

Formelsammlung (Sd)

mit den Seiten

Mittelstufe (ohne Abivorbereitung): 1154, 2-16, 385-386, 389-389, 1015-1022, 1133

Oberstufe (mit Abivorbereitung): 1155, 2-16, 385-386, 1015-1053, 1081-1087, 1130-1131, 1133

Die Seiten des Oberstufenanhangs sind: 1015-1129

Wettbewerbe:

September: Landeswettbewerb, Kl 9+10;

Mitte November: Informatik Biber, Kl 8-12;

1. Dezember - März: Bundeswettbewerb, Kl 10-12;

Anfang Dezember: Mathe im Advent, Kl 8-10;

Anfang Februar: Mathe ohne Grenzen, Kl 9+10;

3. Do im März: Mathe Känguru, Kl 8-12;



Die Filme finden Sie auf den Kanälen 'Mathe Schmid' oder 'Schmid happens'.

Mein Buch und auch die Lösungsvorschläge finden Sie auf meinem Internetauftritt: Sd.SLT.biz bei den jeweiligen Klassen. User Schueler, Pass erfragen Sie unter Sd@SLT.biz. Zugang für die online-Version von Hurra Mathe (Version 7.4) = Mobile Mathe: User: Jan@slt.biz

Mehr Mathe gibt es in 1) Mathe AG, 2) Mathe Vertiefung, 3) Seminarkurs Statistik, 4) $M \cup M \in M$.

Alle meine Projekte finden Sie unter mathe.slt.biz.

12 ₄	10.5	Geometrie	Schnittwinkel und Abstände	272
$M+1$	3.1	Algebra	Komplexe Zahlen	45
$M+2$	6.3.11	Analysis	Die Regel von de l'Hospital	170
$M+3$	7.1.18	Integrale	Regeln der Integralrechnung	184
$M+4+5$	8.1-8.3	Dgln	Taylor und Differenzialgleichungen	198
M-AG ₁	4.4	Folgen	Vollständige Induktion ($M+0$)	63
M-AG ₂	4.5	divers	Vorbereitung auf Wettbewerbe	64
BA 3 ₁	13.2	Wth	Normalverteilung	358
BA 3 ₂	13.3	Wth	Statistik	364

1 Einleitung

Willkommen!

Mathematik macht Spaß + glücklich!

Mathematik steckt in mir (und Dir) und muss heraus.

Bedenke aber: Beglückender, als Mathematik zu machen, ist es, Mathematik zu lehren.

Zum Geleit: *Hurra Mathematik* besteht aus zwei Teilen: Einem Schulteil, der im Großen und Ganzen aus Aufgaben (oft notiert als Seite/Aufgabennummer) besteht und einem Hochschulteil welcher den Stoff noch einmal auf höherem Niveau wiedergibt. Der Unterrichtsteil zeigt meinen Unterricht der Klassen 8-12. Die erwarteten Schülerlösungen zu fast allen Aufgaben finden Sie auf meiner Internetseite sd.slt.biz. User: Schueler. Das Passwort kann bei mir erfragt werden. Bitte beachten Sie dabei die Version; die Aufgabennummern können sich laufend ändern. Sollte bei einer Aufgabe eine Längenmaßeinheit fehlen, so ist für diese *cm* zu wählen. Der Platz im Buch ist knapp, deshalb bitte ich die dichte Darstellung zu entschuldigen. Online finden Sie eine übersichtlichere Version (Thx Alice .. mit gleichen AgNr + anderen Seitenzahlen) und die Online-Version 'Mobile Mathe' mit Aufgaben, LöVo + Filmlinks: User Jan@slt.biz Handys sind im Unterricht und in der Vorlesung untersagt = die Handys grundsätzlich wegpacken.

Der Bezug zu den eingeführten Lehrwerken: Als ich mich wieder einmal über die Bücher der Mittelstufe beschwert habe, sagte mein Kollege Froberg: '*Wieso?* Mit diesen Büchern können die Schüler sehr gut *zu Hause* lernen'. Es dauerte etwas, bis ich begriff, dass die Bücher zur Eigenarbeit gedacht sind und nicht (unbedingt) zum Unterrichten. Deshalb arbeiten wir in der Schule allein mit *Hurra Mathematik* und die Schüler sollen zu Hause den Unterrichtsstoff mit den Schulbüchern weiter vertiefen. Den Bezug zu den eingeführten Schulbüchern finden Sie am Anfang vieler Abschnitte:

Klasse 8,9:	Neue Wege 4,5, 2007	(=NW4, NW5),
Klasse 8,9,10:	Lambacher Schweizer 8,9,10, 2017	(=LS8 .. LS10),
Klasse 10:	Elemente der Mathematik 6, 2009	(=EM6),
oder Klasse 10:	Lambacher Schweizer 11, 1998	(=LS11),
Klassen 10-12:	Lambacher Schweizer Kursstufe, 'Jahr'	(=KS _{Jahr}),



Was macht Lewandowski den ganzen Tag? Und hat er das nötig?

Folgende Taschenrechner sind Basis der LöVo des Buches: GTR: Texas TI 83; **WTR:** Casio fx-87DEX

Binnendifferenzierung (BD): (thx Trl) BD bezeichnet die individuelle Förderung Einzelner innerhalb einer Lerngruppe. BD kann nur im offenen Unterricht wirkungsvoll praktiziert werden. Also ist es beim lehrerzentrierten Unterricht sinnvoll, diese in die Hausaufgaben zu verlegen. Deshalb finden Sie bei fast allen Aufgaben Indizes, Bsp: c₂). Die Nr. sagt etwas über deren Niveaustufe aus: 1+2=Basisniveau (bis Note 3-4; 6 NP), 3+4=Könnerniveau (bis Note 1-2, 12 NP), 5(+6)=Profiniveau. Bitte beachten Sie dabei, dass für die Niveaustufe nicht nur relevant ist, *was* gefragt wird, sondern auch *wann* es gefragt wird. Die Minimalanforderungen sind immer auf Niveau 1-2. Sonderniveau sind *a*=Algorithmus, *b*=Beispiel, *e*=Einführung, *L*=nur LK, *r*=Regel, und *w*=Wiederholung (Niveau *b* und *r* müssen als HA ins Regelheft (s.u.) übertragen werden). Eine Niveaunkretisierung bei Einführungsaufgaben ist schwierig, denn die Agstellungen sind eher leicht, es wird aber ein Transfer erwartet. Ag mit Index *Q* (Querrichtung) bauen teilweise aufeinander auf und sollen noch auf weitere Ergebnisse führen.

Das Regelheft: (thx Lor, Wg) Sie sollten ein Regelheft (als Hausheft) führen. Im Regelheft sollten alle wichtigen Formeln, sowie Regeln und Algorithmen des Unterrichtes kompakt, evtl. mit einem

Beispiel, notiert sein. Sollte eine Aufgabe (idR Lückentext) den Niveauindex r haben, so schreiben Sie die ausgefüllte Variante als Hausaufgabe in Ihr Regelheft ab. Eine Aufgabe mit Index ' b ' sollte im Unterricht gerechnet werden; die Lösung dieser Aufgabe (eventuell mit Aufgabentext) gehört zu einer Regel und ist ebenfalls ins Regelheft zu übertragen. Außerdem sollten Sie in das Regelheft alle Formeln der Formelsammlung abschreiben, die während des Unterrichtes besprochen wurden. Im Gegensatz zum Regelheft ist das Schulheft ein Arbeitsheft und darf (soll) auch falsche Ansätze oder Durchgestrichenes enthalten. Hausaufgaben und Übungsaufgaben gehören ins Schulheft.

Hausaufgabe sind grundsätzlich alle im Unterricht ausgelassenen Aufgaben, bei welchen mindestens ein Teil markiert ist ($\boxed{f_2}$). Faustregel: Ein Schüler mit Note n sollte (mindestens) n Aufgaben (pro Unterrichtsstunde) als Hausaufgabe machen (auch wenn dies nicht kontrolliert wird). Der markierte Teil ($\boxed{f_2}$) wird kontrolliert und muss von jedem Schüler als HA präsentabel vorbereitet werden. Damit hat (fast) jede Stunde Hausaufgaben. Ag mit ($\textcircled{a}_2$) (auch (f) (U) oder Index 'f') sind gefilmt worden (Youtube Kanäle Mathe Schmid + Schmid happens). Während des Filmens ist die Mitarbeit freiwillig und es werden keine mündlichen Noten gemacht. Zu allen Aufgaben gibt es Lösungsvorschläge im Netz; diese sollten aber erst konsultiert werden, wenn Sie einige Zeit erfolglos versucht haben, die Aufgabe zu bearbeiten. Damit entfällt auch die Ausrede: 'Ich konnte die Hausaufgabe nicht machen, weil ich diese nicht verstanden habe'. Sollten Sie (trotz auswendig gelernter Formeln) einmal eine Ag (Ihres Niveaus) nicht herausbekommen, gehen Sie wie folgt vor:

- 1) Schreiben Sie die Lösungsvorschläge ab.
- 2) Mailen Sie an Sd@slt.biz die Aufgabe - ich versuche dann die LöVo zu ergänzen; (goto 1).
- 3) Erwirken Sie über den Kurssprecher im Unterricht eine Besprechung der Aufgabe (bis Niveau 3). Bitte melden Sie mathematische Fehler und auch Rechtschreibfehler sofort (per Mail).

Was wir zu Schülern sagen...



Cartoon 1

Im **Krankheitsfalle** streame ich gerne. Der versäumte Stoff soll unter anderem mit Hilfe der Filme und der Lösungen nachgearbeitet werden. Dazu gehören auch die Hausaufgaben. Im Falle des **Onlineunterrichts** beginnen wir zur gleichen Zeit wie beim Präsenzunterricht unter stream.slt.biz. Den Plan des Tages finden Sie dann unter 'Klasse'.slt.biz. Mein Onlinekonzept finden Sie unter ou.slt.biz. **Notentransparenz:** Im Regelfall schreibe ich pro Halbjahr 1 bis 3 Tests (diese zählen einfach → Heft) und 2 KA (diese zählen doppelt). Wer wiederholt bei einem Test oder einer KA oder bei der letzten KA fehlt, muss damit rechnen, diese (oder diesen) während der nächsten Unterrichtsstunde nachschreiben zu müssen. Die mündliche Leistung werte ich wie einen Test. Mit der letzten Arbeit jedes Halbjahres können Sie einen Papier-Streifen mit Ihren bisherigen Leistungen (ohne Gewähr!) erhalten. Das Erstellen dieses Streifen kann den Datenschutz leicht verletzen. Bitte melden Sie rechtzeitig, wenn Sie sich vor diesen Daten schützen wollen also keinen Streifen wünschen. Wenn Sie einen Streifen haben, können Sie sich in meiner Sprechstunde (nicht im Unterricht - zusammen mit Ihrer besten Freundin) zur erteilten Note äußern. Wenn alle KA/Tests mitgeschrieben wurden, kann die Note eventuell durch einen Vortrag bzw. GFS aufgewertet werden. Goto 390/3a+4a; if Kl11 then goto 159/6.3.1.

Zwillingsaufgaben (markiert durch einen Index Z) kommen verstärkt ab der Version 6.8 vor und sind Textaufgaben, die neben der eigentlichen Mathematik noch ein kleines Rätsel beinhalten. Gesucht ist meist eine Person (oft mit einem verfremdeten Namen oder anderem Geschlecht), eine Erzählung oder ein Ereignis; die Lösung wird im Unterricht nicht besprochen und kann in den LöVo auf Sd.SLT.biz nachgeschlagen werden. Aufgaben mit Index 'g' haben einen geschichtlichen Bezug. Goto 16/1.3.2

Is nich gibts nicht: Grundsätzlich findet jeder Unterricht (auch das Tutorium) statt, selbst wenn auf dem Vertretungsplan 'Entfall' steht. In der Regel werde ich dann von einem Schüler vertreten (SZU), der mit Ihnen Übungsaufgaben oder KA Besprechungen macht. Manchmal übernehme ich Stunden von Kollegen, die sonst entfallen würden. Dem, der das nicht so toll findet sei gesagt: 'Wer keine Lust auf Lernen hat, der gehe bitte arbeiten'.



Ein **Hauptfach** definiert sich u.a. dadurch, dass Sie zur Nacharbeit (zu Hause) etwa die Zeit benöti-

gen, die Sie das Fach in der Schule haben (für Mathematik sind dies also etwa 4-5 Schulstunden). Dazu gehört das Rechnen der Hausaufgaben (das waren die im Unterricht ausgelassenen Aufgaben), das Auswendiglernen der Formeln und (als Abivorbereitung) das Rechnen alter Abituraufgaben. Optimalerweise tun Sie dies zu festen Zeiten in der Woche (Stundenplan; gleichverteilt, nicht blockweise) und in Gruppen (wenn Sie nicht zusammen arbeiten, beaufsichtigen Sie sich wenigstens gegenseitig).

1.1 Formelsammlung

Matheformeln auswendig lernen - ist in Mathe nicht viel mehr das Verständnis entscheidend? Man muss doch nicht wissen wie's geht sondern nur wissen wo's steht. **NEIN!** Entscheidend ist, dass man überhaupt weiß, wofür es eine Formel gibt und durch die Formeln Zusammenhänge erst klar werden. Wissen Sie, was die Formel $a^2 + b^2 = |a + ib|^2$ bedeutet? Nein? Aber Sie wissen, dass diese Formel von Formel 29 abstammt, und damit haben Sie schon einen Großteil verstanden. Und Formeln geben Ihnen die Sicherheit in einer Prüfung das Richtige zu tun. Eine gute Idee entsteht durch die überraschende Verbindung zweier Dinge, die Sie sich **gemerkt** haben. Übrigens: Bei einer Sprache verzichten Sie auch nicht aufs Vokabeln lernen, wenn Sie doch ein Wörterbuch haben (☺).

Mathematik(unterricht) besteht aus 'Erkenntnis, Formulierung, Verallgemeinerung und Beweis'. Diese Inhalte erfordern Transferleistungen und sind daher in einer KA nur schwer abzufragen. In einer KA frage ich deshalb mindestens $\frac{2}{3}$ Reproduktion, also die Anwendung von Formeln bzw. theoretischen Inhalten auf Aufgaben aus Theorie und Praxis. Zu meiner Schulzeit war die Gewichtung etwa '50% Reproduktion, 40% Transfer und 10% etwas ganz Verrücktes'. Bitte beachten Sie, dass sowohl die Formelsammlung als auch die Minimalanforderungen (am Ende jeder Unterrichtseinheit) nur als Basis für die weiteren Kapitel zu verstehen sind. Eine KA Vorbereitung sollte weit mehr beinhalten. Besonders relevant zur KA Vorbereitung (für den Reproduktionsteil) sind Aufgaben mit der Markierung (KA_X) ($X \in \{ \text{'T'ransfer, 'l'okal, 'B'asis, 'G'lobal, 'Z'entral} \}$; optional bis zur Markierung ($\overline{\text{KA}}$)). Und denken Sie immer dran: Wenn Sie in einer KA nur Falsches hinschreiben, gibt es 0 Punkte, wenn Sie aber nichts hinschreiben, werden es auch nicht mehr (falsch $\geq$ nichts).

Folgende Formeln sind unbedingt auswendig zu lernen; (W) bedeutet dabei 'wichtig'; (A) 'auswendig'; (Z) 'zentral'. Zentrale Formeln sind praktisch Voraussetzung für jede Unterrichtseinheit. Die Formelsammlung ist nicht unbedingt vollständig. Weitere Formeln dürfen gerne auch gelernt werden. Taucht im Aufgabentext der Hinweis (**Formel 1**) auf, so wird die Formel 1 an dieser Stelle eingeführt. Weitere Erwähnungen sind mit F1 gekennzeichnet. Vielen Dank an Familie Tressel und allen Formelsammlern für die Mithilfe.

