. Der Klassenprimus ist ein guter Indikator dafür, ob überhaupt etwas angekommen ist. Sie dürfen (und sollen) gerne durch das Klassenzimmer gehen. Vermeiden Sie lange 'Privatgespäche'; entscheiden Sie, ob eine persönliche Frage individuellen oder allgemeinen Charakter hat und bringen Sie die Frage gegebenenfalls ins Plenum. Bereiten Sie genügend Übungsaufgaben (eventuell auf Folie) vor.

Zum **Outfit** nur soviel: Es sollte evtl. ein Bisschen besser als normal sein. Bitte tragen Sie keine Kleidung mit fragwürdigem Aufdruck (z.B. Totenkopf) (und bei mündlichen Prüfungen keine Turnschuhe).

14.1.2 Leitfaden für mündliche Prüfungen (im Abitur)

(Thx J. Schölkopf + L. Bonfert, 2016) Bei einer mündlichen Prüfung (mP) gibt es 4 Beteiligte: **1)** der Prüfling (= Sie), **2)** der Prüfer (= Sd), **3)** der Protokollant (= ?/Mz) und **4)** der Vorsitzende (das ist hier in der Probeprüfung der ganze Rest der Klasse). Als Protokollant notieren Sie die Fragen von Sd und dessen Bemerkungen; NICHT die Antworten des Prüflings.

Ein Merz und eine Seele

Die mP in Mathe besteht aus einem 10' Präsentationsteil und einem 10' Prüfungsteil. Beim Präsentationsteil erhalten Sie eine Aufgabe (oft mit einer Schar), die Sie 20' vorbereiten. Diesen Vortrag halten Sie meistens mit Ihren Aufzeichnungen unter der Dokumentenkamera, nicht an der Tafel.

16 Abiturvorbereitung

Inhaltsverzeichnis:

16.1	Operatoren aus dem Bildungsplan 2016	1015
16.3	Das WTR Curriculum von Herrn Bittermann	1021
16.4	Inhaltsbezogene Kompetenzen für das Abitur des LK	1023
16.5	Die Abituraufgaben der letzten drei Jahre	1024
16.7	Stochastik-Abiturteile vor 2019 komplett auf Niveau Klasse 10	1053
16.8	Die mündliche Prüfung des Basiskurses (GK)	1055
16.9	Wegen Platzmangels aussortierte Abiture uä	1063
16.10	Musteraufgaben für das Abitur 2021+23	1069
16.11	Aufgaben aus dem IQB-Pool (Aufgaben: IQB21.slt.biz)	1105
16.11.7	Funktionen aus dem Analysisteil des Leistungskurses	1121
16.11.8	Aufgaben aus dem Mathe Känguru ohne WTR	1121

`Die LoeVo aus Kap 16 finden Sie unter  http://www.slt.biz/Unterricht/Kapitel16.htm`

Zwar darf ich mit Ihnen keine Absprachen treffen, aber von der Weitergabe meiner bisherigen Wahlen hat niemand etwas gesagt. Deshalb hier der Abschnitt 'Wie habe ich gewählt?'

2026: 2 2 2, 2025: 1 1 2, 2024: 1 2 2, 2023: 1 1 2 2, 2022: 2 1 2 1, 2021: 2 2 2 2, 2020: 1 1 1, '19: 2 1 1, '18: 1 2 2, '17: 1 1 1, '16: 2 1, '15: 2 1, '14: 1 2, '13: 1 2, '12: 3 2, '11: 3 2, '10: 3 1.

16.1 Operatoren aus dem Bildungsplan 2016

Die Bemerkungen in eckigen Klammern [ ] sind Zusätze von mir.

In den Standards für inhaltsbezogene Kompetenzen werden Operatoren (handlungsleitende Verben [Imperative]) verwendet. Standards legen fest, welche Anforderungen die Schülerinnen und Schüler in der Regel erfüllen. Zusammen mit der Zuordnung zu einem der drei Anforderungsbereiche (AFB) dienen Operatoren einer Präzisierung. Dies sichert das Erreichen des vorgesehenen Niveaus und die angemessene Interpretationen der Standards.

16.1.1 Beschreibung der drei Anforderungsbereiche

AFB I umfasst das Wiedergeben von Sachverhalten und Kenntnissen sowie das Anwenden und Beschreiben geübter Arbeitstechniken und Verfahren [Reproduktion: Aufgabenniveau 1 und teilweise 2].

AFB II umfasst das selbstständige Verarbeiten und Darstellen bekannter Sachverhalte in einem durch Übung bekannten Zusammenhang und das selbstständige übertragen des Gelernten auf vergleichbare, neue Sachverhalte [Reproduktion und teilweise Transfer: Aufgabenniveau 2-3].

AFB III umfasst das Verarbeiten komplexer Sachverhalte mit selbstständiger Auswahl geeigneter Arbeitstechniken mit dem Ziel, zu selbstständigen Lösungen, Gestaltungen oder Deutungen, Folgerungen, Verallgemeinerungen, Begründungen und Wertungen zu gelangen und das eigene Vorgehen zu reflektieren [Transfer: Aufgabenniveau 3-5].

16.1.2 Zuordnung zu Anforderungsbereichen

Die Zuordnung eines Operators ist im Einzelfall auch vom Kontext von Aufgabenstellungen und ihrer unterrichtlichen Einordnung abhängig. Im Folgenden werden die Operatoren dem überwiegend in Betracht kommenden Anforderungsbereich zugeordnet. Verben der mathematischen Fachsprache Handlungsleitende Verben wie rechnen, multiplizieren, lösen, differenzieren, zeichnen, messen, erweitern, kürzen, umwandeln, vergrößern, abschätzen, schließen, konstruieren, Darstellungen wechseln oder ineinander überführen werden hier nicht beschrieben. Ihre Bedeutung ist fachsprachlich defi- niert, die Zuordnung zu einem Anforderungsbereich ist dem Kontext zu entnehmen.

Operatoren	Beschreibung	AFB
angeben, nennen	Ergebnisse numerisch oder verbal formulieren, ohne Darstellung des Lösungsweges und ohne Begründungen	I
anwenden, durchführen	nach bekannten Regeln oder Anweisungen von einer Aufgabenstellung zu einem definierten Ziel gelangen	II
auswerten	Daten, Einzelergebnisse oder sonstige Sachverhalte zu einer abschließenden, begründeten Gesamtaussage zusammenführen	II
begründen	eine Aussage, einen Sachverhalt durch Berechnungen, nach gültigen Schlussregeln, durch Herleitungen oder inhaltliche Argumentation verifizieren oder falsifizieren	III
berechnen	Ergebnisse von einem Ansatz oder einer Formel ausgehend durch Rechenoperationen gewinnen. Die Argumentation mit Hilfe einer Zeichnung genügt nicht. [Die Ergebnisse sind ausreichend vereinfachter Form anzugeben.]	I [-III]
beschreiben, formulieren	einen Sachverhalt oder ein Verfahren in vollständigen Sätzen unter Verwendung der Fachsprache mit eigenen Worten wiedergeben (hier sind auch Einschränkungen möglich: 'Beschreiben Sie in Stichworten') beziehungsweise in einer vorgeschriebenen Form darstellen (zum Beispiel: 'Beschreiben Sie als Term')	II
bestimmen, erschließen, erläutern	Lösungen, Lösungswege beziehungsweise Zusammenhänge auf der Basis von Vorkenntnissen oder Verfahren finden und darstellen. Die Argumentation mit Hilfe einer Zeichnung kann genügen.	II
beurteilen, bewerten	einen Sachverhalt nach fachwissenschaftlichen oder fachmethodischen Kriterien, persönlichem oder gesellschaftlichem Wertebezug begründet einschätzen und ein selbstständiges Urteil formulieren	III
beweisen, [**zeigen**]	Aussagen unter Verwendung von bekannten mathematischen Sätzen, logischen Schlüssen und Äquivalenzumformungen und unter Beachtung formaler Kriterien verifizieren	III
darstellen	mathematische Objekte in einer fachlich üblichen oder in einer vorgeschriebenen Form wiedergeben graphisch darstellen: Anfertigen einer zeichengenauen, graphischen Darstellung auf der Basis der genauen Wiedergabe wesentlicher Punkte beziehungsweise maßgetreues oder maßstäbliches zeichnerisches Darstellen eines Objekts	I
deuten, interpretieren	Sachverhalte, Phänomene, Strukturen oder Ergebnisse in eine andere mathematische Sichtweise umdeuten oder rückübersetzen auf das ursprüngliche Problem	II
entnehmen	aus vorgegebenen Darstellungen Daten zur Beantwortung von Fragen oder zur Weiterbearbeitung aufbereiten	II
erkennen	Muster ohne ausführliche Begründung feststellen beziehungsweise feststellen, dass in einer Situation bestimmte fachliche Definitionen zutreffen	I
erklären, erläutern	Sachverhalte auf der Grundlage von Vorkenntnissen so darlegen und veranschaulichen, dass sie verständlich werden	II
identifizieren	mathematische Objekte und die zugehörigen Fachbegriffe begründet miteinander verbinden	I
nutzen, umgehen mit, verwenden	Fachbegriffe, Regeln, mathematische Sätze, Zusammenhänge oder Verfahren auf einen anderen Sachverhalt beziehen	II
skizzieren	die wesentlichen Eigenschaften eines Objekts graphisch vereinfacht darstellen	II
überprüfen	durch Anwendung mathematischer Regeln oder Kenntnisse in einer ergebnisoffenen Situation einen vorgegebenen Sachverhalt verifizieren oder falsifizieren	III

untersuchen	Sachverhalte, Probleme, Fragestellungen nach bestimmten, fachlich üblichen beziehungsweise sinnvollen Kriterien zielorientiert erkunden. [Betrachten (berechnen) Sie alle möglichen Fälle]	II
vergleichen	Gemeinsamkeiten und Unterschiede herausarbeiten	II
zuordnen	einen begründeten Zusammenhang zwischen Objekten oder Darstellungen herstellen	II

16.1.3 Anforderungen an Schülerlösungen und deren Dokumentation

Von den Schülerinnen und Schülern wird eine saubere und nachvollziehbare Dokumentation erwartet, dazu gehören insbesondere:

1) durch Verbalisierung des Vorgehens und Ergebnissätze strukturierte Darstellung

2) angemessener sprachlicher Ausdruck, insbesondere korrekte Fachsprache

3) Definition neu eingeführter Bezeichnungen (insbesondere von Zufallsgrößen)

4) keine Angaben über Tastenfolgen von WTR-Eingaben

Wird in einer Aufgabenstellung ein 'exakter Wert' gefordert, dann ist damit ein mathematisch exakter Ausdruck (z.B. $\frac{6}{7}$, $\ln(2)$, $\frac{\sqrt{2}}{\pi}$,) gemeint, nicht eine gerundete Dezimalzahl.

16.2 Das Formeldokument

'Wer intelligent genug ist, das Formeldokument verwenden zu können, braucht es nicht'; *Sd.*

Im Abitur ist das Formeldokument (FD) nur für den Notfall gedacht. Normalerweise sollten Sie alle Formeln des Formeldokumentes sowieso auswendig beherrschen.

(1) Die Darstellung des FD ist stark reduziert. Oft fehlen die Definition oder Einschränkung der Variablen: Bsp a: Im Dreieck gilt: $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$ ohne zu erklären, was g und h ist.
Bsp b: $\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$; es fehlt: Seien $a, b, c > 0$, $a \neq 1$.

(2) Manche Inhalte beginnen mit 'Folgende Aussagen sind äquivalent'. Dabei entspricht oft die erste Aussage der 'Begrifflichkeit' (Definition); die weiteren Aussagen entsprechen mathematischen Inhalten (Formeln oft in Prosa) dazu.

(3) Die Notation ist teilweise neu (anders, gewöhnungsbedürftig). Unter anderem werden Variablen umbenannt. **Bsp:** $u^2 + v^2 = w^2$.

(4) Mein Unterricht ist teilweise anders fokussiert: Im Unterricht verwenden wir die a, b, c-Formel; im FD steht die p, q-Formel (die Sie gerne auch verwenden dürfen).

Das vorliegende FD ist komprimiert und enthält Nummern und Verweise (FS = Formelsammlung (ab Seite 4); Ag = Aufgabe; Abs = Abschnitt). Zur Vorbereitung und in Klassenarbeiten müssen Sie das Original http://FD.slt.biz verwenden.

16.2.1 Grundlagen

1. **Ähnlichkeit zweier Dreiecke:** etwa FS 6/21, Ag 229/557.

   Die folgenden Aussagen zu zwei Dreiecken sind äquivalent:

   (1) Die Dreiecke sind ähnlich.

   (2) Die Größen der Winkel des einen Dreiecks stimmen mit den Größen der Winkel des anderen Dreiecks überein.

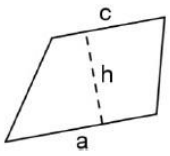
(3) Die Verhältnisse der Seitenlängen des einen Dreiecks stimmen mit den Verhältnissen der Seitenlängen des anderen Dreiecks überein.

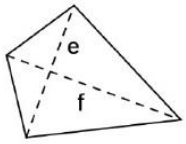
2. **Binomische Formeln:** FS 5/11; Ag 20/4.
   $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$;

3. **Maße von Figuren:** FS 5/5, Ag 243/632.

Dreieck:	Parallelogramm:	Trapez:	Drachenviereck:	Kreis
$A = \frac{1}{2}g \cdot h$;	$A = g \cdot h$;	$A = \frac{a+c}{2} \cdot h$;	$A = \frac{1}{2}e \cdot f$;	$A = \pi r^2$; $U = 2\pi r$;

Ein Parallelogramm mit vier gleich langen Seiten wird als Raute bezeichnet.





4. **Maße von Körpern:** FS 8/42, Abs 244/9.6.2;

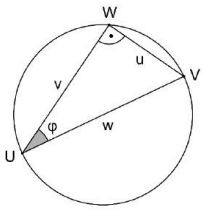
Prisma:	Pyramide:	Zylinder:	Kegel
$V = A_G \cdot h$;	$V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h$;	$V = A_G \cdot h$;	$V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h$;
		für gerade Zylinder	für gerade Kegel
		$A_O = 2 \cdot A_G + 2\pi \cdot r \cdot h$;	$A_O = A_G + \pi \cdot r \cdot m$;

(m: Abstand der Spitze [des Kegels] vom Rand der Grundfläche)

5. **Potenzen und Logarithmen:** FS: 6/23, Abs 38/2.3.2 + FS 7/27, Abs 41/2.4.1.
   $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$ $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$; $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$; $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$
   $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$; $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$; $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$;
   $\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$ $\log_a(\frac{b}{c}) = \log_a(b) - \log_a(c)$ $\log_a(b^r) = r \cdot \log_a(b)$

6. **Quadratische Gleichung:** FS: 6/19, Abs 32/2.2.6.
   $x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ und $x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ sind die Lösungen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$.

7. **Rechtwinkliges Dreieck:** FS: 7/34, Ag 240/613.
   (1) $\sin(\varphi) = \frac{u}{w}$;
   (2) $\cos(\varphi) = \frac{v}{w}$;
   (3) $\tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \frac{u}{v}$;



8. **Satz des Pythagoras:** FS: 7/29, Ag 234/584.

   Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, dann gilt für die Längen u und v der beiden Katheten und die Länge w der Hypotenuse $u^2 + v^2 = w^2$.

   Wenn für die Längen u, v und w der Seiten eines Dreiecks $u^2 + v^2 = w^2$ gilt, dann hat dieses Dreieck einen rechten Winkel, der der Seite mit der Länge w gegenüber liegt.

9. **Satz des Thales:** FS: 5/13, Abs 227/9.1.8.

   Wenn ein Dreieck beim Eckpunkt W einen rechten Winkel hat, dann liegt W auf dem Kreis, der den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite als Mittelpunkt hat und durch die beiden anderen Eckpunkte verläuft.

   Wenn der Eckpunkt W eines Dreiecks auf dem Kreis liegt, der den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite als Mittelpunkt hat und durch die beiden anderen Eckpunkte verläuft, dann hat dieses Dreieck bei W einen rechten Winkel.

10. **Symbole in Verbindung mit Mengen:** FS: −, Ag 98/245 + Ag 313/12.1.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$; $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$; $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$;
$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$; $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$; $]a; b[= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$;
$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$ $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$ $A \backslash B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$

11. **Trigonometrie:** FS: 9/60, Abs 109/5.4.3.

    $\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$; $\sin(\varphi - 90°) = -\cos(\varphi)$; $\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1$;
    $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$; $\cos(\varphi - 90°) = \sin(\varphi)$;

12. **Winkelmaße:** FS: 9/59, Abs 108/5.4.2.

    Beträgt die Größe eines Winkels im Gradmaß 360°, so beträgt sie im Bogenmaß 2π.

16.2.2 Analysis

13. **Ableitung:** FS: 9/54, Abs 136/6.1.3.

    $$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

14. **Ableitungen ausgewählter Funktionen:**

    FS: 9/56, Ag 137/327; FS: 10/63, Ag 114/293; FS: 11/73, Ag 159/405 + 163/422.

Term der Funktion	x^r	$\sin(x)$	$\cos(x)$	e^x	$\ln(x)$	$x \ln(x) - x$
Term der Ableitungsfunktion	$r \cdot x^{r-1}$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	e^x	$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$

15. **Ableitungsregeln:** FS: 9/57, Ag 137/329; FS: 11/76, Ag 161/411; FS: 11/77, Ag 162/415.

Term der Funktion	$k \cdot u(x)$	$u(x) + v(x)$	$u(x) \cdot v(x)$	$u(v(x))$
Term der Ableitungsfunktion	$k \cdot u'(x)$	$u'(x) + v'(x)$	$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$	$u'(v(x)) \cdot v'(x)$

16. **Ableitung von Integralfunktionen:** FS: 11/79, Ag 174/454.

    Für $I(x) = \int_a^x f(t)dt$ gilt $I'(x) = f(x)$.

17. **Bestimmtes Integral:** FS: 11/80, Ag 175/455.

    Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

18. **Grenzwerte:** FS: 11/75, Ag 161/409.

    Ist $p(x)$ ein Polynom, so gilt $\lim_{x \to \infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0$.

    Ist $p(x)$ ein nicht konstantes Polynom, so gilt $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{p(x)} = 0$.

    Ist $p(x)$ ein Polynom ohne konstanten Summanden, so gilt $\lim_{x \to 0} p(x) \cdot \ln(x) = 0$.

19. **Rotationskörper:** FS: 11/83, Ag 181/487.

    $V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx$.

20. **Schneiden und Berühren zweier Funktionsgraphen:** FS: −, Ag 139/342

    Die Graphen zweier Funktionen f und g schneiden sich in einem Punkt genau dann, wenn sie diesen Punkt gemeinsam haben.

    Die Graphen zweier Funktionen f und g berühren sich in einem Punkt genau dann, wenn sie diesen Punkt gemeinsam und dort die gleiche Steigung haben.

21. **Zueinander senkrechte Geraden:** FS: 7/28, Ag 233/580.

    Zwei Geraden mit den Steigungen m_1 und m_2 sind genau dann senkrecht zueinander, wenn $m_1 \cdot m_2 = -1$ gilt.

16.2.3 Analytische Geometrie / Lineare Algebra

22. **Skalarprodukt:** FS: 11/85, Ag 252/664.

$a \circ b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ $\quad a \circ b = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$ $\quad \vec{a} \circ \vec{a} = |\vec{a}|^2$.

23. **Ebenen:** FS: 12/91, Ag 262/704.

(i) Parameterform: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$

(ii) Koordinatenform: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k = 0$

(iii) Normalenform: $\vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0$

16.2.4 Stochastik

24. **Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit:**

$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ FS: 8/39, Ag 327/817 + Ag 328/819.

Die folgenden Aussagen zu Ereignissen A und B sind äquivalent:

(i) A und B sind stochastisch unabhängig.

(ii) $P_B(A) = P(A)$

(iii) $P_A(B) = P(B)$

25. **Binomialkoeffizient:** FS: 8/47, Abs 333/12.3.1.

$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

26. **Zufallsgrößen:** FS: 8/38, Ag 323/809; FS 9/51, Ag 343/856; FS: 12/90, Abs 361/13.2.2.

(i) Für eine Zufallsgröße $\mathcal{X}$ mit den Werten $x_1, x_2, ...x_n$ gilt:

(a) Erwartungswert: $E(\mathcal{X}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(\mathcal{X} = x_i)$

(b) Varianz: $Var(\mathcal{X}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(\mathcal{X}))^2 \cdot P(\mathcal{X} = x_i)$

(c) Standardabweichung: $\sqrt{Var(\mathcal{X})}$

(ii) Für eine binomialverteilte Zufallsgröße $\mathcal{X}$ gilt:

(a) $P_p^n(\mathcal{X} = k) = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

(b) Erwartungswert: $\mu = n \cdot p$

(c) Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

(iii) Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsgröße: $\varphi(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

27. **Sigma-Regeln:** FS: 12/90, Abs 361/13.2.2.

Ist $\mathcal{X}$ eine normalverteilte Zufallsgröße, so gilt:

(i) $P(\mu - \sigma \leq \mathcal{X} \leq \mu + \sigma) \approx 68.3\%$

(ii) $P(\mu - 1.64\sigma \leq \mathcal{X} \leq \mu + 1.64\sigma) \approx 90.0\%$

(iii) $P(\mu - 1.96\sigma \leq \mathcal{X} \leq \mu + 1.96\sigma) \approx 95.0\%$

(iv) $P(\mu - 2\sigma \leq \mathcal{X} \leq \mu + 2\sigma) \approx 95.4\%$

(v) $P(\mu - 2.58\sigma \leq \mathcal{X} \leq \mu + 2.58\sigma) \approx 99.0\%$

(vi) $P(\mu - 3\sigma \leq \mathcal{X} \leq \mu + 3\sigma) \approx 99.7\%$

28. **Prognoseintervall und Konfidenzintervall (nicht abirelevant in BW):** FS: −, Abs −.

    Für eine binomialverteilte Zufallsgröße gilt näherungsweise:

    (i) Prognoseintervall: $\left[p - c \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}; p + c \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\right]$

    (ii) Die Gleichung $|h - p| = c \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$ liefert die beiden Grenzen eines Konfidenzintervalls für den Wert von p.

29. **Signifikanztest:** FS: −, Abs 450/14.22.5.

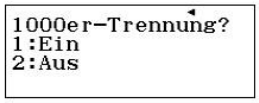
    Wird die Nullhypothese irrtümlich abgelehnt, so bezeichnet man dies als Fehler erster Art. Das Signifikanzniveau ist der Wert, den die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art nicht überschreiten soll.

    Wird die Nullhypothese irrtümlich nicht abgelehnt, so bezeichnet man dies als Fehler zweiter Art.

16.3 Auszug aus dem WTR Curriculum von Herrn Bittermann

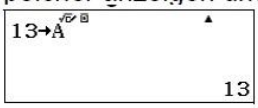
16.3.1 Basisfunktionen bis Klasse 8

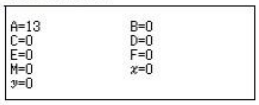
Tausender-Trennung ein-/ausschalten
Im Setup-Menü: SHIFT MENU ▼ ▼ 2



--> **Werte speichern**
gespeicherte Werte abrufen und löschen.
Zahl 13 unter A speichern, Speicher anzeigen und löschen:

1 3 STO (−) =

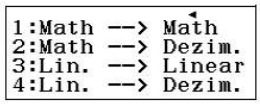




SHIFT STO

SHIFT 9 2 = AC

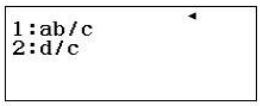
--> **Setup-Einstellungen**
Einstellung der Präferenzen Bruch oder Dezimalzahl als Ergebnis
SHIFT MENU 1



Option 1: Ausgabe als Zahl in math. Schreibweise
Option 2: Ausgabe als Dezimalzahl
Option 3 und 4: Eingabe ohne math. Schreibweise – nicht zu empfehlen!

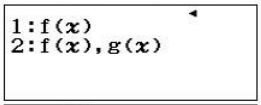
--> Es kann immer zwischen den Anzeigen umgeschaltet werden mit der Taste S⇔D. (Schmid - Taste)

Einstellung des Bruchergebnisses als Bruch oder gemischte Zahl.
Empfehlung: als Bruch.
SHIFT MENU ▼ 1

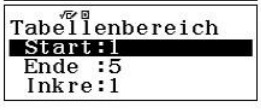


16.3.2 Wertetabellen von Funktionen (ab Ag 84/206)

--> Im Setup-Menü kann man festlegen, ob die Wertetabelle für eine oder zwei Funktionen angezeigt wird. SHIFT MENU ▼ 4



Eingabe der Wertetabelle:
MENU 6 x x^2 = 2 x =



Eingabe von Start- und Endwert incl. Schrittweite.
Man kann jetzt direkt in der Wertetabelle einzelne Argumente ändern (überschreiben). Es wird sofort der neue Funktionswert berechnet.

Mit der Taste AC kommt man zurück zur Eingabe der Funktionsgleichung.

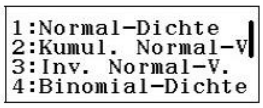
Aus der Wertetabelle heraus kommt man mit SHIFT OPTN zur Anzeige des QR-Codes, den man z.B. mit einem Smartphone auslesen kann. Die Schaubilder werden angezeigt.

16.3.3 Berechnung von Binomialkoeffizienten (ab Ag 334/836)

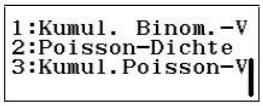
--> Binomialkoeffizienten können direkt berechnet werden,
$\binom{10}{2}$ wird mit nCr im WTR eingegeben:
[1] [0] [SHIFT] [÷] [2] [=]

16.3.4 Die Binomialverteilung (ab Ag 340/852)

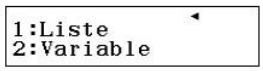
--> Einstellung des richtigen Menü-Eintrages:
[MENU] [4]



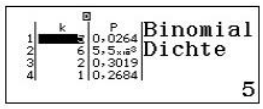
Menüpunkt [4] führt zur Binomialverteilung, geht man ins Menü der nächsten Seite, kommt man zur kumulierten Binomialverteilung.
Zur Eingabe der Werte für k, n und p geht man zu Eintrag „2:Variable“.

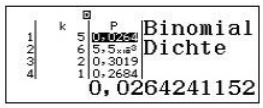


Es können die Werte eingegeben werden. [=] führt wieder zurück zur Eingabe neuer Werte.
Will man eine Übersicht mehrerer Werte für k und/oder p, so geht man zu „1:Liste“. Es können Werte für k eingegeben werden. [=] führt weiter zur Eingabe der Werte für n und p.



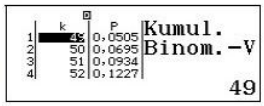
Es können die Werte für k auch direkt in der Tabelle geändert werden.
Geht man mit den Pfeiltasten auf das Ergebnis für P, kann man dieses auch z.B. unter A speichern:
[▶] [STO] [(−)]



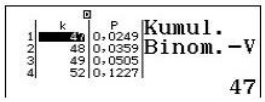


16.3.5 Testen von Hypothesen (ab Ag 352/878)

Beispiel: Die Nullhypothese H_0: $p \geq 0{,}3$ soll mit einem Stichprobenumfang von n = 200 auf einem Signifikanzniveau von 5% getestet werden. Bestimmen Sie die Entscheidungsregel.
Hier liegt ein linksseitiger Test vor. X ist die Anzahl der Treffer der Stichprobe und im Extremfall binomialverteilt mit n=200 und p=0,3.
Es muss gelten: $P(X \leq k) < 0{,}05$. Gesucht ist der größte Wert für k, der diese Bedingung erfüllt.
Der Erwartungswert von X ist $E(X)=200 \cdot 0{,}3=60$, also muss k kleiner als 60 sein.
Die Wahrscheinlichkeiten sind noch zu hoch. Direkt in der Tabelle können die Werte für k korrigiert werden. Bestätigung mit [=] führt zur Eingabe von n und p. [=] auch hier berechnet die Werte neu.

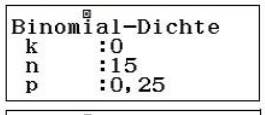


Somit ist der Ablehnungsbereich der Nullhypothese von 0 bis 48, im Bereich von 49 bis 200 kann die Nullhypothese nicht abgelehnt werden.

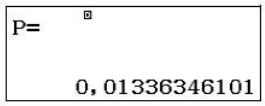


16.3.6 Binomialverteilung: n bestimmen / Mimimi Aufgaben (ab Ag 345/861)

Beispiel: Wie oft muss man das Glücksrad mindestens drehen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über 99% mindestens einmal die Farbe Blau zu bekommen?



Wahrscheinlichkeit für Blau beträgt ¼.
Es ist zu berechnen:
$P(X \geq 1) > 0{,}99 \Leftrightarrow P(X=0) < 0{,}01$



P ist zu groß. Durch [=] Ändern des Wertes für n.
Für n=17 erhält man 0,0075

Dieses Werk ist lizenziert unter einer CC BY NC SA 4.0 International Lizenz.

