

Abitur + Klassenarbeits- Vorbereitung (Sd)

Ihr Notendurchschnitt aus den Halbjahren 11₁, 11₂ und 12₁ bildet die sogenannte Anmeldenote, die eine Prognose für Ihr Abschneiden im Abitur ist. Deshalb wird (ab Klasse 11) jede Arbeit, die ich mit Ihnen schreibe, etwa Abiturniveau sowie einen Pflicht und einen Wahlteil haben. Zur Vorbereitung auf eine Klausur sollten Sie **dringend** alte Abituraufgaben rechnen. Aber

K e i n e P a n i k !

Abituraufgaben finden Sie z.B. hier! Die Lösungen finden Sie unter AbiErg.slt.biz.

Es folgen weitere 10 Gründe diese Abiturvorbereitung zu verwenden:

- 1) Sie beantwortet die Frage: **'Was sollte ich nach welcher Unterrichtseinheit können?'**;
- 2) Sie enthält das Formeldokument mit Verweisen
Den **Plan, 0 NP zu verhindern** finden Sie jetzt im Abschnitt 15/1.1.11
- 3) Zu den meisten Aufgaben gibt es Basisaufgaben (BAg) zur Vorübung
- 4) Sie enthält die Abituraufgaben + Musteraufgaben der letzten drei Jahre inklusive Schwierigkeitsgrad als Index
- 5) Mit Englisch-Mathe Vokabeln (für IFC + Studium)
- 6) Die Abivorbereitung ist gratis; Download unter Abitur.slt.biz
- 7) Mit einer Vorbereitung auf das mündliche Basiskurs-Abitur (Abs. 1046/16.9)
- 8) Nicht Basiskurs geeignete Aufgaben und Abschnitte sind in der Regel durch Index LK oder durch (Nur LK) gekennzeichnet
- 9) Sie enthält eine Operatorenliste, das WTR Curriculum und die inhaltsbezogenen Kompetenzen für den LK (mit Aufgaben-Verweisen)
- 10) Sie enthält auch eine komplette chronologische Formelsammlung der Klassen 8-12

Fast alle Aufgaben haben Indizes Beispiel c₂), die sich (normalerweise) auf den LK beziehen.

1+2 bedeutet Basisniveau (Bereich 'ausreichend'); 3+4=Könnerniveau (Bereich 'gut').

Ohne Gewähr: Für ≥ 5 NP sollten Sie im BK das Niveau 2; im LK das Niveau 2-3 beherrschen.

Die Seiten der Abivorbereitung sind: 1133, 1002-1046, 1104-1112, 387-390, 2-16

Alle Seiten der Abivorbereitung sind: 1133, 1002-1112, 387-390, 2-16

Wettbewerbe:

Mitte November: Informatik Biber, Kl 8-12;

Anfang Dezember: Mathe im Advent, Kl 8-10;

Ende Februar: Pangea, Kl 8-12;

September: Landeswettbewerb, Kl 9+10;

1. Dezember - März: Bundeswettbewerb, Kl 10-12;

Anfang Februar: Mathe ohne Grenzen, Kl 9+10;

3. Do im März: Mathe Känguru, Kl 8-12;

Die Filme finden Sie auf den Kanälen **'Mathe Schmid'** oder **'Schmid happens'**.

Mein Buch und auch die Lösungsvorschläge finden Sie auf meinem Internetauftritt: Sd.SLT.biz bei den jeweiligen Klassen. User Schueler, Pass erfragen Sie unter Sd@SLT.biz. Zugang für die online-Version von Hurra Mathe (Version 7.4) = Mobile Mathe: User: Jan@slt.biz Pass: vargerwen

Mehr Mathe gibt es in 1) Mathe AG, 2) Mathe Vertiefung, 3) Seminarkurs Statistik, 4) $M \cup M \in M$.

Alle meine Projekte finden Sie unter mathe.slt.biz.

12 ₄	10.5	Geometrie	Schnittwinkel und Abstände	275
$M+1$	3.1	Algebra	Komplexe Zahlen	51
$M+2$	6.3.11	Analysis	Die Regel von de l'Hospital	174
$M+3$	7.1.18	Integrale	Regeln der Integralrechnung	188
$M+4$	8.2	Dgln	Taylor und Differenzialgleichungen	203
M-AG ₁	4.4	Folgen	Vollständige Induktion ($M+0$)	68
M-AG ₂	4.5	divers	Vorbereitung auf Wettbewerbe	69
BA 3 ₁	13.2	Wth	Normalverteilung	361
BA 3 ₂	13.3	Wth	Statistik	366

1 Einleitung

Willkommen!

Mathematik macht Spaß + glücklich!

Mathematik steckt in mir (und Dir) und muss heraus.

Bedenke aber: Beglückender, als Mathematik zu machen, ist es, Mathematik zu lehren.