1.1.1 Formelsammlung bis Klasse 7

Merkwürdig wenn Sie das Wort hören, denken Sie an sonderbar skurril - im eigentlichen Sinne bedeutet es aber es ist würdig, es sich zu merken. Wenn Sie Information mit einem durchaus merkwürdigen Bild kombinieren, so können Sie sich diese oft viel besser merken. Ziel ist es, jede Formel mit einem merkwürdigen erklärenden Bild zu versehen. Vorschläge sind willkommen (zB Formel 10).

1. (A) Die ersten 20 Quadratzahlen sind: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400; $25^2 = 625$; Kubikzahlen: $2^3 = 8, 3^3 = 27, 4^3 = 64, 5^3 = 125$.
(A) Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl >1 , die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist. Die ersten acht Primzahlen sind 2,3,5,7,11,13,17,19.
2. (A) Ein Term ist immer nach der Verknüpfung benannt, die als letztes ausgeführt wird.
3. (Z) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, dann gilt das Kommutativgesetz $a+b = b+a$, $a \cdot b = b \cdot a$, das Assoziativgesetz $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ und das Distributivgesetz $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;
4. (A, Ag 51/134) (Vermehrter / verminderter Grundwert) Ein Bestand wächst mit p Prozent pro Zeitschritt, dann gilt für den Wachstumsfaktor q : $q = 1 + \frac{p}{100}$.

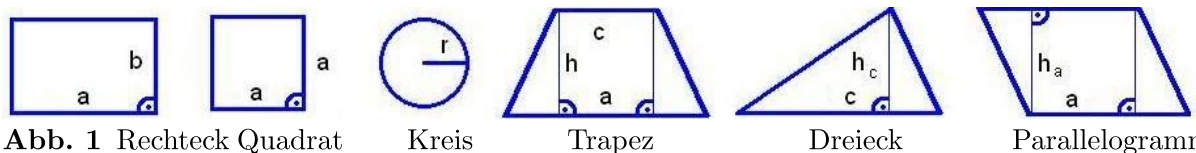


Abb. 1 Rechteck Quadrat

Kreis

Trapez

Dreieck

Parallelogramm

5. FD 3: (A) Flächenberechnung von Dreiecken, Vierecken und Kreisen:

Kreis:	$A = \pi \cdot r^2$, $U = 2 \cdot \pi \cdot r$	
Quadrat:	$A = a^2$,	
Rechteck:	$A = a \cdot b$	Länge mal Breite,
Parallelogramm:	$A = g \cdot h$	Grundseite mal Höhe,
Dreieck:	$A = \frac{c \cdot h_c}{2}$	Grundseite mal Höhe durch zwei,
Trapez:	$A = \frac{a+c}{2} \cdot h$	mit $a \parallel c$ und Höhe h .

6. (W) Der Schwerpunkt S eines Dreiecks teilt die Schwerlinie im Verhältnis 2:1.

Die Winkelsumme im Dreieck ist $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

7. (W) $a \cdot b = \text{ggT}(a, b) \cdot \text{kgV}(a, b) = \text{größter gemeinsamer Teiler} \cdot \text{kleinstes gemeinsames Vielfaches}$.

8. (W) 'Der kleine Gauß:' $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n^2+n}{2}$;

9. (Z) Die Steigung m einer Geraden durch $P(x_1; y_1)$ und $Q(x_2; y_2)$ mit $x_1 \neq x_2$ berechnen wir mit

$$\text{Zwei-Punkte-Formel (ZPF): } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Die Steigung m das merk' dir fix, ist delta yps durch delta x!

10. (Z) Die Gleichung einer Geraden mit der Steigung m durch $P(x_1; y_1)$ ist

$$\text{Punkt-Steigungs-Form (PSF): } y = m \cdot (x - x_1) + y_1.$$

Ein Sektklas [y] steht auf zwei Skiern [=] und fährt einen Berg hinauf. Oben steht Angela Merkel [m] mit einem roten Muttermal [-] am Bein. Sie öffnet eine Türe [()] und man sieht eine Straßenkreuzung [x]. Ein Speer [-] fliegt mitten in eine andere Kreuzung hinein und trifft dort eine Kerze [x₁]. Vom Luftzug wird die Türe wieder zugeschlagen [)]. Draußen findet eine Party statt auf der Spaten [+] tanzt. Alle Partygäste haben in der rechten Hand ein Sektklas und in der linken Hand eine Kerze [y₁].

Die x -Achse hat die Gleichungsdarstellung $y = 0$, die y -Achse: $x = 0$.

1.1.2 Formelsammlung Klasse 8

11. (Z, Ag 20/4, FD 2) **Binomische Formeln:** i) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; ii) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; iii) $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$; (W, Ag 20/5) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
12. (Z, Ag 21/10) Bei Äquivalenzumformungen sind die Multiplikation mit 0 sowie die Division durch 0 und durch x (Tipp: Ausklammern + F14) verboten.
13. (W, Abs 227/9.1.8, FD 9) **Satz des Thales:** Genau die Dreiecke in einem Halbkreis sind rechtwinklig. **Umfangswinkelsatz:** (auf dem Themenfriedhof) Jeder Umfangswinkel ist halb so groß wie der Mittelpunktswinkel. Also sind alle Umfangswinkel auf einer Seite gleich groß.
14. (Z, Ag 23/15) Satz vom Nullprodukt: Sei $a \cdot b = 0$, dann ist $a = 0$ oder $b = 0$.
15. (A, Ag 29/38) Sei $n \geq 0$, $\sqrt{n}$ ist diejenige positive Zahl, die quadriert $= n$ ergibt. $x^2 = n$ wird von $x = \pm\sqrt{n}$ gelöst. Damit ist $(\sqrt{n})^2 = n$ und für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sqrt{x^2} = |x|$.
(A, Ag 30/45) Seien $a, b \geq 0$, $n > 0$ dann gilt: i) $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$; ii) $\sqrt{\frac{a}{n}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{n}}$;

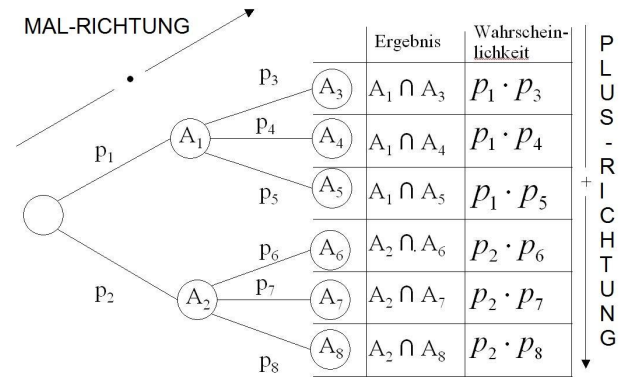
16. (W, Ag 86/214) Für den Scheitel $S(x_s; y_s)$ einer Parabel $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) gilt: $x_s = \frac{-b}{2a}$. Die Scheitelform der Parabel ist: $y = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$.
17. (A, Ag 316/788) Es werden k aus n Kugeln mit Berücksichtigung der Reihenfolge gezogen. Mit Zurücklegen ergeben sich n^k mögliche Ergebnisse, ohne Zurücklegen $\frac{n!}{(n-k)!}$. Die Anzahl der Permutationen von n Elemente ist $n!$.
18. (A, Ag 319/796) Gegeben sei ein mehrstufiges Zufallsexperiment mit zugehörigem Baum.

Die Pfadregel:

In einem mehrstufigen Zufallsexperiment erhält man die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses, indem man die Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades multipliziert: Die 'Malrichtung' ist von links nach rechts.

Der spezielle Additionssatz:

Die einzelnen Ergebnisse eines Ereignisses dürfen addiert werden: Die 'Plusrichtung' ist von oben nach unten.

**Abb. 2** Pfadregel

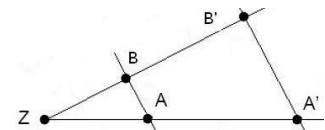
19. (Z, Ag 32/57, FD 6) Mitternachtsformel: Seien $a \neq 0$, $D := b^2 - 4ac \geq 0$ (Diskriminante) dann

$$\text{gilt} \quad ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

(W, Ag 33/60) Wenn $D > 0$ ist, hat $ax^2 + bx + c = 0$ zwei (verschiedene) Lösungen, bei $D = 0$ hat sie (genau) eine Lösung und bei $D < 0$ hat sie keine Lösung.

20. (A, Ag 33/62) **Linearfaktorzerlegung:** Hat $p(x) = ax^2 + bx + c$ die Nullstellen x_1 und x_2 , dann ist $p(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$;
 (W, Ag 34/67) **Satz von Vieta:** $x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \Leftrightarrow p = -(x_1 + x_2), q = x_1 \cdot x_2$.

21. (A, Ag 229/559, FD 1) Der (zweite) Strahlensatz: Seien Z, A, B und Z, A', B' je auf einer Geraden (oder kollinear), $A'A \parallel B'B$, dann gilt: $k = \frac{ZA'}{ZA} = \frac{ZB'}{ZB} = \frac{A'B'}{AB}$. k ist dabei der Streckfaktor der zentrischen Streckung, die das $\triangle ZAB$ auf das $\triangle ZA'B'$ abbildet.



22. (W, Abs 229/9.2.4) Bei einer zentrischen Streckung mit Streckfaktor k wird aus einer Fläche mit dem Inhalt A eine Fläche mit dem Inhalt $k^2 \cdot A$ (aus einem Körper mit Volumen V ein Körper mit Volumen $k^3 \cdot V$).

Abb. 3 Strahlensatzfig.**1.1.3 Formelsammlung Klasse 9**

23. (A, Abs 38/2.3.2, FD 5) Seien $a, b > 0$, $n, m \in \mathbb{R}$, dann gilt:
 1 PG $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$; $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$; 2 PG $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$; $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$;
 3 PG $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$; $(a^n)^m = (a^m)^n$; 4 PG $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$;
 5 PG $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$; 6 PG $a^n \cdot b^m$ kann nicht zusammengefasst werden
24. (A, Ag 39/94) Die Gleichung $x^n = a$ hat für ungerades n genau eine Lösung $x = \sqrt[n]{a}$; falls n gerade ist, so hat die Gleichung für $a < 0$ keine Lösung, für $a > 0$ gilt $x = \pm \sqrt[n]{a}$ und für $a = 0$ ist $x = 0$.
25. (W, Abs 224/9.1) Wenn zwei Dreiecke in
 (sss) allen drei Seiten
 (sws) zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel
 (wsw) einer Seite und den zwei anliegenden Winkeln

(Ssw) zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, dann sind sie kongruent (deckungsgleich).

Jede der oben angegebenen Kombinationen legt ein Dreieck in Form und Größe eindeutig fest (thx Cf).

26. (W, Abs 41/2.4.1) Seien $a, b > 0$, $a \neq 1$, dann gilt $a^x = b \Leftrightarrow x = \frac{\log b}{\log a} (= \frac{\ln b}{\ln a}) = \log_a(b)$.
Insbesondere ist $\log(10^c) = c$ (für alle $c \in \mathbb{R}$) und $10^{\log(c)} = c$ (nur für $c > 0$) (thx Trs).

(W) Spezielle Werte: $\log(1) = 0$, $\log(10) = 1$, $\log(100) = 2$, $\log(1000) = 3$, usw.

(*) Limites: $\log(0) = -\infty$, $\log(\infty) = \infty$, (Klasse 11: $\ln(e) = 1$).

27. (A, Abs 41/2.4.2, FD 5) Seien $a, b > 0$, $n \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$\begin{array}{ll} 1 \text{ LogG} & \log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b); \quad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b); \\ 2 \text{ LogG} & \log(a^n) = n \cdot \log(a); \quad 3 \text{ LogG} \quad \log(a + b) \text{ kann iA nicht vereinfacht werden.} \end{array}$$

28. (A, Ag 233/580, FD 21) $y = m_1 \cdot x + c_1$ und $y = m_2 \cdot x + c_2$ sind orthogonal $\Leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$.

29. (Z, Ag 234/584, FD 8) Der Satz von Pythagoras: Im rechtwinkligen Dreieck A, B, C mit $\gamma = 90^\circ$ gilt $a^2 + b^2 = c^2$ oder die Summe der Kathetenquadrate ist gleich dem Hypotenusenquadrat.

(W, auch Ag 237/601) Die Zahlen (3;4;5) (und entsprechende Vielfache) bilden ein pythagoreisches Tripel, d.h. es gibt ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seitenlängen 3; 4 und 5. Es hat die weiteren Winkel 36.87° und 53.13° . Die Zahlen 1;2;2;3 bilden ein pythagoreisches Quadrupel, d.h. $1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$ oder ein Quader mit den Seitenlängen 1;2;2 hat Diagonale 3.

30. (W, Ag 235/589) Die Diagonale d eines Quadrates mit der Seitenlänge a ist $d = a\sqrt{2}$.

Die Höhe h eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a ist $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, $A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.

31. (A, Ag 235/593) Die Pkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ haben den Abstand $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
(W, Ag 236/595) Jeder Punkt $P(x; y)$ eines Kreises K um $M(m_1; m_2)$ mit Radius r erfüllt

$$\text{die Gleichung} \quad (x - m_1)^2 + (y - m_2)^2 = r^2 \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{falls} \quad M(0; 0).$$

32. (A, Ag 237/601) Die Diagonale d eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b ist $d = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Die Raumdiagonale d_R eines Quaders (Seitenlängen a, b, c) ist $d_R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

33. (W, Ag 94/236) $f(\bar{f}(x)) = \bar{f}(f(x)) = x$ bzw. $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$ (falls $f^{-1}(x)$ existiert).

34. (Z, Ag 240/613, FD 7) Im rechtwinkligen Dreieck gilt (Regel: GAGA HühnerHof AG)

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}; \quad \cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}; \quad \tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}};$$

Nach dem Satz des Pythagoras gilt $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.

35. (W, Ag 241/617) (auch Ag 108/278) Winkel - spezielle Werte:

α	0°	30°	45°	60°	90°	α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin(\alpha)$	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = 0.5$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$	$\cos(\alpha)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

36. (W, Ag 241/619) (auch Ag 112/287) Sinus und Kosinus sind 360° periodisch:
Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\sin(\alpha) = \sin(\alpha + k \cdot 360^\circ)$ und $\cos(\alpha) = \cos(\alpha + k \cdot 360^\circ)$.

Eine Gleichung der Form $\sin(x) = a$ wird von $x_1 = \arcsin(a)$ und $x_2 = 180^\circ - x_1$ gelöst.

Eine Gleichung der Form $\cos(x) = a$ wird von $x_1 = \arccos(a)$ und $x_2 = 360^\circ - x_1$

In diesem Abschnitt (Formeln 37, 39, 38) sind A, B beliebige Ereignisse.