Winkeleinheit wechseln: Im Setup-Menü: [SHIFT] [MENU] [▼] [▼] [3] 1=Gradmaß 2=Bogenmaß

16.4 Inhaltsbezogene Kompetenzen für das Abitur des LK

Im LK-Abitur rechne ich ua (thx Hmb) mit den Themen Extremwertag, Tangenten von außerhalb, Vektorbeweis + LGS mit Parameter.

16.4.1 Algebra: (Voraussetzung)

Faktorisierung durch Ausklammern	Ag. 20/2	Abs. 40/2.3.5	Kl. 8
Anwendung einer binomischen Formel 'rückwärts'	Ag. 21/6	Abs. 40/2.3.5	Kl. 8
Substitution	Abs. 40/2.3.5		Kl. 8
Lineare Gleichungen (z.B. $ax = x + 3$)	Ag. 23/18 -	24/20	Kl. 8
Quadratische Gleichungen	Ag. 32/58	33/60	Kl. 8
Potenzgleichungen mit natürlichen Exponenten	Ag. 39/94		Kl. 9
Exponentialgleichungen (mit beliebiger Basis)	Ag. 41/106	Ag. 160/407	Kl. 9+11
Wurzelgleichungen	Abs. 37/2.2.8		Kl. 8+9
Bruchgleichungen	Ag. 35/69		Kl. 8+9
Trigonometrische Gleichungen	Ag. 113/289		Kl. 10
Betragsgleichungen	Ag. 37/79		Kl. 8
Lösen von Ungleichungen	Abs. 35/2.2.7		Kl. 8
Lineare Gleichungssysteme (auch mit Parameter)	Abs. 252/10.1.8	277/10.6	Kl. 8-11

nicht: Mehrfaches Quadrieren (bei mehreren Wurzeltermen), Bruchgleichungen, mit mehreren Linearfaktoren im Nenner, Angabe aller Lösungen bei trigonometrischen Gleichungen, Auflösung einer Ungleichung durch Äquivalenzumformungen, (LGS mit Parameter 'links')

16.4.2 Analysis: (Im Wahlteil 30 BE)

Kenntnis grundlegender Funktionstypen und ihrer charakteristischen Eigenschaften:			
Potenzfunktionen und ganzrationale Funktionen	Abs. 91/5.2.1,	95/5.3	Kl. 9+10
trigonometrische Funktionen	Abs. 108/5.4		Kl. 10
einfache gebrochen-rationale Funktionen	Abs. 117/5.5		Kl. 11
natürliche (und allgemeine neu '24) Exponentialfkt	Abs. 159/6.3		Kl. 11
einfache Wurzel, ln und Umkehr-Funktionen	Abs. 91/5.2,	Ag 165/428	Kl. 9+11
Bei Umkehrfunktionen speziell Definitions und Wertebereich, Graph und Funktionsterm			
Wirkung von Parametern, insbesondere:			
Verschiebungen in x- und y-Richtung	Abs. 165/6.3.8,	416/14.11.7	Kl. 8-10
Streckungen in x- und y-Richtung	Abs. 84/208	110/5.4.4	Kl. 8-10
Spiegelungen an x- bzw. y-Achse	Abs. 99/5.3.6		Kl. 8-10
Zusammengesetzte Funktionen: Summen, Differenzen:			
einfache Produkte, Quotienten einfache Verkettungen	Abs. 92/5.2.3,	161/6.3.4	Kl. 9-11
Bestimmung von Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften:			
Interpolation; 'Steckbriefaufgaben'	Abs. 153/6.2.10,	278/10.6.2	Kl. 10+11
Funktionenscharen, (Ortslinien fehlt ab 2024)	Abs. 96/5.3.2,	155/6.2.11	Kl. 10
{höhere} Ableitung (e: {*higher order*} *derivative*)	Abs. 138/6.1.7,	159/6.3	Kl. 10
Änderungsrate	Abs. 58/4.2.5,	199/8.2.1	Kl. 10-11
Ableitungsfunktion, Tangente und Normale	Abs. 138/6.1.7,		Kl. 10
Ableitungsregeln:			
Potenzregel, Summen- und Faktorregel	Abs. 137/6.1.5	137/6.1.6	Kl. 10
Kettenregel, Produktregel	Abs. 161/6.3.4	162/6.3.6	Kl. 11
Untersuchung von Funktionen (quasi madness) und Graphen, insbesondere:			
Definitions- und Wertemenge	Ag 165/428,	97/5.3.4	Kl. 9-10
Nullstellen, elementare Symmetrie	Abs. 101/5.3.8	105/5.3.12	Kl. 10
Grenzverhalten, senkrechte und waagerechte Asymptoten	Abs. 100/5.3.7	117/5.5	Kl. 10+11
Monotonie, Krümmungsverhalten	Abs. 145/6.2.4,	149/6.2.6	Kl. 10
Extrempunkte, Wendepunkte	Abs. 143/6.2		Kl. 10

Anwendung der Differenzialrechnung, insbesondere:			
Extremwertbestimmungen, auch mit Nebenbedingungen	Abs. 87/5.1.3,	147/6.2.5	Kl. 10
Stammfunktionen:			
Summenregel, Faktorregel, lineare Substitution	Abs. 176/7.1.8,	178/7.1.10	Kl. 11
Integralfkt, Hauptsatz der Differential- und Integralrg	Abs. 174/7.1.5	175/7.1.6	Kl. 11
Anwendungen der Integralrechnung:			
Berechnung von Flächeninhalten	Abs. 179/7.1.11,	179/7.1.12	Kl. 11
(nicht ab 24) Ber. unbegrenzter Flächen + Mittelwerte	Abs. 180/7.1.13	182/7.1.15	Kl. 11
rekonstruierter Bestand, Volumen von Rotationskörpern	Abs. 177/467	181/7.1.14	Kl. 11

nicht: Folgen (Abs. 55/4.2), Iterationen (zB Newton), Differenzialgleichungen (Abs. 199/8.2)

16.4.3 Analytische Geometrie: (Im Wahlteil 20 BE)

Vektor, Ortsvektor, Betrag	Abs. 250/10.1.4,	249/10.1.2	Kl. 10
Linearkombination, Geraden	Abs. 252/10.1.9,	253/10.1.10	Kl. 10
Ebenen (Parameter-, Koordinaten-, Normalenform),	Abs. 262/10.3		Kl. 12
Geraden- und Ebenenscharen	Ag. 255/677,	267/725	Kl. 10+12
Lagebeziehungen Abs: 254/10.1.12,	264/10.3.5,	266/10.3.7	Kl. 10+12
Skalarprodukt, Orthogonalität, Vektorprodukt	Abs. 258/10.2,	268/10.4	Kl. 10+11
Spiegelungen Abstands- und Winkelberechnungen	Abs. 250/10.1.5,	272/10.5	Kl. 10+12
Abstand windschiefer Geraden	Abs. 274/10.5.6		Kl. 10+11
Flächen- und Volumenberechnungen	Abs. 268/10.4		Kl. 12
zeichnerische Darstellung von Objekten im Raum:			
Schrägbilder, Spurpunkte, Spurgeraden	Abs. 248/10.1.1,	265/10.3.6	Kl. 10+12
Anwendung der analytischen Geometrie:			
Beschreibung von Bewegungen im Raum	Abs: 257/10.1.14,	275/10.5.7	Kl. 10+12
nicht ab 2024: Beweise mit Hilfe von Vektoren	Abs. 261/10.2.4		Kl. 11

nicht: Verfahren des geschlossenen Vektorzugs (Abs. 270/10.4.5)

16.4.4 Stochastik: (Im Wahlteil 20 BE)

Wahrscheinlichkeitsverteilung	Abs. 318/12.1.4		Kl. 8+9
mehrstufige Zufallsexperimente, Bäume, Pfadregeln	Abs. 319/12.1.5		Kl. 8+9
Erwartungswert, Neu: Standardabweichung, Varianz	Abs. 323/12.2.2		Kl. 9
nicht ab 2024: stetige Zufallsgröße, Dichtefunktion	Abs. 358/13.2.1		Kl. 11
Formel von Bernoulli, Binomialverteilung	Abs. 338/12.3.5 -	340/12.3.6	Kl. 10
Erwartungswert, Standardabweichung Histogramme	Abs. 343/12.3.7,	343/12.3.8	Kl. 10
Testen von Hypothesen mithilfe der Binomialverteilung			
ein- und zweiseitiger Test	Abs. 350/13.1.1 -	355/13.1.4	Kl. 11
Fehler 1. und 2. Art	Abs. 350/13.1.1,	355/13.1.5	Kl. 11
Normalverteilung (Dichte, μ, σ, Glockenkurve)	Abs. 358/13.2		Kl. 11

16.5 Die Abituraufgaben '24-'26, Filme: http://Abi26.slt.biz

16.5.1 Teil A Abitur 2026 Filme: http://Abi26.slt.biz

Was sollte ich vom Abitur 2026 nach welcher Unterrichtseinheit können?

Kl.10: P4, W2, W5, I 1.1, I 1.2ac, I 2.2, III 1abc **UE 11$_2$:** P1, I 2.1a-c, I 2.3,
UE 11$_3$: P2, W1, I 1.2b, I 2.1d-f **UE 11$_6$:** W3, W4, II 1ab
UE 12$_1$: II 1cde **UE 12$_4$:** P3, II 2 **UE 11$_7$:** III 1d-h **UE 11$_8$:** W6, III 2

Aufgabe P1:$_2$) (Nach Abs 159/6.3, Kl.11, BAg 99/250) Für eine Zahl $k > 0$ sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f und g mit $f(x) = 2e^{-k \cdot x}$ und $g(x) = 2e^{-k \cdot x}$ gegeben. (1+4 BE)

a_{1-2}) Geben Sie an, wie der Graph von f aus dem Graphen von g erzeugt werden kann.
b_{1-2}) Die Graphen von f und g schneiden sich senkrecht. Bestimmen Sie k.

Aufgabe P2:$_2$) (Nach Abs 182/7.1.15, Kl.11, BAg 179/481) Abb. 1025/569a zeigt zwei Geraden, die jeweils parallel zu einer der Koordinatenachsen verlaufen und sich im Punkt $P(9|6)$ schneiden, sowie den Graphen der in $\mathbb{R}_0^+$ definierten Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot \sqrt{x}$. (1+4 BE)

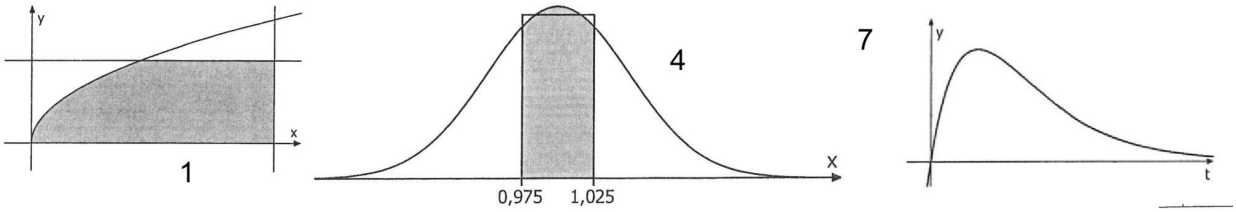


Abb. 569 a) Aufgabe P2 b) Aufgabe W6 c) Aufgabe I 2.1a

a_1) Weisen Sie nach, dass $Q(4|6)$ der Schnittpunkt des Graphen von f mit einer der Geraden ist.
b_{1-2}) Untersuchen Sie rechnerisch, ob der Inhalt der markierten Fläche größer als 45 ist.

Aufgabe P3: (Nach Abs 272/10.5, Kl.11) Gegeben sind die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ und die Ebene $E : -2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2 = 0$.

a_1) (BAg 272/741) Begründen Sie, dass g senkrecht zu E steht, und zeigen Sie, dass der Punkt $P(-4|2|-2)$ in E liegt (2 BE). b_2) (BAg 272/743) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes auf g, der zu E den Abstand 12 hat (3 BE).

Aufgabe P4: (Nach Abs 322/12.2, Kl.9, BAg 332/827) Ein Glücksrad ist in drei gleich große Sektoren unterteilt, von denen genau einer grün eingefärbt ist. Bei einem Spiel drehen Person A und Person B abwechselnd das Glücksrad. Diejenige Person, die zuerst die Farbe 'Grün' erzielt, gewinnt und das Spiel ist beendet. Hat jede der beiden Personen zweimal das Glücksrad gedreht, ohne dabei zu gewinnen, so endet das Spiel unentschieden. Person A dreht das Glücksrad zuerst.

a_1) Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden kann, dass das Spiel unentschieden endet. (1 BE)

b_2) Beurteilen Sie die folgende Aussage: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Person A gewinnt, beträgt das 1.5-Fache der Wahrscheinlichkeit dafür, dass Person B gewinnt. (4 BE)

Wahlaufgaben: Bearbeiten Sie genau zwei der Aufgaben W1 bis W6.

Aufgabe W1: (Nach Abs 182/7.1.15, Kl.11, BAg 179/481j) $_{4-5}$) Abb. 1026/570a zeigt den Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten differenzierbaren Funktion f, die genau zwei Nullstellen hat: -1.5 und 0. Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Integralfunktion J mit $J(x) = \int_0^x f(t)dt$. Beurteilen Sie die folgende Aussage: $J(x)$ hat genau zwei Nullstellen (5 BE).

Aufgabe W2: (Nach Abs 97/5.3.4, Kl.10, BAg 98/248) Gegeben ist eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit der Wertemenge $[-3; 2[$. (1+4 BE)
a_{1-2}) Begründen Sie, dass der Graph von f nicht symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist.
b_4) Betrachtet wird die in IR definierte Funktion h mit $h(x) = (-2) \cdot f(x-5) + 1$. Geben Sie die Wertemenge von h an und begründen Sie Ihre Angabe.

Aufgabe W3: (Nach Abs 258/10.2, Kl.11, BAg 260/695) Betrachtet werden die Dreiecke AB_sC_t mit $A(0|0|0), B_s(4s|3s|0)$ und $C_t(0|0|t)$ mit $s, t \in \mathbb{R}^+$. (2+3 BE)

a_1) Begründen Sie, dass jedes Dreieck AB_sC_t im Punkt A rechtwinklig ist.
b_{2-3}) Zu jedem Wert von s gibt es einen Wert von t, so dass das Dreieck AB_sC_t gleichschenklig ist. Zeigen Sie, dass die zugehörigen Punkte $(s|t)$ auf der in Abb. 1026/570b dargestellten Gerade liegen.

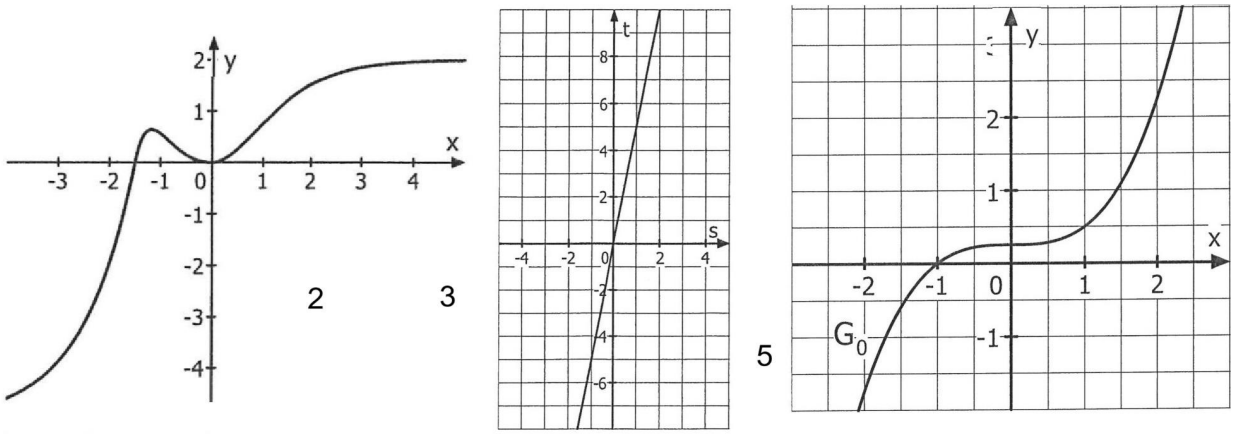


Abb. 570 a) Aufgabe W1 b) Aufgabe W3 c) Aufgabe I 1.1a

Aufgabe W4: (Nach Abs 258/10.2, Kl.11, BAg 260/695 und 253/669j) Der Punkt $P(3|-1|4)$ liegt auf einer Kugel mit Mittelpunkt $M(1|1|2)$.
a_1) Bestimmen Sie den Radius der Kugel. (1 BE) b_3) Die Gerade g berührt die Kugel im Punkt P und schneidet die x_3-Achse. Ermitteln Sie eine Gleichung von g. (4 BE)

Aufgabe W5: (Nach Abs 322/12.2, Kl.9, BAg 324/812) In einem Behälter befinden sich fünf Kugeln, die jeweils mit einer natürlichen Zahl beschriftet sind. Auf drei der Kugeln steht die Zahl a, auf den beiden anderen Kugeln die Zahl b. Die Summe von a und b ist 17. Es werden zwei Kugeln gleichzeitig zufällig entnommen.

a_2) Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $1-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}$ berechnet werden kann. (1 BE)

b_{2-3}) Die Zufallsgröße $\mathcal{X}$ beschreibt die Summe der Zahlen auf den beiden entnommenen Kugeln. Der Erwartungswert von $\mathcal{X}$ ist 16. Bestimmen Sie a und b. (4 BE)

Aufgabe W6: (Nach Abs 358/13.2, Kl.12, BAg 362/904 und 364/908) Eine normalverteilte Zufallsgröße $\mathcal{X}$ hat den Erwartungswert 1. Es gilt $P(\mathcal{X} > 0.975) = 0.7$.

a_2) Begründen Sie, dass $P(\mathcal{X} > 1.025) = 0.3$ gilt. (2 BE)

b_{3-4}) Abb. 1025/569b zeigt den Graphen der zu $\mathcal{X}$ gehörenden Dichtefunktion φ. Die markierte Fläche unter dem Graphen von φ und das eingezeichnete Rechteck haben den gleichen Inhalt. Zeigen Sie unter Verwendung der von Abb. 1025/569b, dass $\varphi(1) > 8$ ist. (3 BE)

16.5.2 Teil B Abitur 2026 Filme: http://Abi26.slt.biz

Aufgabe I 1.1: (Nach Abs 143/6.2, Kl.10) Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = \frac{1}{4}x^3 + ax^2 + ax + \frac{1}{4}(a \in \mathbb{R})$. Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet. Abb. 1026/570c zeigt C_a für $a = 0$. ($f_0(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{1}{4}$).

a_{1-2}) (BAg 147/366) Berechnen Sie denjenigen Wert von a, für den der Punkt $(1|-1)$ auf G_a liegt, und zeigen Sie, dass dieser Punkt Wendepunkt dieses Graphen ist. (5 BE)

b_2) (BAg 96/242) Zeigen Sie, dass es genau zwei Punkte gibt, durch die alle Graphen der Schar verlaufen, und bestimmen Sie die Koordinaten dieser beiden Punkte. (4 BE)

c_{1-2}) (BAg 98/248) Der Term einer Funktion der Schar kann in der Form $\frac{1}{4}\cdot(x+1)^3$ angegeben werden. Der Graph dieser Funktion kann durch Verschiebungen aus G_0 erzeugt werden. Geben Sie eine passende Möglichkeit an. (2 BE)

d_{3-4}) (BAg 153/390) Betrachtet werden für jeden Wert $u > 0$ die Tangente t_u an G_0 im Punkt $P_u(u|f_0(u))$ sowie der Punkt $Q_u(u|0)$. Die Tangente t_u schneidet die x-Achse in einem Punkt, der

mit T_u bezeichnet wird. Begründen Sie mithilfe von geeigneten Eintragungen in Abb. 1026/570c, dass $|\overline{T_uQ_u}| = \frac{f_0(u)}{f_0'(u)}$ für jeden Wert $u > 0$ gilt. (4 BE)

e_3) (BAg 142/350) Es gibt Kreise, deren Mittelpunkte auf der y-Achse liegen und die den Graphen der ersten Ableitungsfunktion von f_0 in genau zwei Punkten berühren. Der Punkt $A(1|\frac{3}{4})$ ist ein Berührpunkt eines solchen Kreises. Bestimmen Sie rechnerisch die y-Koordinate des Mittelpunktes dieses Kreises. (5 BE)

Aufgabe I 1.2: (Nach Abs 143/6.2, Kl.10) Betrachtet wird eine Wasserfontäne, bei der das Wasser aus einer Düse austritt. Die sich periodisch ändernde momentane Durchflussrate des Wassers an der Düse beeinflusst das Erscheinungsbild der Fontäne. Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion h mit $h(x) = -\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) + 1$ beschreibt im Folgenden für $x \geq 0$ die zeitliche Entwicklung der momentanen Durchflussrate des Wassers an der Düse. Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Sekunden und $h(x)$ die momentane Durchflussrate in Litern pro Sekunde. In Abb. 1028/572b ist der Graph von h dargestellt.

a_2) (BAg 114/292) Bestimmen Sie, wie oft die momentane Durchflussrate in der ersten Minute nach Beobachtungsbeginn ihren Maximalwert annimmt, und geben Sie einen Zeitpunkt an, zu dem die momentane Durchflussrate am stärksten zunimmt. (3 BE)

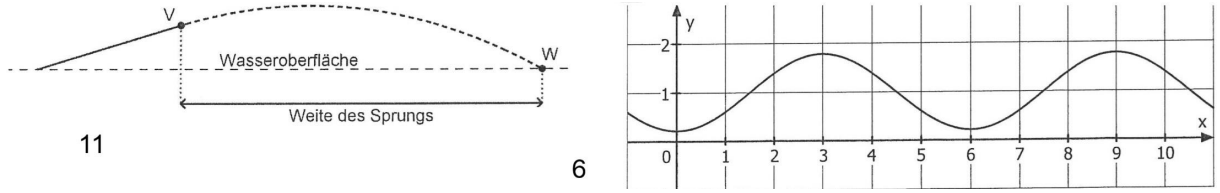


Abb. 571 a) Aufgabe Aufgabe III 2c b) Aufgabe I 1.2a

b_2) (Nach Abs 182/7.1.15, Kl.11, BAg 183/494) Berechnen Sie $\int_5^9 h(x)dx$ und interpretieren Sie den Wert des Integrals im Sachzusammenhang. (4 BE)

c_{2-3}) (BAg 111/286) Betrachtet wird nun eine andere Düse, bei der sich die momentane Durchflussrate ebenfalls periodisch mit der Zeit ändert. Die maximale momentane Durchflussrate beträgt 2 Liter pro Sekunde und die Zeitspanne zwischen zwei aufeinanderfolgenden Maximalwerten der momentanen Durchflussrate ist 1.5-mal so groß wie bei der zuerst betrachteten Düse. Skizzieren Sie dazu passend in Abb. 1026/570b einen Graphen, der für $x > 0$ eine mögliche zeitliche Entwicklung der momentanen Durchflussrate des Wassers für die nun betrachtete Düse beschreibt. (3 BE)

Aufgabe I 2.1: (Nach Abs 159/6.3, Kl.11, BAg 162/412) Abb. 1025/569c zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(t) = 0.016t \cdot e^{-0.005 \cdot t}$. Für $t > 0$ beschreibt f die Wachstumsgeschwindigkeit des Horns einer Antilope (t in Tagen nach der Geburt des Tieres, $f(t)$ in Millimeter pro Tag). Bei der Geburt des Tieres ist das Horn zwei Millimeter lang. (1 + 4 + 2 BE)

a_1) Geben Sie die Wachstumsgeschwindigkeit an, die das Horn 20 Tage nach der Geburt des Tieres hat.

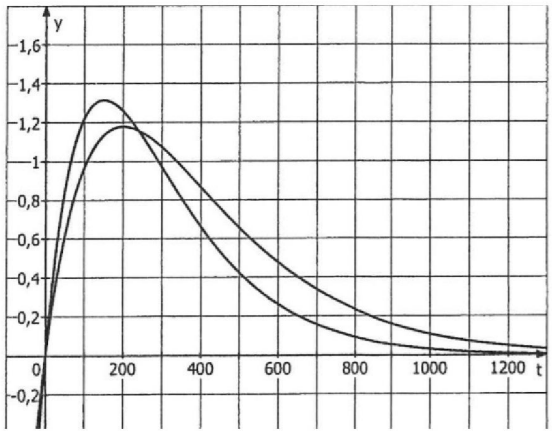
b_1) (BAg 163/417) Es gibt einen Zeitpunkt, zu dem die Wachstumsgeschwindigkeit maximal ist. Berechnen Sie diesen Zeitpunkt.

c_2) (BAg 183/494) Formulieren Sie eine Fragestellung im Sachzusammenhang, die auf die Gleichung $f(t + 100) = 2 \cdot f(t)$ führt.

Der Rest der Aufgabe ist nach Abs 182/7.1.15, Kl.11 machbar, BAg 177/467.
d_{2-3}) Die Funktion F mit $F(t) = -3.2 \cdot (200 + t) \cdot e^{-0.005t}$ ist eine Stammfunktion von f. Ermitteln Sie die Länge, die das Horn 120 Tage nach der Geburt des Tieres hat (3 BE).

Bei einer anderen Antilope, die zum selben Zeitpunkt geboren wurde, lässt sich für $t \geq 0$ die Wachstumsgeschwindigkeit des Horns durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion g beschreiben (t in Tagen nach der Geburt des Tieres, $g(t)$ in Millimeter pro Tag). Bei der Geburt dieses Tieres ist das Horn ebenfalls zwei Millimeter lang. Abb. 1028/572a zeigt die Graphen der Funktionen f und g. (3 + 2 BE)

8



12

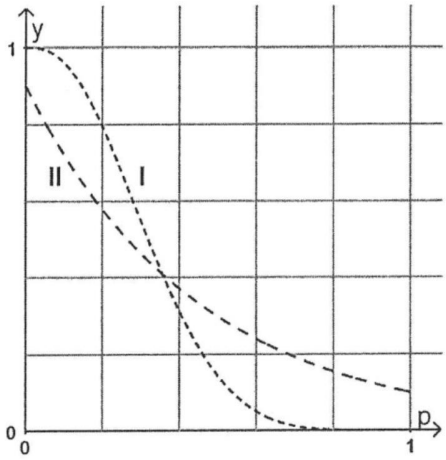


Abb. 572 a) Aufgabe I 2.1d b) Aufgabe III 1 g

e$_2$) (BAg 144/356j) Betrachtet wird die Funktion d mit $d(t) = g(t) - f(t)$. Geben Sie die Anzahl der Nullstellen von d im abgebildeten Bereich an und interpretieren Sie diese Nullstellen im Sachzusammenhang.

f$_3$) (BAg 179/481) Beurteilen Sie (mit Hilfe von Abb. 572a) die folgende Aussage: Es gibt einen Zeitpunkt nach der Geburt der beiden Tiere, zu dem die Hörner der beiden Antilopen gleich lang sind.

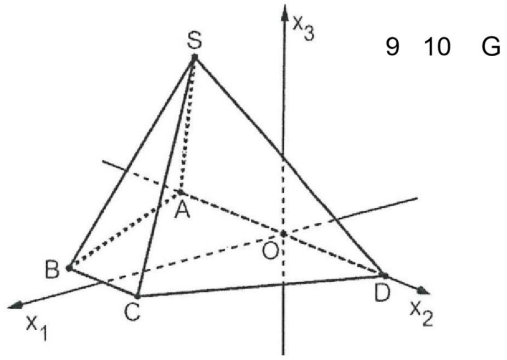
Aufgabe I 2.2: (Nach Abs 143/6.2, Kl.10) Gegeben ist für jedes $a > 0$ eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion h_a mit $h_a(x) = x^3 - 15ax^2 + 50a^2x$. Der Graph G_a von h_a verläuft durch die Punkte $O(0|0)$ und $P_a(5a|0)$. (2 + 3 + 4 BE)

a$_1$) Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den der Punkt $(1|1)$ auf G_a liegt.

b$_2$) (BAg 139/338) Zeigen Sie, dass der Punkt $Q_a(8a|400a^3)$ auf der Tangente an G_a im Punkt O liegt.

c$_3$) (BAg 89/221) Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den das Dreieck OP_aQ_a gleichschenklig ist.

9 10 G



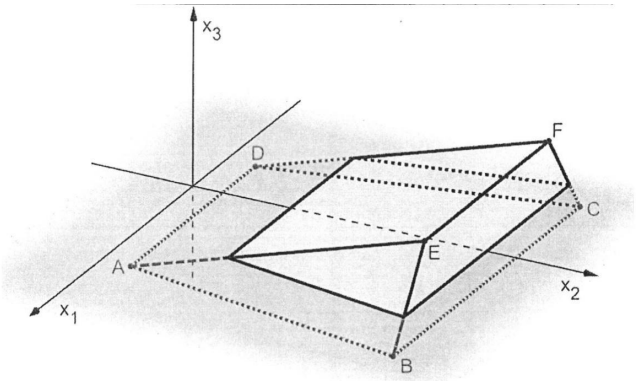


Abb. 573 a) Aufgabe II 2f b) Aufgabe I 1.2

Aufgabe I 2.3: (Nach Abs 159/6.3, Kl.11, BAg 162/412) a$_2$) Weisen Sie nach, dass für die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion w mit $w(x) = \sqrt{2x}$ gilt: $w(x) \cdot w'(x) = 1$ (2 BE).

b$_{3-4}$) (BAg 164/424) b) Für die in $\mathbb{R}^+$ zweimal differenzierbare Funktion v gilt $v(x) \cdot v'(x) = c$ mit $c > 0$. Zeigen Sie, dass v weder Extremstellen noch Wendestellen besitzt (4 BE).