37. (W, Ag 322/804) Additionssatz: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

38. (W, Ag 323/809, FD 26) Eine Zufallsgröße $\mathcal{X}$ ist ein Wkraum mit reellen Ergebnissen; hier x_1, x_2, x_3 und sei $P(\mathcal{X} = x_1) = p_1$ usw. Erwartungswert $\mu = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3$.
Varianz: $(x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + (x_3 - \mu)^2 \cdot p_3$; Standardabweichung $\sigma = \sqrt{V(\mathcal{X})}$.
39. (W, Ag 327/817, FD 24) Def. bedingte Wk: $P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
(W, Ag 328/819) A und B sind unabhängig $\Leftrightarrow P_B(A) = P(A)$ oder $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
40. (W, Ag 331/825) Man muss mindestens $\lceil \frac{\log(1-p)}{\log(1-p_0)} \rceil$ mal ein Experiment mit Erfolgswk p durchführen um mit einer Wk von mind. p_0 ein Mal oder öfter erfolgreich zu sein.
41. (A, Ag 243/632) Die Fläche A eines Kreissektors mit Öffnungswinkel α ist $A = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$, die Bogenlänge b ist $b = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$ (Sektorformel).
42. (A, Ag 244/639) Für Prismen und zylinderförmige Körper (Säulen) mit Grundfläche G gilt $V = G \cdot h$, für kegelförmige Körper gilt $V = \frac{G \cdot h}{3}$. Für Kugeln gilt $V = \frac{4\pi}{3} r^3$; $O = 4\pi \cdot r^2$.

1.1.4 Formelsammlung Klasse 10 teilweise vorgelesen unter <http://fs10.slt.biz>

43. (A, Ag 98/248) $f(x - a)$ bedeutet 'statt x schreibe $(x - a)$ '.
Beispiel: $f(x) = 2x^2 - 4x \rightarrow f(x - a) = 2(x - a)^2 - 4(x - a)$.
(W, Ag 98/248) Wenn das Schaubild von f um a nach rechts und um b nach oben verschoben werden soll, so hat der resultierende Graph die Funktionsdarstellung $y = f(x - a) + b$.
(W, Ag 99/250) Soll K_f an der x -Achse gespiegelt werden, so gilt $f_{neu}(x) = -f(x)$; wenn K_f an der y -Achse gespiegelt wird, so gilt $f_{neu}(x) = f(-x)$.
44. (A, Ag 101/256) Die Vielfachheit von Nullstellen (siehe Abb. 4). Einfache Nullstellen x_0 treten als Linearfaktor $(x - x_0)^1$ doppelte Nst als $(x - x_0)^2$ und dreifache Nst als $(x - x_0)^3$ in der Linearfaktorzerlegung auf.
45. (W, Ag 104/264) **Fundamentalsatz** der Algebra: Eine ganzrationale Funktion n -ten Grades hat höchstens n Nullstellen. Eine ganzrat. Fktn ungeraden Grades hat mindestens eine Nullstelle.

Satz der Linearfaktorzerlegung: $p(x) = 0 \Leftrightarrow p(x)$ ist durch $(x - x_0)$ teilbar.

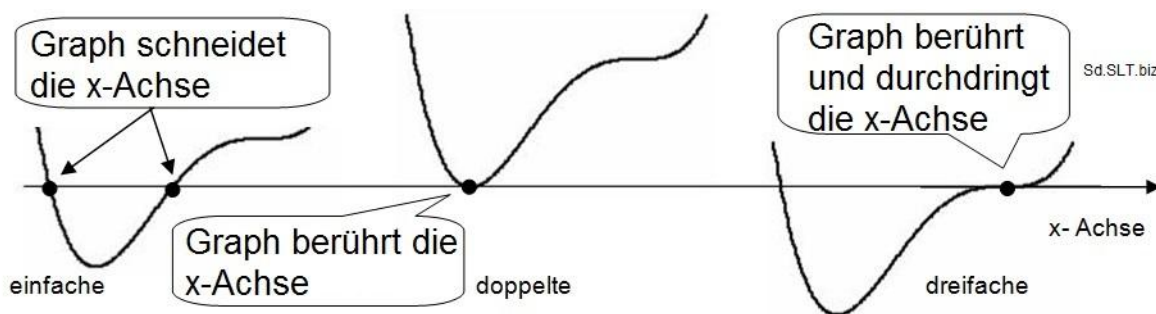


Abb. 4 Vielfachheit von Nullstellen

46. (A, Ag 105/269) Formel der speziellen Symmetrie: Sei f eine Funktion, mit Schaubild K_f .
 K_f ist achsensymmetrisch zur y -Achse $\Leftrightarrow f(-x) = f(x)$; (gerade Funktion);
 K_f ist punktsymmetrisch zum Ursprung $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$; (ungerade Funktion).
47. (A, Ag 333/12.3.1, FD 25) $0! = 1, 1! = 1, 2! = 1 \cdot 2 = 2, 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$.

Das n -Tupel $\underbrace{E, \dots, E}_k \underbrace{\bar{E}, \dots, \bar{E}}_{n-k}$ kann auf $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$ Weisen angeordnet werden.

Das Tupel $\underbrace{1, \dots, 1}_{n_1} \underbrace{2, \dots, 2}_{n_2} \underbrace{3, \dots, 3}_{n_3} \underbrace{4, \dots, 4}_{n_4}$ kann auf $\frac{(n_1+n_2+n_3+n_4)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot n_4!}$ Weisen angeordnet werden.

48. (W, Ag 337/843) Wir ziehen k aus n Kugeln, dann gilt für die Anzahl der möglichen

Permutationen: (das Quadrat)	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen (Tupel)
mit Berücksichtigung der Anordnung (Baum)	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
ohne Berücksichtigung der Anordnung	$\binom{n-1+k}{k}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

49. (A, Ag 339/849) Ein Experiment mit den Ergebnissen Erfolg und Misserfolg und gleichbleibender Erfolgswahrscheinlichkeit p heißt Bernoulliexperiment. Dieses wird n mal durchgeführt. Sei $\mathcal{X}$ die Anzahl der Erfolge, dann gilt die Formel von Bernoulli: $P(\mathcal{X} = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ [= $\text{binompdf}(n, p, k)$]. $\mathcal{X}$ heißt dann $B_{n,p}$ -verteilt oder $\mathcal{X} \sim B_{n,p}$.

50. (A, Ag 340/853) Sei $\mathcal{X} \sim B_{n,p}$, d.g.: $P(\mathcal{X} \geq k) = 1 - P(\mathcal{X} \leq k-1) = 1 - \text{binomcdf}(n, p, k-1)$. Für $1 \leq a \leq b \leq n$ ($a, b \in \mathbf{N}$) gilt: $P(a \leq \mathcal{X} \leq b) = P(\mathcal{X} \leq b) - P(\mathcal{X} \leq a-1)$.

51. (A, Ag 343/856, FD 26) Sei $\mathcal{X} \sim B_{n,p}$, dann gilt: Der Erwartungswert von $\mathcal{X}$ ist $E(\mathcal{X}) = \mu = n \cdot p$, $V(\mathcal{X}) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$ ist die Varianz und $\sigma(\mathcal{X}) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ ist die Standardabweichung.

52. (W, Ag 344/858) Sei $\mathcal{X} \sim B_{n,p}$, dann gilt: $P(\mathcal{X} \leq k) \approx \Phi\left(\frac{k - n \cdot p + 0.5}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right)$.

53. (W, Ag 135/319) $\infty \notin \mathbf{R}$, sei $a \in \mathbf{R}$ $a \pm \infty = \pm\infty$, $\frac{a}{\infty} = 0$, $a \cdot \infty = \begin{cases} \infty & (a > 0) \\ \text{undefiniert} & (a = 0) \\ -\infty & (a < 0) \end{cases}$; undefiniert sind $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty$

54. (W, Ag 136/324) Die mittlere Geschwindigkeit (Änderungsrate) oder **Sekantensteigung** einer Weg/Zeitfunktion f zwischen x_0 und x_1 ist $\bar{v} = m = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ (**Differenzenquotient**).

(FD 13) Die Momentangeschwindigkeit (**Tangentensteigung**) einer Weg/Zeitfunktion f ist $v(x_0) = m(x_0) = f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ (**Differenzialquotient**).

55. (W, Ag 138/333) Eine Funktion $f(x)$ hat an der Stelle x_0 den Steigungswinkel ihrer Tangente: $\alpha = \arctan(f'(x_0))$ bzw. falls $f(x) = mx + c$ gilt $\alpha = \arctan(m)$. [Der Winkel zwischen den Geraden $y = m_1x + c$ und $y = m_2x + c$ ist $|\arctan m_1 - \arctan m_2|$ eigentlich: $\arctan \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right|$.]

56. (Z, Ag 137/327, FD 14) Die Potenzregel der Ableitung: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, für alle $n \in \mathbf{R}$.

57. (A, Ag 137/329, FD 15) Die Linearität der Ableitung: $(r \cdot f(x) + s \cdot g(x))' = r \cdot f'(x) + s \cdot g'(x)$.

58. (A, Abs 138/6.1.7) Tangente in $B(u/f(u))$ (allgemeine Tggleichung): $y = (f'(u))(x - u) + f(u)$; Normale: $y = \frac{-1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u)$. **Faustregel:** Ist $P(a; b)$ ein Punkt der Funktion, so setze $u = a$, sonst (externer Punkt) setze $x = a$ und $y = b$; im Zweifelsfalle setze $u = a$.

59. (W, Abs 108/5.4.2, FD 12) Umrechnung (Bogenmaß $\leftrightarrow$ Gradmaß): $\frac{\alpha}{360} = \frac{x}{2\pi}$.

x	$0 \hat{=} 0^\circ$	$\frac{\pi}{6} \hat{=} 30^\circ$	$\frac{\pi}{4} \hat{=} 45^\circ$	$\frac{\pi}{3} \hat{=} 60^\circ$	$\frac{\pi}{2} \hat{=} 90^\circ$	$\pi \hat{=} 180^\circ$	$\frac{3\pi}{2} \hat{=} 270^\circ$	$2\pi \hat{=} 360^\circ$
$\sin(x)$	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = 0.5$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$	0	-1	0
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

60. (A, Abs 109/5.4.3, FD 11) $\sin(-x) = -\sin(x)$, d.h. $\sin(x)$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung; $\cos(-x) = \cos(x)$, d.h. $\cos(x)$ ist achsensymmetrisch zur y -Achse. $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ $\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$. (für alle $k \in \mathbf{Z}$)

61. (A, Ag 110/284) $f(x) = a \sin(b(x - c)) + d$ hat Periode $p = \frac{2\pi}{b}$. K_f entsteht aus $K_{\sin(x)}$ durch Streckung mit dem Faktor a in y -Richtung und mit dem Faktor $\frac{1}{b}$ in x -Richtung sowie einer Verschiebung um $(c; d)$ Regel: Erst strecken, dann verschieben.

62. (W, Ag 113/291) Von $f(x) = a \sin(b(x - c)) + d$ sind zwei aufeinanderfolgende Extrema $T(x_{\min}, y_{\min})$ und $H(x_{\max}, y_{\max})$ gegeben, dann gilt:

$$a = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2}; \quad c = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2}; \quad d = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2}; \quad p = 2 \cdot (x_{\max} - x_{\min});$$

63. (A, Ag 114/293, FD 14) $(\sin(x))' = \cos(x)$, $(\cos(x))' = -\sin(x)$, $(\sin(bx + c))' = b \cos(bx + c)$.

64. (A, Ag 249/652) Seien $A(a_1|a_2|a_3)$ und $B(b_1|b_2|b_3)$, dann ist $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$ (Ende - Anfang).

65. (A, Abs 440/14.20.16) **Die Parallelogrammgesetze:**

(1 PaG) Für die Mitte M von A und B gilt $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$;

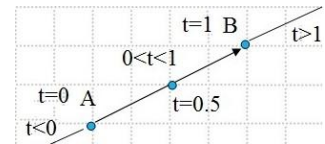
(2 PaG) A, B, C, D ist ein Parallelogramm $\Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$;

(3 PaG) Für jede Spiegelung gilt: Sei A' der an einem Gebilde G (Punkt, Gerade, Ebene) gespiegelte Punkt von A , dann ist $\overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OA}$, wobei L der Lotfußpunkt von A auf G ist.

(4 PaG) Für den Schwerpkt S eines Dreiecks A, B, C gilt $\overrightarrow{OS} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$; (einer Dreieckspyramide A, B, C, D gilt $\overrightarrow{OS} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{4}$); dies sind Verallgemeinerungen vom (1 PaG).

Nur bei den Parallelogrammgesetzen dürfen sinnvollerweise Ortsvektoren (Punkte) addiert werden.

66. (Z, Ag 253/669) Die Gerade durch A und B in Parameterform ist $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$, ($t \in \mathbb{R}$). Für $t = 0$ ist $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA}$, für $t = 1$ ist $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OB}$, für $t = 0.5$ zeigt $\overrightarrow{OX}$ auf die Mitte von A und B . Falls $t < 0$ ist, liegt X 'links' von A ; falls $0 < t < 1$ ist, liegt X 'zwischen' A und B und falls $t > 1$ ist, liegt X 'rechts' von B .



(A) Die x_1 -Achse ist $\overrightarrow{OX} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; x_2 -Achse: $\overrightarrow{OX} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; x_3 -Achse: $\overrightarrow{OX} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

Abb. 5 Skalierung

67. (W, Ag 254/674) ('Der Baum:') Seien $g_1 : \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP}_1 + t \cdot \vec{r}_1$ und $g_2 : \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP}_2 + t \cdot \vec{r}_2$.

Es gilt: $\vec{r}_1 \parallel \vec{r}_2 \Leftrightarrow g_1 \parallel g_2$, wenn zusätzlich das LGS $\overrightarrow{OP}_1 = \overrightarrow{OP}_2 + t \cdot \vec{r}_1$ lösbar ist, so ist $g_1 = g_2$, ansonsten sind g_1 und g_2 echt parallel.

Falls $\vec{r}_1 \nparallel \vec{r}_2$ so ist $g_1 \nparallel g_2$, wenn zusätzlich das LGS $\overrightarrow{OP}_1 + s \cdot \vec{r}_1 = \overrightarrow{OP}_2 + t \cdot \vec{r}_2$ lösbar ist, so schneiden sich g_1 und g_2 ansonsten sind g_1 und g_2 windschief.

68. (W, Ag 257/684, 275/753) Ein Objekt bewegt sich vom Punkt P aus geradlinig in Richtung $\vec{r}$ mit konstanter Geschwindigkeit v , so befindet es sich zum Zeitpunkt t bei $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \frac{v}{|\vec{r}|} \cdot \vec{r}$.

Bogenlängenparametrisierung: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \frac{d}{|\vec{r}|} \cdot \vec{r}$. X hat von P den (orientierten) Abstand d .

69. (A, Ag 144/354) f ist bei x_0 (lokal) extremal $\Leftrightarrow f'(x)$ wechselt bei x_0 das Vorzeichen $\Rightarrow f'(x_0) = 0$; VZW $+$ $\rightarrow$ $-$ bedeutet Maximum; VZW $-$ $\rightarrow$ $+$ bedeutet Minimum. Signalwort maximal (minimal) bedeutet: 'Ableiten und die Ableitung = 0 setzen'.

70. (A 6.2.4) $f''(x_0) < 0$ und $f'(x_0) = 0 \Rightarrow H(x_0; f(x_0))$ ist Hochpunkt; [$f''(x_0) > 0$ usw. ... Tiefpunkt]. $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$ ist eine hinreichende Bedingung für Extremwert, $f'(x_0) = 0$ ist eine notwendige Bedingung: $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0 \Rightarrow E(x_0; f(x_0)) \Rightarrow f'(x_0) = 0$.

71. (A, Ag 147/365) $W(x_0; f(x_0))$ ist ein Wendepunkt $\Leftrightarrow$ VZW von $f''(x)$ bei $x_0 \Rightarrow f''(x_0) = 0$;

72. (W, Ag 149/377) Sei f differenzierbar auf $(a; b)$ mit $f'(x) > 0$ (für alle $x \in (a; b)$), dann ist f streng monoton wachsend ($f'(x) > 0 \Rightarrow f$ smw); smf analog. Im Abitur gibt es nur strenge Monotonie! Innere Extrempunkte zerstören die strenge Monotonie; Terrassen(Sattel)punkte hingegen nicht. Monotoniebereiche: Zwischen einem Minimum und einem Maximum ist f smw und umgekehrt. Streng monotone Funktionen sind umkehrbar (injektiv).

1.1.5 Formelsammlung Klasse 11

73. (Z, Ag 159/405, FD 14) $(e^x)' = e^x$, $(e^{ax+b})' = a \cdot e^{ax+b}$ und (A, Ag 163/422) $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$.

74. (A, Ag 160/407) Seien $a, b > 0; a \neq 1$, dann gilt $a^x = b \Leftrightarrow x = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$; $e^{\ln b} = b$; $\ln(e^b) = b$;

(W) $[\ln(0) = -\infty, \ln(1) = 0, \ln(2) \approx 0.693, \ln(e) = 1, \ln(\infty) = \infty]$.

75. (A, Ag 161/409, FD 18) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$ (waagrechte Asymptote $y = 0$),

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0; \quad e^x > 0, e^{-x} > 0.$$

76. (A, Ag 161/411, FD 15) Die Kettenregel: $(f(g(x)))' = g'(x) \cdot f'(g)$ oder $\frac{df}{dx} = \frac{dg}{dx} \cdot \frac{df}{dg}$
 $\Leftrightarrow (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Beachten Sie, dass bei $f'(g)$ nach g abgeleitet wird.

Die innere Funktion $g(x)$ ist immer das, was zuerst berechnet wird.

Bsp: $(e^{x^2})'$ sagt $g(x) = x^2, f(g) = e^g, (e^{x^2})' = 2x \cdot e^g = 2x \cdot e^{x^2}$;

$(a^x)' = (e^{x \ln(a)})' = \ln(a) \cdot e^{x \ln(a)} = \ln(a) \cdot a^x$ ($a > 0$).

77. (A, Ag 162/415, FD 15) Die Produktregel: $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$.

78. (A, Ag 164/425) Quotientenregel: $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.

79. (W, Ag 174/454, FD 16) Der Hauptsatz der Differenzial und Integralrechnung:

'Ableiten ist das Gegenteil vom Integrieren' oder $\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = (F_a(x))' = f(x)$.

80. (W, Ag 175/455, FD 17) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =$ (orientierte) Fläche begrenzt von K_f und den Geraden $x = a, x = b$ und $y = 0$.

81. (A, Ag 176/460) Potenzregel: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ bzw. $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)} + c$, falls $n \neq -1$;
 (A, Ag 183/495) für $n = -1$ gilt: $\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$.

(A, Ag 176/461) Die Linearität des Integrals: $\int (r \cdot f(x) + s \cdot g(x))dx = r \cdot \int f(x)dx + s \cdot \int g(x)dx$.

82. (A-Z, Ag 178/473) Lineare Substitution: Sei $F'(x) = f(x)$, dann gilt für $a \neq 0$:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c; \quad \text{Bsp: } \int \sin(ax+b)dx = \frac{-\cos(ax+b)}{a} + c; \quad \int e^{ax+b}dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c;$$

83. (W, Ag 181/487, FD 19) Rotiert der Graph einer Funktion f um die x -Achse, so gilt für das Volumen des entstehenden Rotationskörpers im Intervall $[a; b]$: $V = V_a(b) = \pi \cdot \int_a^b f^2(t)dt$.

84. (W, Ag 182/492) Der Mittelwert m einer Funktion f auf $[a, b]$ ist $m = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx$.

85. (A, Ag 252/664, FD 22) Das Skalarprodukt: $\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$; $\vec{a} \circ \vec{a} = |\vec{a}|^2$.
 $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}} = \sqrt{(\vec{a})^2}$. Multipliziere zwei Vektoren **nie** komponentenweise.
 Normierter Vektor: Sei $\vec{a} \neq \vec{0}$ dann zeigt $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ in Richtung $\vec{a}$ und hat Länge 1.

86. (Z, Ag 259/691) Für den von $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ eingeschlossenen Winkel γ gilt: $\cos(\gamma) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Insbesondere gilt $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 0$.

Hinweis: Teile **nie** durch einen Vektor!

87. (W, Ag 260/699) Sei $\vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b}$, dann ist deren Winkelhalbierende: $\vec{w} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$.

88. (A, Ag 354/881) Bei einem linksseitigen Hypothesentest mit $(\alpha = 0.1)$ ist $H_0 : p \geq p_0, H_1 : p < p_0$.
 Das Quantil k der Ordnung 0.1 (= die Grenze) ist $k \approx n \cdot p - 1.282 \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} - 0.5$.

Etwa bei k wird in der Wertetabelle $P(\mathcal{X} \leq k)$ das Signifikanzniveau $\hat{\alpha}$ übersprungen.

Rechtsseitiger Test: $H_0 : p \leq p_0, H_1 : p > p_0$; Quantil $k \approx n \cdot p + 1.282 \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} + 0.5$.

H_1 generiert die Wertetabelle: $p < p_0 \rightarrow P(\mathcal{X} \leq k)$; $\alpha_1 = P_{p_0}(Abl), \beta_1 = P_{p_1}(\overline{Abl})$.

89. (W, Abs 358/13.2.1) Sei F eine Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße $\mathcal{X}$ mit Dichte f , dann gilt: $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$, $P(a < \mathcal{X} \leq b) = F(b) - F(a)$, $\lim_{n \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x) = 1$, $(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1)$ $F(x)$ ist monoton wachsend und rechtsseitig stetig. $\mu = E(\mathcal{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)dt$; (nur HM III) $\sigma = \sqrt{V(\mathcal{X})} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (t - \mu)^2 \cdot f(t)dt}$;

90. (W, Abs 361/13.2.2, FD 26) Sei $\mathcal{X} \sim N(0; 1) \Rightarrow \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$; $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t)dt$. Sei $\mathcal{X} \sim N(\mu, \sigma)$ (normalverteilt), dann gilt: Dichte $= \varphi(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot (\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$; $P(\mathcal{X} \leq k) = \Phi(\frac{k-\mu}{\sigma})$, $P(a \leq \mathcal{X} \leq b) = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ und $\bar{\Phi}(1-\alpha_0) = -\bar{\Phi}(\alpha_0)$; $\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.4$.

Sigmaregel: (FD 27) Mit Wk 68% hat ein Wert höchstens Abstand σ vom Erwartungswert μ , mit Wk 95% Abstand 2σ und mit Wk 99% Abstand 3σ .

1.1.6 Formelsammlung Klasse 12

91. (W, Ag 262/704, FD 23) Die Ebene durch (drei) nicht kollineare Punkte A, B und C in Parameterform ist $\vec{OX} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AB} + t \cdot \vec{AC} = \vec{a} + r \cdot \vec{s}_1 + t \cdot \vec{s}_2$ ($r, t \in \mathbb{R}$).

Es gibt (mindestens) drei Darstellungsformen der Ebene:

- Die Parameterform (s.o.) wenn aus drei Punkten eine Ebene berechnet werden soll;
- Die Punktnormalenform $(\vec{x} - \vec{p}) \circ \vec{n} = 0$ ($\vec{n}$ heißt Normalenvektor, bei Verfahren Abs. 10.5.8);
- die Koordinatenform $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = e$ (sonst immer gut).

Es gilt $\vec{n} \perp \vec{s}_1$ und $\vec{n} \perp \vec{s}_2$; Ein möglicher Normalenvektor $\vec{n}$ kann durch $\vec{s}_1 \times \vec{s}_2$ berechnet werden.

92. (A 255/678+265/717) Die Koordinatenebenen sind: x_1x_2 -Ebene: $x_3 = 0$; x_1x_3 -Ebene: $x_2 = 0$; x_2x_3 Ebene: $x_1 = 0$. Die Ebene $x_1 + x_3 = 1$ ist echt parallel zur x_2 -Achse.

93. (A-Z, Ag 263/708) Seien $\vec{a}, \vec{b}$ dreidimensional, dann definieren wir $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$ (Vektor- oder Kreuzprodukt). Zweidimensional gilt: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

Sei $E : \vec{OX} = \vec{OP} + r \cdot \vec{s}_1 + t \cdot \vec{s}_2$ eine Ebene (in Parameterform mit $\vec{s}_1, \vec{s}_2$ l.u.). Berechne $\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2$; setze P in die Koordinatenform $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = e$ ein und berechne so e .

94. (A, Abs 263/10.3.3) Seien $\vec{a}, \vec{b}$ dreidimensional, dann gilt: i) $\vec{a} \perp (\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$;
 ii) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}$ und $\vec{b}$ sind parallel (linear abhängig);
 iii) $|\vec{a} \times \vec{b}|$ = die Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.
 iv) Die Fläche eines Dreiecks A, B, C ist $\frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$.

95. (A, Ag 269/731) Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ dreidimensional, dann gilt: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ ist das (orientierte) Volumen, des von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten Spates (räumliches Parallelogramm). Dabei ist $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} > 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden ein Rechtssystem; $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind linear abhängig.

Das Volumen V einer Pyramide mit Spitze S und

parallelogrammförmiger Grundfläche A, B, C, D ist: $V = \frac{1}{3} |(\vec{AB} \times \vec{AC}) \circ \vec{AS}|$.

dreieckiger Grundfläche A, B, C , ist: $V = \frac{1}{6} |(\vec{AB} \times \vec{AC}) \circ \vec{AS}|$.

96. In den Formeln 96-98 sind $g_i : \vec{OX} = \vec{OP}_i + t \cdot \vec{r}_i$ (Geraden) und $E_i : (\vec{OX} - \vec{OQ}_i) \circ \vec{n}_i = 0$

(Ebenen). $\sphericalangle(g_1, g_2) = \arccos \left(\left| \frac{\vec{r}_1 \circ \vec{r}_2}{|\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2|} \right| \right)$, $\sphericalangle(E_1, E_2) = \arccos \left(\left| \frac{\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \right| \right)$,

(A-Z, Ag 272/741) $\sphericalangle(E_1, g_1) = \arcsin \left(\left| \frac{\vec{n}_1 \circ \vec{r}_1}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{r}_1|} \right| \right)$. aber $\sphericalangle(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \arccos \left(\frac{\vec{v}_1 \circ \vec{v}_2}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|} \right)$.

$g \perp E \Leftrightarrow \vec{r} \parallel \vec{n}$; $g \parallel E \Leftrightarrow \vec{r} \perp \vec{n}$; $E_1 \parallel E_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$; $E_1 \perp E_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$.

97. (A, Ag 273/749) Sei $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = e$ eine Ebene, dann ist deren Abstandsform (HNF):

$d = \left| \frac{n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 - e}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \right|$ oder $d_{\text{orient}} = \frac{n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 - e}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$ (Orientierung in Richtung von $\vec{n}$).

98. (W, Ag 274/751) Der Abstand windschiefer Geraden ist $d = \left| (\vec{OP}_2 - \vec{OP}_1) \circ \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|} \right|$.

1.1.7 Formeln des Themenfriedhofs, die früher auswendig zu lernen waren

99. (Kl. 9, Ag 233/577) Sei A, B, C ein rechtwinkliges Dreieck, $q = c_a$ und $p = c_b$ die Hypotenusenabschnitte, dann gilt: $h^2 = p \cdot q$ Höhensatz $a^2 = c \cdot p$, $b^2 = c \cdot q$ Kathetensätze.

100. (Kl. 9, Abs 242/9.4.5) Sei A, B, C ein allgemeines Dreieck, R dessen Umkreisradius, dann gilt

$$\text{Sinussatz: } \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2R \quad \text{Kosinussatz: } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

Damit ist der Kosinussatz eine Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras.

101. (Kl. 9+10, Ag 108/276) Die Additionstheoreme lauten:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta) \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

102. (Kl. 9+10, Ag 331/823 + 55/148) Geometrische Summe: $1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Für $|q| < 1$ geht $q^{n+1} \rightarrow 0$: Damit gilt: $1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1-q}$ (geometrische Reihe).

3. binomische Formel: $(a-b) \cdot (a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + a^{n-3}b^3 + \dots + ab^{n-1} + b^n) = a^{n+1} - b^{n+1}$.

103. (Kl. 10, Ag 106/272 + 107/274) Formel der allgemeinen Symmetrie:

K_f ist achsensymmetrisch + zur Achse $x = a \Leftrightarrow f(a-t) = f(a+t)$;

K_f ist punktsymmetrisch zum Punkt $(a; b) \Leftrightarrow f(a-t) + f(a+t) = 2b$; (t hebt sich weg).

104. (Kl. 8+11, Ag 21/9 + 259/689) $\det \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \hat{=} \text{der (orientierten) Fläche des von } \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ aufgespannten Parallelogramms.}$

105. (A, Abs 199/8.2) Ein exponentielles Wachstum wird durch die Funktion $f(x) = y = c \cdot e^{kx}$ beschrieben. Es genügt der Dgl $y' = k \cdot y$. Ein beschränktes Wachstum (mit Schranke S) wird durch die Funktion $y = S - c \cdot e^{-kx}$ beschrieben. Es genügt der Dgl $y' = k \cdot S - k \cdot y \Leftrightarrow y' = k \cdot (S - y)$.

1.1.8 Formeln von M_+ oder aus HM

106. (A $\rightarrow$ 3.1.2, S. 46) Komplexe Zahlen: **Die vierte Binomische Formel:** $(a+ib) \cdot (a-ib) = a^2 + b^2$; $|z| = |a+ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\tan(\varphi) = \frac{b}{a}$; **Eulerformel:** $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$; $e^{2\pi i} = e^{2k\pi i} = 1$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. **Moivreformel:** $z^n = r \cdot e^{i\varphi} \Leftrightarrow z = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}$ $k = 0..n-1$.

107. (A 198/8.1.1) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$; $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!}$; $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k}}{(2k)!}$;

$$\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}} \quad \text{für } |x| < 1 \text{ gilt: } \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k; \quad -\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k};$$

108. (A 184/502) Partielle Integration: Seien u, v, f, g diffbar, dann gilt: $\int u'v dx = uv - \int uv' dx$; Substitutionsregel der Integration: $\int f(g) \cdot dg = \int f(g(x)) \cdot g'(x) \cdot dx$ oder $dg = g'(x) \cdot dx$.

109. Sei $\underline{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine 2×2 Matrix mit $\det(\underline{A}) = ad - bc \neq 0$, dann gilt $\underline{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

110. ($\rightarrow$ 12.4, S. 347) Es werden n aus N Kugeln ohne Zurücklegen gezogen; M der N Kugeln sind Erfolge. Sei $\mathcal{X}$ die Anzahl der gezogenen Erfolge, dann ist $P(\mathcal{X} = k) = \binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k} : \binom{N}{n}$; $E = \frac{n \cdot M}{N}$.

111. (W) (366/13.3.2) Seien $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ Zufallsgrößen, $|\mathcal{X}| = n$, $P(\mathcal{X} = x_i) = p_i$, ($i = 1..n$), $a, b \in \mathbb{R}$,
 $\mu = E(\mathcal{X}) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$; Standardabweichung: $\sigma = \sigma(\mathcal{X}) = \sqrt{V(\mathcal{X})} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot p_i}$
 $E(\mathcal{X} + \mathcal{Y}) = E(\mathcal{X}) + E(\mathcal{Y})$, $E(a\mathcal{X} + b) = a \cdot E(\mathcal{X}) + b$, $V(\mathcal{X}) = E(\mathcal{X}^2) - (E(\mathcal{X}))^2$,
 $V(a\mathcal{X} + b) = a^2 \cdot V(\mathcal{X})$, $z = \Phi\left(\frac{x - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$, $\chi^2 = \sum \frac{(n \cdot o - n \cdot e)^2}{n \cdot e}$, $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \cdot \sqrt{n}$.