Aufgabe II 1 (Nach Abs 262/10.3, Kl.11) Abb. 1028/573 a) zeigt die Pyramide $ABCDS$ mit $A(0|-3|0)$, $B(4|-1|0), C(4|1|0)$, $D(0|3|0)$ und $S(2|0|4)$. (4 + 3 BE)

a$_1$) (BAg 675 ab c) Zeigen Sie, dass die Grundfläche $ABCD$ ein Trapez ist, und berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

b$_1$) (BAg 259/691) Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den die Kanten $\overline{CD}$ und $\overline{CS}$ einschließen.

Die Ebene L mit der Gleichung $-2x_1 + x_2 + 4 = 0$ schneidet die Kante CD im Punkt H.

c_1) (BAg 264/714) Berechnen Sie die Koordinaten von H. (zur Kontrolle: $H(2.8|1.6|0)$) (4 BE)

Die Pyramide $ABCDS$ wird um die Gerade CD um einen Winkel der Größe 360° gedreht. Dabei durchläuft die Spitze einen Kreis.

d_{2-3}) (BAg 259/691) Begründen Sie, dass dieser Kreis in der Ebene L liegt und H der Mittelpunkt des Kreises ist. (4 BE)

e_{3-4}) (BAg 98/246) Der Kreis, den die Spitze der Pyramide beschreibt, hat den Radius $\sqrt{19.2}$. Beurteilen Sie folgende Aussage: Während des Drehvorgangs gibt es eine Position der Pyramide, bei der ihre Spitze die x_2 -Koordinate 5.6 hat. (5 BE)

Aufgabe II 2 (Nach Abs 272/10.5, Kl.11) Abb 1031/574b zeigt den Körper $ABCDEF$ mit den Eckpunkten $A(2|0|-0.5), B(3|5|-0.5), C(-3|5|-0.5), D(-2|0|-0.5), E(2|5|1)$ und $F(-2]5|1)$. Dieser stellt modellhaft eine aus dem Wasser ragende Sprungschanze für Wasserski dar. Das Viereck $AEFD$ beschreibt den sogenannten Schanzentisch, die x_1x_2-Ebene stellt die Wasseroberfläche dar. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität. (2 + 2 BE)

a_1) (BAg 260/695) Das Viereck $AEFD$ ist ein Parallelogramm. Zeigen Sie, dass es auch ein Rechteck ist.

b_2) (BAg 273/748) Begründen Sie, dass die x_2x_3-Ebene eine Symmetrieebene des Körpers $ABCDEF$ ist.

c_{2-3}) Für eine reelle Zahl k ist der Vektor $\begin{pmatrix} k \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der Ebene, in der das Rechteck $AEFD$ liegt. Begründen Sie ohne Rechnung, dass $k = 0$ ist. (2 BE)

d_1) (BAg 272/740) Bestimmen Sie die Größe des Winkels, unter dem der Schanzentisch gegenüber der Wasseroberfläche geneigt ist. (3 BE)

e_3) (BAg 264/714) Der Teil des Schanzentischs, der sich oberhalb der Wasseroberfläche befindet, soll als Werbefläche genutzt werden. Die folgende Aussage stellt den ersten Schritt der Bestimmung des Flächeninhalts dieser Werbefläche dar: Mit $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -0.5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt sich $r = \frac{1}{3}$. Geben Sie die Bedeutung dieses Wertes $\frac{1}{3}$ für r im Sachzusammenhang an und berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Werbefläche. (4 BE)

Ein Wasserskifahrer fährt den Schanzentisch geradlinig hinauf, bis er die Kante erreicht, die im Modell der Strecke $\overline{EF}$ entspricht. Der anschließende Sprung beginnt an dieser Kante und endet auf der Wasseroberfläche. Insgesamt legen die Füße des Wasserskifahrers einen Weg zurück, der im Modell als Kurve in einer Ebene beschrieben werden kann, die senkrecht zur x_2-Ebene liegt und mit L bezeichnet wird. Die Ebene L kann durch die Gleichung $10x_1 - 3x_2 = 0$ dargestellt werden. Die Orte des Absprungs und des Auftreffens auf der Wasseroberfläche werden im Modell durch die Punkte V bzw. W beschrieben. In Abb. 1028/572a ist die Kurve in der Ebene L dargestellt; die eingetragene Weite des Sprungs ist die Länge einer Strecke, die im Modell ebenfalls in der Ebene L liegt.

f_{2-3}) (BAg 266/721) Beurteilen Sie, ob der Wasserskifahrer so über den Schanzentisch fährt, dass sein Weg im Modell in der Symmetrieebene des Körpers $ABCDEF$ verläuft. (2 BE)

g_{2-3}) (BAg 264/714) Im gegebenen Koordinatensystem wird der beschriebene Weg beim Sprung durch die Punkte $(0.3a|a|-0.05\cdot(a-2.61)\cdot(a-13.39))$ mit geeigneten Werten von a dargestellt. Von Interesse ist die Weite des Sprungs, die in Abb 1028/572a veranschautlicht ist. Bestimmen Sie die Weite des Sprungs auf zehntel Meter gerundet. (2 BE)

Aufgabe III.1: (Nach Abs 333/12.3, Kl.10) Betrachtet wird ein Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert sind. Bei einem Zufallsexperiment wird dieser Würfel viermal geworfen. Die erzielten Zahlen werden in der geworfenen Reihenfolge als Ergebnis notiert.

a_1) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse (4 BE):

(BAg 327/818) A: 'Bei keinem der Würfe wird die Zahl 6 erzielt.'
(BAg 341/854) B: 'Bei mindestens drei Würfen wird eine Zahl erzielt, die größer als 2 ist.'

b_2) (BAg 337/844) Begründen Sie, dass es $\binom{6}{4} \cdot 4!$ Ergebnisse gibt, bei denen alle erzielten Zahlen verschieden sind. (2 BE)

c_3) (BAg 345/862) Geben Sie ein Ereignis im Sachzusammenhang an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $1 - \frac{\binom{6}{4} \cdot 4!}{6^4}$. berechnet werden kann. (2 BE)

(Nach Abs 350/13.1, Kl.12) Bei einem Spiel besteht eine Runde darin, dass der Würfel fünfmal geworfen wird. Eine Runde wird gewonnen, wenn dabei mindestens eine Zahl mehrfach auftritt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Runde gewonnen wird, beträgt $\frac{49}{54}$. Dieses Spiel soll nun von einer Künstlichen Intelligenz (KI) simuliert werden. Die Zufallsgröße $\mathcal{Y}$ beschreibt dabei die Anzahl der gewonnenen Runden. Es wird davon ausgegangen, dass $\mathcal{Y}$ binomialverteilt ist. Zur Überprüfung der KI soll die Nullhypothese 'Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Runde gewonnen wird, beträgt mindestens $\frac{49}{54}$.' getestet werden. Der Stichprobenumfang beträgt 200 Runden. Es ergibt sich $\{0; ...; 173; 174\}$ als Ablehnungsbereich der Nullhypothese. (2 + 2 + 3 BE)

d_{2-3}) (BAg 355/887) Formulieren Sie den zugehörigen Fehler erster Art im Sachzusammenhang.

e_3) (BAg 353/879) Untersuchen Sie, ob das zugrundeliegende Signifikanzniveau des Tests 8% betragen kann.

f_4) Beurteilen Sie die folgende Aussage: 'Wenn die Nullhypothese nicht wahr ist, dann beträgt in jedem Fall die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Stichprobe mindestens 180 Treffer enthält, höchstens 20%.'

Ein weiteres Spiel wird mit einem Zufallsgenerator simuliert. Die Gewinnwahrscheinlichkeit kann dabei auf jeden beliebigen Wert p mit $0 \leq p \leq 1$ eingestellt werden. Bei n-maligem Spielen ist die Anzahl $\mathbb{Z}$ der gewonnenen Spiele binomialverteilt mit den Parametern n und p. Für einen bestimmten Wert von n gehört einer der beiden Graphen in der Abb 1028/572 b zu der Funktion, die jedem Wert von p die Wahrscheinlichkeit $P_p^n(\mathbb{Z} \leq 2)$ zuordnet.

g_3) Begründen Sie, dass Graph II nicht zur oben beschriebenen Funktion gehört. (2 BE)

h_4) Ermitteln Sie mithilfe von Abb. 1028/572b den Wert von n. (4 BE)

Aufgabe III 2: (Nach Abs 358/13.2, Kl.12) Die Zufallsgröße $\mathcal{X}$ beschreibt die Masse eines Eisbär-Babys bei der Geburt. Sie wird als normalverteilt mit $\mu_x = 650$ und $\sigma_x = 40$ angenommen (alle Werte in Gramm). (2 + 3 BE)

a_1) (BAg 362/905 ab k) Ein Eisbär-Baby wird zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass seine Masse bei der Geburt um weniger als 20 g vom Erwartungswert abweicht.

b_2) (BAg 341/854) Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment, bei dem die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit dem Term $5 \cdot P(\mathcal{X} < 600)^4 \cdot P(X \geq 600)$ berechnet werden kann, und geben Sie dieses Ereignis an.

Eisbären sind bei ihrer Geburt nicht nur sehr leicht, sondern auch klein. Nur 5 % der Eisbär-Babys sind bei der Geburt größer als 40 cm. Von den Eisbär-Babys, die bei der Geburt größer als 40 cm sind, wiegen 75 % mehr als 700 g.

c_2) (BAg 327/818) Für ein zufällig ausgewähltes Eisbär-Baby werden die folgenden Ereignisse betrachtet:

L : 'Das Eisbär-Baby ist bei der Geburt größer als 40 cm.'
M : 'Das Eisbär-Baby wiegt bei der Geburt mehr als 700 g.'

Das Baumdiagramm aus Abb. 1031/574a stellt diesen Sachverhalt dar. Geben Sie die Werte von u und v an. (2 BE)

d_{3-4}) (BAg 327/818) Unter den Eisbär-Babys, die bei der Geburt höchstens 40 cm groß sind, wiegt nur ein kleiner Teil bei der Geburt mehr als 700 g. Bestimmen Sie diesen Anteil. (4 BE)

Braunbären sind bei der Geburt im Durchschnitt leichter als Eisbären. Die Zufallsgröße $\mathcal{Y}$ beschreibt die Masse eines Braunbär-Babys bei der Geburt. Sie ist normalverteilt mit dem Erwartungswert μ_y und der Standardabweichung $\sigma_y = 25$ (alle Werte in Gramm). (2 + 2 + 5 BE)

e_{2-3}) (BAg 362/905 ab j) Ein Braunbär-Baby wird zufällig ausgewählt. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass seine Masse bei der Geburt um höchstens 10 g vom Erwartungswert abweicht. Begründen Sie, dass man zur Berechnung dieser Wahrscheinlichkeit den Wert von μ_y nicht kennen muss.

f_3) (BAg 363/906) Eine der Abbildungen aus Abb 1031/574b zeigt die Graphen der Dichtefunktionen von $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$. Geben Sie diese Abbildung an und begründen Sie Ihre Angabe.

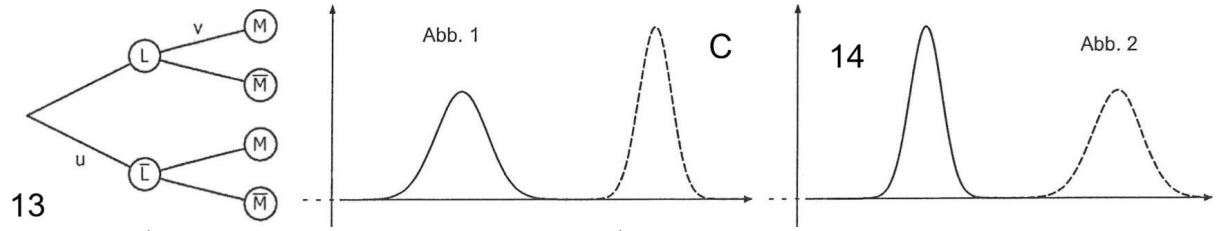


Abb. 574 a) Aufgabe III 2d b) Aufgabe III 2f

Die Masse eines Panda-Babys bei der Geburt wird als normalverteilt mit dem Erwartungswert 110 g angenommen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Panda-Baby bei der Geburt weniger als 100 g wiegt, beträgt 30 %.

g_3) (BAg 364/908) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von vier zufällig ausgewählten Panda-Babys bei der Geburt genau eines weniger als 100 g und genau eines mehr als 120 g wiegt.

16.5.3 Pflichtteil Abitur 2025 Filme: http://Abi25.slt.biz

Was sollte ich vom Abitur 2025 nach welcher Unterrichtseinheit können?

Kl. 10: P1a, P2b, P4, W2a, W5, W6, I 1.1abd, I 1.2, III 1a-d, III 2ef
UE 11$_2$: W1, I 2.1 **UE 11$_3$:** P1b, P2a, W2b, I 1.1ce, **UE 11$_4$:** I 2.2,
UE 12$_1$: P3, W4, II 2\{d} **UE 12$_4$:** W3, II 1, II 2d, **UE 11$_7$:** III 1ef **UE 11$_8$:** III 2a-d,g

Aufgabe P1: Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$.
a_1) (Nach Abs 145/6.2.4, Kl.10, BAg 145/361g) Es gilt $f''(2) \neq 0$. Zeigen Sie, dass 2 eine Extremstelle von f ist. (2 BE) **b_2)** (Nach Abs 182/7.1.15, Kl.11, (BAg 180/482)) Einer der in Abb. 1031/575c abgebildeten Graphen I und II ist der Graph einer Stammfkt von f. Geben Sie diesen Graphen an und begründen Sie Ihre Angabe. (3 BE)

Aufgabe P2: Abb. 1031/575d zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot \cos(x)$.
a_1) (1 BE, nach Abs 182/7.1.15, Kl.11, BAg 178/475) Geben Sie den Wert des Integrals $\int_0^{\pi} f(x)dx$ an. **b_2)** (4 BE, nach Abs 108/5.4, Kl.10, BAg 153/391) Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion g ist gegeben durch $g(x) = a \cdot f(x) + b \cdot x$ mit reellen Zahlen a und b. Die Punkte $(0|-3)$ und $(\frac{\pi}{2}|\frac{3\pi}{4})$ liegen auf dem Graphen von g. Ermitteln Sie a und b.

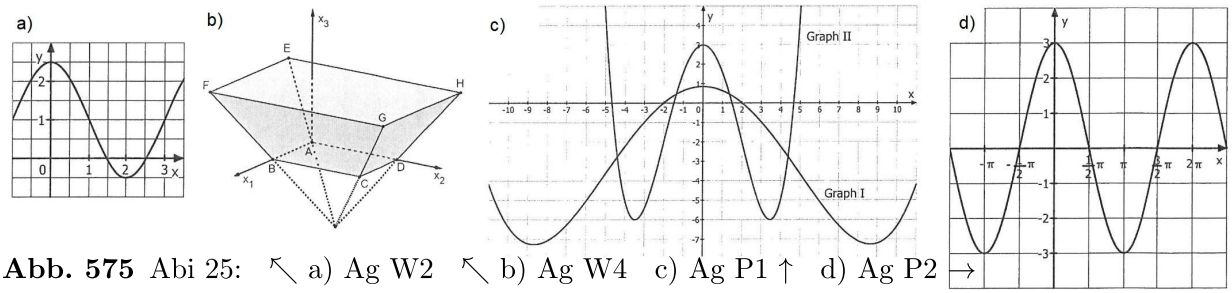


Abb. 575 Abi 25: ↖ a) Ag W2 ↖ b) Ag W4 c) Ag P1 ↑ d) Ag P2 →

Aufgabe P3: (Nach Abs 262/10.3, Kl.12) Abb. 1033/576a zeigt einen Würfel $ABCDEFGH$ der Kantenlänge 4 in einem Koordinatensystem. Drei Seitenflächen dieses Würfels liegen in Koordinatenebenen. Die Ebene K enthält die Punkte $A(0|0|0)$, $B(4|0|0)$ und den Mittelpunkt der Kante $\overline{FG}$.

a$_1$) (BAg 265/718) Die Ebene K teilt den Würfel in zwei Teilkörper. Berechnen Sie das Volumen des kleineren Teilkörpers. (2 BE)
b$_2$) (BAg 251/661) Eine zweite Ebene L enthält die Punkte E und F sowie den Mittelpunkt der Kante $\overline{BC}$. Zeichnen Sie die Schnittfigur dieser Ebene mit dem Würfel in Abb. 1033/576a in der Anlage ein und geben Sie eine Gleichung der Schnittgerade der Ebenen K und L an. (3 BE)

Aufgabe P4: (Nach Abs 322/12.2, Kl.9, BAg 325/813) Bei einem Spiel wird ein Würfel zweimal geworfen. Die Seiten des Würfels sind mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert.
a$_1$) (2 BE) Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, bei keinem der beiden Würfe die Zahl 3 zu erzielen, $\frac{25}{36}$ beträgt. **b$_2$)** Der Einsatz bei diesem Spiel beträgt 2 Euro. Je nachdem, wie oft dabei die Zahl 3 erzielt wird, werden folgende Auszahlungen getätigt: Bei keiner Drei: Null Euro, bei einer Drei: 5 Euro, bei zwei Dreien: x Euro. Bei wiederholter Durchführung des Spiels ist zu erwarten, dass sich auf lange Sicht Einsätze und Auszahlungen ausgleichen. Ermitteln Sie den Wert von x. (3 BE)

Wahlaufgaben Bearbeiten Sie **zwei** der Aufgaben W1 bis W6.

Aufgabe W1: (5 BE, nach Abs 159/6.3, Kl.11, BAg 156/399) $_2$) Für jedes $a > 0$ ist eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f_a(x)$ gegeben durch $f_a(x) = x \cdot e^{\frac{x}{a}}$. Der Graph jeder Funktion f_a besitzt einen Extrempunkt E_a. Weisen Sie nach, dass es eine Ursprungsgerade gibt, auf der alle Punkte E_a liegen.

Aufgabe W2: In Abb. 1031/575a ist der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x) = a \cdot \cos(\frac{\pi}{2} \cdot x) + b$ abgebildet; dabei sind a und b reelle Zahlen.
a$_1$) (Nach Abs 108/5.4, Kl.10, BAg 153/391) Geben Sie die Werte von a und b an (2 BE).
b$_4$) (3 BE, nach Abs 182/7.1.15, Kl.11, BAg 179/481) Gegeben ist die Funktion J_0 durch $J_0(x) = \int_0^x f(t)dt$ mit $x \in]0;\infty[$. Begründen Sie ohne Rechnung, dass der Graph von J_0 keinen Schnittpunkt mit der x-Achse hat.

Aufgabe W3: (5 BE, nach Abs 272/10.5, Kl.12, BAg 257/683) $_3$) Die Punkte $A(8|0|0)$, $B(0|6|0)$ und $C(4|3|10)$ sind die Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks mit Basis AB. Das Dreieck ABC wird so um die Achse AB gedreht, dass der entstehende Punkt C^* in der x_1, x_2-Ebene liegt. Bestimmen Sie die Koordinaten eines möglichen Punkts C^*.

Aufgabe W4: (Nach Abs 262/10.3, Kl.12) Der in Abb. 1031/575b abgebildete Körper $ABCDEFGH$ ist Teil einer geraden Pyramide mit rechteckiger Grundfläche $EFGH$. Die Rechtecke $ABCD$ und $EFGH$ liegen in zwei zueinander parallelen Ebenen mit dem Abstand 5. Der Flächeninhalt von $EFGH$ ist viermal so groß wie der von $ABCD$. Es gilt: $A(0|0|0)$, $B(4|0|0)$, $C(4|6|0)$ und $D(0|6|0)$. $\downarrow$ (1 BE)

a$_1$) (BAg 265/718) Geben Sie eine Gleichung einer der beiden Symmetrieebenen des Körpers $ABCDEFGH$ an. b$_3$) (BAg 257/683) Begründen Sie, dass die Koordinaten des Punkts F mit folgendem Term ermittelt werden können: $\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix} + 2 \cdot \left(\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}\right)$ (4 BE).

Aufgabe W5: (Nach Abs 322/12.2, Kl.9, BAg 325/813) Betrachtet wird ein Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert sind.
a$_1$) Der Würfel wird zweimal geworfen. Die Zufallsgröße $\mathcal{X}$ gibt das Produkt der dabei erzielten Zahlen an. Begründen Sie, dass $P(\mathcal{X} = 10) = P(\mathcal{X} = 15)$ ist. (2 BE)
b$_3$) Nun wird der Würfel n-mal geworfen, wobei n größer als 2 ist. Ermitteln Sie einen Term, mit dem man die Wahrscheinlichkeit für das folgende Ereignis berechnen kann: 'Das Produkt der n erzielten Zahlen ist 2, 3 oder 5.' (3 BE)

Aufgabe W6: (5 BE, Nach Abs 322/12.2, Kl.9, BAg 329/822) $_3$) Zu einem Zufallsexperiment werden zwei stochastisch unabhängige Ereignisse A und B betrachtet. Es gilt $P(B) = P(A) + 0.6$ sowie $P(A \cap \bar{B}) = 0.04$. Bestimmen Sie $P(A)$.

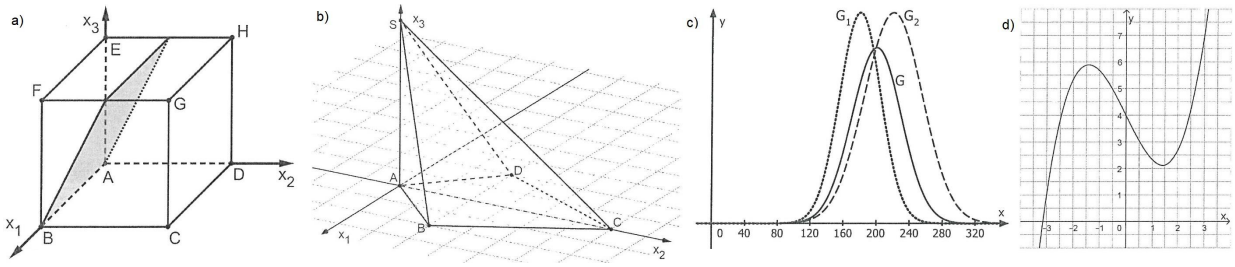


Abb. 576 Abi 2025: ↖ a) Ag P3 b) Ag II 1 ↑ c) Ag III 2 ↑ d) Ag I 1.1 ↑

16.5.4 Wahlteil Abitur 2025 Filme: http://Abi25.slt.biz

Aufgabe I 1.1 (Nach Abs 145/6.2.4, Kl.10) Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax + 2a$ mit $a \in \mathbb{R}$. Abb 1033/576d zeigt einen Graphen der Schar.
a$_2$) (BAg 156/400) Der Graph aus Abb 576d verläuft durch den Punkt (0|4). Begründen Sie, dass es sich um den Graphen von f_2 handelt. (2 BE)
b$_1$) (BAg 147/365) Zeigen Sie rechnerisch, dass jeder Graph der Schar genau einen Wendepunkt besitzt, und geben Sie dessen Koordinaten an. (5 BE)
c$_1$) (4 BE, nach Abs 182/7.1.15, Kl.11, BAg 178/475) Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den $\int_0^2 f_a(x)dx = 0$ gilt.

Betrachtet wird im Folgenden die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x + 4$. Die Funktion f entspricht der Funktion f_2 der Schar, Abb. 1033/576d zeigt somit den Graphen G_f von f. Dieser ist symmetrisch bezüglich des Punkts (0|4). Die Tangente an G_f im Punkt $P(3|f(3))$ wird mit t bezeichnet; $y = 7x - 14$ ist eine Gleichung von t.

d$_2$) (BAg 101/257) Zeigen Sie rechnerisch anhand geeigneter Termumformungen, dass $f(x) - (7x - 14) = \frac{1}{3} \cdot (x-3)^2 \cdot (x+6)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Begründen Sie mithilfe dieses Zusammenhangs, dass t und G_f neben P genau einen weiteren gemeinsamen Punkt besitzen. (6 BE)

e$_4$) (Nach Abs 182/7.1.15, Kl.11) Betrachtet wird die Gleichung $\int_k^{k+1} f(x)dx = 4$ mit $k \in \mathbb{R}$.
(BAg 179/481) Für $-1.5 < k < 1.5$ besitzt diese Gleichung genau eine Lösung. Untersuchen Sie mithilfe von Abb. 1033/576d, wie viele Lösungen diese Gleichung für $k \geq 1.5$ besitzt. (4 BE)

Aufgabe I 1.2 (Nach Abs 145/6.2.4, Kl.10) Die Länge einer Fahrstrecke, die ein Elektroauto mit vollständig geladener Batterie ohne erneutes Aufladen unter bestimmten Bedingungen zurücklegen kann, wird als Nennreichweite des Elektroautos bezeichnet und ist für jedes Elektroauto ein fester Wert. Die tatsächliche Reichweite hängt von vielen Faktoren ab; im Folgenden wird ausschließlich die Abhängigkeit von der Außentemperatur betrachtet. Diese Abhängigkeit kann für eine Vielzahl von Elektroautos modellhaft im Intervall $[-12; 36]$ durch eine Funktion r beschrieben werden. Dabei ist x die Außentemperatur in $°C$ und $r(x)$ der Quotient aus der tatsächlichen Reichweite eines Elektroautos und dessen Nennreichweite. 1034/577 b zeigt den Graphen der Funktion r. Hat also r beispielsweise für eine bestimmte Außentemperatur den Wert 0.6, so beträgt die tatsächliche Reichweite eines Elektroautos bei dieser Außentemperatur 60% seiner Nennreichweite.

(BAg 183/494) Im Folgenden werden nur Temperaturen im Bereich von $-12°C$ bis $36°C$ sowie Elektroautos betrachtet, bei denen der durch die Funktion r beschriebene Zusammenhang gilt. ↓ (4 BE)

a$_1$) Geben Sie anhand von Abb. 1034/577 b die Koordinaten des Hochpunkts des Graphen von r an. Beschreiben Sie die Bedeutung des Hochpunkts und seiner Koordinaten im Sachzusammenhang.

b$_2$) Die Nennreichweite eines Elektroautos A beträgt 320 km, die Nennreichweite eines Elektroautos B beträgt 500 km. Bestimmen Sie mithilfe von Abbildung 2 eine Außentemperatur, bei der das Elektroauto A dieselbe tatsächliche Reichweite besitzt wie das Elektroauto B bei einer Außentemperatur von $0°C$. (5 BE)

Aufgabe I 2.1 (Nach Abs 159/6.3, Kl.11, BAg 162/412) In einem Tierpark soll ein Tier mit Hilfe einer Diät abnehmen. Die Masse dieses Tieres wird für $t \geq 0$ durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(t) = 36 \cdot e^{-0.05t} + 80$ beschrieben (t in Wochen nach Beginn der Diät, $f(t)$ in Kilogramm).

a$_1$) Bestimmen Sie die Masse des Tieres sechs Wochen nach Beginn der Diät. (1 BE)

b$_1$) Geben Sie die Masse an, die das Tier auf lange Sicht erreicht. (1 BE) ↓ (4 BE)

c$_2$) Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem das Tier 25% seiner Masse seit Beginn der Diät verloren hat.