Falls $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ unabhängig sind, gilt $E(\mathcal{X} \cdot \mathcal{Y}) = E(\mathcal{X}) \cdot E(\mathcal{Y})$, $V(\mathcal{X} + \mathcal{Y}) = V(\mathcal{X}) + V(\mathcal{Y})$.

Eine **Stichprobenverteilung** $\bar{\mathcal{X}} = \frac{\mathcal{X}_1 + \dots + \mathcal{X}_n}{n}$ ($\mathcal{X}_i$ identisch verteilt mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ) ist näherungsweise $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ verteilt ($\sigma(\bar{\mathcal{X}}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$).

112. (A) (374/930) **Satz von Schwarz:** Sei $z = f(x, y)$ diffbar, dann gilt $\frac{d}{dx}(\frac{d}{dy}(f)) = \frac{d}{dy}(\frac{d}{dx}(f))$. Die Hessematrix ist symmetrisch.

113. (L) (375/932, 377/934 und 376/933) Sei $P_i(x_i; y_i)$ ($i = 1..n$) eine Punktwolke.

Die RGP optimierte Regressionsgerade berechnen wir mit folgendem LGS:

$$\begin{aligned} m \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \cdot \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \\ m \cdot \sum_{i=1}^n x_i + c \cdot n &= \sum_{i=1}^n y_i \end{aligned}$$

$$\text{Kovarianz: } \text{Cov}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{n};$$

$$\text{Korrelationskoeffizient } r_{x,y} := \frac{\text{Cov}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}{\sigma(\mathcal{X}) \cdot \sigma(\mathcal{Y})};$$

114. **Lambertsche W-Funktion:** $W(x)$ ist die UKF von xe^x ; $e^x + ax = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a} - W(\frac{e^{b/a}}{a})$ ($a, b > 0$).

115. **(Vorbereitung auf Wettbewerbe)** Wichtige Zahlen sind: $e \approx 2.718$, $\pi \approx 3.1416$, $\sqrt{2} \approx 1.414$, $\sqrt{3} \approx 1.732$, $\sqrt{5} \approx 2.236$, $\sqrt{10} \approx 3.162$, $\ln(2) \approx 0.693$, $\arcsin(0.6) \approx 36.87^\circ$, $\arcsin(0.8) \approx 53.13^\circ$. Ein n -Eck hat $\frac{n}{2}(n-3)$ Diagonalen. Wichtige Zahlenfolgen sind:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	natürliche Zahlen $\cup \{0\}$
$\sum_{i=1}^n$	0	1	3	6	10	15	21	28	Dreieckszahlen
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5040	Fakultäten
$\frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$	1	1	2	3	5	8	13	21	Fibonacci-Zahlen

1.1.9 Fehlercodes und Abkürzungen

Folgende Fehlercodes verwende ich in der Regel bei der Korrektur von Arbeiten.

Kürzel	Erklärung	Punktabzug
R, Vz, PvS, ug	Rechenfehler, Vorzeichen, Punkt vor Strich, ungenau	manchmal
$uv / ub / D / !$	unvollständig / unbrauchbar / Denkfehler / schlimmer Fehler	normal ja
Alg = Algorithmus; Arg = Argumentation; AS = Antwortsatz; EH = Einheit; Erg = Ergebnis; Int = Interpretation; MA = mathematischer Ansatz; Rg = Rechnung; Tg = Tangente sind Zusätze z.B. bei uv		
$Deshalb$	Deshalb bringe ich Ihnen es anders bei	ja
Ad, FS, S, SF, Sw	Ausdruck, Fachsprache, Schreibfehler, Schreibweise	nein
$Agtxt / f / uk$	Aufgabentext - in der Aufgabe steht etwas anderes / falsch / unklar	meistens
$folgenschwer$	auch <i>fatal</i> R oder SF mit problemändernden Folgen	ja
$\checkmark / (\checkmark)$	richtig / mit falschem Wert richtig weitergerechnet	nein
$PRWT$	die Produktregel (der Ableitung) gilt auch im Wahlteil	ja
$Algebra!$	die Algebra der Mittelstufe ist mangelhaft	normal ja
GTR	GTR Befehle sind (im Abitur) nicht zugelassen	nein
'I hope so'	hier wurde der Aufgabentext vom Schüler falsch (oder eben anders) interpretiert, was aber leider möglich war	nein
naja	falsche oder dürftige Ausdrucksweise, vermutlich richtig gedacht	nein
$wdh, kü, un$	Hinweise: wiederholen, kürzen, unnötig, $\ddot{U}$ = Übertrag (aktuelle Punktzahl)	

Die volle Punktzahl ohne Korrekturzeichen bedeutet meist, dass alles richtig ist.

Abkürzungen:	Abs = Abschnitt,	Ag = Aufgabe oft als Seite/Nummer,
as = achsensymmetrisch,	BAG = Basisaufgabe,	BD = Binnendifferenzierung,
ber = berechnen, best = bestimmen,	beschr = beschreiben,	BFS = Banachscher Fixpunktsatz,
$\overline{DHBW}$ = kein Stoff der DHBW	Dgl = Differenzialgleichung,	diffbar = differenzierbar,
ExAg = Extremwertaufgaben,	exp = exponentielles,	Fkt = Funktion,
GTR = grafischer Taschenrechner,	HA = Hausaufgabe,	HP = Hochpunkt,
HgV = hypergeometrische Vert.	ia = im allgemeinen,	idR = in der Regel,
ihlDglmkK = inhomogene lineare Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten,		
KA = Klassenarbeit,	KF = Koordinatenform,	kü = kürzen
LFZ = Linearfaktorzerlegung,	LGS = lineares Gleichungssystem,	l.a. (l.u.) linear(un)abhängig

LöVo = Lösungsvorschläge	mBdA (oBdA) = mit (ohne) Berücksichtigung der Anordnung	
mEn = meines Erachtens nach,	MNF = Mitternachtsformel,	mf = monoton fallend,
MK = Mathe Känguru	Ne = Nenner,	Nst = Nullstelle,
oZ = ohne Zurücklegen,	PFZ = Primfaktorzerlegung,	Pkt = Punkt,
PNF = Punktnormalenform,	PF = Parameterform	ps = punktsymmetrisch,
PSF = Punktsteigungsform,	sA = senkrechte Asymptote,	smw = streng monoton wachsend,
twwz = teilweise Wurzelziehen	SvN = Satz vom Nullprodukt,	SvP = Satz von Pythagoras,
TdV = Trennung der Variablen,	Tg = Tangente,	TP = Tiefpunkt,
trig = trigonometrische,	UE = Unterrichtseinheit,	UKF = Umkehrfunktion,
VdK = Variation der Konst.	Vert = Verteilung,	Vorber = Vorbereitung,
VZW = Vorzeichenwechsel,	wA = waagrechte Asymptote,	Wk = Wahrscheinlichkeit,
WP = Wendepunkt, $\angle$ = Widerspruch,	Wt = Wachstum,	Wth = Wahrscheinlichkeitstheorie
Zä = Zähler Zch = Zeichnung	ZPF = Zweipunkteformel	ZG = Zufallsgröße.

1.1.10 Die Vorbereitung zwischen den Schuljahren

Wie soll ich mich auf das nächste Schuljahr vorbereiten? Was soll ich in den Sommerferien wiederholen? Diese Fragen versuche ich in diesem Abschnitt zu beantworten. Zu einer guten Vorbereitung gehört auch die Wiederholung (Beherrschung) der bis zu diesem Zeitpunkt bekannten Formeln.

Vorbereitung auf Klasse 9: 20/2, 22/11, 31/51, 95/238f, 319/797, 25/28 und 34/65.

Klasse 10: 33/64, 86/214 ab f, 95/238f, 243/629, 333/833, später 89/219, 91/227 und 241/617.

Vorbereitung auf Klasse 11 (GK + LK) 106/271, 116/301, 143/351, 158/402, 258/687, 333/833, 346/863, danach 91/227, 139/338, 145/358, 147/366, 255/676, (255/677, 257/685), LK: 153/389.

Vorbereitung auf den SemKu bzw. auf HM2 für den Abs. 'Die Normalverteilung' 358/13.2 95/238, 110/285, 155/394, ((I*) 163/417, 184/502a), 320/798, nur SemKu: 323/809 + 346/863.

Klasse 12: 337/843, 333/833, 341/854, 345/12.3.11.

Vorbereitung auf das Ingenieurstudium

Sie möchten sich auf ein MINT Studium vorbereiten? Dann ist dieses Buch für Sie genau richtig. Aus dem Schulteil empfehle ich Ihnen besonders folgende Abschnitte:

Klasse 9: Ungleichungen (Abs: 2.2.7), Anwendungen des Umfangswinkelsatzes (Abs: 9.2.11 nur M+I), der Kosinussatz (Abs: 9.4.6), Kugeln (Abs: 9.6.4), Restklassenringe (Abs: 2.4.5, nur M+I);

Klasse 10: das komplette Wachstum (Abs: 4.2), Linearfaktorzerlegungen (Abs: 5.3.11), Symmetrie + Additionstheoreme (Abs: 5.4.3), trigonometrische Gleichungen (Abs: 5.4.6), der Monotoniesatz (Abs: 6.2.6, nur M+I; ja, diesen unterrichte ich in Klasse 10 (jetzt 11) tatsächlich!);

Klasse 11: Folgen (Abs: 4.3), implizites Differenzieren (Abs: 6.3.7, oder wie haben Sie bewiesen, dass $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$?), die komplette Integralrechnung (Abs: 7.1) - beachten Sie hierbei, dass die schweren Themen (184/502) kein Schulstoff mehr sind, Beweise mit Vektoren (Abs: 10.2.4, nur M+I);

Klasse 12 inkl. Vertiefungskurs: Komplexe Zahlen (Abs: 3.1), die Regel von de l'Hospital (Abs: 6.3.11), Taylor und Dgln (Abs: 8.1), das Spatprodukt (Abs: 10.4), die HNF (Abs: 10.5.5).

Falls Sie Mathe, Informatik oder Wirtschaft studieren möchten, sollten Sie auch die komplette Wahrscheinlichkeitstheorie Abs. 12.1 bis 13.2.2 wiederholen.

Vorber **HM1:** 124f, 127g, 129j, 351, 6.2.5, 414, 416, 426, 443, 687, 726, 732, 758, 767b, 771, 776f, 778g.

Vorber **HM2:** 499, 502 a,b,d, 507, 525g, 526gh, 527e, 530e, 532e, 533e, 818, 824, 833, 860f, 863, 869, 873.

Vorber **HM3:** 301, 876, 893, 901, 902e, 906, 916d, 919b, 13.3.4, 13.3.5, 931, 932, 933fk.

1.1.11 Der Versuch eines 1 NP Plans für LK oder BK (ohne Garantie)

Das Abi ist sicher, nur es besteht die Gefahr 0 NP im Mathe-LK-Abi zu schreiben? Dann ist dieser Abschnitt für Sie! Wenn Sie folgende Aufgaben (Themen) beherrschen sollte 1 NP (oder mehr) drin

sein. Grundsätzlich empfehle ich die Minimalanforderungen am Ende vieler Kapitel.

Analysis: 143/351; 170/441; 179/480; 179/481; 106/271; 116/301; 121/317_{LK}; 158/402; 184/499;

Geometrie: (241/616_{LK}); 258/687; 260/695; 267/726; 272/738_{LK}; 276/758; 282/773;

Wahrscheinlichkeit: 333/833_{LK}; 346/863; 357/893_{LK}; 364/908;

1.2 Der Themenfriedhof (GFS)

Dieser Abschnitt soll an die Themen erinnern, die zu meiner Zeit noch Schulstoff waren und inzwischen ersatzlos aus dem Lehrplan gestrichen wurden - (sie nennen es 'entrümpeln'). Ich vermisse Euch alle!

2020: Differenzialgleichungen, (gebrochenrationale)

2016: Folgen (+ Differenzialgleichungen), beschränktes Wachstum; rekursive Darstellungen; Heronverf.

2012: zweiseitiger Hypothesentest, schiefe Asymptoten (stetige Ergänzung) und Näherungskurven, LGS mit Parameter, rechnerischer Nachweis der linearen Abhängigkeit, die Sehnentrapezregel, Kepler-Fass-Regel (Simpsonregel), Polynomdivision, vollständige Induktion;

2011: ε, n_0 - Definition der Konvergenz, ε, δ -Definition der Stetigkeit, logistisches Wachstum;

2004: äußere nicht lineare Substitutionsregel der Integration, partielle Integration, lineare Optimierung, Kreisgleichungen, Kugelgleichungen, Additionstheoreme, Sinussatz, Kosinussatz, Boolesche Algebra, Schalteralgebra, Körper und Gruppentheorie auch zyklische Gruppen, Schubspiegelungen, Drehstreckungen inkl. Konstruktion eines Drehstreckenzentrums, Ellipsen inkl. Gärtnerkonstruktion und Krümmungskreisconstruction, affine Abbildungen, affine Koordinatensysteme, Eigenwerte und Eigenvektoren, Invariantes Rechtwinkelpaar, Nichtdiagonalisierbarkeit von Scherstreckungen, Hauptachsentransformation auch von Kegelschnitten, Konstruktionen bei Achsenaffinitäten, allgemeine Skalarprodukte, Die Cantorschen Diagonalverfahren, Die Russellsche Antinomie, Innere Substitution der Integration, Rotationskörper um die y -Achse, Diskussion von Wurzel und Betragsfunktionen, Aussagenlogik inkl. Isomorphie zur Mengenlehre, Zahlensysteme, Aufbau eines Zahlenbereiches mit den Peanoaxiomen, Satz von Bolzano-Weierstraß (Weierstraß'sches Halbierungsverfahren), geometrische Summe, geometrische und die harmonische Reihe, Potenzmengen, Mengenlehre, Determinante;

Bemerkung: 2012 war in BW der flächendeckende Übergang von G9 auf G8 und dieser sollte eigentlich keinen Stoff kosten. Die Einführung des LK 2019 brachte (eigentlich) keinen neuen Stoff.

1.3 Vorworte

1.3.1 Vorwort zur Version 7.0 (2019): mobile Mathe

Hurra Mathe gab es von V7 bis V7.4 (Probe V6.9) als online Version mobile Mathe und wurde von Pascal Köstler entwickelt (vielen Dank). Gezeigt werden Aufgabe, Lösung und zugehörige Videos. Jetzt kann Hurra Mathe überall hin mitgenommen werden und ist auch im Unterricht Tablet-fähig. Leider ist der Support für Mobile Mathe seit 2024 eingestellt worden; daher gibt es keine neuen Versionen.

1.3.2 Vorwort zur Version 6.7 (2016): Die Mathematik ist ein Rosamunde-Pilcher-Film

Welche Filme schauen Sie am liebsten? Einen, bei dem am Ende der Held nicht seine Angebetete bekommt, gar stirbt und die Welt in Schutt und Asche liegt? Nein! Deshalb braucht auch jede Mathematikaufgabe ein Happy End. Mein neues Ziel ist es, dass bei allen Aufgaben 'schöne' Ergebnisse (was auch immer das sein mag) herauskommen, auch wenn das mit der Realität nur selten etwas zu tun hat. Es ist wichtig dem Schüler ein gutes Gefühl zu vermitteln. Die Beschreibung der Wirklichkeit ist nicht unsere Aufgabe, sondern die der anwendenden Wissenschaften. Der Mathematik-Unterricht ist wie ein Rosamunde-Pilcher Film: Die Probleme scheinen anfangs unlösbar, am Ende werden alle (manchmal noch mehr) gelöst, und nie geglaubte Verwandtschaften treten zu Tage. Bei Winkelaufgaben (und bei Ag mit $(\overline{RP})$) kann dies leider kaum gelingen, deshalb sind diese von diesem Umbau ausgenommen.

In unserem Beispiel wäre $H(P, 5) = \text{false}$ und $H(P, 3) = \text{true}$.

Betrachten wir wieder ein stark vereinfachtes Programmstück:

```
procedure Y(A:program);
begin
  if H(A,A) then while true do skip
                else skip;
end;
```

Das Programm Y hält bei Eingabe von A genau dann, wenn $A(A)$ nicht hält. Es stellt sich die Frage, ob $Y(Y)$ hält oder nicht:

1.Fall: $Y(Y)$ hält, dies bedeutet $H(Y, Y) = \text{true}$, dass heißt $Y(Y)$ bleibt beim Durchlauf in der Endlosschleife hängen, hält also nicht an. Dies ist ein Widerspruch.

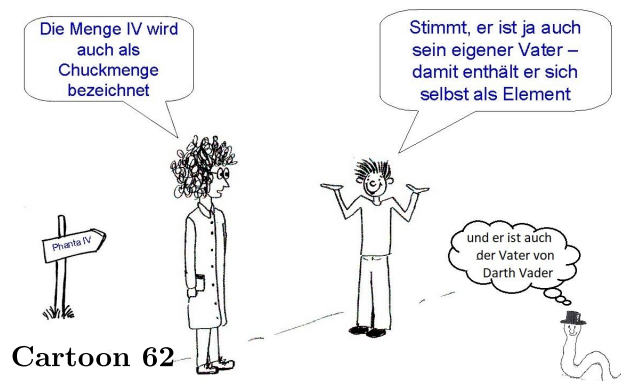
2.Fall: $Y(Y)$ hält nicht, dies bedeutet $H(Y, Y) = \text{false}$, dass heißt $Y(Y)$ bleibt beim Durchlauf nicht in der Endlosschleife hängen, hält also an. Dies ist wiederum ein Widerspruch.

Die Lösung dieses Problems ist, dass es keine Prozedur H geben kann, das Halteproblem ist also unlösbar. Es gibt noch weitere unlösbare Probleme, wie z. B. das Totalitätsproblem. Mehr zu diesen Themen finden Sie in der theoretischen Informatik.

Nachwort

Hurra Mathematik ist kein statisches Werk. Sie halten nur eine Momentaufnahme in den Händen. Einige Lösungen zu den Aufgabenkapiteln und aktuelle Informationen finden Sie auf meiner Webseite: Sd.SLT.biz :-). Leider fehlt weiterhin das Ende von Kapitel 14 (weil ich mich nicht zur Veröffentlichung traue).

EVP: 21 € printed in Backnang



Cartoon 62

14 Anekdoten

14.1 Erziehungs- und Bildungsauftrag

14.1.1 Gleichwertige Feststellung von Schülerleistungen (oder ganze Familie schafft)

Ich freue mich über Ihr Interesse an einer GFS im Fach Mathematik. Besonders empfehlenswert ist eine GFS für Schüler, die auf der Kippe stehen, oder die in Mathematik zu kämpfen haben. Voraussetzung für eine GFS ist, dass alle Klassenarbeiten mitgeschrieben (oder nachgeschrieben) wurden.

1) Ich nehme nur GFS in Form einer Unterrichtsstunde (45') entgegen. Wenn die Zeugnisnote 'ausreichend' angestrebt wird, ohne dass eine Klassenarbeit mit 'ausreichend' oder besser erreicht wurde, gehört zur GFS auch eine mündliche Prüfung, die zu 50% in die Gesamtnote einfließt. Eine schriftliche Ausarbeitung muss nicht gemacht werden. Bitte schieben Sie die GFS nicht zu sehr nach hinten.

2) Das Thema der GFS muss folgenden Kriterien genügen:

- a) Ich muss es verstehen (+ die Klasse muss es verstehen können).
- b) Es darf noch nicht im Unterricht behandelt worden sein.
- c) Es muss (genügend) mathematischen Gehalt haben.

Somit sind 'Geschichte der Mathematik' oder Wiederholungen normalerweise nicht GFS-fähig. Die GFS sollte (mindestens) ein eigenes Beispiel (also nicht aus meinem Buch) enthalten.

3) Im Allgemeinen hat jede GFS zwei Vortreffen und (wenn gewünscht) ein Nachtreffen: Beim ersten Vortreffen sollten Sie sich ins Thema eingearbeitet haben und eine Unterrichtsstunde im Großen und Ganzen geplant haben. Das Vortreffen sollte spätestens 1 Woche vor dem GFS-Termin stattfinden.

Beim zweiten Vortreffen sollten Sie meine Änderungswünsche eingearbeitet haben. Bitte halten Sie sich an vereinbarte Termine - Termintreue wird mit bewertet.

Der größte Feind der Qualität ist die Eile



- 4) Eine Unterrichtsstunde besteht in der Regel aus (vielen Dank an Frau Straub)
- a) einer Problemdarstellung (wichtig: Wecken Sie ein Problembewusstsein beim Schüler) (≈ 5 min),
 - b) einer Problemlösung am Beispiel (oft wird Teil a gelöst) (≈ 10 min),
 - c) einer Verallgemeinerung (≈ 5 min),
 - d) einer Formulierung als Satz (mit Voraussetzung) - arbeiten Sie dies als **Höhepunkt** heraus ($\approx 5'$),
 - e) dem Beweis (dieser kann auch in der Herleitung b), c) stecken) (≈ 10 min),
 - f) Beispiele und Übungsaufgaben; eine Aufgabe dauert ca 5 Minuten, (≈ 10 min).

Bemerkung für Referendare: Der vorgestellte Unterrichtsaufbau ist nur als Richtlinie zu sehen. Beachten Sie, dass Sie kurze Zeit für Hausaufgaben einplanen. Überhaupt ist ein guter Unterricht das Ergebnis eines guten **Zeitmanagements**. Es ist wichtig, dass Sie lernen Ihren eigenen Stil zu finden und zu unterrichten und bleiben Sie sich treu, sonst enden Sie als schlechte Kopie. Wenn Sie bei mir hospitieren, machen Sie bitte ein Stundenprotokoll und planen Sie danach Zeit für Fragen + Kritik ein.

5) Die GFS sollte frei (und nicht abgelesen) gehalten werden. Bitte schreiben Sie Wichtiges wie Definitionen und Sätze an und sagen Sie diese nicht nur. Verwenden Sie gerne auch Folien, vor allem an Stellen, an welchen Sie unsicher sind; aber: Sagen Sie etwas dazu und legen Sie die Folie nicht nur auf. Wichtige Teile (oft 4 e) sollten von Ihnen im Unterricht vorgerechnet werden. Es ist kein guter Stil, Folien aufzulegen und 'abschreiben' zu sagen (und sonst nichts); auch angeschriebene Lösungen sollten erklärt und nicht nur reproduziert werden.

6) Sprechen Sie wenn möglich zum Publikum nicht zu schnell und nicht zu leise und schreiben Sie Arbeitsaufträge an. Und reden Sie nicht, wenn andere reden (Ruhe einfordern). Vergewissern Sie sich (eventuell durch Rückfragen), ob etwas beim Zuhörer angekommen ist. Stellen Sie gegebenenfalls Querverweise her. Sollten Sie mein Buch verwenden (oder der Klasse Fragen stellen) sollten Sie die Antwort nicht gleich nach der Fragestellung geben, sondern der Klasse erst Zeit zur Besinnung geben. Bauen Sie etwas 'Spannung' auf und geben Sie die Ergebnisse nicht sofort preis ('überlegt euch, wie das geht'), die Zuhörer sollen die Möglichkeit haben, selbst auf das Ergebnis zu kommen (siehe entdeckendes Lernen). Bitte geben Sie bei Übungsaufgaben nicht nur das Ergebnis, sondern auch noch dessen Rechenweg an.

7) Machen Sie in jedem Falle **Probenvorträge** - am besten mit interessiertem Publikum. Fragend entwickelnder Unterricht ist erwünscht (aber nicht notwendig). Achten Sie auch auf angemessene Zeit bei den Arbeitsphasen; vor allem gegen Ende sollten diese nicht zu lang sein.

8) Wichtig: Stellen Sie Kontakt zu den Schülern her. Der Klassenprimus ist ein guter Indikator dafür, ob überhaupt etwas angekommen ist. Sie dürfen (und sollen) gerne durch das Klassenzimmer gehen. Vermeiden Sie lange 'Privatgespräche'; entscheiden Sie, ob eine persönliche Frage individuellen oder allgemeinen Charakter hat und bringen Sie die Frage gegebenenfalls ins Plenum. Bereiten Sie genügend Übungsaufgaben (eventuell auf Folie) vor.

Zum **Outfit** nur soviel: Es sollte evtl. ein Bisschen besser als normal sein. Bitte tragen Sie keine Kleidung mit fragwürdigem Aufdruck (z.B. Totenkopf) (und bei mündlichen Prüfungen keine Turnschuhe).

14.1.2 Leitfaden für mündliche Prüfungen (im Abitur)

(Thx J. Schölkopf + L. Bonfert, 2016) Bei einer mündlichen Prüfung (mP) gibt es 4 Beteiligte: **1)** der Prüfling (= Sie), **2)** der Prüfer (= Sd), **3)** der Protokollant (= ?/Mz) und **4)** der Vorsitzende (das ist hier in der Probeprüfung der ganze Rest der Klasse). Als Protokollant notieren Sie die Fragen von Sd und dessen Bemerkungen; NICHT die Antworten des Prüflings.



Ein Merz und eine Seele

Die mP in Mathe besteht aus einem 10' Präsentationsteil und einem 10' Prüfungsteil. Beim Präsentationsteil erhalten Sie eine Aufgabe (oft mit einer Schar), die Sie 20' vorbereiten. Diesen Vortrag halten Sie meistens mit Ihren Aufzeichnungen unter der Dokumentenkamera, nicht an der Tafel.

16. **a)** Was ist eine stetige Verteilung und wie nennt man 'nicht stetige Verteilungen'? [$P(\mathcal{X} = k) = 0$, diskrete V] **b)** Was ist eine Verteilungsfunktion, was ist deren Dichte? [$F(x) = P(\mathcal{X} \leq x)$, $f(x) = F'(x)$] **c)** Was ist eine Normalverteilung? [$f(x) = \varphi_{\mu,\sigma}(x)$] **d)** Eigenschaften von $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$? [$\varphi(x) > 0$, $H(\mu|\frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma})$, $W_{1,2}(\mu \pm \sigma|\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}})$, as zu $x = \mu$, wA $y = 0$, $ID = \mathbf{R}$, $IW =]0, y_h]$]

14.1.3 Lesen eines Aufgabentextes (Thx an Dr. Tanja Schmid)

Wie lese ich einen Agtext richtig? Lesekompetenz ist ein schwieriges Thema und sicher nur individuell lösbar. Trotzdem möchte ich versuchen hier ein paar Hinweise zu geben. Vgl auch 389/14.1.4 (2).

- 1) Wie lautet das Thema und welche wichtigen Formeln oder Definitionen gehören dazu?
- 2) Text überfliegen um Merkmale wie wichtige Textteile zu erkennen: Erste vorläufige Thesen über den Textinhalt formulieren. Vorhersagen über den Text treffen und kontinuierlich evaluieren.
- 3) Schlüsselsätze herausschreiben; Signalworte unterstreichen.
- 4) Was wird von mir verlangt? Geben Sie die Inhalte in eigenen Worten wieder. Gibt es ähnliche Ag?
- 5) Text selektiv und mehrfach lesen; trotz Verstehensschwierigkeiten weiterlesen.
- 6) Inhalte gezielt bildlich vorstellen; gedanklich (oder physisch) ausführen, was der Text rät.
- 7) Fehlende Information vorwissensbasiert auffüllen.
- 8) Gezielt nach Informationen mit Neuigkeitswert suchen.
- 9) Diesen Plan an vielen Klassenarbeitsaufgaben durchspielen.

14.1.4 Mein pädagogisches Handbuch

Wer das folgende Kapitel nicht mit dem nötigen Augenzwinkern lesen kann, sollte sich umso genauer über seinen Inhalt Gedanken machen. Frei nach Mr. Spock gilt: Die einfache Pädagogik ist oft die beste.

1. Mathe macht glücklich – deshalb entsteht bei einem Schüler der Mathe macht ein zufriedenes Lächeln (und nicht ein Lachen). Nichtlächelnde Schüler machen demzufolge nicht mit.
2. **a)** Goethe sagt: 'Im Anfang war die Tat' oder in der Mathematik gilt: 'Erst tun, dann denken'. Einige Schüler sind davon überzeugt, dass das ausschließliche Bestarren eines weißen Blattes Papier lösungsförderlich ist. *Sie* nennen es 'Denken' – ich nenne es aber 'Warten' und das problemlösende Warten werde ich nicht als Lösungsansatz. Stattdessen kann nach dem Lesen ($\rightarrow$ Abs. 14.1.3) eines Aufgabentextes meistens folgendes getan werden:
 - 1) Finden von Signalwörtern (unterstreichen im Text)
 - 2) Auffinden von Formeln oder Ideen, die mit den Signalwörtern unmittelbar in Zusammenhang stehen.
 - 3) Erstellen einer Zeichnung (Wth: Baum) oder einer Wertetabelle.
 - 4) Die meisten Probleme können mit der Technik 'Einsetzen und Ausrechnen' gelöst werden. Kann man etwas irgendwo einsetzen?
 - 5) Klammern (nicht im Nenner) auflösen und manchmal anders wieder ausklammern.
- b)** Dabei steht die Tat über der Richtigkeit. Im Unterricht gibt es in der Regel fünf Kritiken (die Prozent-Zahl stellt eine interne Bewertung dar):

- | | | |
|-----------------------------|-------------|---|
| 1) 'da steht etwas anderes' | 0% | der Schüler beschäftigt sich nicht mit Mathematik |
| 2) 'da steht noch nichts' | 10% | es wird zu langsam gearbeitet oder zuviel gewartet |
| 3) 'falsch' | 50% bis 90% | hier kann ein wesentlicher oder ein kleiner Fehler vorliegen, 'falsch' ist also durchaus als Lob zu verstehen |
| 4) 'fast richtig' | 90% | eine Kleinigkeit fehlt noch |
| 5) 'richtig' | 100% | so soll es sein |
- Erfolg ist selten das Ergebnis des ersten Versuchs



Cartoon 63



16 Abiturvorbereitung

Inhaltsverzeichnis:

16.1	Operatoren aus dem Bildungsplan 2016	1015
16.3	Das WTR Curriculum von Herrn Bittermann	1021
16.4	Inhaltsbezogene Kompetenzen für das Abitur des LK	1023
16.5	Die Abituraufgaben der letzten drei Jahre	1024
16.7	Stochastik-Abiturteile vor 2019 komplett auf Niveau Klasse 10	1053
16.8	Die mündliche Prüfung des Basiskurses (GK)	1055
16.9	Wegen Platzmangels aussortierte Abiture uä	1063
16.10	Musteraufgaben für das Abitur 2021+23	1069
16.11	Aufgaben aus dem IQB-Pool (Aufgaben: IQB21.slt.biz)	1105
16.11.7	Funktionen aus dem Analysisteil des Leistungskurses	1121
16.11.8	Aufgaben aus dem Mathe Känguru ohne WTR	1121

Die LoeVo aus Kap 16 finden Sie unter <http://www.slt.biz/Unterricht/Kapitel16.htm>

Zwar darf ich mit Ihnen keine Absprachen treffen, aber von der Weitergabe meiner bisherigen Wahlen hat niemand etwas gesagt. Deshalb hier der Abschnitt 'Wie habe ich gewählt?'