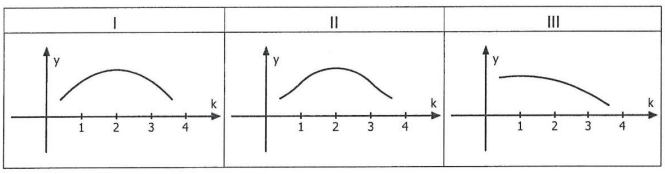
d$_2$) Bestimmen Sie die momentane Abnahme der Masse des Tieres zum Zeitpunkt t=8. (3 BE)

e$_2$) Für alle $t > 0$ gilt $f'(t) < 0$ und $f''(t) > 0$. Geben Sie die Bedeutung dieser Aussage im Sachzusammenhang an. (2 BE)

(BAg 165/430d) Für die Funktion h gilt $h(f(t)) = t$ für $t \in \mathbb{R}$.

f$_3$) Bestimmen Sie einen Term der Funktion h. (3 BE)

g$_3$) Für zwei reelle Zahlen v und w gilt $h(v) = w$. Interpretieren Sie diese Gleichung im Sachzusammenhang. (2 BE)



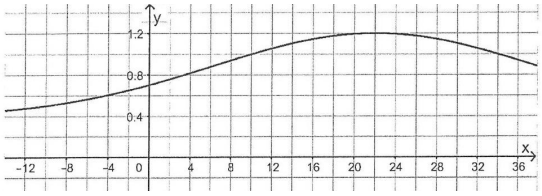


Abb. 577 Abi 2025: ↑ a) Ag II 2 (Graph von f) b) Ag I 1.2 ↑

Aufgabe I 2.2 (Nach Abs 117/5.5, Kl.11) Für jedes $a > 0$ ist eine Funktion g_a gegeben durch $g_a(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{a \cdot x}$ mit maximalem Definitionsbereich. G_a ist der Graph von g_a.

a$_1$) (BAg 117/303) Geben Sie eine Gleichung der senkrechten Asymptote von G_a an. (1 BE)

b$_2$) (BAg 183/497) Zeigen Sie, dass für alle $a > 0$ gilt: $\int_1^e g_a(x)dx < 1 - \frac{1}{e}$. (4 BE)

Jeder Graph G_a besitzt genau einen Punkt P_a mit waagerechter Tangente.

c$_2$) (BAg 155/398) Weisen Sie nach, dass P_a die x-Koordinate $2a$ besitzt. (3 BE)

Für jeden Wert von a gilt: N_a ist der Schnittpunkt von G_a mit der x-Achse.

d$_3$) BAg 142/350c Der Kreis K_a hat den Mittelpunkt P_a und verläuft durch N_a. Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den K_a die y-Achse berührt. (6 BE)

Aufgabe II 1 (Nach Abs 272/10.5, Kl.12) Abb. 1033/576b zeigt die Pyramide $ABCDS$. Ihre Grundfläche $ABCD$ ist ein Drachenviereck mit den Eckpunkten $A(0|0|0)$, $B(2|2|0)$, $C(0|6|0)$ und $D(-2|2|0)$. Die Spitze der Pyramide liegt im Punkt $S(0|0|6)$.

a$_1$) (BAg 252/664) Berechnen Sie die Länge der kürzesten der acht Kanten sowie das Volumen der Pyramide $ABCDS$. Die Seitenfläche BCS der Pyramide liegt in der Ebene E. (4 BE)

b$_3$) (BAgn 263/708 + 264/712) Betrachtet werden die Vektoren $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$, deren Koordinaten nicht alle gleich null sind. Begründen Sie, dass ein solcher Vektor, für den $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$ gilt, ein Normalenvektor von E ist. (3 BE)

c$_1$) (BAg 272/740) Die Ebene E hat die Gleichung $2x_1 + x_2 + x_3 = 6$. Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den E mit der x_1x_2-Ebene einschließt. (3 BE)

Gegeben ist die Schar der Ebenen $F_K : k \cdot x_2 + (k-2) \cdot x_3 = 2k$ mit $k \in]0;3[$. Jede Ebene F_k der Schar schneidet die Pyramide $ABCDS$ in einem Dreieck BDQ_k, wobei der Pkt Q_k auf der Strecke SC liegt.

$d_{2)}$ (BAg 265/718) Geben Sie eine Gleichung der Ebene F_2 an und zeichnen Sie in Abb 1033/576 die Schnittfigur von F_2 mit der Pyramide $ABCDS$ ein. (4 BE)

$e_{3)}$ (BAg 148/373d) Es gibt einen Wert von k, für den der Flächeninhalt des Dreiecks BDQ_k minimal ist. Ermitteln Sie diesen Wert. (6 BE)

Aufgabe II 2 (Nach Abs 262/10.3, Kl.12) Gegeben ist die Ebene $F : x_1 - 3x_2 - x_3 = -6$.

$a_{1)}$ (BAg 265/718) Stellen Sie F in einem Koordinatensystem dar. (2 BE)
$b_{1)}$ (BAg 272/740) Berechnen Sie die Größe des Winkels, den F mit der Ebene $G : -2x_1 + 6x_2 = 8$ einschließt. (3 BE)

Betrachtet wird die Schar der Ebenen $E_k : 2x_1 - 6x_2 + (4-k) \cdot x_3 = -2k$ mit $k \in \mathbb{R}$. ↓(1 BE)

$c_{1)}$ (BAg 267/727) Die Ebene F gehört zu dieser Schar. Geben Sie den zugehörigen Wert von k an.

$d_{2)}$ (BAg 272/741, nach Abs 272/10.5, 3 BE) Für einen Wert von k ist E_k orthogonal zu F. Ermitteln Sie diesen Wert von k.

$e_{4)}$ (BAg 148/373d) Für jedes k mit $0.4 < k < 3.6$ sind die Spurpunkte von E_k auf der x_1- und der x_2-Achse und der Punkt $(0|\frac{4}{3}|0)$ die Eckpunkte eines Dreiecks D_k. Einer der drei abgebildeten Graphen stellt den Flächeninhalt von D_k in Abhängigkeit von k dar. Entscheiden Sie, welcher Graph aus Abb 1034/577a das ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung. (4 BE)

$f_{2-3)}$ (BAg 267/725) Es gibt eine Gerade h, die in allen Ebenen der Schar liegt. Ermitteln Sie eine Gleichung von h. (4 BE) Zur Kontrolle $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$g_{1)}$ (BAg 264/714) Begründen Sie, dass h parallel zur x_1x_2-Ebene verläuft. (1 BE)

$h_{3)}$ (BAg 267/725f) Die Ebene J enthält die Gerade h, sie ist jedoch keine Ebene der Schar. Geben Sie eine Gleichung von J an. (2 BE)

Aufgabe III 1 (BAg 346/863, nach Abs 333/12.3, Kl.10) Unter den Touristen eines Naturparks nutzen erfahrungsgemäß 14 % das Fahrrad für Ausflüge vor Ort. Im Folgenden werden diese Touristen als Radausflügler bezeichnet. Es soll davon ausgegangen werden, dass in einer zufälligen Auswahl von Touristen des Naturparks die Anzahl der Radausflügler binomialverteilt ist. Für eine Stichprobe werden 300 Touristen des Naturparks zufällig ausgewählt.

$a_{1)}$ Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in der Stichprobe genau 36 Radausflügler befinden. (1 BE)

$b_{1)}$ Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der Radausflügler in der Stichprobe um mindestens 10 % größer ist als der Erwartungswert für diese Anzahl. (3 BE)

(BAg 327/818) Um den Naturpark als Reiseziel attraktiver zu machen, setzt der dortige Tourismusverband Shuttlebusse ein. Die Fahrkarten für diese Busse können ausschließlich online gebucht werden und sind jeweils für einen bestimmten Tag gültig. Erfahrungsgemäß werden 80 % aller gebuchten Fahrkarten spätestens am Vortag der Fahrt gebucht. Von diesen spätestens am Vortag gebuchten Fahrkarten werden 90 % auch tatsächlich genutzt. Bei den restlichen, erst am Tag der Fahrt gebuchten Fahrkarten liegt dieser Anteil mit 95 % etwas höher.

$c_{2)}$ (3 BE) Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar. ↓ (3 BE)

$d_{3)}$ Betrachtet wird eine zufällig ausgewählte, nicht genutzte Fahrkarte. Beurteilen Sie die folgende Aussage: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Fahrkarte spätestens am Vortag gebucht wurde, ist achtmal so groß wie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie erst am Tag der Fahrt gebucht wurde.

(BAg 357/893, nach Abs 350/13.1) Der Tourismusverband vermutet, dass sich der bisherige Anteil der Radausflügler unter den Touristen von 14 % durch den Einsatz der Shuttlebusse erhöht hat. Die Verantwortlichen planen die Durchführung eines Signifikanztests mit einem Signifikanzniveau von 8 % und der Nullhypothese 'Der Anteil der Radausflügler unter allen Touristen liegt bei höchstens 14 %.' Vor der Durchführung des Tests wird festgelegt, die Shuttlebusse nur dann weiter zu betreiben, wenn die Nullhypothese aufgrund des Testergebnisses abgelehnt wird.

e_2) Es ist geplant, den Test auf der Grundlage einer Stichprobe von 500 Touristen durchzuführen. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel. (5 BE)

f_4) Angenommen, der beschriebene Test wird auf der Grundlage einer Stichprobe von nur 200 Touristen durchgeführt. In diesem Fall wird die Nullhypothese abgelehnt, wenn sich unter diesen mehr als 35 Radausflügler befinden. Damit die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art höchstens 15 % beträgt, muss der tatsächliche Anteil der Radausflügler unter allen Touristen mindestens einen bestimmten Wert haben. Ermitteln Sie diesen Wert auf ganze Prozent genau und beschreiben Sie die Bedeutung des Fehlers zweiter Art im Sachzusammenhang. (5 BE)

Aufgabe III 2 (BAg 362/905 ab l, nach Abs 358/13.2, Kl.11) Die Zufallsgröße $\mathcal{Z}$ gibt die Fahrzeit eines Linienbusses zwischen zwei bestimmten Haltestellen an. Sie kann näherungsweise als normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 200$ und der Standardabweichung $\sigma = 30$ angenommen werden (alle Werte in Sekunden).

a_1) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer zufällig ausgewählten Fahrt die Fahrzeit zwischen den beiden Haltestellen weniger als 150 Sekunden beträgt. (1 BE)

b_2) Ermitteln Sie das kleinste Intervall, in dem die Fahrzeit einer zufällig ausgewählten Fahrt mit einer Wahrscheinlichkeit von 60% liegt. (4 BE)

c_2) (BAg 346/863) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von zehn zufällig ausgewählten Fahrten die Fahrzeit bei genau zwei Fahrten mehr als 220 Sekunden beträgt. (3 BE)

An Markttagen ist die Fahrzeit zwischen den beiden Haltestellen durchschnittlich etwas länger als an den übrigen Tagen. Diese Fahrzeit kann durch die normalverteilte Zufallsgröße $\mathcal{Z}^*$ beschrieben werden.

d_3) (BAg 363/906) In Abb. 1033/576c ist G der Graph der Dichtefunktion von $\mathcal{Z}^*$. Untersuchen Sie, ob einer der Graphen G_1 und G_2 der Graph der Dichtefunktion von $\mathcal{Z}^*$ sein könnte. (3 BE)

(Nach Abs 322/12.2, Kl.9) Eine Fahrt mit einer Fahrzeit von mehr als 240 Sekunden zwischen den beiden Haltestellen gilt als verspätet. Dies ist bei 9% aller Fahrten der Fall. 20% aller Fahrten finden an Markttagen statt. Ein Viertel der Fahrten an Markttagen ist verspätet. Zu einer zufällig ausgewählten Fahrt werden folgende Ereignisse betrachtet:

V: 'Die Fahrt ist verspätet.' M: 'Die Fahrt findet an einem Markttag statt.' ↓(4 BE)

e_2) (BAg 322/807) Stellen Sie den Sachverhalt in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar.

f_2) (BAg 327/818) Von den Fahrten ohne Verspätung wird eine Fahrt zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese an einem Tag ohne Markt stattfindet. (2 BE)

g_4) (BAg 362/905 ab l, nach Abs 358/13.2, Kl.11, 4 BE) Eine städtische Mitarbeiterin hält 240 Sekunden als Grenze, ab der eine Fahrt als verspätet gilt, für zu streng. Deshalb schlägt sie vor, eine neue Grenze so festzulegen, dass nur noch 15 % der Fahrten an einem Markttag als verspätet gelten. Mit dieser neuen Grenze finden 51% der verspäteten Fahrten an einem Markttag statt. Bestimmen Sie diese neue Grenze.

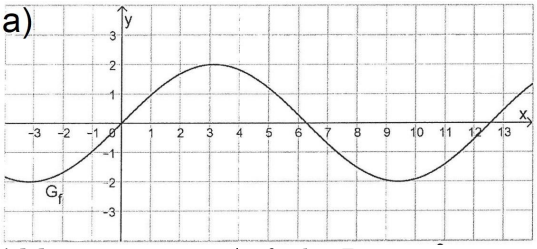
16.5.5 Pflichtteil Abitur 2024 Filme: http://Abi24.slt.biz

Was sollte ich vom Abitur 2024 nach welcher Unterrichtseinheit können?

Kl. 10:	P1b, P4, W1, W4a, W5, W6, I1.1\c, I1.2\d, I.2.2, II.1.1a, II2c, III1a-c+g+h, III2a-d		
UE 11$_2$:	P2, I2.1a-c+f,	**UE 11$_3$:**	P1a, I1.1c, I1.2d, I2.1e+f,
UE 12$_1$:	P3, W2, W3, II.1.1b+c+e+g, II2\f	**UE 12$_4$:**	W4b, II.1.1df, II2f
UE 11$_7$:	III1d-f	**UE 11$_8$**	III2e-h

Aufgabe P1: (Nach Abs 182/7.1.15, Kl.11; (BAg 179/481)) Die Abb. 1037/578a zeigt den Graphen G_f der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x) = 2 \cdot \sin(\frac{1}{2} \cdot x)$.
a$_2$) (2 BE) Beurteilen Sie mithilfe der Abbildung, ob der Wert des Integrals $\int_{-2}^{8} f(x)dx$ negativ ist.
b$_2$) (3 BE) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die folgende Aussage zutrifft: Die Tangente an G_f im Koordinatenursprung ist die Gerade durch die Punkte $(-1|-1)$ und $(1|1)$.

Aufgabe P2: (Nach Abs 159/6.3.2; (BAg 163/416)) G_f ist der Graph der Fkt f mit $f(x) = e^{2x-1}$.
a$_1$) (2 BE) G_f besitzt einen Schnittpunkt mit einer Koordinatenachse und eine Asymptote. Geben Sie die Koordinaten dieses Schnittpunkts sowie eine Gleichung dieser Asymptote an.
b$_2$) (3 BE) G_g ist der Graph der Funktion g mit $g(x) = e^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x}$. Es gilt $g'(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$. Zeigen Sie, dass sich G_g und G_f an der Stelle $x_0 = \frac{1}{2}$ orthogonal schneiden.



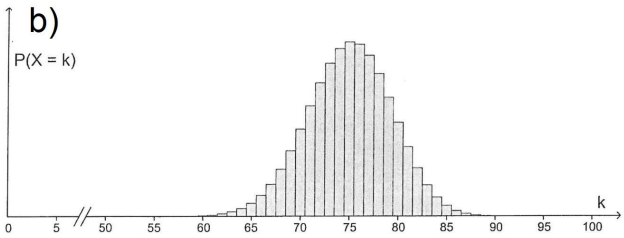


Abb. 578 Aufgabe P1 Aufgabe P4

Aufgabe P3: (Nach Abs 262/10.3, (BAg 267/725)) Gegeben ist die Schar der Ebenen $E_a : 2ax_1 - 4x_2 + (a-2) \cdot x_3 = 12$ mit $a \in \mathbb{R}$. **a$_{1-2}$)** (2 BE) Ermitteln Sie denjenigen Wert von a, für den E_a parallel zur Gerade mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ verläuft.
b$_2$) (3 BE) Prüfen Sie, ob die Ebene mit der Gleichung $6x_1 - 8x_2 + x_3 = 24$ zur Schar gehört.

Aufgabe P4: (Nach Abs 333/12.3 Kl. 10, (BAg 343/857)) Ein Glücksrad ist in 20 gleich große Sektoren unterteilt, die entweder blau oder gelb eingefärbt sind. Das Glücksrad wird 100-mal gedreht. Die binomialverteilte Zufallsgröße $\mathcal{X}$ beschreibt die Anzahl, wie oft dabei die Farbe 'Blau', die binomialverteilte Zufallsgröße $\mathcal{Y}$, wie oft dabei die Farbe 'Gelb' erzielt wird.
a$_2$) (BAg 343/856) (2 BE) Begründen Sie, dass $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ die gleiche Standardabweichung haben.
b$_{2-3}$) (BAg 343/857h) (3 BE) Der Erwartungswert von $\mathcal{X}$ ist ganzzahlig. Die Abb. 1037/578b zeigt Werte der Wahrscheinlichkeitsverteilung von $\mathcal{X}$. Bestimmen Sie die Anzahl der blauen Sektoren des Glücksrads.

Wahlaufgaben Bearbeiten Sie **zwei** der Aufgaben W1 bis W6.

Aufgabe W1: (Nach Abs 139/6.1.8, (BAg 139/341)) Gegeben ist für jede positive reelle Zahl a die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f_a mit $f_a(x) = a \cdot x^2$. Die Abb 1038/579a zeigt den Graphen von $f_{\frac{1}{2}}$ sowie die Tangente t an den Graphen von $f_{\frac{1}{2}}$ im Punkt $(4|f_{\frac{1}{2}}(4))$.
a$_1$) (1 BE) Geben Sie anhand der Abbildung eine Gleichung der Tangente t an.
b$_{2-3}$) (4 BE) Weisen Sie nach, dass für jeden Wert $u \in \mathbb{R}$ die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $(u|f_a(u))$ die y-Achse im Punkt $(0|-f_a(u))$ schneidet.

Aufgabe W2: (Nach Abs 182/7.1.15, Kl.11; BAg 179/481+165/430) (5 BE)
$_5$) Abb 1038/579b zeigt die Graphen einer Funktion f sowie ihrer Umkehrfunktion $\bar{f}$. F ist eine Stammfunktion von f. Die Punkte $P(4|2)$ und $Q(6|3)$ liegen auf dem Graphen von $\bar{f}$. Begründen Sie mithilfe geeigneter Eintragungen in der Abbildung, dass der Inhalt der markierten Fläche durch $10 - (F(3) - F(2))$ berechnet werden kann.

Aufgabe W3: (Nach Abs 272/10.5, (BAg 272/745)) Die Mittelpunkte der Seitenflächen eines Würfels sind die Eckpunkte eines Oktaeders (vgl. Abb 1038/579c). Die Eckpunkte $A(1|2|1)$, B, $C(-3|-6|9)$ und D des Oktaeders liegen in der Ebene H mit der Gleichung $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6$.
a_{1}) (2 BE) Weisen Sie nach, dass die Kantenlänge des Würfels 12 beträgt.
b_{3}) (3 BE) Bestimmen Sie die Koordinaten eines der beiden Eckpunkte des Oktaeders, die nicht in H liegen.

Aufgabe W4: (Nach Abs 272/10.5, (BAg 272/745)) Gegeben ist die Schar der Geraden
$g_k : \vec{x} = \begin{pmatrix} k \\ -4k \\ k \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}$.
a_{1}) (1 BE) Begründen Sie, dass alle Geraden der Schar parallel zueinander sind.
b_{4}) (4 BE) Betrachtet wird das Quadrat mit folgenden Eigenschaften: (i) Die Punkte $O(0|0|0)$ und $P(11|4|5)$ sind Eckpunkte des Quadrats. (ii) Zwei Seiten des Quadrats liegen auf Geraden der Schar. Weisen Sie nach, dass O und P keine benachbarten Eckpunkte dieses Quadrats sind.

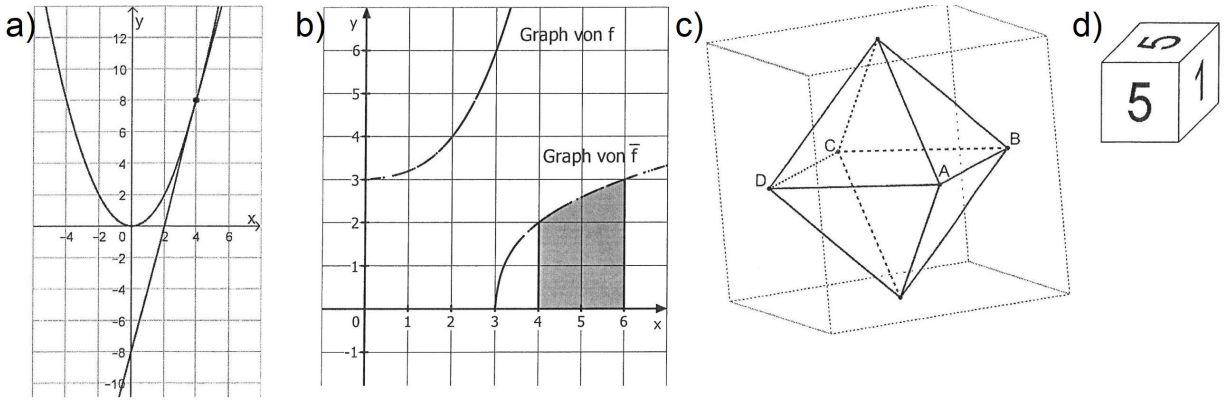


Abb. 579 Aufgabe W1 W2 W3 W5

Aufgabe W5: (Nach Abs 323/12.2.2, Kl.9, (BAg 324/812)) (5 BE)
$_{3-4}$) Die drei nicht sichtbaren Seiten des in Abb 1038/579d abgebildeten Würfels sollen jeweils mit einer der Zahlen 3, 4, 5 oder 6 beschriftet werden. Dabei können Zahlen auch mehrfach verwendet werden. Nach der Beschriftung soll der Würfel folgende Eigenschaften haben:

i) Beim einmaligen Werfen ist der Erwartungswert für die erzielte Zahl gleich 4.
ii) Auf den sechs Seiten des Würfels kommen genau drei verschiedene Zahlen vor.
iii) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim zweimaligen Werfen des Würfels zweimal die gleiche Zahl erzielt wird, beträgt $\frac{1}{2}$.

Untersuchen Sie, ob es möglich ist, die nicht sichtbaren Seiten des Würfels so zu beschriften, dass er alle drei Eigenschaften besitzt.

Aufgabe W6: (Nach Abs 328/12.2.5, Kl.9, (BAg 329/822)) (5 BE)
$_{3}$) Bei einem Zufallsexperiment gilt für zwei Ereignisse A und B:

i) $P(A \cap B) = 3x$ mit $x > 0$, ii) $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$, iii) $P_B(A) = \frac{3}{4}$.

Stellen Sie den beschriebenen Zusammenhang in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar und begründen Sie, dass $x \leq \frac{1}{5}$ gelten muss.

16.5.6 Wahlteil Abitur 2024 Filme: http://Abi24.slt.biz

Aufgabe I 1.1 (A1.1): (Nach Abs 143/6.2) Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_{a,b}$ durch $f_{a,b} = ax^3 - bx$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$. Abb. 1041/581a zeigt den Graphen einer der Fktn der Schar.
a_{2-3}) (BAg 105/270) (2 BE) Begründen Sie, dass jeder Graph der Schar symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist.
b_{2}) (BAg 145/361g) (6 BE) Weisen Sie in Abhängigkeit von a und b nach, dass der Graph von $f_{a,b}$ einen

Tiefpunkt mit der x-Koordinate $\sqrt{\frac{b}{3a}}$ hat. Begründen Sie, dass er zudem einen Hochpunkt besitzt und dass dieser eine kleinere x-Koordinate hat als der Tiefpunkt.
c_{2-3}) (Nach Abs 182/7.1.15, (BAg 179/478)) (7 BE) Es gibt eine Funktion der Schar, die bei $x = 3$ eine Nullstelle hat und deren Graph im vierten Quadranten mit der x-Achse ein Flächenstück mit dem Inhalt 40.5 einschließt. Bestimmen Sie die zugehörigen Werte von a und b.

Die Funktion der Schar, deren Graph in Abb. 1041/581a dargestellt ist, wird mit f bezeichnet; ihr Funktionsterm ist $f(x) = x^3 - 4x$.
d_2) (BAg 139/338) (7 BE) Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $A(2|0)$, die x-Achse und die Gerade g mit der Gleichung $y = -x - 2$ schließen ein Dreieck ein. Berechnen Sie seinen Flächeninhalt.
e_4) (BAg 250/658 + 253/669) (4 BE) Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist: Ist P ein beliebiger Punkt auf dem Graphen von f, so liegt der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke von P und dem Koordinatenursprung auf dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion h mit $h(x) = 4x^3 - 4x$.

Aufgabe I 1.2 (A1.2): (Nach Abs 143/6.2) Die Leitung eines großen Unternehmens versendet jeden Arbeitstag um 7:00 Uhr eine E-Mail mit tagesaktuellen Informationen an alle Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter. Diese wurden gebeten, nach dem Lesen der E-Mail eine Lesebestätigung zu versenden. Die folgende Tabelle zeigt für einen bestimmten Tag, wie viele Lesebestätigungen bei der Leitung des Unternehmens bis zum jeweiligen Zeitpunkt bereits eingegangen sind.

Zeitpunkt (Uhrzeit)	7:30	8:00	8:30	9:00	9:30	10:00	....	14:30	15:00	....
Anzahl der bis dahin eingegangenen Lesebestätigungen	252	899	1701	2627	3503	4364	....	7552	7572	....

Beispielsweise sind von 7:00 Uhr bis 10:00 Uhr 4364 Lesebestätigungen eingegangen.

a_1) (BAg 138/333) (3 BE) Ermitteln Sie mithilfe der Tabelle für den betrachteten Tag, wie viele Lesebestätigungen im Zeitraum von 8:30 Uhr bis 10:00 Uhr im Mittel pro Stunde eingegangen sind.

Auf der Grundlage der über viele Tage erfassten Lesebestätigungen wurde mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen u mit $u(x) = 100x^3 - 900x^2 + 2300x$ und v mit $v(x) = 20x^2 - 520x + 2880$ die Funktion k entwickelt: $k(x) = \begin{cases} u(x) & \text{für} \quad 0 \le x < 3 \\ v(x) & \text{für} \quad 3 \le x \le 8 \end{cases}$
Die Funktion k beschreibt modellhaft für einen Zeitraum von acht Stunden eines Arbeitstages die zeitliche Entwicklung der momentanen Änderungsrate der Anzahl der eingegangenen Lesebestätigungen. Dabei ist x die seit 7:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden und $k(x)$ die momentane Änderungsrate der Anzahl der seit 7:00 Uhr eingegangenen Lesebestätigungen in der Einheit $\frac{1}{h}$.
b_2) (BAg 150/380) (3 BE) Ber. Sie $k(2)$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.
c_2) (3 BE) Es gilt $v(x) = 20 \cdot (x - 18) \cdot (x - 8)$. Begründen Sie, dass die Funktion v nicht geeignet ist, die momentane Änderungsrate auch für den Zeitraum nach 15:00 Uhr zu beschreiben.
d_2) (Nach Abs 182/7.1.15, BAbs 177/467) (5 BE) Berechnen Sie mithilfe der Funktion k die Anzahl der im Zeitraum von 10:00 Uhr bis 15:00 Uhr eines Arbeitstages eingegangenen Lesebestätigungen. Ermitteln Sie, um wie viel Prozent diese auf der Grundlage des Modells berechnete Anzahl von der entsprechenden Anzahl des eingangs betrachteten Tages (vgl. Tabelle) abweicht.

Aufgabe I 2.1 (A2.1): (Nach Abs 182/7.1.15) Zur Untersuchung der Lungenfunktion muss eine Person tief einatmen und anschließend zügig in ein Messgerät ausatmen. Die Änderungsrate des Luftvolumens pro Zeiteinheit beim Ausatmen heißt Atemfluss. Bei einer Messung wird der Atemfluss für $0 \le t \le 2$ näherungsweise durch die Funktion f mit $f(t) = 30 \cdot (e^{-3t} - e^{-6t})$ beschrieben (t in Sekunden seit Beginn des Ausatmens, $f(t)$ in Liter pro Sekunde). In Abb. 1040/580a ist der Graph von f abgebildet. Für die Ableitungsfunktion f' Graph von f gilt $f'(t) = -90e^{-3t} \cdot (1 - 2e^{-3t})$.

a_2) (BAg 167/433)a (4 BE) Weisen Sie nach, dass der maximale Atemfluss 7.5 Liter pro Sekunde beträgt.
b_2) (2 BE) Zeigen Sie, dass der Atemfluss zwei Sekunden nach Beginn des Ausatmens weniger als ein Prozent seines maximalen Werts beträgt.
c_3) (BAg 167/433)c (7 BE) Bestimmen Sie rechnerisch die Länge des Zeitraums, in dem der Atemfluss

mindestens 5 Liter pro Sekunde beträgt.
d_{2-3}) (BAg 183/494) (3 BE) Formulieren Sie eine Fragestellung im Sachzusammenhang, die auf die Gleichung $\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{4} \cdot \int_0^2 f(t)dt$ führt.
e_{2-3}) (BAg 178/474) (4 BE) Berechnen Sie $\int_0^2 f(t)dt$.
f_{2-3}) (BAg 139/338) (4 BE) Bei einer anderen Modellierung wird der Atemfluss ab dem Zeitpunkt $t_1 = 1.5$ nicht mehr durch die Funktion f, sondern durch die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(1.5|f(1.5))$ beschrieben. Bei dieser Modellierung gibt es einen Zeitpunkt ($t_2 > 0$, zu dem der Atemfluss 0 Liter pro Sekunde beträgt. Bestimmen Sie den Wert von t_2.
g_{3-4}) (4 BE) Bei ärztlichen Untersuchungen werden Atemfluss-Volumen-Diagramme betrachtet. Diese stellen den Atemfluss in Abhängigkeit vom Volumen der ausgeatmeten Luft dar. In Abb. 1040/580b ist das Diagramm zu derjenigen Messung, die durch die Funktion f beschrieben wird abgebildet. Betrachtet wird der Hochpunkt $H(x_0|y_0)$ der abgebildeten Kurve. Begründen Sie, dass y_0 der in a) genannte maximale Atemfluss ist, und geben Sie einen Term an, mit dem man x_0 berechnen kann.