2026: 2 2 2, 2025: 1 1 2, 2024: 1 2 2, 2023: 1 1 2 2, 2022: 2 1 2 1, 2021: 2 2 2 2, 2020: 1 1 1, '19: 2 1 1, '18: 1 2 2, '17: 1 1 1, '16: 2 1, '15: 2 1, '14: 1 2, '13: 1 2, '12: 3 2, '11: 3 2, '10: 3 1.

16.1 Operatoren aus dem Bildungsplan 2016

Die Bemerkungen in eckigen Klammern [] sind Zusätze von mir.

In den Standards für inhaltsbezogene Kompetenzen werden Operatoren (handlungsleitende Verben [Imperative]) verwendet. Standards legen fest, welche Anforderungen die Schülerinnen und Schüler in der Regel erfüllen. Zusammen mit der Zuordnung zu einem der drei Anforderungsbereiche (AFB) dienen Operatoren einer Präzisierung. Dies sichert das Erreichen des vorgesehenen Niveaus und die angemessene Interpretationen der Standards.

16.1.1 Beschreibung der drei Anforderungsbereiche

AFB I umfasst das Wiedergeben von Sachverhalten und Kenntnissen sowie das Anwenden und Beschreiben geübter Arbeitstechniken und Verfahren [Reproduktion: Aufgabenniveau 1 und teilweise 2].

AFB II umfasst das selbstständige Verarbeiten und Darstellen bekannter Sachverhalte in einem durch Übung bekannten Zusammenhang und das selbstständige Übertragen des Gelernten auf vergleichbare, neue Sachverhalte [Reproduktion und teilweise Transfer: Aufgabenniveau 2-3].

AFB III umfasst das Verarbeiten komplexer Sachverhalte mit selbstständiger Auswahl geeigneter Arbeitstechniken mit dem Ziel, zu selbstständigen Lösungen, Gestaltungen oder Deutungen, Folgerungen, Verallgemeinerungen, Begründungen und Wertungen zu gelangen und das eigene Vorgehen zu reflektieren [Transfer: Aufgabenniveau 3-5].

16.1.2 Zuordnung zu Anforderungsbereichen

Die Zuordnung eines Operators ist im Einzelfall auch vom Kontext von Aufgabenstellungen und ihrer unterrichtlichen Einordnung abhängig. Im Folgenden werden die Operatoren dem überwiegend in Betracht kommenden Anforderungsbereich zugeordnet. Verben der mathematischen Fachsprache Handlungsleitende Verben wie rechnen, multiplizieren, lösen, differenzieren, zeichnen, messen, erweitern, kürzen, umwandeln, vergrößern, abschätzen, schließen, konstruieren, Darstellungen wechseln oder ineinander überführen werden hier nicht beschrieben. Ihre Bedeutung ist fachsprachlich definiert, die Zuordnung zu einem Anforderungsbereich ist dem Kontext zu entnehmen.

Operatoren	Beschreibung	AFB
angeben, nennen	Ergebnisse numerisch oder verbal formulieren, ohne Darstellung des Lösungsweges und ohne Begründungen	I
anwenden, durchführen	nach bekannten Regeln oder Anweisungen von einer Aufgabenstellung zu einem definierten Ziel gelangen	II
auswerten	Daten, Einzelergebnisse oder sonstige Sachverhalte zu einer abschließenden, begründeten Gesamtaussage zusammenführen	II
begründen	eine Aussage, einen Sachverhalt durch Berechnungen, nach gültigen Schlussregeln, durch Herleitungen oder inhaltliche Argumentation verifizieren oder falsifizieren	III
berechnen	Ergebnisse von einem Ansatz oder einer Formel ausgehend durch Rechenoperationen gewinnen. Die Argumentation mit Hilfe einer Zeichnung genügt nicht. [Die Ergebnisse sind ausreichend vereinfachter Form anzugeben.]	I [-III]
beschreiben, formulieren	einen Sachverhalt oder ein Verfahren in vollständigen Sätzen unter Verwendung der Fachsprache mit eigenen Worten wiedergeben (hier sind auch Einschränkungen möglich: 'Beschreiben Sie in Stichworten') beziehungsweise in einer vorgeschriebenen Form darstellen (zum Beispiel: 'Beschreiben Sie als Term')	II
bestimmen, erschließen, erläutern	Lösungen, Lösungswege beziehungsweise Zusammenhänge auf der Basis von Vorkenntnissen oder Verfahren finden und darstellen. Die Argumentation mit Hilfe einer Zeichnung kann genügen.	II
beurteilen, bewerten	einen Sachverhalt nach fachwissenschaftlichen oder fachmethodischen Kriterien, persönlichem oder gesellschaftlichem Wertebezug begründet einschätzen und ein selbstständiges Urteil formulieren	III
beweisen, [zeigen]	Aussagen unter Verwendung von bekannten mathematischen Sätzen, logischen Schlüssen und Äquivalenzumformungen und unter Beachtung formaler Kriterien verifizieren	III
darstellen	mathematische Objekte in einer fachlich üblichen oder in einer vorgeschriebenen Form wiedergeben graphisch darstellen: Anfertigen einer zeichengenauen, graphischen Darstellung auf der Basis der genauen Wiedergabe wesentlicher Punkte beziehungsweise maßgetreues oder maßstäbliches zeichnerisches Darstellen eines Objekts	I
deuten, interpretieren	Sachverhalte, Phänomene, Strukturen oder Ergebnisse in eine andere mathematische Sichtweise umdeuten oder rückübersetzen auf das ursprüngliche Problem	II
entnehmen	aus vorgegebenen Darstellungen Daten zur Beantwortung von Fragen oder zur Weiterbearbeitung aufbereiten	II
erkennen	Muster ohne ausführliche Begründung feststellen beziehungsweise feststellen, dass in einer Situation bestimmte fachliche Definitionen zutreffen	I
erklären, erläutern	Sachverhalte auf der Grundlage von Vorkenntnissen so darlegen und veranschaulichen, dass sie verständlich werden	II
identifizieren	mathematische Objekte und die zugehörigen Fachbegriffe begründet miteinander verbinden	I
nutzen, umgehen mit, verwenden	Fachbegriffe, Regeln, mathematische Sätze, Zusammenhänge oder Verfahren auf einen anderen Sachverhalt beziehen	II
skizzieren	die wesentlichen Eigenschaften eines Objekts graphisch vereinfacht darstellen	II
überprüfen	durch Anwendung mathematischer Regeln oder Kenntnisse in einer ergebnisoffenen Situation einen vorgegebenen Sachverhalt verifizieren oder falsifizieren	III

untersuchen	Sachverhalte, Probleme, Fragestellungen nach bestimmten, fachlich üblichen beziehungsweise sinnvollen Kriterien zielorientiert erkunden. [Betrachten (berechnen) Sie alle möglichen Fälle]	II
vergleichen	Gemeinsamkeiten und Unterschiede herausarbeiten	II
zuordnen	einen begründeten Zusammenhang zwischen Objekten oder Darstellungen herstellen	II

16.1.3 Anforderungen an Schülerlösungen und deren Dokumentation

Von den Schülerinnen und Schülern wird eine saubere und nachvollziehbare Dokumentation erwartet, dazu gehören insbesondere:

- 1) durch Verbalisierung des Vorgehens und Ergebnissätze strukturierte Darstellung
- 2) angemessener sprachlicher Ausdruck, insbesondere korrekte Fachsprache
- 3) Definition neu eingeführter Bezeichnungen (insbesondere von Zufallsgrößen)
- 4) keine Angaben über Tastenfolgen von WTR-Eingaben

Wird in einer Aufgabenstellung ein 'exakter Wert' gefordert, dann ist damit ein mathematisch exakter Ausdruck (z.B. $\frac{6}{7}$, $\ln(2)$, $\frac{\sqrt{2}}{\pi}$,) gemeint, nicht eine gerundete Dezimalzahl.

16.2 Das Formeldokument

'Wer intelligent genug ist, das Formeldokument verwenden zu können, braucht es nicht'; *Sd.*

Im Abitur ist das Formeldokument (FD) nur für den Notfall gedacht. Normalerweise sollten Sie alle Formeln des Formeldokumentes sowieso auswendig beherrschen.

- (1) Die Darstellung des FD ist stark reduziert. Oft fehlen die Definition oder Einschränkung der Variablen:
 Bsp a: Im Dreieck gilt: $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$ ohne zu erklären, was g und h ist.
 Bsp b: $\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$; es fehlt: Seien $a, b, c > 0$, $a \neq 1$.
- (2) Manche Inhalte beginnen mit 'Folgende Aussagen sind äquivalent'. Dabei entspricht oft die erste Aussage der 'Begrifflichkeit' (Definition); die weiteren Aussagen entsprechen mathematischen Inhalten (Formeln oft in Prosa) dazu.
- (3) Die Notation ist teilweise neu (anders, gewöhnungsbedürftig). Unter anderem werden Variablen umbenannt. **Bsp:** $u^2 + v^2 = w^2$.
- (4) Mein Unterricht ist teilweise anders fokussiert: Im Unterricht verwenden wir die a, b, c -Formel; im FD steht die p, q -Formel (die Sie gerne auch verwenden dürfen).

Das vorliegende FD ist komprimiert und enthält Nummern und Verweise (FS = Formelsammlung (ab Seite 4); Ag = Aufgabe; Abs = Abschnitt). Zur Vorbereitung und in Klassenarbeiten müssen Sie das Original <http://FD.slt.biz> verwenden.

16.2.1 Grundlagen

1. **Ähnlichkeit zweier Dreiecke:** etwa FS 6/21, Ag 229/557.

Die folgenden Aussagen zu zwei Dreiecken sind äquivalent:

- (1) Die Dreiecke sind ähnlich.
- (2) Die Größen der Winkel des einen Dreiecks stimmen mit den Größen der Winkel des anderen Dreiecks überein.

(3) Die Verhältnisse der Seitenlängen des einen Dreiecks stimmen mit den Verhältnissen der Seitenlängen des anderen Dreiecks überein.

2. **Binomische Formeln:** FS 5/11; Ag 20/4.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \quad (a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2;$$

3. **Maße von Figuren:** FS 5/5, Ag 243/632.

Dreieck:
 $A = \frac{1}{2}g \cdot h;$

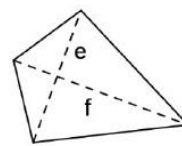
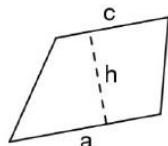
Parallelogramm:
 $A = g \cdot h;$

Trapez:
 $A = \frac{a+c}{2} \cdot h;$

Drachenviereck:
 $A = \frac{1}{2}e \cdot f;$

Kreis
 $A = \pi r^2; U = 2\pi r;$

Ein Parallelogramm mit vier gleich langen Seiten wird als Raute bezeichnet.



4. **Maße von Körpern:** FS 8/42, Abs 244/9.6.2;

Prisma:
 $V = A_G \cdot h;$

Pyramide:
 $V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h;$

Zylinder:
 $V = A_G \cdot h;$
für gerade Zylinder

Kegel
 $V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h;$

für gerade Kegel

$A_O = 2 \cdot A_G + 2\pi \cdot r \cdot h;$

$A_O = A_G + \pi \cdot r \cdot m;$

(m : Abstand der Spitze [des Kegels] vom Rand der Grundfläche)

5. **Potenzen und Logarithmen:** FS: 6/23, Abs 38/2.3.2 + FS 7/27, Abs 41/2.4.1.

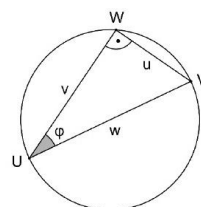
$$\begin{aligned} a^r \cdot b^r &= (a \cdot b)^r & a^r \cdot a^s &= a^{r+s}; & (a^r)^s &= a^{r \cdot s}; & a^{\frac{m}{n}} &= \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \\ \frac{a^r}{b^r} &= \left(\frac{a}{b}\right)^r; & \frac{a^r}{a^s} &= a^{r-s}; & a^{-r} &= \frac{1}{a^r}; \\ \log_a(b \cdot c) &= \log_a(b) + \log_a(c) & \log_a\left(\frac{b}{c}\right) &= \log_a(b) - \log_a(c) & \log_a(b^r) &= r \cdot \log_a(b) \end{aligned}$$

6. **Quadratische Gleichung:** FS: 6/19, Abs 32/2.2.6.

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \text{ und } x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \text{ sind die Lösungen der Gleichung } x^2 + px + q = 0.$$

7. **Rechtwinkliges Dreieck:** FS: 7/34, Ag 240/613.

$$\begin{aligned} (1) \sin(\varphi) &= \frac{u}{w}; \\ (2) \cos(\varphi) &= \frac{v}{w}; \\ (3) \tan(\varphi) &= \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \frac{u}{v}; \end{aligned}$$



8. **Satz des Pythagoras:** FS: 7/29, Ag 234/584.

Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, dann gilt für die Längen u und v der beiden Katheten und die Länge w der Hypotenuse $u^2 + v^2 = w^2$.

Wenn für die Längen u , v und w der Seiten eines Dreiecks $u^2 + v^2 = w^2$ gilt, dann hat dieses Dreieck einen rechten Winkel, der der Seite mit der Länge w gegenüber liegt.

9. **Satz des Thales:** FS: 5/13, Abs 227/9.1.8.

Wenn ein Dreieck beim Eckpunkt W einen rechten Winkel hat, dann liegt W auf dem Kreis, der den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite als Mittelpunkt hat und durch die beiden anderen Eckpunkte verläuft.

Wenn der Eckpunkt W eines Dreiecks auf dem Kreis liegt, der den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite als Mittelpunkt hat und durch die beiden anderen Eckpunkte verläuft, dann hat dieses Dreieck bei W einen rechten Winkel.

10. **Symbole in Verbindung mit Mengen:** FS: –, Ag 98/245 + Ag 313/12.1.

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}; & \mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R} | x > 0\}; & [a; b] = \{x \in \mathbf{R} | a \leq x \leq b\}; \\
\mathbf{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}; & \mathbf{R}_0^+ = \{x \in \mathbf{R} | x \geq 0\}; &]a; b[= \{x \in \mathbf{R} | a < x < b\}; \\
A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\} & A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\} & A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}
\end{array}$$

11. **Trigonometrie:** FS: 9/60, Abs 109/5.4.3.

$$\begin{array}{lll}
\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi); & \sin(\varphi - 90^\circ) = -\cos(\varphi); & \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1; \\
\cos(-\varphi) = \cos(\varphi); & \cos(\varphi - 90^\circ) = \sin(\varphi); &
\end{array}$$

12. **Winkelmaße:** FS: 9/59, Abs 108/5.4.2.

Beträgt die Größe eines Winkels im Gradmaß 360° , so beträgt sie im Bogenmaß 2π .

16.2.2 Analysis

13. **Ableitung:** FS: 9/54, Abs 136/6.1.3.

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

14. **Ableitungen ausgewählter Funktionen:**

FS: 9/56, Ag 137/327; FS: 10/63, Ag 114/293; FS: 11/73, Ag 159/405 + 163/422.

Term der Funktion	x^r	$\sin(x)$	$\cos(x)$	e^x	$\ln(x)$	$x \ln(x) - x$
Term der Ableitungsfunktion	$r \cdot x^{r-1}$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	e^x	$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$

15. **Ableitungsregeln:** FS: 9/57, Ag 137/329; FS: 11/76, Ag 161/411; FS: 11/77, Ag 162/415.

Term der Funktion	$k \cdot u(x)$	$u(x) + v(x)$	$u(x) \cdot v(x)$	$u(v(x))$
Term der Ableitungsfunktion	$k \cdot u'(x)$	$u'(x) + v'(x)$	$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$	$u'(v(x)) \cdot v'(x)$

16. **Ableitung von Integralfunktionen:** FS: 11/79, Ag 174/454.

Für $I(x) = \int_a^x f(t)dt$ gilt $I'(x) = f(x)$.

17. **Bestimmtes Integral:** FS: 11/80, Ag 175/455.

Ist F eine Stammfunktion von f , so gilt $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

18. **Grenzwerte:** FS: 11/75, Ag 161/409.

Ist $p(x)$ ein Polynom, so gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0$.

Ist $p(x)$ ein nicht konstantes Polynom, so gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{p(x)} = 0$.

Ist $p(x)$ ein Polynom ohne konstanten Summanden, so gilt $\lim_{x \rightarrow 0} p(x) \cdot \ln(x) = 0$.

19. **Rotationskörper:** FS: 11/83, Ag 181/487.

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

20. **Schneiden und Berühren zweier Funktionsgraphen:** FS: –, Ag 139/342

Die Graphen zweier Funktionen f und g schneiden sich in einem Punkt genau dann, wenn sie diesen Punkt gemeinsam haben.

Die Graphen zweier Funktionen f und g berühren sich in einem Punkt genau dann, wenn sie diesen Punkt gemeinsam und dort die gleiche Steigung haben.

21. **Zueinander senkrechte Geraden:** FS: 7/28, Ag 233/580.

Zwei Geraden mit den Steigungen m_1 und m_2 sind genau dann senkrecht zueinander, wenn $m_1 \cdot m_2 = -1$ gilt.

16.2.3 Analytische Geometrie / Lineare Algebra**22. Skalarprodukt:** FS: 11/85, Ag 252/664.

$$a \circ b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$a \circ b = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

$$\vec{a} \circ \vec{a} = |\vec{a}|^2.$$

23. Ebenen: FS: 12/91, Ag 262/704.

(i) Parameterform: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$

(ii) Koordinatenform: $n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + k = 0$

(iii) Normalenform: $\vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0$

16.2.4 Stochastik**24. Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit:**

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

FS: 8/39, Ag 327/817 + Ag 328/819.

Die folgenden Aussagen zu Ereignissen A und B sind äquivalent:(i) A und B sind stochastisch unabhängig.

(ii) $P_B(A) = P(A)$

(iii) $P_A(B) = P(B)$

25. Binomialkoeffizient: FS: 8/47, Abs 333/12.3.1.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

26. Zufallsgrößen: FS: 8/38, Ag 323/809; FS 9/51, Ag 343/856; FS: 12/90, Abs 361/13.2.2.(i) Für eine Zufallsgröße $\mathcal{X}$ mit den Werten $x_1, x_2, \dots, x_n$ gilt:

(a) Erwartungswert: $E(\mathcal{X}) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(\mathcal{X} = x_i)$

(b) Varianz: $Var(\mathcal{X}) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(\mathcal{X}))^2 \cdot P(\mathcal{X} = x_i)$

(c) Standardabweichung: $\sqrt{Var(\mathcal{X})}$

(ii) Für eine binomialverteilte Zufallsgröße $\mathcal{X}$ gilt:

(a) $P_p^n(\mathcal{X} = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

(b) Erwartungswert: $\mu = n \cdot p$

(c) Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

(iii) Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsgröße: $\varphi(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

27. Sigma-Regeln: FS: 12/90, Abs 361/13.2.2.Ist $\mathcal{X}$ eine normalverteilte Zufallsgröße, so gilt:

(i) $P(\mu - \sigma \leq \mathcal{X} \leq \mu + \sigma) \approx 68.3\%$

(ii) $P(\mu - 1.64\sigma \leq \mathcal{X} \leq \mu + 1.64\sigma) \approx 90.0\%$

(iii) $P(\mu - 1.96\sigma \leq \mathcal{X} \leq \mu + 1.96\sigma) \approx 95.0\%$

(iv) $P(\mu - 2\sigma \leq \mathcal{X} \leq \mu + 2\sigma) \approx 95.4\%$

(v) $P(\mu - 2.58\sigma \leq \mathcal{X} \leq \mu + 2.58\sigma) \approx 99.0\%$

(vi) $P(\mu - 3\sigma \leq \mathcal{X} \leq \mu + 3\sigma) \approx 99.7\%$

28. **Prognoseintervall und Konfidenzintervall (nicht abirelevant in BW):** FS: –, Abs –.

Für eine binomialverteilte Zufallsgröße gilt näherungsweise:

(i) Prognoseintervall: $\left[p - c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}; p + c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \right]$

(ii) Die Gleichung $|h - p| = c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$ liefert die beiden Grenzen eines Konfidenzintervalls für den Wert von p .

29. **Signifikanztest:** FS: –, Abs 450/14.22.5.

Wird die Nullhypothese irrtümlich abgelehnt, so bezeichnet man dies als Fehler erster Art. Das Signifikanzniveau ist der Wert, den die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art nicht überschreiten soll.

Wird die Nullhypothese irrtümlich nicht abgelehnt, so bezeichnet man dies als Fehler zweiter Art.

16.3 Auszug aus dem WTR Curriculum von Herrn Bittermann

16.3.1 Basisfunktionen bis Klasse 8

Tausender-Trennung ein-/ausschalten

Im Setup-Menü: **SHIFT** **MENU** **▼** **▼** **2**

1000er-Trennung?
1:Ein
2:Aus

--> Werte speichern

gespeicherte Werte abrufen und löschen.

Zahl 13 unter A speichern, Speicher anzeigen und löschen:

1 **3** **STO** **(-)** **=**

SHIFT **STO**

SHIFT **9** **2** **=** **AC**

13→A
13

A=13 B=0
C=0 D=0
E=0 F=0
M=0 X=0
Y=0

Zurücksetzen?
1:Setupdaten
2:Speicher
3:Alle initialis.

--> Setup-Einstellungen

Einstellung der Präferenzen Bruch oder Dezimalzahl als Ergebnis

SHIFT **MENU** **1**

Option 1: Ausgabe als Zahl in math. Schreibweise

Option 2: Ausgabe als Dezimalzahl

Option 3 und 4: Eingabe ohne math. Schreibweise – nicht zu empfehlen!

1:Math --> Math
2:Math --> Dezim.
3:Lin. --> Linear
4:Lin. --> Dezim.

--> Es kann immer zwischen den Anzeigen umgeschaltet werden mit der Taste **S/D**. (Schmid - Taste)

Einstellung des Bruchergebnisses als Bruch oder gemischte Zahl.

Empfehlung: als Bruch.

SHIFT **MENU** **▼** **1**

1:ab/c
2:d/c

16.3.2 Wertetabellen von Funktionen (ab Ag 84/206)

--> Im Setup-Menü kann man festlegen, ob die Wertetabelle für eine oder zwei Funktionen angezeigt wird. **SHIFT** **MENU** **▼** **4**

Eingabe der Wertetabelle:

MENU **6** **X** **X²** **=** **2** **X** **=**

Eingabe von Start- und Endwert incl. Schrittweite.

Man kann jetzt direkt in der Wertetabelle einzelne Argumente ändern (überschreiben). Es wird sofort der neue Funktionswert berechnet.

Mit der Taste **AC** kommt man zurück zur Eingabe der Funktionsgleichung.

Aus der Wertetabelle heraus kommt man mit **SHIFT** **OPTN** zur Anzeige des QR-Codes, den man z.B. mit einem Smartphone auslesen kann. Die Schaubilder werden angezeigt.

1:f(x)
2:f(x), g(x)

Tabellenbereich
Start:1
Ende:5
Ink:1

16.3.3 Berechnung von Binomialkoeffizienten (ab Ag 334/836)

--> Binomialkoeffizienten können direkt berechnet werden,

$\binom{10}{2}$ wird mit nCr im WTR eingegeben:

1 **0** **SHIFT** **÷** **2** **=**

10C2
45

16.3.4 Die Binomialverteilung (ab Ag 340/852)

--> Einstellung des richtigen Menü-Eintrages:

MENU **4**

Menüpunkt **4** führt zur Binomialverteilung, geht man ins Menü der nächsten Seite, kommt man zur kumulierten Binomialverteilung.

Zur Eingabe der Werte für k, n und p geht man zu Eintrag „2:Variable“.

Es können die Werte eingegeben werden. **=** führt wieder zurück zur Eingabe neuer Werte.

Will man eine Übersicht mehrerer Werte für k und/oder p, so geht man zu

„1:Liste“. Es können Werte für k eingegeben werden. **=** führt weiter zur Eingabe der Werte für n und p.

Es können die Werte für k auch direkt in der Tabelle geändert werden.

Geht man mit den Pfeiltasten auf das Ergebnis für P, kann man dieses auch z.B. unter A speichern:

▶ **STO** **(-)**

1:Normal-Dichte
2:Kumul. Normal-V
3:Inv. Normal-V
4:Binomial-Dichte

1:Kumul. Binom.-V
2:Poisson-Dichte
3:Kumul. Poisson-V

1:Liste
2:Variable

Binomial Dichte
5

Binomial Dichte
0,0264241152

16.3.5 Testen von Hypothesen (ab Ag 352/878)

Beispiel: Die Nullhypothese $H_0: p \geq 0,3$ soll mit einem Stichprobenumfang von $n = 200$ auf einem Signifikanzniveau von 5% getestet werden. Bestimmen Sie die Entscheidungsregel.

Hier liegt ein linksseitiger Test vor. X ist die Anzahl der Treffer der Stichprobe und im Extremfall binomialverteilt mit $n=200$ und $p=0,3$.

Es muss gelten: $P(X \leq k) < 0,05$. Gesucht ist der größte Wert für k, der diese Bedingung erfüllt.

Der Erwartungswert von X ist $E(X)=200 \cdot 0,3=60$, also muss k kleiner als 60 sein.

Die Wahrscheinlichkeiten sind noch zu hoch. Direkt in der Tabelle können

die Werte für k korrigiert werden. Bestätigung mit **=** führt zur Eingabe von

n und p. **=** auch hier berechnet die Werte neu.

Somit ist der Ablehnungsbereich der Nullhypothese von 0 bis 48, im Bereich von 49 bis 200 kann die Nullhypothese nicht abgelehnt werden.

Kumul. Binom.-V
49

Kumul. Binom.-V
47

16.3.6 Binomialverteilung: n bestimmen / Mimimi Aufgaben (ab Ag 345/861)

Beispiel: Wie oft muss man das Glücksrad mindestens drehen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über 99% mindestens einmal die Farbe Blau zu bekommen?

Wahrscheinlichkeit für Blau beträgt $\frac{1}{4}$.

Es ist zu berechnen:

$$P(X \geq 1) > 0,99 \Leftrightarrow P(X=0) < 0,01$$

P ist zu groß. Durch **=** Ändern des Wertes für n.

Für $n=17$ erhält man 0,0075

Binomial-Dichte
k : 0
n : 15
p : 0,25

P=
0,01336346101

P=
 $7,516946818 \times 10^{-3}$



Dieses Werk ist lizenziert unter einer CC BY NC SA 4.0 International Lizenz.

Winkeleinheit wechseln: Im Setup-Menü: **SHIFT** **MENU** **▼** **▼** **3**

1=Gradmaß 2=Bogenmaß

16.12.6 Vorwort für Eltern

Wolfgang Schmid

FSG Marbach

Liebe Eltern,

sd@slt.biz

ich freue mich ihr Kind in diesem Schuljahr im Fach Mathematik unterrichten zu dürfen und möchte Ihnen im Folgenden ein paar Informationen zu meinem Unterricht geben. Mathematik ist ein Kernfach und in hohem Maße versetzungsrelevant. Um in Mathematik eine gute Note zu bekommen, sollte ihr Kind sehr viel üben und Üben bedeutet nicht das Nachvollziehen einer vorhandenen Musterlösung. Zu jeder Mathestunde in der Schule sollte Ihr Kind 45 Minuten zu Hause Aufgaben rechnen; dies darf auch in Kleingruppen (oder unter Ihrer Aufsicht) geschehen. Zu diesem Zweck bekommt Ihr Kind am Anfang des Schuljahres einen Auszug meines Buches *Hurra Mathematik* mit vielen Übungsaufgaben und zugehörigen Ergebnissen / Lösungsvorschlägen. Bei wenig motivierten Schülern empfiehlt sich ein bis zwei regelmäßige Termine; dies darf auch unter Ihrer Aufsicht geschehen.

Meine Stoffverteilungspläne und mein Unterrichtsbuch finden Sie im Internet auf sd.slt.biz Auf dieser Seite finden Sie auch alte Manuskripte zum Nachlernen, Klassenarbeitstermine und andere nützliche Informationen. Der Username ist Schueler, das Passwort wird im Unterricht bekanntgegeben.

Im Unterricht wird der Unterrichtsstoff normalerweise anhand von zielführenden Fragestellungen erarbeitet (entdeckendes Lernen). *Hurra Mathematik* stellt (in den Überschriften) einen Bezug zu den eingeführten Lehrwerken her. Hausaufgabe sind grundsätzlich alle Aufgaben (aus *Hurra Mathematik*), die im Unterricht ausgelassen wurden. Die meisten Hausaufgaben sind verfilmt. Bei allen Übungsaufgaben (Türmchenaufgaben) gilt folgende Faustregel: Wer auf Note '1' steht, macht eine, wer auf Note '2' steht macht zwei usw. Der Schwierigkeitsgrad der Übungsaufgaben ist ansteigend, so wird Binnendifferenzierung gewährleistet. Grundsätzlich werden die Hausaufgaben im Unterricht nur auf Anfrage besprochen; die umrahmten Hausaufgaben werden (maximal) ein Mal pro Woche kontrolliert. Mein Unterrichtskonzept finden Sie auf den Seiten 2 bis 4 der ausgeteilten Formelsammlung.

Damit sich Ihr Kind regelmäßig mit Mathematik beschäftigt, schreibe ich jedes Halbjahr etwa 2 Klassenarbeiten und 1 bis 3 Tests (in der Regel angesagt). Bei schlechter Arbeitshaltung der Klasse behalte ich mir jedoch vor, die Tests nicht mehr anzusetzen. Jede Klassenarbeit zählt wie zwei Tests.

Hinzu kommt eine mündliche Note, die ich ebenfalls jeweils wie einen Test werte. Die mündliche Note kann durch Sonderleistungen (in der Regel Vorträge) aufgewertet werden. Sollte sich Ihr Kind dafür entscheiden, bei mir eine GFS zu machen, dann muss es bei mir eine Schulstunde zu einem noch nicht behandelten mathematischen Thema durchführen. Wenn die Zeugnisnote 'ausreichend' angestrebt wird, ohne dass eine Klassenarbeit mit 'ausreichend' oder besser erreicht wurde, gehört zur GFS auch eine mündliche Prüfung, die zu 50% in die Gesamtnote einfließt. Informationen zur GFS finden Sie auf meiner Internetseite oder in der Formelsammlung ab Seite 385.

Nach diesen vielen Informationen freue ich mich auf eine fruchtbare Zusammenarbeit, denn Mathematik macht Spaß.

Freundliche Grüße,

W. Schmid