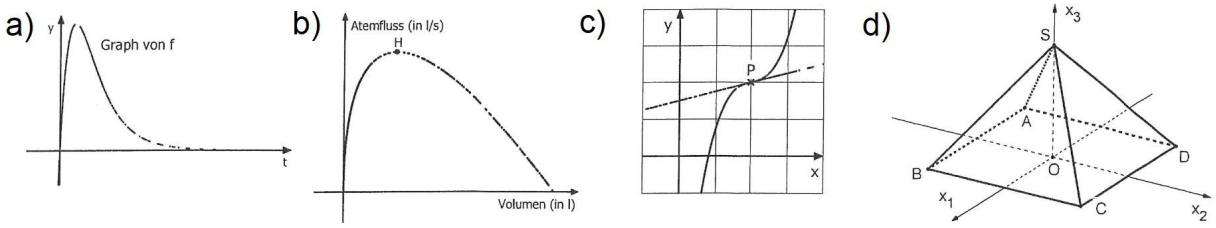


Abb. 580 Aufgabe I 2.1 (A2.1), I 2.1g, I 2.2 (A2.2), II 1.1 (B1.1)

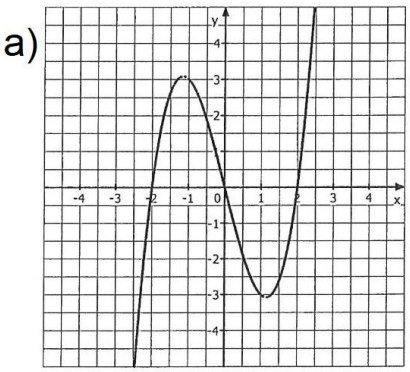
Aufgabe I 2.2 (A2.2): (Nach Abs 143/6.2) Für jedes a mit $0 < a < 1$ ist eine Funktion f_a mit $f_a(x) = (x-2)^3 + a(x-2) + 2$ gegeben.
a_2) (BAg 149/376) (4 BE) Weisen Sie nach, dass jede Funktion f_a streng monoton wachsend ist.

Die Tangente t_a an den Graphen von f_a im Punkt $P(2|2)$ (Abb. 1040/580c), die Tangente an den Graphen der Umkehrfunktion $\bar{f}_a$ im Punkt P und die Koordinatenachsen schließen im 1. Quadranten des Koordinatensystems ein Viereck V_a ein. Q_a ist der Schnittpunkt von t_a mit der y-Achse. Abgebildet (Abb. 1040/580c) sind beispielhaft der Graph von $f_{0.25}$ sowie die Tangente $t_{0.25}$.
b_{2-3}) (BAg 139/338) (5 BE) Begründen Sie, dass der Punkt Q_a zwischen dem Ursprung und dem Punkt $(0|2)$ liegt und dass der Flächeninhalt des Vierecks V_a kleiner als 4 ist.
c_2) (BAg 139/338) (3 BE) Für einen Wert von a hat der Innenwinkel des Vierecks V_a bei P die Größe 60°. Begründen Sie ohne Berechnung des Werts von a, dass der Steigungswinkel der zugehörigen Tangente t_a die Größe 15° hat.

Aufgabe II 1.1 (B1.1): Nach Abs. 272/10.5. Abb. 1040/580d zeigt die Pyramide $ABCDS$ mit den Eckpunkten $A(-3|-3|0)$, $B(3|-3|0)$, $C(3|3|0)$, $D(-3|3|0)$ und $S(0|0|4)$ sowie den Punkt $O(0|0|0)$, der in der quadratischen Grundfläche der Pyramide liegt. Die Seitenfläche CDS der Pyramide liegt in der Ebene E.

a_1) (BAg 238/603 oder 268/730) (4 BE) Berechnen Sie den Inhalt der Oberfläche der Pyramide.
b_{2-3}) (BAg 260/699) (3 BE) Genau eine der folgenden Gleichungen i) bis iii) beschreibt eine Symmetrieebene der Pyramide. Geben Sie diese Gleichung an und begründen Sie für eine der anderen Gleichungen, dass die durch sie beschriebene Ebene keine Symmetrieebene der Pyramide ist.
i) $x_1 - x_3 = 0$, ii) $x_1 + x_2 + x_3 = 4$, iii) $x_1 + x_2 = 0$
c_1) (BAg 264/712) (3 BE) Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.
(zur Kontrolle: $4x_2 + 3x_3 = 12$)
d_3) (BAg 272/743 + 273/750) (5 BE) Es gibt einen Punkt $P(0|0|p)$, der im Innern der Pyramide liegt und von allen vier Seitenflächen sowie der Grundfläche der Pyramide den gleichen Abstand hat. Mithilfe des folgenden Gleichungssystems lässt sich der Wert von p bestimmen:
i) $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, ii) $4 \cdot 4t + 3 \cdot (p + 3t) = 12$, iii) $|\overrightarrow{PQ}| = p$.

Erläutern Sie die Überlegungen im geometrischen Zusammenhang, die diesem Vorgehen zur Bestimmung des Werts von p zugrunde liegen.



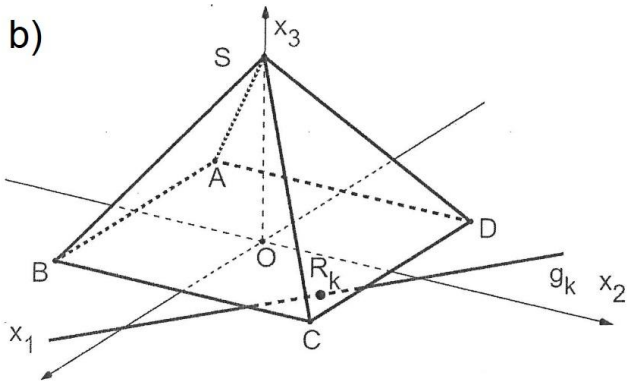


Abb. 581 zu Aufgabe I 1.1a (A1.1) Beiblatt zu Aufgabe II 1 (B.1) das abzugeben ist

Die Ebene E gehört zur Schar der Ebenen $E_k : 4k \cdot x_1 + 4 \cdot \sqrt{1-k^2} \cdot x_2 + 3x_3 = 12$ mit $k \in [-1;1]$. Die Seitenfläche ADS der Pyramide liegt in der Ebene E_{-1} der Schar, die Seitenfläche BCS in der Ebene E_1.
$\mathbf{e}_1$) (BAg 267/725) (1 BE) Zeigen Sie, dass der Punkt S in allen Ebenen der Schar enthalten ist.
f_2) (BAg 272/741+267/725) (4 BE) Weisen Sie nach, dass die Größe des Winkels, unter dem die Gerade OS die Ebene E_k schneidet, unabhängig von k ist.

Jede Ebene E_k der Schar schneidet die x_1x_2-Ebene in einer Gerade g_k. Mit R_k wird jeweils derjenige Punkt auf g_k bezeichnet, der von 0 den kleinsten Abstand hat. In Abb. 1041/581b sind g_k und R_k beispielhaft für eine Ebene E_k der Schar dargestellt.
g_{1-2}) (BAg 272/744) (2 BE) Zeichnen Sie die Punkte R_{-1} und R_1 in Abb. 1041/581b ein.
h_3) (3 BE) Durchläuft k alle Werte von -1 bis 1, dann dreht sich die Fläche OR_kS um die Strecke $\overline{OS}$. Dabei entsteht ein Körper. Beschreiben Sie die Form des entstehenden Körpers und bestimmen Sie das Volumen dieses Körpers.

Aufgabe II 2 (B2): Nach Abs. 272/10.5. Gegeben sind die Ebene $E : 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 12$ und die Schar der Geraden $g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a-2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$.

a_{1-2}) (BAg 272/741) (2 BE) Untersuchen Sie, ob g_4 orthogonal zu $g_{0.5}$ ist.
b_{1-2}) (BAg 272/741) (3 BE) Berechnen Sie die Größe des Winkels, den g_4 mit E einschließt.
c_2) (BAg 253/670) (3 BE) Untersuchen Sie, ob eine Gerade der Schar den Ursprung enthält.
d_2) (BAg 263/711h) (4 BE) Alle Geraden der Schar liegen in der Ebene F. Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung von F. (Kontrollerg.: $x_1 - 2x_2 - x_3 = -8$)

Betrachtet werden die Punkte $P_r(1+r|2-2r|5-r)$ mit $r \in \mathbb{R}_0^+$.

e_2) (BAg 272/741) (3 BE) Begründen Sie, dass die Punkte P_r auf einer zu F orthogonalen Gerade liegen.
f_3) (BAg 272/744) (4 BE) Beurteilen Sie die folgende Aussage: Jeder Punkt P_r hat von jeder Gerade der Schar den Abstand $\sqrt{6} \cdot r$.
g_{2-3}) (BAg 267/725) (3 BE) Gegeben ist die Gerade $k : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass k in F liegt, aber nicht zur Schar gehört.
h_3) (BAg 264/714+267/725) (3 BE) Die Schnittpunkte aller Geraden g_a mit der x_1x_2-Ebene liegen auf der Gerade h. Auf h gibt es einen Punkt, der auf keiner Gerade g_a liegt. Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Punkts.

Aufgabe III 1 (C1): Nach Abs. 338/12.3.5 (Kl. 10). Ein bekannter Video-Streamingdienst bietet einen kostenpflichtigen Zugang zu Spielfilmen und Serien an. Personen, die davon gegen Zahlung einer monatlichen Gebühr Gebrauch machen, werden im Folgenden als Abonnenten bezeichnet. Sie

haben sich entweder für das Spielfilmpaket oder für das Komplettpaket entschieden, das neben den Spielfilmen auch noch Serien enthält. Unter den Abonnenten sind 70% höchstens 40 Jahre alt. Von diesen haben 80% das Komplettpaket gewählt. Unter denjenigen Abonnenten, die älter als 40 Jahre sind, haben sich 50% für das Komplettpaket entschieden.

a_1) (BAg 322/807) (3 BE) Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar.
b_2) (BAg 327/818) (3 BE) Eine unter allen Abonnenten zufällig ausgewählte Person hat sich für das Komplettpaket entschieden. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie höchstens 40 Jahre alt ist. c_{2-3}) (BAg 343/857) (4 BE) Bestimmen Sie die Anzahl der Abonnenten, die man mindestens zufällig auswählen müsste, damit unter ihnen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% mehr als fünf Personen älter als 40 Jahre sind.

Nach Abs. 350/13.1. Der Anteil der zufriedenen Abonnenten von derzeit 60% soll gesteigert werden. Dazu wird ein Algorithmus entwickelt, der jedem Abonnenten täglich individuell einen Spielfilm vorschlägt. Als Basis für die Entscheidung über den dauerhaften Einsatz des Algorithmus plant das Management einen Probebetrieb. Im Anschluss soll die Nullhypothese 'Der Anteil der zufriedenen Abonnenten beträgt höchstens 60%.' mithilfe einer Stichprobe von 200 zufällig ausgewählten Abonnenten auf einem Signifikanzniveau von 5% getestet werden.
d_3) (BAg 351/876) i) (2 BE) Geben Sie an, welche Überlegung des Managements zur Wahl dieser Nullhypothese geführt haben könnte.

Für den beschriebenen Test ergibt sich {132;133;...;200} als der Ablehnungsbereich der Nullhypothese.

e_3) (BAg 354/884) (4 BE) Zur Bestimmung der unteren Grenze dieses Ablehnungsbereichs wurden zunächst folgende Lösungsschritte ausgeführt: i) $\mathcal{Y}$: Anzahl der zufriedenen Abonnenten in der Stichprobe, ii) $P_{0.6}^{200}(\mathcal{Y} \geq 132) \approx 0.047$,

Begründen Sie, dass die beiden Lösungsschritte zur Bestimmung der unteren Grenze nicht ausreichend sind, und ergänzen Sie diese geeignet.

f_2) (BAg 357/893) (4 BE) Weisen Sie nach, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler zweiter Art bei diesem Ablehnungsbereich der Nullhypothese mehr als 90% betragen könnte.

Nach Abs. 333/12.3.1, Kl. 10. Zur Anmeldung auf der Webseite des Streamingdiensts ist ein persönliches Kennwort erforderlich. Für das Kennwort können 80 verschiedene Zeichen verwendet werden: je 26 Groß- und Kleinbuchstaben, 10 Ziffern sowie 18 Sonderzeichen.

g_2) (BAg 335/838) (2 BE) Einige Abonnenten verwenden ein Kennwort, das genau acht Zeichen lang ist und nur aus Kleinbuchstaben besteht. Dabei können Zeichen mehrfach vorkommen. Zeigen Sie, dass für diese Abonnenten weniger als ein Tausendstel aller möglichen Kennwörter infrage kommen, die aus genau acht Zeichen bestehen.

h_2) (BAg 336/840) (3 BE) Niclas beschließt ein Kennwort zu wählen, das die beiden folgenden Bedingungen erfüllt: i) Es besteht aus genau acht Zeichen, die untereinander verschieden sind. ii) Die Buchstaben seines Namens sind in der korrekten Reihenfolge und unter Berücksichtigung der Groß- und Kleinschreibung enthalten. Damit sind beispielsweise Nic4+las oder nNicl*as mögliche Kennwörter. Bestimmen Sie die Anzahl aller derartigen Kennwörter.

Aufgabe III 2 (C2): Nach Abs. 338/12.3.5, Kl. 10. Eine Berghütte wird von Gästen mit Mountainbike und ohne Mountainbike besucht. Es gibt Gäste, die eigene Verpflegung mitbringen. Erfahrungsgemäß kommen 44% der Gäste mit dem Mountainbike. 73% der Gäste bringen keine eigene Verpflegung mit. 11% der Gäste kommen mit dem Mountainbike und bringen eigene Verpflegung mit. Ein Gast wird zufällig ausgewählt. Betrachtet werden die folgenden Ereignisse:

M: 'Der Gast kommt mit dem Mountainbike.'
V: 'Der Gast bringt eigene Verpflegung mit.'

a_1) (BAg 322/807) (3 BE) Stellen Sie den Sachverhalt in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar.

b_2) (BAg 327/818) (3 BE) Untersuchen Sie, ob der Anteil der Gäste, die eigene Verpflegung mitbringen, unter den Gästen mit Mountainbike gleich groß ist wie unter den Gästen ohne Mountainbike.
c_{1-2}) (BAg 322/804) (2 BE) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $M \cup V$.
d_2) (BAg 345/862) (4 BE) Geben Sie jeweils einen Wert für die Parameter und b an ($a > 0$, $b > 0$), sodass mit dem Term $a \cdot 0.44 \cdot 0.56^b + 0.56^{10}$ die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses im Sachzusammenhang berechnet werden kann. Beschreiben Sie das zugehörige Zufallsexperiment und das Ereignis.

Nach Abs. 358/13.2. Auf der Berghütte werden Bananen, Birnen und Äpfel angeboten. Die Masse der Bananen wird als normalverteilt mit einem Erwartungswert von 120 g und einer Standardabweichung von 10 g angenommen.
e_{1-2}) (BAg 362/905) (3 BE) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Masse einer zufällig ausgewählten Banane um höchstens 10% vom Erwartungswert abweicht.
f_2) (BAg 362/905) (3 BE) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Banane eine größere Masse als m hat, beträgt 69% (m in Gramm). Ermitteln Sie den Wert von m.
g_{2-3}) (BAg 362/905) (4 BE) Die Masse der Birnen wird ebenfalls als normalverteilt mit einem ganzzahligen Erwartungswert in Gramm und einer Standardabweichung von 25g angenommen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Birne eine Masse von höchstens 121g hat, beträgt 10%. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Birne mindestens 180 g wiegt.
h_3) (BAg 341/854) (3 BE) Die Masse eines Apfels wird als normalverteilt mit μ_a und σ_a angenommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von vier zufällig ausgewählten Äpfeln zwei eine kleinere Masse als μ_a und zwei eine größere Masse als μ_a haben.

16.5.7 Beispielaufgaben für den 'Pflichtteil' des Abiturs 2024 http://Muster24.slt.biz

Was sollte ich vom Musterabi 2024 nach welcher Unterrichtseinheit können?

Kl. 10:	P1a, P4, W1, W2, W4a, W5, W6, I.1\{h}; I.1.2, I.1.3ac, I.2dgh, II.2ab, III.1a-d,g; III.2.1				
UE 11$_2$:	P2ab; I.2ab	**UE 11$_3$:**	P1b, P2c, I.1h; I.2cf; I.1.3b	**UE 11$_4$:**	I.2e
UE 11$_6$:	W4b, II.1c	**UE 11$_8$:**	III.1ef; III.2.2a	**UE 12$_1$:**	W3, II.1a-d	**UE 12$_4$:**	P3, II.2e-g

Bearbeiten Sie alle Aufgaben P1 bis P4. (2 BE = 1 VP)

Aufgabe P1: Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = \sin x$. Abb 1043/582 a) zeigt den Graphen G_f von f sowie die Tangenten an G_f in den dargestellten Schnittpunkten mit der x-Achse.

a$_1$) (Zu Beginn von Kl. 11 lösbar; (BAg 114/292)) Zeigen Sie, dass diejenige der beiden Tangenten, die durch den Koordinatenursprung verläuft, die Steigung 1 hat. (1 BE)

b$_{2-3}$) (Nach Abs 182/7.1.15; BAg 179/481) Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das von G_f und den beiden Tangenten eingeschlossen wird. (4 BE)

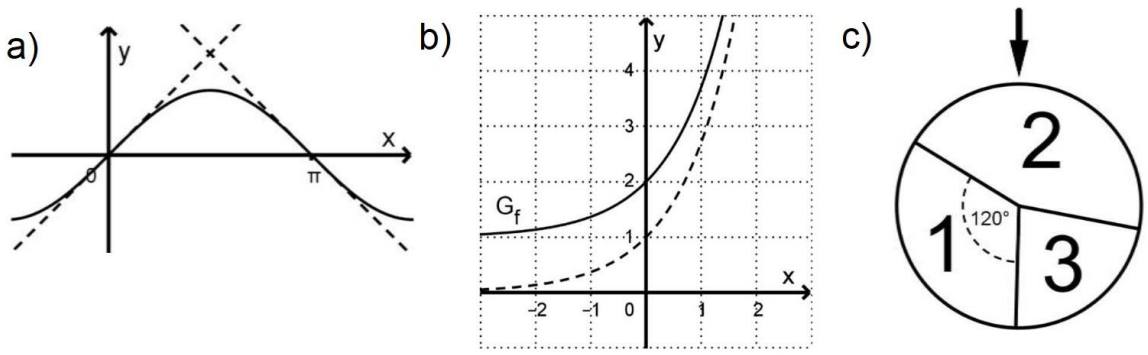


Abb. 582

Aufgabe P2: Die Verbreitung eines Computervirus lässt sich modellhaft mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(t) = 2 \cdot t \cdot e^{-0.01t}$ beschreiben. Dabei ist t die Zeit in Tagen, die seit der ersten Infizierung eines Computers mit dem Virus vergangen ist, und $f(t)$ die Rate der Infizierungen zum Zeitpunkt t in der Einheit 'Eintausend Computer pro Tag'.

$\mathbf{a}_{1-2}$) (Nach Abs 159/6.3.2; (BAg 163/416)) Zeigen Sie, dass $2 \cdot (1 - 0.01t) \cdot e^{-0.01t}$ ein Term der ersten Ableitungsfunktion von f ist. (2 BE)

$\mathbf{b}_2$) (Nach Abs 167/6.3.10; BAg 167/433) Geben Sie den Zeitpunkt an, zu dem die Rate der Infizierungen am größten ist. (1 BE)

$\mathbf{c}_{2-3}$) (Nach Abs 182/7.1.15; (BAg 177/467)) Betrachtet wird der Zeitraum der zweiten Woche nach der ersten Infizierung eines Computers mit dem Virus. Geben Sie einen Term an, mit dem die Anzahl der Computer berechnet werden kann, die in diesem Zeitraum infiziert werden. (2 BE)

Aufgabe P3: (Nach Abs 272/10.5) Gegeben sind der Punkt $P(-1|7|2)$ und die Ebene $E : x_1 + 3x_2 = 0$.

$\mathbf{a}_1$) (BAg 262/706) Zeigen Sie, dass P nicht in E liegt. (1 BE)

$\mathbf{b}_2$) (BAg 273/750d) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts, der entsteht, wenn P an E gespiegelt wird. (4 BE)

Aufgabe P4: (Mit Wth Kl 9. lösbar) Die Vierfeldertafel gehört zu einem Zufallsexperiment mit den Ereignissen A und B. Für die Wahrscheinlichkeit p gilt $p \neq 0$.
a) (BAg 322/807) **$\mathbf{i}_1$)** Vervollständigen Sie die Vierfeldertafel.
$\mathbf{ii}_2$) Zeigen Sie, dass p nicht den Wert $\frac{1}{5}$ haben kann (3 BE).
$\mathbf{b}_{2-3}$) (BAg 329/821) Für einen bestimmten Wert von p sind A und B stochastisch unabhängig. Ermitteln Sie diesen Wert von p (2 BE).

	B	$\overline{B}$	
A	p		$3p$
$\overline{A}$			$1-3p$
	$4p$		

Wahlaufgaben: Bearbeiten Sie zwei der Aufgaben W1 bis W6.

Aufgabe W1: (Zu Beginn von Kl. 11 lösbar; (BAg 105/270)) Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f und g. Der Graph von f ist symmetrisch bezüglich der y-Achse, der Graph von g ist symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs. Beide Graphen haben einen Hochpunkt im Punkt $P(2|1)$.

$\mathbf{a}_2$) Geben Sie für die Graphen von f und g jeweils die Koordinaten und die Art eines weiteren Extrempunkts an. (2 BE)

$\mathbf{b}_3$) Untersuchen Sie die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion h mit $h(x) = f(x) \cdot (g(x))^3$ im Hinblick auf eine mögliche Symmetrie ihres Graphen. (3 BE)

Aufgabe W2: (Zu Beginn von Kl. 11 lösbar; (BAg 153/389)) Abb 1043/582 b) zeigt den Graphen G_f einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f sowie den Graphen der ersten Ableitungsfunktion von f.

$\mathbf{a}_{1-2}$) Geben Sie die Steigung der Tangente an G_f im Punkt $(0|f(0))$ an. (1 BE)

$\mathbf{b}_4$) (BAg 110/285 + 137/330) Betrachtet wird die Schar der Funktionen g_c mit $c \in \mathbb{R}^+$. Der Graph von g_c geht aus G_f durch Streckung mit dem Faktor c in y-Richtung hervor. Die Tangente an den Graphen von g_c im Punkt $(0|g_c(0))$ schneidet die x-Achse. Bestimmen Sie rechnerisch die x-Koordinate des Schnittpunkts. (4 BE)

Aufgabe W3: (Nach Abs 262/10.3) Die Ebene E: $3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6$ enthält einen Punkt, dessen drei Koordinaten übereinstimmen. **$\mathbf{a}_{1-2}$)** (BAg 264/714) Bestimmen Sie diese Koordinaten. (2 BE)

$\mathbf{b}_4$) (BAg 267/725d) Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist: Es gibt unendlich viele Ebenen, die keinen Punkt enthalten, dessen drei Koordinaten übereinstimmen. (3 BE)

Aufgabe W4: (Nach Abs 258/10.2) Gegeben sind die Punkte $A(0|0|0)$, $B(3|4|1)$, $C(1|7|3)$ und $D(-2|3|2)$.

a$_1$) (Mit Stoff Kl. 10 lösbar, (BAg 251/661)) Weisen Sie nach, dass das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist. (1 BE)

b$_4$) (BAg 261/700e) Der Punkt T liegt auf der Strecke $\overline{AC}$. Das Dreieck ABT hat bei B einen rechten Winkel. Ermitteln Sie das Verhältnis der Länge der Strecke $\overline{AT}$ zur Länge der Strecke $\overline{CT}$. (4 BE)

Aufgabe W5: (Mit Stoff Kl. 8 lösbar; (BAg 319/797))
In einem Behälter befinden sich Kugeln, von denen jede dritte gelb ist.

a$_1$) Aus dem Behälter wird zweimal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Kugeln gelb sind. (1 BE)

b$_3$) Im Behälter werden zwei gelbe Kugeln durch zwei blaue Kugeln ersetzt. Anschließend wird aus dem Behälter erneut zweimal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Kugeln gelb sind, beträgt nun $\frac{1}{16}$. Ermitteln Sie, wie viele gelbe Kugeln sich nach den beschriebenen Vorgängen im Behälter befinden. (4 BE)

Aufgabe W6: $_{2-3}$) (Mit Stoff Kl. 9 lösbar; (BAg 324/812))
Für ein Spiel wird ein Glücksrad verwendet. Abb 1043/582 c) zeigt dieses Glücksrad schematisch. Die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einmaligem Drehen die Zahl 2 zu erzielen, wird mit p bezeichnet. Bei dem Spiel bezahlt jeder Spieler zunächst einen Einsatz von 1 €. Anschließend dreht er das Glücksrad zweimal. Erzielt er dabei zwei Zahlen, deren Summe mindestens 5 ist, wird ihm der Wert der Summe als Betrag in Euro ausgezahlt; ansonsten erfolgt keine Auszahlung. Wird das Spiel wiederholt durchgeführt, so ist zu erwarten, dass sich auf lange Sicht die Einsätze der Spieler und die Auszahlungen ausgleichen. Leiten Sie unter Verwendung der beschriebenen Spielregeln eine Gleichung her, mit der der Wert von p berechnet werden könnte; erläutern Sie dabei Ihr Vorgehen. (5 BE)

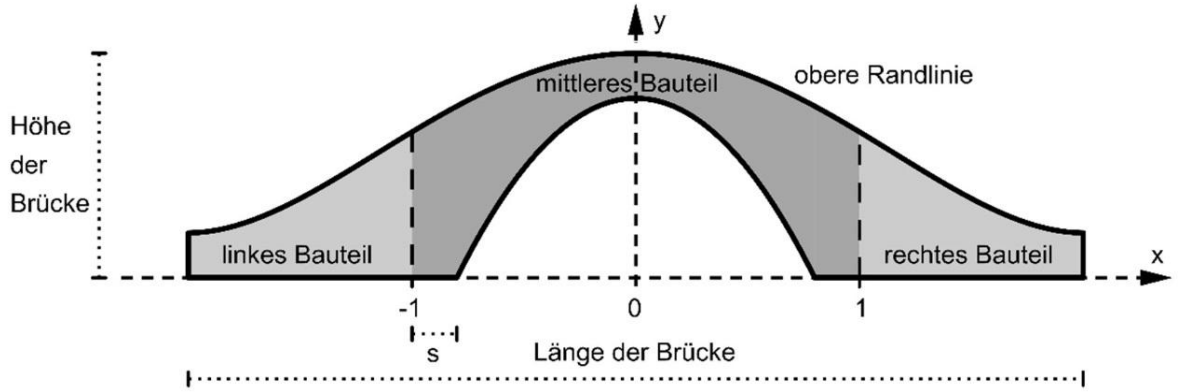


Abb. 583 Bauteile

16.5.8 Beispielaufgaben für den 'Wahlteil' des Abiturs 2024

Aufgabe I.1: (Mit Stoff Kl. 10 lösbar; (BAg 324/812)) Abb 1045/583 zeigt modellhaft den Längsschnitt einer dreiteiligen Brücke aus Holz für eine Spielzeugeisenbahn. Die Züge können sowohl über die Brücke fahren als auch darunter hindurch. Die obere Randlinie des Längsschnitts der Brücke kann mithilfe des Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{20}x^4 - \frac{2}{5}x^2 + 1$ beschrieben werden. Dabei werden die Endpunkte dieser Randlinie durch die beiden Tiefpunkte des Graphen von f dargestellt. Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die x-Achse die Horizontale; eine Längeneinheit entspricht einem Dezimeter in der Realität.

a$_1$) (BAg 105/270) Zeigen Sie rechnerisch, dass die obere Randlinie achsensymmetrisch ist. (2 BE)

b$_{1-2}$) (BAg 145/361 g-h) Bestimmen Sie rechnerisch die Höhe und die Länge der Brücke. (zur Kontrolle: Ein Tiefpunkt des Graphen von f hat die x-Koordinate 2.) (5 BE)

c_1) (BAg 156/401) Betrachtet wird derjenige Punkt der oberen Randlinie, der sich am Übergang vom mittleren zum rechten Bauteil befindet. Prüfen Sie, ob dieser Punkt auf halber Höhe zwischen dem höchsten Punkt der oberen Randlinie und deren rechtem Endpunkt liegt. (3 BE)

d_2) (BAg 136/323d,e) Geben Sie die Bedeutung des Terms $\frac{f(2)-f(1)}{2-1}$ im Sachzusammenhang an und berechnen Sie seinen Wert. (2 BE)

e_{1-2}) (BAg 139/338 + 146/364) Berechnen Sie die Größe des größten Steigungswinkels der Brücke, der beim Überfahren zu überwinden ist. (5 BE)

Der parabelförmige Teil der unteren Randlinie des Längsschnitts der Brücke kann mithilfe des Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $q(x) = 0.8 - a \cdot x^2$ mit $a \in \mathbb{R}$ beschrieben werden.

f_{1-2}) (BAg 35/71) In Abbildung 1045/583 ist die Länge einer der beiden Bodenflächen des mittleren Bauteils mit s bezeichnet. Bestimmen Sie alle Werte von a, die für diese Länge mindestens 0.1 dm liefern. (4 BE)

g_{2-3}) (BAg 156/401) Begründen Sie im Sachzusammenhang, dass für die Beschreibung der unteren Randlinie beliebig große Werte von a nicht infrage kommen. (2 BE)

h_{2-3}) (Erst ab Abs 182/7.1.15, (BAg 179/481)) Für die Brücke gilt $a = 1.25$. Die drei Bauteile der Brücke werden aus massivem Holz hergestellt;
1 dm^3 des Holzes hat eine Masse von 800 Gramm. Die Brücke ist 0.4 dm breit. Ermitteln Sie die Masse des mittleren Bauteils. (7 BE)

Aufgabe I.1.2 $_4$) (BAg 105/270) Während der Planung der Brückenform kamen zur Beschreibung der oberen Randlinie für das linke Bauteil eine Funktion g_l und für das rechte Bauteil eine Funktion g_r infrage. Auch bei Verwendung dieser Funktionen wäre die obere Randlinie achsensymmetrisch gewesen. Beurteilen Sie jede der folgenden Aussagen:

(I) $-g_l(x) = g_r(-x)$ für $-2 \le x \le 1$ (II) $g_l(x-1) = g_r(-x+1)$ für $-1 \le x \le 0$ (4 BE)

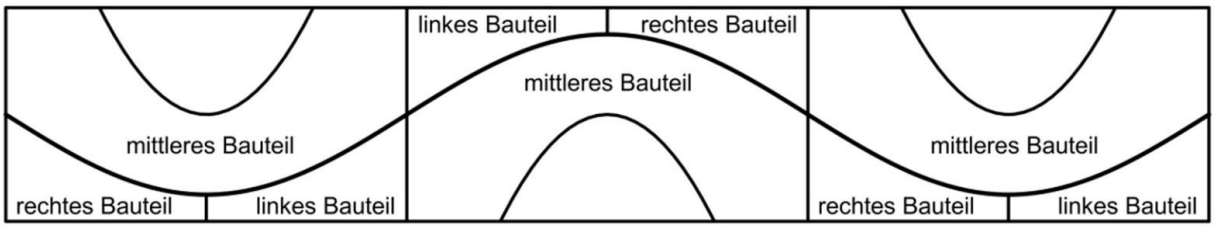


Abb. 584 Bauteile

Aufgabe I.1.3 Die Form und die Größe der Brücke werden verändert, indem im bisher verwendeten Modell die obere Randlinie des Längsschnitts mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion k mit $k(x) = \frac{3}{5} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) + \frac{4}{5}$ beschrieben wird. Die Bauteile der veränderten Brücke lassen sich nach dem in der Abbildung 1046/584 dargestellten Prinzip aus einem quaderförmigen Holzblock sägen. Der beim Sägen auftretende Materialverlust soll im Folgenden vernachlässigt werden.

a_3) Der Graph von k ist symmetrisch bezüglich jedes seiner Wendepunkte. Beschreiben Sie, wie diese Eigenschaft mit dem in der Abbildung 1046/584 dargestellten Prinzip zusammenhängt. (2 BE)

b_2) (BAg 115/295) Ermitteln Sie mithilfe des Funktionsterms von k den Flächeninhalt der gesamten in der Abbildung 584 gezeigten rechteckigen Vorderseite des Holzblocks. (4 BE)

Aufgabe I.2 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = e^x$.

a_1) (BAg 139/338) Bestimmen Sie rechnerisch eine Gleichung der Tangente an den Graphen von f in dessen Schnittpunkt mit der y-Achse. Geben Sie eine Gleichung der Gerade an, die in diesem Punkt senkrecht zur Tangente steht, sowie den Inhalt der Fläche, die von dieser Gerade, der Tangente und der x-Achse eingeschlossen wird. (4 BE)

b_3) (BAg kommt noch) Geben Sie alle Werte von $m \in \mathbb{R}$ an, für die die Gerade mit der Gleichung $y = m \cdot x + 1$ mit dem Graphen von f genau einen Punkt gemeinsam hat. (3 BE)

$c_{2-3,LK}$) (Nach Abs 182/7.1.15; BAg 181/488) Der Graph von f, die Koordinatenachsen und die Gerade mit der Gleichung $x = a$ mit $a > 0$ begrenzen ein Flächenstück. Rotiert dieses Flächenstück um die x-Achse, so erzeugt es einen Körper mit dem Volumen $3 \cdot \pi$. Bestimmen Sie den Wert von a. (5 BE)

Gegeben sind außerdem die in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ definierte Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{x}$ sowie die Funktion h mit $h(x) = \frac{1}{x-2} + 4$, deren Definitionsmenge so groß wie möglich gewählt wurde.

d_2) (Nach Abs 117/5.5; BAg 98/248) Beschreiben Sie, wie der Graph von h aus dem Graphen von g erzeugt werden kann. Geben Sie die Definitionsmenge von h sowie den Grenzwert von h für $x \to \infty$ an. (4 BE)

e_{2-3}) (Nach Abs 117/5.5; BAg 120/309) Abbildung 1048/585 a) soll den Graphen von h sowie die Gerade w mit der Gleichung $y = x$ darstellen. Ergänzen Sie die fehlenden Koordinatenachsen und skalieren Sie diese passend. (3 BE)

f_3) (Nach Abs 182/7.1.15; BAg 174/454c+d) Für jede Stammfunktion H von h gilt für jede reelle Zahl $b > 5$: $H(b) - H(5) > 4 \cdot (b - 5)$. Beschreiben Sie die geometrische Bedeutung dieser Aussage und veranschaulichen Sie die Aussage grafisch. (4 BE)

Die Umkehrfunktion von h wird mit k bezeichnet.

g_{2-3}) (eigentlich nach Klasse 9 lösbar; BAg 165/427) Alle gemeinsamen Punkte der Graphen von h und k liegen auf der Gerade w. Berechnen Sie die x-Koordinaten dieser gemeinsamen Punkte. (5 BE)

h_3) (eigentlich nach Klasse 10 lösbar; BAg 165/427 + 139/338) Begründen Sie ohne zu rechnen, dass jede Tangente mit der Steigung -1 an den Graphen von h auch Tangente an den Graphen von k ist. (3 BE)

Betrachtet werden nun die in $\mathbb{R}\backslash 0$ definierte Funktion u mit $u(x) = f(g(x))$ sowie die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion v mit $v(x) = g(f(x))$. Für die erste Ableitungsfunktion u' von u gilt $u'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}$

i_2) (Nach Abs 159/6.3, BAg 163/416) Geben Sie für jede der Funktionen u und v einen Funktionsterm an, der zwar die Variable x, aber keine Funktionsbezeichnung wie 'f' oder 'g' enthält. Nennen Sie die Wertemengen von u und v. (4 BE)

j_{2-3}) (Nach Abs 159/6.3, BAg 146/364) Zeigen Sie, dass u genau eine Wendestelle hat, und bestimmen Sie diese Wendestelle. (5 BE)

Aufgabe II.1: (Nach Abs 262/10.3) In einem Koordinatensystem wird der in Abb 1048/585 b abgebildete Körper $ABCDEF$ mit $A(0|10|1), B(10|20|1), C(0|20|1), D(0|7|0)$ und $F(0|20|0)$ betrachtet. Die beiden Seitenflächen $ACFD$ und $BEFC$ stehen senkrecht zur x_1x_2-Ebene.

Aufgabe II.1.1 a_{1-2}) (BAg 264/712) A, B und D liegen in der Ebene H. Bestimmen Sie eine Gleichung von H in Koordinatenform. (zur Kontrolle: $x_1 - x_2 + 3x_3 = -7$) (4 BE)

b_{1-2}) (BAg 264/714) b) Begründen Sie, dass die Gerade $i : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ sowohl in der x_1x_2-Ebene als auch in der Ebene H liegt. (2 BE)

Der Punkt E liegt auf i, wobei der Abstand von E zu F ebenso groß ist wie der Abstand von D zu F.

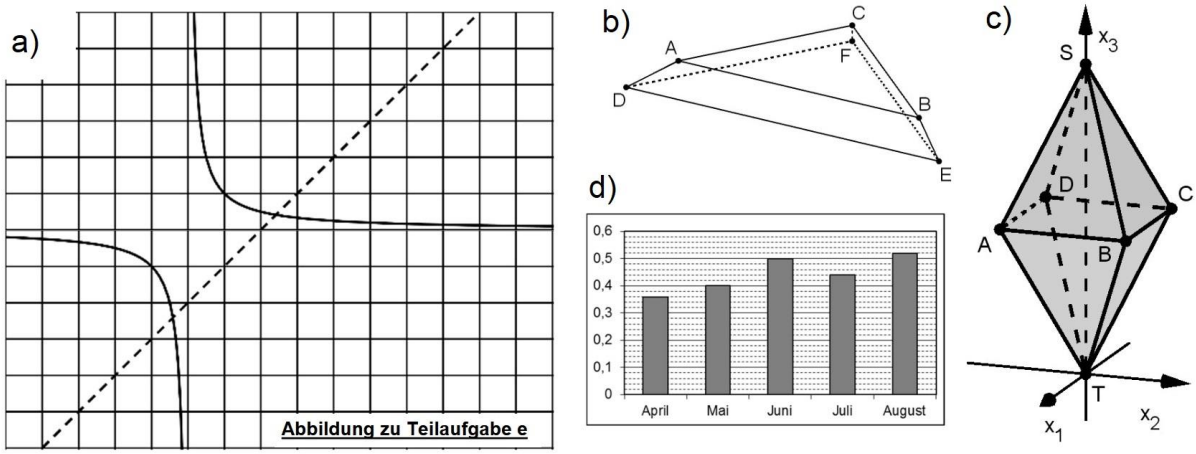


Abb. 585 a) Graph, b) Podest, c) Doppelpyramide, d) verkaufte Mountainbikes

c_{1-2}) (BAg 272/742 + 255/676a) Ermitteln Sie die Koordinaten von E. (5 BE)

d_2) Begründen Sie ohne zu rechnen, dass die Vierecke $ACFD$ und $BEFC$ den gleichen Flächeninhalt haben. (3 BE)

Aufgabe II.1.2 Der Körper $ABCDEF$ stellt modellhaft ein Podest dar, das auf der Bühne eines Theaters steht, das Viereck $ADEB$ die Vorderseite des Podests und der Punkt D deren untere linke Ecke. Die x_1x_2-Ebene beschreibt den horizontalen Boden der Bühne. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

a_1) (BAg 260/695) Zeigen Sie, dass die Deckfläche des Podests rechtwinklig ist, und berechnen Sie deren Flächeninhalt. (3 BE)

b_2) (BAg 258/686 + 267/727e) Die Position eines Scheinwerfers kann im Modell durch den Punkt $S(5|-3|z)$ dargestellt werden. Vom Scheinwerfer ausgehendes Licht trifft an der unteren linken Ecke der Vorderseite des Podests unter einem Winkel der Größe 47° auf den Boden auf. Ermitteln Sie die Höhe des Scheinwerfers über dem Boden der Bühne. (4 BE)

c_{2-3}) Die Position eines zweiten Scheinwerfers lässt sich im Modell durch den Punkt $P(2|4|8)$ beschreiben. Die Gerade mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mu \in \mathbb{R}$ schneidet die Ebene mit der Gleichung $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ im Punkt $Q(-2|8|1)$. Es gilt $\overline{PQ} = 9$. ↓ (4 BE)

Treffen Sie auf der Grundlage dieser Informationen eine Aussage über den Abstand des zweiten Scheinwerfers von der Vorderkante der Deckfläche des Podests. Begründen Sie Ihre Aussage ohne zu rechnen.

Aufgabe II.2: Gegeben sind die Punkte $A(5|-5|12)$, $B(5|5|12)$ und $C(-5|5|12)$.

a_1) (BAg 260/695) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist. (2 BE)

b_1) (BAg 260/695) Begründen Sie, dass A, B und C Eckpunkte eines Quadrats sein können, und geben Sie die Koordinaten des vierten Eckpunkts D dieses Quadrats an. (3 BE)

Im Folgenden wird die in Abb Abb 1048/585 c abgebildete Doppelpyramide betrachtet. Die beiden Teilpyramiden $ABCDS$ und $ABCDT$ sind gleich hoch. Der Punkt T liegt im Koordinatenursprung, der Punkt S ebenfalls auf der x_3-Achse. Die Seitenfläche BCT liegt in einer Ebene E.

c_{1-2}) (BAg 264/712) Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.
(zur Kontrolle: $12x_2 - 5x_3 = 0$) (3 BE)

d_1) (BAg 272/740) Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den die Seitenfläche BCT mit der Fläche $ABCD$ einschließt. (3 BE)

E gehört zur Schar der Ebenen $E_k : kx_2 - 5x_3 = 5k - 60$ mit $k \in \mathbb{R}$.

$e_{2,LK}$) (BAg 267/725 + 273/750g) Alle Ebenen der Schar schneiden sich in einer Gerade. Weisen Sie nach, dass die Kante BC auf dieser Gerade liegt. (2 BE)

$f_{3,LK}$) (BAg 266/721) Ermitteln Sie diejenigen Werte von k, für die E_k mit der Seitenfläche ADS mindestens einen Punkt gemeinsam hat. (4 BE)

g_3) (BAg 273/750d) Die Seitenfläche ADT liegt in der Ebene F. Geben Sie einen Normalenvektor von F an und begründen Sie Ihre Angabe, ohne die Koordinaten von A und D zu verwenden. Bestimmen Sie denjenigen Wert von k, für den E_k senkrecht zu F steht. (4 BE)

h_{3LK}) Die Doppelpyramide wird so um die x_1-Achse gedreht, dass die bisher mit BCT bezeichnete Seitenfläche in der x_1x_2-Ebene liegt und der bisher mit S bezeichnete Punkt eine positive x_2-Koordinate hat. Bestimmen Sie diese x_2-Koordinate und veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen durch eine Skizze. (4 BE)

Aufgabe III.1: (Ab Klasse 10 lösbar) Ein Unternehmen produziert Stahlkugeln für Kugellager. Erfahrungsgemäß sind 4% aller Kugeln fehlerhaft. 800 Kugeln werden zufällig ausgewählt. Die Anzahl der fehlerhaften Kugeln unter den ausgewählten kann durch eine binomialverteilte Zufallsgröße beschrieben werden.

a_1) (BAg 340/853 e) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den ausgewählten Kugeln weniger als 30 fehlerhaft sind. (2 BE)

b_{1-2}) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der fehlerhaften Kugeln unter den ausgewählten höchstens um eine halbe Standardabweichung vom Erwartungswert dieser Anzahl abweicht. (5 BE)

Eine fehlerhafte Kugel hat entweder einen Formfehler oder einen Größenfehler. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Kugel einen Formfehler hat, beträgt 3%. Alle Kugeln werden vor dem Verpacken geprüft. Dabei werden 95% der Kugeln mit Formfehler, 98% der Kugeln mit Größenfehler, aber auch 0.5% der Kugeln ohne Fehler aussortiert.

c_{2-3}) (BAg 319/797) Stellen Sie den Sachzusammenhang in einem beschrifteten Baumdiagramm dar.

$d_{3,LK}$) (BAg 327/818) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine aussortierte Kugel keinen Formfehler hat. (3 BE)

Die Teile e+f sind nur LK und lösbar nach Abs 350/13.1.1. Aufgrund zunehmender Reklamationen wird vermutet, dass der Anteil der fehlerhaften Kugeln auf über 4% angestiegen ist. Um diese Vermutung zu prüfen, soll die Nullhypothese 'Der Anteil der fehlerhaften Kugeln beträgt höchstens 4%.' auf der Grundlage einer Stichprobe von 500 Kugeln getestet werden. Wenn das Ergebnis des Tests die Vermutung nicht entkräftet, soll die Produktion unterbrochen werden, um die Maschinen zu warten. Das Risiko, die Produktion irrtümlich zu unterbrechen, soll höchstens 3% betragen.

$e_{2-3,LK}$) (BAg 357/893) Beschreiben Sie für diesen Test im Sachzusammenhang den Fehler zweiter Art. Geben Sie die Konsequenz an, die sich aus diesem Fehler für die Produktion ergeben würde. (3 BE)

$f_{3,LK}$) Für den beschriebenen Test wird der Ablehnungsbereich betrachtet. Eine der beiden Grenzen dieses Ablehnungsbereichs ist größer als 0 und kleiner als 500; diese Grenze wird mit k bezeichnet. Zur Bestimmung des Werts von k soll die binomialverteilte Zufallsgröße $\mathcal{Y}$ mit den Parametern $n = 500$ und $p = 0.04$ verwendet werden. Begründen Sie, dass keine der beiden Ungleichungen I und II den korrekten Wert von k liefert. I $P(\mathcal{Y} \leq k) \leq 0.03$ II $P(\mathcal{Y} \leq k) \geq 0.97$ (4 BE)

g_{3-4}) (Lösbar nach Klasse 10) Die Kugeln werden in Packungen verkauft. Ein Teil der verkauften Packungen wird zurückgegeben. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine verkaufte Packung zurückgegeben wird, beträgt 3%. Dem Unternehmen entsteht pro Packung, die zurückgegeben wird, ein Verlust von 5.80 Euro; pro Packung, die nicht zurückgegeben wird, erzielt das Unternehmen einen Gewinn von 8.30 Euro. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der das Unternehmen bei einem Verkauf von 200 Packungen einen Gesamtgewinn von mindestens 1500 Euro erzielt. (4 BE)

Aufgabe III.2: Ein Fahrradhändler hat festgestellt, dass es sich bei 40% aller von ihm verkauften Fahrräder um Mountainbikes handelt. Es soll davon ausgegangen werden, dass in einer zufälligen Auswahl verkaufter Fahrräder die Anzahl der Mountainbikes binomialverteilt ist. ↓ (1 BE)

Aufgabe III.2.1 (Ab Kl.10, BAg 339/851c,d) a_1) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in einer zufälligen Auswahl von 100 verkauften Fahrrädern genau 30 Mountainbikes befinden.

b_{1-2}) (BAg 345/862b) Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment, bei dem die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit dem Term $1 - 0.6^{10} - 10 \cdot 0.4 \cdot 0.6^9$ berechnet werden kann. Geben Sie dieses Ereignis an. (3 BE)

c_1) (BAg 340/853 e) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer zufälligen Auswahl von 250 verkauften Fahrrädern die Anzahl der Mountainbikes um mindestens 10% größer ist als der Erwartungswert für diese Anzahl. (3 BE)

d_2) (BAg 322/807) 20% aller verkauften Fahrräder haben einen Rahmen aus Aluminium. 45% aller verkauften Fahrräder sind weder Mountainbikes noch haben sie einen Rahmen aus Aluminium. Bestimmen Sie den Anteil der Fahrräder mit einem Rahmen aus Aluminium unter den verkauften Mountainbikes. (4 BE)

e_3) (BAg 344/860e) Der Händler hat berechnet, dass er im September des Jahres 2020 mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 96% mehr als 800 Mountainbikes verkaufen wird. Ermitteln Sie, von welcher Anzahl verkaufter Fahrräder er bei seiner Berechnung mindestens ausgegangen ist. (4 BE)

Abbildung 1048/585d zeigt für einige Monate des Jahres 2019 jeweils den Anteil der Mountainbikes unter allen verkauften Fahrrädern.

f_1) (BAg 318/792) Im April wurden 810 Mountainbikes verkauft. Bestimmen Sie für diesen Monat die Anzahl aller verkauften Fahrräder. (2 BE)

g_{1-2}) (BAg 324/812) Der Anteil der Mountainbikes lag im Mai und Juni insgesamt bei 46%; im Juli war er größer als im Mai und im August größer als im Juni. Entscheiden Sie, ob es dennoch möglich ist, dass der Anteil der Mountainbikes im Juli und August insgesamt kleiner war als insgesamt im Mai und Juni. Begründen Sie Ihre Entscheidung. (3 BE)

Aufgabe III.2.2: (Nach Abs 358/13.2): Zucker wird in unterschiedlich großen Packungen angeboten. Es soll davon ausgegangen werden, dass für jede Packungsgröße die tatsächliche Masse des Zuckers durch eine normalverteilte Zufallsgröße beschrieben werden kann.

a_2) (BAg 363/906) Für eine bestimmte Packungsgröße ist $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{200\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-500)^2}{200}}$ der Term der zugehörigen Dichtefunktion, wobei x die Masse des Zuckers in Gramm ist. Geben Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung für die Masse jeweils in Gramm an. (2 BE)

b_2) (BAg 362/905l+m) Bei einer anderen Packungsgröße beträgt der Erwartungswert für die Masse des Zuckers 250 g, die Standardabweichung 5 g. Bestimmen Sie − auf 1 g genau − das kleinste Intervall, das mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 98% die tatsächliche Masse des Zuckers enthält und symmetrisch bezüglich des Erwartungswerts ist. (3 BE)

16.6 Musteraufgaben von Herrn Trs

Bereiten Sie einen 10-minütigen Vortrag zur Aufgabe vor. Eigene Ergänzungen sind möglich. Vorbereitete Notizen dürfen verwendet werden. Der Einsatz von Medien (Tafel, Dokumentenkamera) zu Visualisierungszwecken ist ebenfalls möglich. Vorbereitungszeit: 20 min Hilfsmittel: WTR

16.6.1 Aufgabe und Lövo zu analytische Geometrie

Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$.

a) Definieren Sie möglichst präzise, was man unter 'windschiefen Geraden' versteht.
b) i) Beschreiben Sie eine effiziente Strategie zur Untersuchung der Lagebeziehung zweier Geraden im Raum. ii) Begründen Sie mit Hilfe dieser Strategie, dass die beiden Geraden g und h windschief sind.
c) i) Bestimmen Sie den Abstand der Geraden g und h ohne größere Rechnung, indem Sie die besondere Lage von g und h im Raum ausnutzen. ii) (nur LK) Kontrastieren Sie zwei Strategien, um im allgemeinen Fall den Abstand zweier windschiefer Geraden zu bestimmen.
d) (nur LK) Für $a \in \mathbb{R}$ ist die Geradenschar $l_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2+a \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ gegeben. i) Untersuchen Sie die Lagebeziehung von l_a und g sowie von l_a und h in Abhängigkeit von a. ii) Begründen Sie, dass die Geraden der Schar in einer Ebene liegen. Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Ebene.

ERWARTUNGSHORIZONT (Lösungsvorschläge)

a) Definition 'windschiefe Geraden': Zwei Geraden sind windschief, wenn sie keinen gemeinsamen Punkt haben, aber auch nicht parallel sind.

b) i) Strategie zur Untersuchung der Lagebeziehung zweier Geraden im Raum (**(Formel 67)** = der Baum) (aus Hurra Mathe:) Seien $g: \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{u}$ und $h: \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OQ} + t \cdot \vec{v}$.
Es gilt: $\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow g || h$, wenn zusätzlich das LGS $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + t \cdot \vec{u}$ lösbar ist, so ist $g = h$, ansonsten sind g und h echt parallel. Falls $\vec{u} \nparallel \vec{v}$ so ist $g \nparallel h$, wenn zusätzlich das LGS $\overrightarrow{OP} + s \cdot \vec{u} = \overrightarrow{OQ} + t \cdot \vec{v}$ lösbar ist, so schneiden sich g und h ansonsten sind g und h windschief.

ii) Anwendung der Strategie auf die Geraden g und h: Die Richtungsvektoren von g und h sind keine Vielfachen $\Rightarrow$ g und h schneiden sich in einem Punkt oder sind windschief.
Die Geraden g und h können keinen gemeinsamen Punkt haben, da die x_3 Koordinate = l für alle Punkte auf g ist und die x_3 Koordinate = 2 für alle für alle Punkte auf h ist. So ergibt sich im linearen Gleichungssystem in der dritten Zeile die falsche Aussage 1=2.

c) i) Abstand der Geraden g und h: Beide Geraden sind parallel zur x_1x_2 Ebene $\Rightarrow$ die Geraden haben den Abstand 1 aufgrund der Differenz der x_3-Koordinaten der Aufpunkte.
ii) Kontrastierung allgemeiner Strategien zur Bestimmung des Abstands windschiefer Geraden:
Seien $g: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + s \cdot \vec{u}$ und $h: \vec{x} = \overrightarrow{OQ} + t \cdot \vec{v}$, $s, t \in \mathbb{R}$.
Strategie l: Hilfsebene (ähnlich vollständiges Fünfseit)
Wie definieren die Hilfsebene $E: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$, $s, t \in \mathbb{R}$, dann gilt E beinhaltet g und E ist parallel zu h. Damit kann das Abstandsproblem windschiefer Geraden auf die Berechnung des Abstandes Punkt Ebene zurückgeführt werden.
Vorteil: relativ anschaulich und rechnerisch gut zu bewältigen.
Nachteil: keine Berechnung der Koordinaten der Lotfußpunkte.
Strategie 2: Orthogonalitätskriterium
Man bestimmt denjenigen Pkt G auf g und den Pkt H auf h, sodass $\overrightarrow{HG} \perp \vec{u}$ und $\overrightarrow{HG} \perp \vec{v}$ gilt.
Damit ist der Verbindungsvektor der gesuchten Punkte $\overrightarrow{HG}$ orthogonal zu beiden Richtungsvektoren.
Hierzu wählt man Wanderpunkte G_s auf g und H_t auf h und löst das lineare Gleichungssystem, welches sich aus den Bedingungen $\overrightarrow{G_sH_t} \circ \vec{u} = 0$ und $\overrightarrow{G_sH_t} \circ \vec{v} = 0$ ergibt.
Vorteil: Man erhält auch die Koordinaten der Lotfußpunkte.
Nachteil: Lösungsweg relativ technisch und fehleranfällig (Aufstellen des allgemeinen Verbindungsvektors $\overrightarrow{G_sH_t}$ und Lösen des linearen Gleichungssystems).

d) i) Lagebeziehung von l_a und g: $a = -1 \Rightarrow l_{-1}$ und g schneiden sich im Punkt $S(1|0|1)$.
$a \neq -1 \Rightarrow l_a$ und g sind windschief (aufgrund der jeweils konstanten, aber verschiedenen x_3-Koordinaten).
Lagebeziehungvon l_a und h $a = 0 \Rightarrow l_a$ und h sind identisch $a \neq 0 \Rightarrow l_a$ und h sind (echt) parallel.

Begründung, dass alle Geraden der Schar in einer Ebene liegen: Alle Geraden der Schar sind parallel zueinander und zur x_1x_2-Ebene und unterscheiden sich lediglich in der konstanten x_3-Koordinate aller Punkte auf der jeweiligen Geraden.

ii) Gleichung der Ebene, in der alle Geraden der Schar liegen: Anhand des Richtungsvektors lässt sich erkennen, dass die Ebene parallel zur x_3-Achse ist: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(r, s \in \mathbb{R})$.

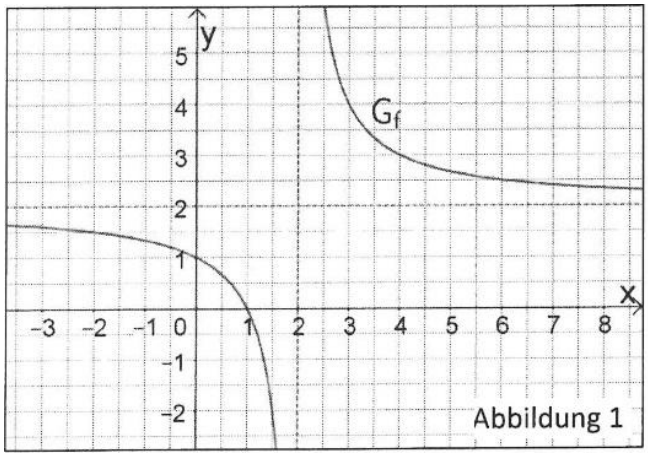
16.6.2 Aufgabe und LöVo zu Analysis (nur LK)

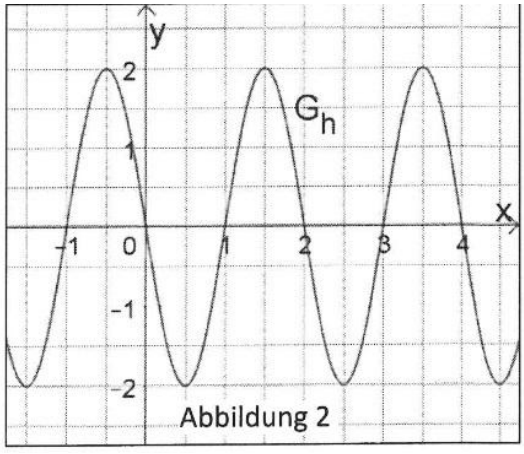
Abbildung l zeigt den Graphen G_f einer gebrochenrationalen Funktion und Abbildung 2 den Graphen G_h einer trigonometrischen Funktion h.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen von f und h.
b) Interpretieren Sie die folgenden Aussagen graphisch unter Verwendung der mathematischen Fachsprache. Nehmen Sie hierbei Bezug zu den Graphen von f und h.
i) $f(x) \to 2$ für $x \to \pm\infty$ ii) $f''(x) > 0$ für $x > 2$
iii) $h''(z) = 0$ und $h'''(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{Z}$ iv) $h(-x) = -h(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

c) i) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung einer Exponentialfunktion g [[durch $P(3;4)$]], welche den rechten Ast des Graphen der Funktion f auf dem Intervall $[3;\infty[$ annähert.
ii) Beurteilen Sie, ob der Graph der ermittelten Exponentialfunktion g den rechten Ast des Graphen von f auch auf dem Intervall $]2;\infty[$ gut approximiert.

d) Ermitteln Sie die Funktionsgleichung einer gebrochenrationalen oder einer trigonometrischen Funktion k sowie zwei Grenzen a und b so, dass gilt: $\int_a^b k(x)dx = 10$.





ERWARTUNGSHORIZONT (Lösunsvorschläge)

a) i) senkrechte Asymptote $x = 2$, waagrechte Asymptote $y = 2$, Nullstelle $x = 1$; $f(x) = \frac{2x-2}{x-2}$.

ii) Amplitude $|a| = 2$, Periode $p = 2 \Rightarrow b = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Wählt man die Sinusfunktion als Grundfunktion, so muss der Graph zusätzlich an der x-Achse gespiegelt werden. $\Rightarrow h(x) = -2 \cdot \sin(\pi x) = 2 \cdot \sin(\pi(x-1))$.

b) i) Der Graph von f hat die waagrechte Asymptote $y = 2$. ii) Der Graph von f ist auf dem Intervall $]2;\infty[$ eine Linkskurve. iii) Der Graph von h hat unendlich viele Wendepunkte, und zwar befinden sich diese genau an den Stellen mit ganzzahligen x-Koordinaten.
iv) Der Graph von h ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

c) i) Gleichung der Exponentialfunktion waagrechte Asymptote $y = 2$ der Punkt $P(3|4)$ liegt auf dem Graphen von g $g(x) = 2 \cdot e^{-(x-3)} + 2 = 2 \cdot e^{-x+3} + 2$. ii) Güte der Annäherung auf dem Intervall $]2;\infty[$: schlechte Approximation für $x \to 2$, da der Graph von f bei $x = 2$ im Gegensatz zum Graphen der Exponentialfunktion g eine senkrechte Asymptote besitzt.

d) i) Beispielhafte Vorgehensweise mit einer möglichst einfache Funktion:

Ansatz: $k(x) = \frac{r}{x}$. Variante l: Wähle $a = l$ und $b = 2$ und bestimme passenden Wert von r: $\int_1^2 \frac{10/\ln(2)}{x} \cdot dx = 10$. Variante 2: Wähle $a = r = l$ und bestimme passenden Wert von b: $\int_1^{e^{10}} \frac{1}{x} \cdot dx = 10$.

ii) Ansatz: Bsp: Wähle $k(x) = r \cdot \sin(x)$, $a = 0$ und $b = \pi$ und bestimme passenden Wert von r: $\int_1^2 \frac{10}{\cos(1)-\cos(2)} \cdot \sin(x) \cdot dx = 10$.

16.7 Stochastik-Abiteile vor 2019 auf Niveau Kl. 10 (GK Niveau)

Alle Aufgaben von Abs 16.7 sind verfilmt; diese Filme mit LöVo finden Sie auf http://stochastik.SLT.biz

16.7.1 Abitur 2018 Wahlteil C1.1 Teil a (1.5 VP)

Ein Unternehmen stellt Kunststoffteile her. Erfahrungsgemäß sind 4% der hergestellten Teile fehlerhaft. Die Anzahl fehlerhafter Teile unter zufällig ausgewählten kann als binomialverteilt angenommen werden.

a$_1$) 800 Kunststoffteile werden zufällig ausgewählt. Berechnen Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:

A: 'Genau 30 der Teile sind fehlerhaft.' B: 'Mindestens 5% der Teile sind fehlerhaft.'

16.7.2 Abitur 2018 Wahlteil C1.2 Teil a (2 VP)

Für ein Spiel wird ein Glücksrad verwendet, das drei Sektoren in den Farben rot, grün und blau hat. Für einen Einsatz von 5 Euro darf ein Spieler das Glücksrad dreimal drehen. Erzielt der Spieler dreimal die gleiche Farbe, werden ihm 10 Euro ausgezahlt. Erzielt er drei verschiedene Farben, wird ein anderer Betrag ausgezahlt. In allen anderen Fällen erfolgt keine Auszahlung. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dreimal die gleiche Farbe erzielt wird, ist $\frac{1}{6}$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass drei verschiedene Farben erzielt werden, beträgt ebenfalls $\frac{1}{6}$.

a$_3$) Bei einem Spiel ist zu erwarten, dass sich die Einsätze der Spieler und die Auszahlungen auf lange Sicht ausgleichen. Berechnen Sie den Betrag, der ausgezahlt wird, wenn drei verschiedene Farben erscheinen.

16.7.3 Abitur 2018 Wahlteil C2 Teile a und b (3+3 VP)

Ein Affe sitzt vor einer Tastatur, deren Tasten mit den Ziffern 1, 2, 3 und 4 sowie mit den Buchstaben A, B, C, D, E und F beschriftet sind Zunächst wird angenommen, dass der Affe zufällig auf die Tasten tippt. Die Tastatureingaben werden aufgezeichnet.

a) Es werden die ersten fünf Tastaturanschläge des Affen betrachtet. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:

$_1$) A: 'Der Affe tippt nur auf Tasten mit Ziffern.'

$_1$) B: 'Der Affe tippt höchstens dreimal eine Ziffer.'

$_2$) C: 'Die vom Affen getippte Zeichenfolge enthält die Buchstaben A F F E direkt hintereinander.'

b) Nun werden Versuchsreihen mit jeweils 20 Tastaturanschlägen durchgeführt. $_1$) Wie viele Buchstaben pro Versuchsreihe kann man dabei auf lange Sicht im Mittel erwarten? $_2$) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Versuchsreihe die Anzahl der getippten Buchstabentasten um höchstens 20% von diesem erwarteten Wert abweicht.

16.7.4 Abitur 2017 Wahlteil C1 Teile a und c (3+2.5 VP)

Die Tabelle zeigt die prozentualen Anteile einiger Farben der in Deutschland fahrenden Autos:

Farbe	silber oder grau	schwarz	weiß
Anteil	29.9%	28.8%	15.1%

Formulieren Sie den Fehler zweiter Art im Sachzusammenhang (1 VP), (BAg 355/887). Beim durchgeführten Test ergibt sich der Ablehnungsbereich $A = \{42, ..., 100\}$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art unter der Annahme, dass die Wahrscheinlichkeit für die Punktzahl 3 tatsächlich 40% beträgt. (1 VP), (BAg 355/888).

16.10.8 Wahlteilvorbereitung; Seite 1081-1087, 389

1) Lesen Sie den Abschnitt 389/14.1.3.
2) Stellen Sie sich vor, Sie müssten einen Wahlteil für sich im Abitur auswählen. Sie erhalten von mir zwei Wahlteile (bzw Pflichtteile) eines Abiturs, dass Sie evtl nicht kennen. Zur deren Begutachtung haben Sie 2 mal 5 Minuten Zeit.
3) Unterstreichen Sie im Wahlteil alle relevanten Fachausdrücke.
4) Markieren Sie bei jedem Teil, ob Sie diesen gut '+' oder so mittel '0' oder eher weniger '-' können.
5) Wählen Sie einen Teil (mit Begründung). 6) Erklären Sie, wie Sie diesen Teil gelöst hätten.

16.10.9 Pflichtteil Abitur 2021, Aufgabensätze 1+2 (jede Aufgabe ergibt 2.5 VP)

Was sollte ich vom Abitur 2022 nach welcher Unterrichtseinheit können?

Kl. 10: P1.7, P1.8, P2.1, P2.3, P2.7, P2.8, A1.1a-c, A1.2, A2.2\{a_2}, C1.2d+e, C2.1;
UE 11$_2$: P1.1, A2.1\{b_2}; **UE 11$_3$:** P1.2, P1.4, P2.2, P2.4, A2.1b_2, A2.2a_2; **UE 11$_4$:** P1.3;
UE 12$_4$: P1.5, P1.6, P2.5, P2.6, B1, B2; **UE 11$_7$:** C2.1c, C2.2; **UE 11$_8$** C1.1a-c;

Aufgabe 1.1: Erst nach Abs. 166/6.3.9 aus Kl. 11 bearbeiten. (Basisaufgabe: (BAg:) 138/335)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{-2x+1} + 1$. Abbildung 1081/602b zeigt den Graphen G_f sowie die Tangente an G_f an der Stelle $x = \frac{1}{2}$.

a$_1$) (1 VP) Weisen Sie nach, dass diese Tangente an G_f die Steigung -2 hat.

b$_2$) (1.5 VP) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das diese Tangente mit den Koordinatenachsen einschließt.

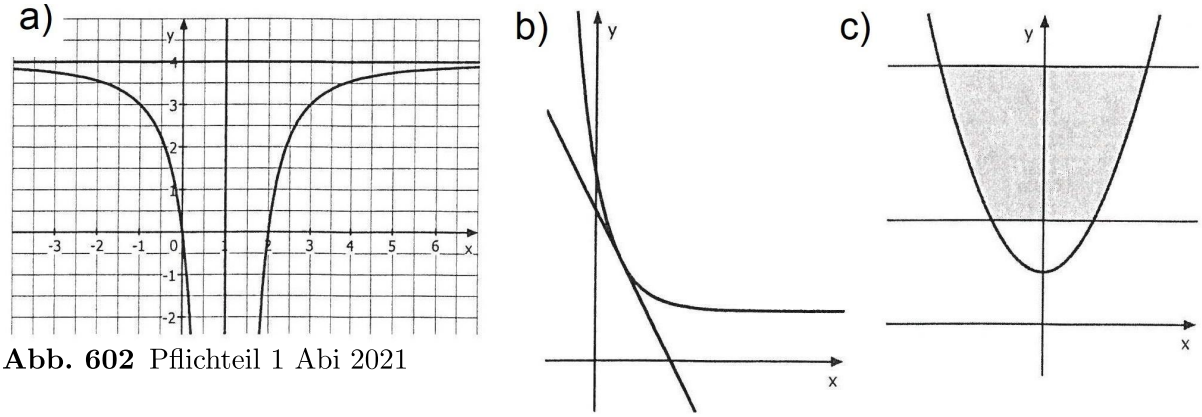


Abb. 602 Pflichteil 1 Abi 2021

Aufgabe 1.2: $_2$) Erst nach Abs. 182/7.1.15 aus Kl. 11 bearbeiten. (BAg: 179/481)

Abb. 1081/602c zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 1 + x^2$ sowie die Geraden $g : y = 2$ und $h : y = 5$. Bestimmen Sie den Inhalt der markierten Fläche.

Aufgabe 1.3: Erst nach Abs. 117/5.5 aus Kl. 11 bearbeiten. (BAg: 120/309; nur LK)

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = a + \frac{b}{x^2+c}$ und $g(x) = a + \frac{b}{(x+c)^2}$. Abb. 1081/602a zeigt die Graphen einer der beiden Funktionen sowie seiner Asymptoten.

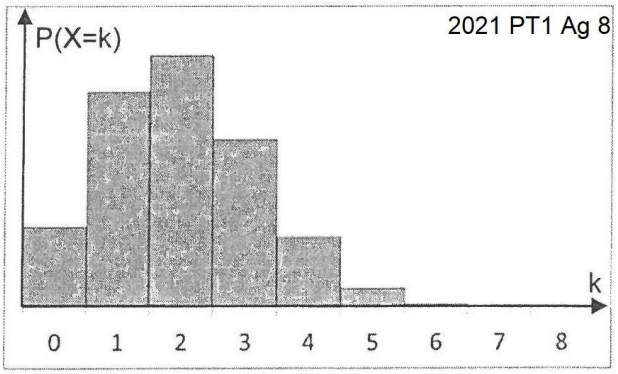
a$_2$) (1 VP) Begründen Sie, dass es sich bei dem abgebildeten Graphen nicht um den Graphen von f handeln kann. b$_2$) (1.5 VP) Bestimmen Sie für die Funkion g die Werte a, b und c.

Aufgabe 1.4: Erst nach Abs. 182/7.1.15 aus Kl. 11 bearbeiten. (BAg: 180/482)

Abb. 1082/603b zeigt den Graphen der Funktion f. Die Funktion g ist gegeben durch $g(x) = f(x) + 5x$. Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

(1_2) (1 VP) Jede Stammfunktion von f bestitzt im Intervall $[0.5; 4]$ genau ein lokales Minimum.

(2_4) (1.5 VP) Die Funktion g ist im Intervall $[1; 6]$ streng monoton wachsend.



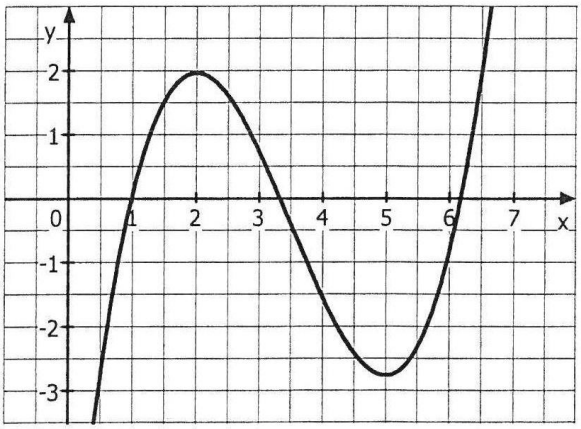


Abb. 603 Abitur 2021:

2021 PT1 Ag 4
------>

Aufgabe 1.5: Erst nach Abs. 262/10.3 aus Kl. 12 bearbeiten. (BAg: 265/718, 267/724,281/770)

Gegeben sind die Ebenen E und F sowie die Ebenenschar G_r ($r \in \mathbb{R}$):

$$\begin{array}{lrrrl} E: & x_1 & -5x_2 & -2x_3 & = 6 \\ F: & 2x_1 & -x_2 & -x_3 & = 6 \\ G_r: & & 9x_2 & +3x_3 & = r + 11 \end{array}$$

a_1) (1 VP) Stellen Sie G_7 in einem Koordinatensystem dar.
b_3) (1.5 VP; nur LK) Für einen Wert von r besitzen E, F und G_r eine gemeinsame Schnittgerade?

Aufgabe 1.6: Erst nach Abs. 272/10.5 aus Kl. 12 bearbeiten. (BAg: 252/664, 272/745)

Gegeben sind der Punkt $P(-1|1|-1)$ und die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$. Der Punkt $Q(3|3|3)$ liegt auf der Geraden g.
a_2) (1 VP) Zeigen Sie, dass Q derjenige Punkt auf g ist, der zu P den kleinsten Abstand hat.
b_3) (1.5 VP) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes R auf der Geraden g, für den das Dreieck PQR den Flächeninhalt 27 hat.

Aufgabe 1.7: kann mit Stoff Klasse 8 (nach Abs. 313/12.1) gelöst werden. (BAg: 320/799)

$_2$) In einer Urne befinden sich vier schwarze und eine unbekannte Anzahl weißer Kugeln. Aus der Urne werden nacheinander zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Die Wahrscheinlichkeit, dabei zwei schwarze Kugeln zu ziehen, ist doppelt so groß wie die Wahrscheinlichkeit, zwei Kugeln unterschiedlicher Farbe zu ziehen. Bestimmen Sie die Gesamtzahl der Kugeln in der Urne.

Aufgabe 1.8: kann mit Stoff Klasse 10 (nach Abs. 338/12.3.5) gelöst werden. (BAg: 339/849)

a_2) Abbildung 1082/603a stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße $\mathcal{X}$ dar. Begründen Sie, dass $P(\mathcal{X} = 2) < 0.5$ gilt. **b_3)** Für eine binomialverteilte Zufallsgröße $\mathcal{Y}$ mit den Parametern $n = 8$ und $0 < p < 1$ gilt $P(\mathcal{Y} = 1) = 2 \cdot P(\mathcal{Y} = 0)$. Berechnen Sie den Wert von p.

Aufgabe 2.1: kann mit Stoff Klasse 10 gelöst werden. (BAg: 138/335)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4x - x^2$. Abb. 1083/604a zeigt ihren Graphen G_f sowie die Tangenten an G_f in den Schnittpunkten mit der x-Achse.

a_1) Weisen Sie nach: Die Tangente an G_f an der Stelle $x = 0$ hat die Steigung 4.

b$_2$) Die beiden Tangenten schneiden sich im Punkt in einem Punkt S. Berechnen Sie den Abstand des Punkts S vom Ursprung.

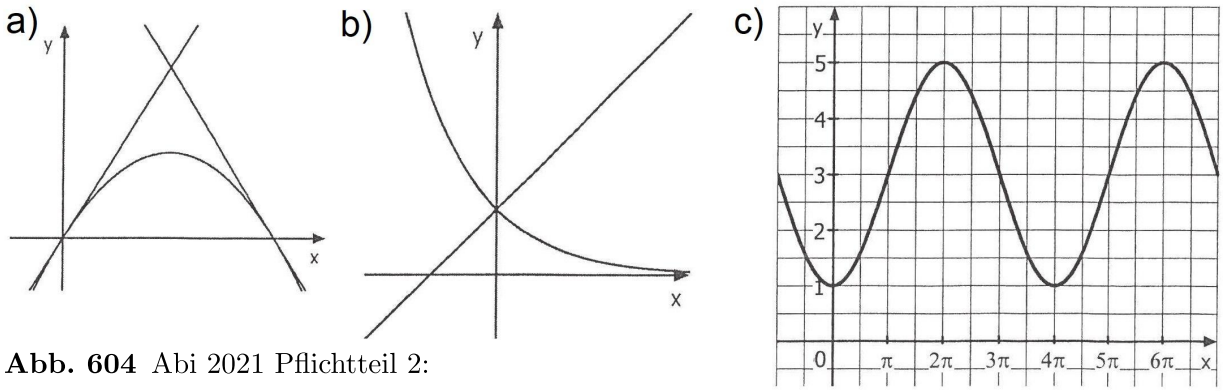


Abb. 604 Abi 2021 Pflichtteil 2:

Aufgabe 2.2: Erst nach Abs. 182/7.1.15 aus Kl. 11 bearbeiten. (BAg: 177/468 c; nur LK)

$_2$) Die Abbildung 1083/604b zeigt die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = e^{-x}$ und $g(x) = x + 1$, deren Schnittpunkt auf der y-Achse liegt. Die Graphen begrenzen mit der x-Achse und der Geraden $x = u$ $(u > 0)$ eine Fläche. Diese Fläche wird von der y-Achse in zwei inhaltsgleiche Teilflächen geteilt. Berechnen Sie den Wert von u.

Aufgabe 2.3: kann mit Stoff Klasse 10 gelöst werden. (BAg: 111/286)

$_1$) Abb. 1083/604c zeigt den Graphen einer trigonometrischen Fktn. Best. Sie einen möglichen Fktsterm.

Aufgabe 2.4: Erst nach Abs. 182/7.1.15 aus Kl. 11 bearbeiten. (BAg: 180/482; nur LK)
Die Abbildung 1083/605b zeigt den Graph der Funktion f.
a$_2$) Begründen Sie, dass die Ableitungsfunktion f' im Intervall $[5; 8]$ nicht monoton ist. **b$_4$)** Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen der Integralfunktion $J_2(x)$ mit $J_2(x) = \int_2^x f(t)dt$ für $2 \leq x \leq 9$.

Aufgabe 2.5: Erst nach Abs. 262/10.3 aus Kl. 12 bearbeiten. (BAg: 264/714)

Gegeben sind die Punkte $A(6|4|-1)$ und $B(0|-5|2)$ sowie die Ebene $E : 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 6$.
a$_1$) Die Gerade durch A und B schneidet E im Punkt S. Bestimmen Sie die Koordinaten von S.
b$_2$) Untersuchen Sie, ob der Punkt S auf der Strecke AB liegt. (mit Order 66 Niveau 1)

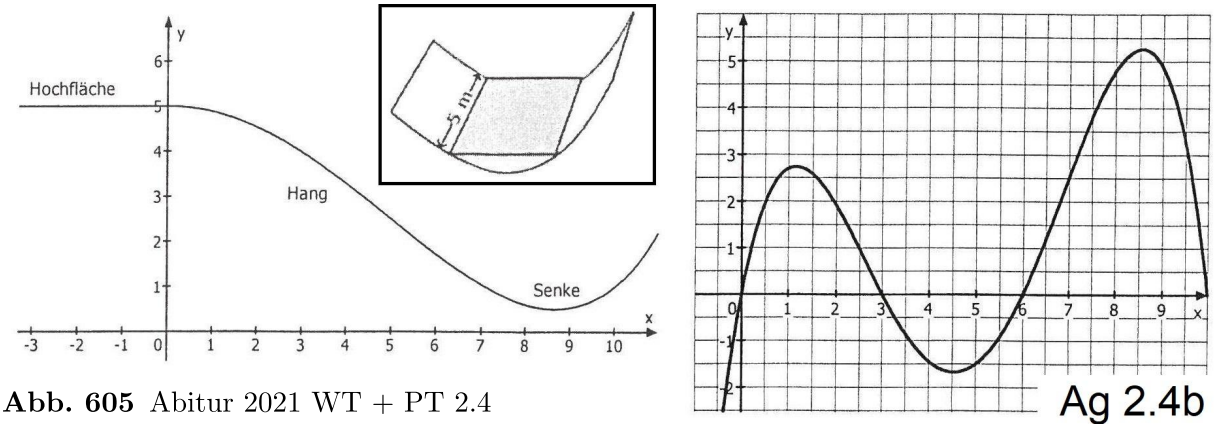


Abb. 605 Abitur 2021 WT + PT 2.4

Aufgabe 2.6: Erst nach Abs. 272/10.5 aus Kl. 12 bearbeiten. (BAg: 265/718, 272/745)

Gegeben ist die Ebene $E : 3x_2 - 4x_3 = 2$.
a$_2$) Beschreiben Sie die besondere Lage von E im Koordinatensystem **(Formel 92)** !
b$_3$) (Nur LK) Die Ebene F ist orthogonal zu E und hat zur x_1 -Achse den Abstand 2. Bestimmen Sie eine mögliche Koordinatengleichung von F.

Aufgabe 2.7: kann mit Stoff Klasse 8 (nach Abs. 313/12.1) gelöst werden. (BAg: 320/799)

Ein Verein erhält eine Lieferung gebrauchter Computer und Bildschirme. Von den 10 Computern und 15 Bildschirmen funktionieren jeweils drei Geräte nicht. Jemand wählt zufällig einen Computer und einen Bildschirm aus.
a$_1$) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide ausgewählten Geräte funktionieren.
b$_2$) Nach Inbetriebnahme der zwei ausgewählten Geräte stellt sich heraus, dass beide Geräte funktionieren. Anschließend wählt jemand aus den übrigen Geräten der Lieferung zwei Computer aus. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens einer der beiden zuletzt ausgewählten Computer funktioniert.

Aufgabe 2.8: kann mit Stoff Klasse 10 (nach Abs. 338/12.3.5) gelöst werden. (BAg: 339/849)

Ein idealer Würfel wird 20-mal geworfen. Betrachtet wird die Anzahl der gewürfelten Sechsen. Gegeben sind drei Terme: I: $\left(\frac{1}{6}\right)^{11} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{9}$; II: $\binom{20}{11} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{11} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{9}$; III: $1 - \binom{20}{9} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{9} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{11}$.
a$_1$) Geben Sie an, mit welchem der drei Terme die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses 'Es wird genau 11-mal eine Sechs gewürfelt.' berechnet werden kann.
b$_2$) Formulieren Sie für jeden der beiden verbleibenden Terme ein Ereignis im Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem jeweiligen Term berechnet werden kann.

16.10.10 Wahlteil Abitur 2021 Filme: http://Abi21.slt.biz

Aufgabe A 1.1: Die Teile a-c können mit Stoff Klasse 10 (BAg: 145/361 e, 147/366 + 148/370 b), der Teil d kann erst nach Abs. 182/7.1.15 (BAg: 179/480) gelöst werden.

Das Gelände eines Abenteuerspielplatzes besteht aus einer Hochfläche, an der sich ein Hang mit einer Senke anschließt. Die Profillinie des Geländes wird für $-3 \leq x \leq 0$ durch die Gerade mit der Gleichung $y = 5$ und für $0 \leq x \leq 11$ durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 0.0008x^4 - 0.12x^2 + 5$ beschrieben. Abb. 1083/605a zeigt diese Profillinie (1 LE entspricht $1m$).

a$_2$) Berechnen Sie die Koordinaten des tiefsten Punkts der Profillinie (2 VP). Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Hang zwischen Hochfläche und Senke an der Stelle $x = 5$ am steilsten abfällt und dort ein Gefälle von 80% hat (2 VP). Zeigen Sie, dass die Profillinie beim Übergang von der Hochfläche zum Hang knickfrei ist (1 VP). (Teilergebnis: Der tiefste Punkt hat die y-Koordinate 0.5).

b$_3$)$_{LK}$ Zwischen zwei Befestigungspunkten, die im Modell durch $P(5|f(5))$ und $Q(10|f(10))$ dargestellt werden, wird ein Seil straff gespannt. Ber. Sie die Länge des Seils (2 VP). Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man die maximale vertikale Höhe des Seils über dem Gelände berechnen kann (1.5 VP).

c$_3$)$_{LK}$ Auf der Hochfläche, einen Meter vom Übergang zum Hang entfernt, steht ein vertikaler Lichtmast, von dem aus das gesamte Gelände ausgeleuchtet werden kann. Berechnen Sie die Mindestlänge dieses Lichtmasts (2.5 VP).

d$_{2-3}$) Bei einem Umbau soll die Senke auf $5m$ Länge so mit Sand aufgefüllt werden, dass eine horizontale rechteckige Fläche entsteht, die $0.5m$ oberhalb des tiefsten Punkts der Senke liegt. Berechnen Sie das Volumen des dafür benötigten Sandes (3.5 VP).

Aufgabe A 1.2$_{LK}$: (Nach Klasse 10; BAg 93/233) In Abb. 1085/606a sind die Graphen G_u und G_v zweier Fktn u und v abgebildet. Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = v(u(x))$. $_2$) Bestimmen Sie $f(-1)$. (1 VP) $_3$) Ermitteln Sie die Anzahl der Nullstellen von f im abgebildeten Bereich (1.5 VP).

Aufgabe A 1.3$_{LK}$: $_3$) (Nach Abs.159/6.3; BAg: 164/424 + 163/421b) Die Funktion w ist auf $\mathbb{R}$ definiert und zweimal differenzierbar. Für die Funktion g gilt $g(x) = e^{w(x)} - 2$. Zeigen Sie: Wenn x_0 eine Wendestelle von w und von g ist, dann hat der Graph von w bei x_0 eine waagrechte Tangente (3 VP).

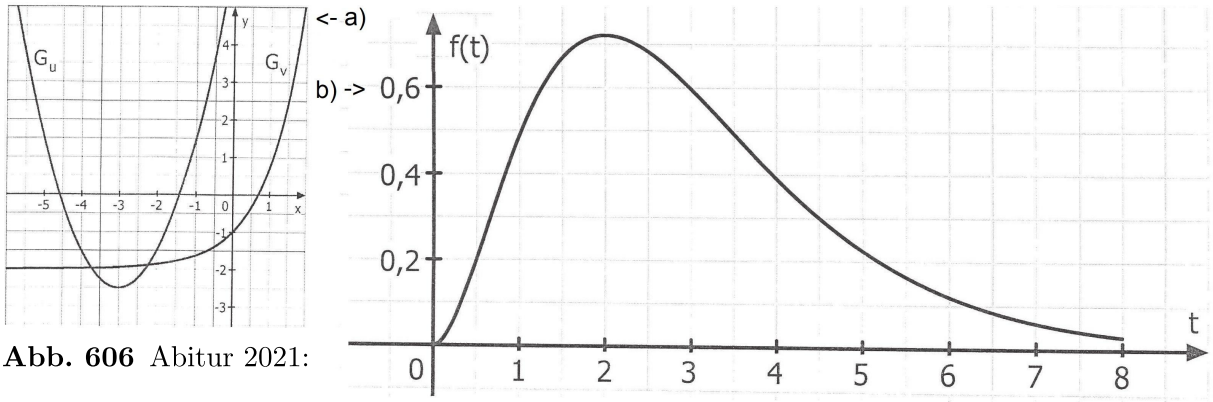


Abb. 606 Abitur 2021:

Aufgabe A 2.1: (Nach Abs.159/6.3; BAbs: 167/6.3.10) Die Funktion f beschreibt für $0 \leq t \leq 8$ modellhaft die Wachstumsgeschwindigkeit eines Apfelbaums, der zu Beobachtungsbeginn $0.8m$ hoch ist (t in Jahren nach Beobachtungsbeginn, $f(t)$ in Meter pro Jahr). $\mathbf{a}_{i\ 1}$) Abb. 1085/606b (Anlage) zeigt den Graphen G_f von f. Bestimmen Sie die Länge des Zeitraums, in dem die Wachstumsgeschwindigkeit des Apfelbaums größer als 0.5 Meter pro Jahr ist (1 VP). $\mathbf{a}_{ii\ 2}$) (Nach Abs.182/7.1.15; BAbs 177/467) Bestimmen Sie die Höhe des Apfelbaums zwei Jahre nach Beobachtungsbeginn (2 VP).

Die Wachstumsgeschwindigkeit eines Birnbaums, der zu Beobachtungsbeginn 1.2 m hoch ist, wird für $0 \leq t \leq 8$ modellhaft beschrieben durch die Funktion g mit $g(t) = t^2 \cdot e^{-t}$; (t in Jahren nach Beobachtungsbeginn, $g(t)$ in Meter pro Jahr). Für die Ableitungen der Funktion g gilt:
$g'(t) = 2t \cdot e^{-t} - t^2 \cdot e^{-t}$; $g''(t) = 2 \cdot e^{-t} - 4t \cdot e^{-t} + t^2 \cdot e^{-t}$.

$\mathbf{b}_{i\ 2}$) (BAg: 163/417d+e) Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Wachstumsgeschwindigkeit des Birnbaums am größten ist, und geben Sie diese Wachstumsgeschwindigkeit an (2 VP). Begründen Sie, dass der Birnbaum ab diesem Zeitpunkt weiterhin wächst, die Wachstumsgeschwindigkeit jedoch ständig abnimmt (2 VP). $\mathbf{b}_{ii\ 3}$) (Nur LK, nach Abs.182/7.1.15; BAbs: 182/7.1.15) Formulieren Sie eine Frage im Sachzusammenhang, die auf die Gleichung $\frac{1}{5} \cdot \int_x^{x+5} g(t)dt = 0.3$ führt (1.5 VP).
$\mathbf{c}_3)_{LK}$ (BAg: 167/433d) Zeigen Sie, dass für $0 \leq t \leq 8$ die Funktion h mit $h(t) = (-t^2 - 2t - 2) \cdot e^{-t} + 3.2$ die Höhe des Birnbaums beschreibt (t in Jahren nach Beobachtungsbeginn, $h(t)$ in Meter) (2 VP).
$\mathbf{d}_3)_{LK}$ (BAg 160/407e) Durch die Zugabe eines Düngers wird das Wachstum von Birnbäumen beeinflusst. Die Höhe eines gedüngten Birnbaums wird durch die Funktion k beschrieben mit $k(t) = -2.3 \cdot e^{-t} + 3.5$ ($t \geq 0$ in Jahren nach Beobachtungsbeginn, $k(t)$ in Meter). Die Höhe eines ungedüngten Birnbaums wird weiterhin durch die Funktion h beschrieben. Beide Birnbäume haben zu Beobachtungsbeginn dieselbe Höhe. Berechnen Sie den Zeitpunkt, bis zu dem die Wachstumsgeschwindigkeit des gedüngten Birnbaums größer ist als die des ungedüngten Birnbaums. Untersuchen Sie rechnerisch, welcher der beiden Bäume zuerst eine Höhe von 3.1 m erreicht (1.5 VP).

Aufgabe A 2.2$_{LK}$: (außer Teil $\mathbf{a}_{ii}$ Stoff Klasse 10) Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = -4x^3 + 12tx^2$. $\mathbf{a}_{i\ 2}$) (BAg 142/350f) Bestimmen Sie die Nullstellen von f_t (1 VP).
$\mathbf{a}_{ii\ 3}$) (Nach Abs.182/7.1.15; BAg 179/478) Der Graph von f_t schließt mit der x-Achse eine Fläche mit dem Inhalt A_t ein. Ermitteln Sie denjenigen Wert von t, für den $A_t = \frac{16}{3}$ gilt (2.5 VP).
$\mathbf{b}_3$) (BAg 139/341) Für $t = \frac{2}{3}$ gibt es Tangenten an den Graphen von f_t, die den Punkt $S(3|0)$ enthalten. Berechnen Sie die x-Koordinaten der zugehörigen Berührpunkte (2.5 VP).

Aufgabe B 1: (Erst nach Abs. 272/10.5) Gegeben ist eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Die Eckpunkte der Grundfläche sind $A(-3|-3|0)$, $B(3|-3|0)$, $C(3|3|0)$ und D, die Spitze ist $S(0|0|6)$. Die Ebene E enthält die Punkte A, B und S. (Teilergebnis: $E: -2x_2 + x_3 = 6$).
$\mathbf{a}_{i\ 1}$) (BAg 249/651) Stellen Sie die Pyramide in einem geeigneten Koordinatensystem dar (1 VP).
$\mathbf{a}_{ii})_{\ 1-2}$) (BAg 264/712) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E (2 VP).
$\mathbf{a}_{iii\ 2-3}$) (Nur LK, BAg 268/730c,d) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt der Pyramide (2 VP).
$\mathbf{b}_3$) (BAg 273/750) Innerhalb der Pyramide gibt es einen Punkt P, dessen Abstand von der Grundfläche der Pyramide $\sqrt{5}$-mal so groß ist wie sein Abstand zu den Seitenflächen. Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes (2.5 VP).

$\mathbf{c_3)_{LK}}$ (BAg 260/695) Betrachtet wird für jedes $a > 0$ die gerade Pyramide mit folgenden Eigenschaften:
(I) $A(-a|-a|0)$, $B(a|-a|0)$, $C(a|a|0)$ und D sind die Eckpunkte der quadratischen Grundfläche.
(II) Die x_3 -Koordinate der Spitze S ist positiv.
(III) Die Höhe der Pyramide stimmt mit der Kantenlänge der Grundfläche überein.
M_1 ist die Kantenmitte von AB, M_2 die Kantenmitte von DS.
Zeigen Sie: Die Strecke M_1M_2 ist orthogonal zur Kante DS (2.5 VP).

Aufgabe B 2: (Erst nach Abs. 272/10.5) Eine Firma stellt Gewächshäuser her. Die Ecken der Grundfläche dieser Gewächshäuser können modellhaft durch die Punkte $A(8|0|0)$, $B(8|7|0)$, $C(0|7|0)$ und $D(0|0|0)$ beschrieben werden. In diesen Ecken stehen senkrecht zur Grundfläche Pfosten, die das Dach des Gewächshauses tragen (alle Koordinatenangaben in Meter).
a) Bei einem dieser Gewächshäuser können die Ecken der Dachfläche durch die Punkte $E(8|0|4)$, $F(8|7|5)$, $G(0|7|5)$ und $H(0|0|4)$ beschrieben werden. $\mathbf{a_{i\ 1}}$) (BAg 249/651) Stellen Sie dieses Gewächshaus in einem geeigneten Koordinatensystem dar (1 VP). $\mathbf{a_{ii\ 1}}$) (BAg 245/640) Berechnen Sie den Rauminhalt dieses Gewächshauses (1.5 VP). $\mathbf{a_{iii\ 1-2}}$) (BAg 264/712) Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, die die Lage der Dachfläche beschreibt (2 VP).
$\mathbf{b_{LK}}$) Die Firma bietet die Gewächshäuser mit unterschiedlichen Neigungen der Dachfläche an. Sei $a \geq 0$; die Lage jeder dieser Dachflächen kann durch eine Ebene beschrieben werden, die zur Schar $E_a : ax_2 - 7x_3 = 7a - 35$ gehört. $\mathbf{b_{i\ 3}}$) (BAg 272/740) Berechnen Sie den Wert von a, für den die Neigung der Dachfläche 30° beträgt (2 VP). $\mathbf{b_{ii\ 3}}$) (BAg 267/725) Es gibt eine Gerade g, die in allen Ebenen der Ebenenschar liegt. Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Geraden g (1.5 VP).
$\mathbf{b_{iii\ 3}}$) (BAg 267/727c) Untersuchen Sie, für welche Werte von a im gesamten Gewächshaus eine Mindesthöhe von $2m$ gegeben ist (2 VP).

Aufgabe C 1: (Erster Teil: Nach Abs. 361/13.2.2; BAg 362/905) Ein Unternehmen füllt Honig in Gläser mit der Aufschrift 250g ab. Die Füllmenge $\mathcal{X}$ eines Glases wird als normalverteilt angenommen mit dem Erwartungswert $\mu = 252$ und der Standardabweichung $\sigma = 2$ (alle Angaben in g).

a Ein Glas wird zufällig ausgewählt. $\mathbf{a_{i\ 1}}$) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass weniger als $250g$ Honig in diesem Glas sind (0.5 VP). $\mathbf{a_{ii\ 2}}$) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Füllmenge dieses Glases um höchstens 2% von $250g$ abweicht (1.5 VP). $\mathbf{b_3)_{LK}}$ Gesucht ist ein Wert $a \neq 245$ mit $P(a \leq \mathcal{X} \leq a + 5) = P(245 \leq \mathcal{X} \leq 250)$. Begründen Sie, dass es solch einen Wert von a gibt und geben Sie diesen Wert an (1.5 VP). $\mathbf{c_4)_{LK}}$ Bei einer neuen Abfüllanlage beträgt die Standardabweichung der Füllmenge $1g$. Bei ihr kann man durch einen Regler den Erwartungswert der Füllmenge mit einer Genauigkeit von $0.1g$ einstellen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes Glas weniger als $250g$ enthält, soll höchstens 15% betragen. Ermitteln Sie, auf welchen Wert der Erwartungswert der Füllmenge mindestens eingestellt werden muss (1.5 VP).

(Zweiter Teil: Niveau Klasse 10) Bei einer Sonderaktion wird jedes fünfte Glas auf der Deckelinnenseite mit einem, von außen nicht sichtbaren Gutschein versehen.

d) (BAg 346/863) Lena kauft während der Sonderaktion sechs Gläser und stellt sie in einer Reihe auf. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
$_1$) A: 'Genau drei dieser Gläser enthalten jeweils einen Gutschein' (0.5 VP).
$_2$) B: 'Die beiden ersten Gläser enthalten jeweils einen Gutschein' (1 VP).
$_3$) C: 'In genau zwei Gläsern befindet sich jeweils ein Gutschein und diese Gläser stehen nicht unmittelbar nebeneinander' (1.5 VP).

e_4) (BAg 344/860) Die Gläser werden in Kartons abgepackt und an Lebensmittelgeschäfte ausgeliefert. Jeder Karton enthält 30 Gläser. Ein Kunde nimmt 3 Gläser aus dem Karton und hofft, mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50% mindestens einen Gutschein zu erhalten. Ermitteln Sie die Anzahl der Gläser mit Gutschein, die sich dafür mindestens in dem Karton befinden müssen (2 VP).

Aufgabe C 2.1: a) + b) sind Niveau Klasse 10: Bei einem Glücksrad gibt es drei farbige Sektoren. Beim einmaligen Drehen beträgt die Wahrscheinlichkeit für rot 60%, für blau 30% und für grün 10%.

a) (BAg 346/863) Das Glücksrad wird 20-mal gedreht. Bestimmen Sie für folgende Ereignisse jeweils

die Wahrscheinlichkeit: $_{1}$) A: (0.5 VP) 'Genau 15-mal erscheint rot.'
$_{3}$) B: (2 VP) 'Bei den ersten zehn Drehungen erscheint genau zweimal blau, insgesamt erscheint höchstens fünfmal blau'.

b$_{3}$) (2.5 VP; BAg 324/812) Bei einem Glücksspiel darf man für einen Einsatz von 6 € das Glücksrad zweimal drehen. Wenn dabei genau einmal rot erscheint, dann erhält man einen bestimmten Auszahlungsbetrag. Wenn zweimal rot erscheint, dann erhält man das Siebenfache dieses Auszahlungsbetrags. Andernfalls erfolgt keine Auszahlung. Das Spiel ist fair. Bestimmen Sie den Auszahlungsbetrag für den Fall, dass genau einmal rot erscheint.

c$_{4}$)$_{LK}$ (Nach Abs 350/13.1; BAg 352/877) Jemand vermutet, dass die Wk für rot tatsächlich geringer als 60% ist. Deshalb soll ein Hypothesentest durchgeführt werden. Dabei soll möglichst vermieden werden, dass irrtümlich von einer zu hohen Wahrscheinlichkeit für rot ausgegangen wird. Formulieren Sie eine Nullhypothese H_0, die dieser Zielsetzung entspricht, und begründen Sie Ihre Wahl (1.5 VP).

Aufgabe C 2.2: (Nur LK, nach Abs. 350/13.1; BAg 357/893) $_{3}$) Bei einem Spielautomaten wird vermutet, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit p größer als 10% ist. Die Vermutung wird mit Hilfe eines Hypothesentests mit dem Stichprobenumfang von $n = 200$ und einem Signifikanzniveau von 5% getestet. Als Nullhypothese wird $H_0 : p \geq 0.1$ gewählt. Formulieren Sie die Entscheidungsregel. (2.5 VP) Tatsächlich gilt $p = 0.08$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art. (1 VP)

16.10.11 Pflichtteil Abitur 2020 Filme: http://Abi20.slt.biz

Was sollte ich vom Abitur 2020 nach welcher Unterrichtseinheit können?

Kl. 10: P8, A1.2, A2.1c, C1; **UE 11$_2$:** P1, P3, A1.1a + A2.1a;
UE 11$_3$: P2, P4, P5, A1.1b, A2.1b; **UE 12$_1$:** P6ab, B1; **UE 12$_4$:** P6c, P7, B2; **UE 11$_7$:** C1c, C2.2;

Aufgabe 1: (2 VP) Erst nach Abs. 166/6.3.9 aus Kl. 11 bearbeiten (BAg 163/416).
$_{1-2}$) Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^2 \cdot e^{-5x}$.

Aufgabe 2: (1.5 VP) Erst nach Abs. 182/7.1.15 aus Kl. 11 bearbeiten (BAg 178/474) .
$_{2}$) Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{4x-7}$, für die $F(2) = 1$ ist.

Aufgabe 3: (1.5 VP) Erst nach Abs. 166/6.3.9 aus Kl. 11 bearbeiten (BAg 160/407)e.
$_{2}$) Lösen Sie die Gleichung $(x^2 + 8) \cdot (e^{x-1} - 1) = 0$

Aufgabe 4: (2.5 VP) Nur LK, nach Abs. 182/7.1.15 aus Kl. 11 bearbeiten (BAg 179/481).

$_{3}$) Der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{4}{x^2}$ schneidet die Gerade mit der Gleichung $y = 4$ im Punkt $P(1|4)$ und die Gerade mit der Gleichung $y = 1$ im Punkt $Q(2|1)$. Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.

Aufgabe 5: (2.5 VP) Erst nach Abs. 182/7.1.15 aus Kl. 11 bearbeiten (BAg 153/389 + 180/482).

In Abb 1088/607 ist der Graph einer Funktion F abgebildet. F ist Stammfunktion einer ganzrationalen Funktion f.

a$_{1}$) Geben Sie eine Nullstelle von f im abgebildeten Bereich an. b$_{2}$) Bestimmen Sie $\int_1^2 f(x)dx$.
c$_{3}$) Begründen Sie, dass die Funktion f im Bereich $0.5 \leq x \leq 1.5$ streng monoton fallend ist.

Aufgabe 6: (5 VP) Erst nach Abs. 272/10.5 aus Kl. 12 bearbeiten.
Gegeben sind die Ebenen $E : 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$ und $F : 2x_2 + x_3 = 4$.

a$_{1-2}$) Stellen Sie die beiden Ebenen in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar (BAg 265/718).
b$_{2}$)$_{LK}$ Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden der beiden Ebenen (BAg 266/721).
c$_{2}$) Berechnen Sie den Abstand des Punktes $O(0|0|0)$ von der Ebene E (BAg 273/750).

16.12.4 Checkliste für Abiball, Abibuch + Abischerz

Ein guter Unterricht ist das Ergebnis eines guten Zeitmanagements (Abs. 385/14.1.1), gleiches gilt auch für gute Abituraktionen. Für alle Ihre Aktivitäten haben Sie knapp zwei Jahre Zeit zur Planung. Wann haben Sie am wenigsten Zeit dazu? Und wann haben Sie keine Motivation mehr? Richtig, deshalb sollten Sie alles frühzeitig abschließen (O.K. für mich als Sanguiniker ist das eher einfach). Daher gilt: Deadline für Vorschläge und Beiträge aus dem Jahrgang ist 'direkt nach den Sommerferien' - da sind die Studienfahrten vorbei + der Abistress noch eher in weiter Ferne. Weil Sie bis dahin eher nichts bekommen, gilt die zweite (rote) Deadline ist nach den Herbstferien. Sie haben dann bis zu den Weihnachtsferien Zeit auf die Nachzügler Druck zu machen und in den Weihnachtsferien einen groben Projektplan zu erstellen und ggf zu publizieren. In den Faschingsferien können Sie dann alle Nachnachzügler einbauen. Dann ist alles fertig. Für einen gelungenen Abiball (auch Abistreich) brauchen Sie drei Dinge: Programm, Programm, Programm.

Abiball: Das Wichtigste ist (wie schon erwähnt) Programm. Dieses sollte möglichst viele kurze Programmpunkte beinhalten (statt viele lange) und optimalerweise Lehrer einbinden: Steht Lieschen Müller auf der Bühne finden das iA deren Eltern und deren Freunde (beachte Mathematiker haben nur Feinde + Todfeinde) toll. Steht hingegen Frau Mustermann auf der Bühne, so wollen diese iA 28 Familien ihrer Abiturienten, sowie auch einige Familien von Ex-Schülern sehen.
Beispiele (von Jans Abiball)): Diashow mit Bildern aus der Schulzeit; Kahoot zB mit Lehrerkinderbildern (max 15 Stück); Quiz oder Spiele (z.B. Bierpong) Lehrer-Lehrer oder Schüler. Dazu braucht man optimalerweise eine hohe Bühne oder eine Leinwand.

Lehrertisch: Überlegen Sie, ob Sie einen Lehrer (zB mich) den ganzen Abend bespaßen wollen; und selbst wenn Sie sich den ganzen Abend nur um mich kümmern wollen, so sollten Lehrer (für andere Schüler + Eltern) leicht auffindbar (und auch erreichbar) sein ⇒ Bitte machen Sie einen eigenen Lehrertisch in exponierter Lage. Exponiert bedeutet nicht unbedingt zentral, sondern vorne am Rand um eine hohe Fluktuationsrate zu ermöglichen und den Zugang zur Bühne zu erleichtern. Bitte stellen Sie auch mehr Tische auf, als Sie brauchen. Oftmals suchen später ankommende Verbände nach einem Platz.

Ich sehe das Kommen zum Abiball schon als Dienstverpflichtung an, nicht aber, dafür 58 € (Abiball 2019) zu bezahlen. Weil das Annehmen von Geschenken nicht ganz unproblematisch ist, sollten Sie optimalerweise die Karten um ε (epsilon) verteuern und gleichzeitig Lehrern **freien** Eintritt ermöglichen.

Abischerz: Als Vorbild kann hier der Jahrgang 2017 dienen, Hier wurde der Rektor entführt und die Lehrer mussten durch Spiele Lehrer gegen Schüler versuchen, ihn zu befreien (was dann sogar gelang). Sind Sie respektvoll; wir Lehrer müssen nach dem Abischerz wieder an die Schule kommen; Sie nicht. Meiden Sie Wasser, denn nach dem Scherz sollte noch Unterricht stattfinden können. Wenn Sie ins Hainbuchstadion gehen (ein guter Ort) sollten Sie verbieten, das 'Grün' zu betreten. 2024 gab es eine Menschentraube um die Attraktion(en): So sahen etwa 50 Leute etwas und 2500 sahen nichts.

Abibuch: In meinen Kursen benenne ich iA einen Reporter, der einen Kursbericht verfasst (Lieber Reporter, bitte seien Sie gnädig). Dies sollten Sie in allen Kursen anregen, denn diese Berichte werden bevorzugt gelesen (Lob an das Abibuch 2019). Bitten Sie ruhig (aber nicht zu fordernd) die Kollegen, etwas für das Abibuch zu schreiben. Auch ich bin dazu bereit, allerdings nur, wenn Sie mir vor dem Druck die Möglichkeit geben, den Artikel zu kontrollieren (im Jahr 2018 wurden meine Artikel + $M \cup M \in M$ 'vergessen' und für solch einen Artikel brauche ich etwa einen Arbeitstag). **Wichtig:** Sortieren Sie bitte die Schülersteckbriefe alphabetisch und nicht nach Tutorkursen; woher soll ich wissen, wer der Tutor ist (wenn ich es nicht selber bin).
Bitte verzichten Sie bei Lehrerzitaten auf Namen. Beispiel: Aus dem Sd Zitat: 'Dr. Engel hat immer dasselbe an' sollte: '*Der (Deutsch-) Kollege ...* hat immer dasselbe an' werden. Außerdem sollten (müssen) jedem Kollegen individuell seine eigenen Sprüche zur Kontrolle vorlegen. Das ist Zensur; leider, denn wie schon erwähnt wollen wir nach Erscheinen der Abizeitung hier weiterarbeiten.
Und lassen Sie sich ein Vorabexemplar zur Kontrolle (und viele Augen sehen mehr als zwei) schicken.

16.12.5 Ein kleines Axiomensystem für Abibücher

Nachdem man mich bat, für das Abibuch 2014 (A14) einen Artikel zu schreiben und sich die Proteste über mein pädagogisches Handbuch aus Hurra Mathe 6.5 in Grenzen hielten (ok, ich werde diesen Text diesmal **vorher** korrekturlesen lassen), möchte ich heute wieder einen Artikel für das künftige Abibuch schreiben. An dieser Stelle möchte ich allen danken, die in Abibüchern etwas Nettes über mich geschrieben haben und die bei einer Abstimmung für mich gestimmt haben.

Ein Abibuch wird in der Regel von zwei Gruppen gekauft: **Abiturienten** im Jahre 2014 waren dies: Anzahl Steckbriefe $\cdot$ Quote aus (A14 S.246) $= (198 - 8 + 1) \cdot \frac{162}{162+6} \approx 184$ (Kaufquote 96 %) und **Lehrer** (Potential am FSG ca. 200) gekaufte Exemplare $= 200 - 184 \approx 16$ (Kaufquote knapp 8 %). Was ist zu tun, um diese Kaufquote zu erhöhen? Heute haben mehrere Kollegen meine Abizeitung angeschaut und sich dann entschlossen keine Abizeitung zu kaufen, weil sie sie langweilig fanden. Aber würden Sie ein Buch kaufen, wenn in diesem etwa ein Satz (A14 S.203-204) über Sie steht, den Sie in einem schwachen unbedachten Augenblick gemurmelt haben?

Als Mathematiker definiere ich Ihnen jetzt das folgende Axiomensystem (siehe HM S. 30) für ein oft gekauftes Abibuch. Noch fehlende Grundsätze werden mit dem Gödelschen Unvollständigkeitssatz (siehe HM S. 30) ('Jedes endliche Axiomensystem ist unvollständig') begründet.

Axiom 0: (Prolog) Es gilt der Grundsatz: Kleine Änderung, große Wirkung. Verschlimmbessern Sie nicht, denn im Großen und Ganzen sind Ihre Abibücher richtig gut.

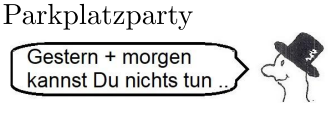
Axiom 1: (Vollständigkeitsaxiom) Jeder potentielle Käufer sollte mehrmals im Abibuch vorkommen.

Axiom 2: (Minimalitätsprinzip) Platz = Geld = Preis (und der sollte eben minimal sein): Viele Schülersteckbriefe passen auf $\frac{1}{2}$ Seite - nicht jeder ist Lea oder Nico (Nico, Sie haben ein gutes Motto [1] - haben Sie das von mir?) (A14 S.113 und 192). Geben Sie jedem Schüler nur $\frac{1}{2}$ Seite und im Leafall noch $\frac{1}{2}$ Seite dazu. Verzichten Sie auf Leerseiten und fassen Sie kleine Seiten zusammen (A14 S. 199 bis 202). Um Geld zu sparen besorgen Sie sich Sponsoren (die finden Sie in alten Abibüchern oder in der Schülerzeitung) - 2012 war ein Abibuch mit 816 Seiten für 11 Euro zu haben (A12 S. 816). Bitte plazieren Sie die Sponsoren verstreut mitten im Buch (ungerade Seite); nicht geballt am Ende (A 25).

Axiom 3: (Reichhaltigkeitsaxiom) Lehrer und Schüler-Rankings sollten massiv erhöht werden, bis näherungsweise der Zustand von Axiom 1 erreicht ist - beachten Sie aber auch Axiom 2. Analog zu den Studienfahrten kann es Berichte aus vielen Kursen geben - diese werden vom Kurssprecher erstellt oder koordiniert. Tipps für weitere Inhalte wird Ihnen auch die Schülerzeitung geben. Gerne gesehen sind viele 'Bilder aus der Schulzeit' und auch 'Memes' (A 25).

Axiom 4: (Nettikette) Alles was gesagt wird sollte freundlich gesagt werden. Verzichten Sie auf unklare (Kraft-) Ausdrücke auch wenn diese dem Eingeweihten klar sind (A14 S.25, Abimotto). (Implizite) Kritik ist nicht ausgeschlossen und soll natürlich bei der künftigen Unterrichtsplanung helfen.

Axiom 5: (Rechtzeitigkeitsbedingung) Es gilt Murphys Gesetz: Alles, was schiefgehen kann, geht schief. Und schief gehen kostet Zeit (+ Geld). Versuchen Sie einen Großteil des Buches schon in 12/1 fertig zu stellen. Ein Manager sollte auch Sanguiniker (siehe Temperamente oder HM 14) sein, der vor allem einen schnellen Beginn garantiert. Erscheinungsdatum sollte spätestens die Parkplatzparty sein. Das späte Abibuch wird weniger gekauft. Halten Sie sich nicht zu sehr an Douglas Adams: 'I love deadlines. I like the whooshing sound they make as they fly by.'



Epilog: Die resultierenden Sätze sind Ihnen zur Übung selbst überlassen. Ich würde mich freuen, wenn ich Ihnen ein paar Tipps geben konnte. *Wolfgang Schmid*

[1] Liebe vergeht, Hektar besteht

16.12.6 Vorwort für Eltern

Wolfgang Schmid

FSG Marbach

sd@slt.biz

Liebe Eltern,

ich freue mich ihr Kind in diesem Schuljahr im Fach Mathematik unterrichten zu dürfen und möchte Ihnen im Folgenden ein paar Informationen zu meinem Unterricht geben. Mathematik ist ein Kernfach und in hohem Maße versetzungsrelevant. Um in Mathematik eine gute Note zu bekommen, sollte ihr Kind sehr viel üben und Üben bedeutet nicht das Nachvollziehen einer vorhandenen Musterlösung. Zu jeder Mathestunde in der Schule sollte Ihr Kind 45 Minuten zu Hause Aufgaben rechnen; dies darf auch in Kleingruppen (oder unter Ihrer Aufsicht) geschehen. Zu diesem Zweck bekommt Ihr Kind am Anfang des Schuljahres einen Auszug meines Buches *Hurra Mathematik* mit vielen Übungsaufgaben und zugehörigen Ergebnissen / Lösungsvorschlägen. Bei wenig motivierten Schülern empfiehlt sich ein bis zwei regelmäßige Termine; dies darf auch unter Ihrer Aufsicht geschehen.

Meine Stoffverteilungspläne und mein Unterrichtsbuch finden Sie im Internet auf sd.slt.biz Auf dieser Seite finden Sie auch alte Manuskripte zum Nachlernen, Klassenarbeitstermine und andere nützliche Informationen. Der Username ist Schueler, das Passwort wird im Unterricht bekanntgegeben.

Im Unterricht wird der Unterrichtsstoff normalerweise anhand von zielführenden Fragestellungen erarbeitet (entdeckendes Lernen). *Hurra Mathematik* stellt (in den Überschriften) einen Bezug zu den eingeführten Lehrwerken her. Hausaufgabe sind grundsätzlich alle Aufgaben (aus Hurra Mathematik), die im Unterricht ausgelassen wurden. Die meisten Hausaufgaben sind verfilmt. Bei allen Übungsaufgaben (Türmchenaufgaben) gilt folgende Faustregel: Wer auf Note '1' steht, macht eine, wer auf Note '2' steht macht zwei usw. Der Schwierigkeitsgrad der Übungsaufgaben ist ansteigend, so wird Binnendifferenzierung gewährleistet. Grundsätzlich werden die Hausaufgaben im Unterricht nur auf Anfrage besprochen; die umrahmten Hausaufgaben werden (maximal) ein Mal pro Woche kontrolliert. Mein Unterrichtskonzept finden Sie auf den Seiten 2 bis 4 der ausgeteilten Formelsammlung.

Damit sich Ihr Kind regelmäßig mit Mathematik beschäftigt, schreibe ich jedes Halbjahr etwa 2 Klassenarbeiten und 1 bis 3 Tests (in der Regel angesagt). Bei schlechter Arbeitshaltung der Klasse behalte ich mir jedoch vor, die Tests nicht mehr anzusagen. Jede Klassenarbeit zählt wie zwei Tests.

Hinzu kommt eine mündliche Note, die ich ebenfalls jeweils wie einen Test werte. Die mündliche Note kann durch Sonderleistungen (in der Regel Vorträge) aufgewertet werden. Sollte sich Ihr Kind dafür entscheiden, bei mir eine GFS zu machen, dann muss es bei mir eine Schulstunde zu einem noch nicht behandelten mathematischen Thema durchführen. Wenn die Zeugnisnote 'ausreichend' angestrebt wird, ohne dass eine Klassenarbeit mit 'ausreichend' oder besser erreicht wurde, gehört zur GFS auch eine mündliche Prüfung, die zu 50% in die Gesamtnote einfließt. Informationen zur GFS finden Sie auf meiner Internetseite oder in der Formelsammlung ab Seite 385.

Nach diesen vielen Informationen freue ich mich auf eine fruchtbare Zusammenarbeit, denn Mathematik macht Spaß.

Freundliche Grüße,

W. Schmid