Zum Geleit: *Hurra Mathematik* besteht aus zwei Teilen: Einem Schulteil, der im Großen und Ganzen aus Aufgaben (oft notiert als Seite/Aufgabennummer) besteht und einem Hochschulteil welcher den Stoff noch einmal auf höherem Niveau wiedergibt. Der Unterrichtsteil zeigt meinen Unterricht der Klassen 8-12. Die erwarteten Schülerlösungen zu fast allen Aufgaben finden Sie auf meiner Internetseite sd.slt.biz. User: Schueler. Das Passwort kann bei mir erfragt werden. Bitte beachten Sie dabei die Version; die Aufgabennummern können sich laufend ändern. Sollte bei einer Aufgabe eine Längenmaßeinheit fehlen, so ist für diese *cm* zu wählen. Der Platz im Buch ist knapp, deshalb bitte ich die dichte Darstellung zu entschuldigen. Online finden Sie eine übersichtlichere Version (Thx Alice .. mit gleichen AgNr + anderen Seitenzahlen) und die Online-Version 'Mobile Mathe' mit Aufgaben, LöVo + Filmlinks: User Jan@slt.biz Handys sind im Unterricht und in der Vorlesung untersagt = die Handys grundsätzlich wegpacken.

Der Bezug zu den eingeführten Lehrwerken: Als ich mich wieder einmal über die Bücher der Mittelstufe beschwert habe, sagte mein Kollege Froberg: 'Wieso? Mit diesen Büchern können die Schüler sehr gut zu Hause lernen'. Es dauerte etwas, bis ich begriff, dass die Bücher zur Eigenarbeit gedacht sind und nicht (unbedingt) zum Unterrichten. Deshalb arbeiten wir in der Schule allein mit *Hurra Mathematik* und die Schüler sollen zu Hause den Unterrichtsstoff mit den Schulbüchern weiter vertiefen. Den Bezug zu den eingeführten Schulbüchern finden Sie am Anfang vieler Abschnitte:

Klasse 8,9:	Neue Wege 4,5, 2007	(=NW4, NW5),
Klasse 8,9,10:	Lambacher Schweizer 8,9,10, 2017	(=LS8 .. LS10),
Klasse 10:	Elemente der Mathematik 6, 2009	(=EM6),
oder Klasse 10:	Lambacher Schweizer 11, 1998	(=LS11),
Klassen 10-12:	Lambacher Schweizer Kursstufe, 'Jahr'	(=KS _{Jahr}),



Was macht Lewandowski den ganzen Tag? Und hat er das nötig?

Folgende Taschenrechner sind Basis der LöVo des Buches: GTR: Texas TI 83; **WTR:** Casio fx-87DEX

Binnendifferenzierung (BD): (thx Trl) BD bezeichnet die individuelle Förderung Einzelner innerhalb einer Lerngruppe. BD kann nur im offenen Unterricht wirkungsvoll praktiziert werden. Also ist es beim lehrerzentrierten Unterricht sinnvoll, diese in die Hausaufgaben zu verlegen. Deshalb finden Sie bei fast allen Aufgaben Indizes, Bsp: c₂). Die Nr. sagt etwas über deren Niveaustufe aus: 1+2=Basisniveau (bis Note 3-4; 6 NP), 3+4=Könnerniveau (bis Note 1-2, 12 NP), 5(+6)=Profiniiveau. Bitte beachten Sie dabei, dass für die Niveaustufe nicht nur relevant ist, *was* gefragt wird, sondern auch *wann* es gefragt wird. Die Minimalanforderungen sind immer auf Niveau 1-2. Sonder-niveau sind *a*=Algorithmus, *b*=Beispiel, *e*=Einführung, *L*=nur LK, *r*=Regel, und *w*=Wiederholung (Niveau *b* und *r* müssen als HA ins Regelheft (s.u.) übertragen werden). Eine Niveaunkretisierung bei Einführungsaufgaben ist schwierig, denn die Agstellungen sind eher leicht, es wird aber ein Transfer erwartet. Ag mit Index *Q* (Querrichtung) bauen teilweise aufeinander auf und sollen noch auf weitere Ergebnisse führen.

Das Regelheft: (thx Lor, Wg) Sie sollten ein Regelheft (als Hausheft) führen. Im Regelheft sollten alle wichtigen Formeln, sowie Regeln und Algorithmen des Unterrichtes kompakt, evtl. mit einem

Beispiel, notiert sein. Sollte eine Aufgabe (idR Lückentext) den Niveauindex r haben, so schreiben Sie die ausgefüllte Variante als Hausaufgabe in Ihr Regelheft ab. Eine Aufgabe mit Index 'b' sollte im Unterricht gerechnet werden; die Lösung dieser Aufgabe (eventuell mit Aufgabentext) gehört zu einer Regel und ist ebenfalls ins Regelheft zu übertragen. Außerdem sollten Sie in das Regelheft alle Formeln der Formelsammlung abschreiben, die während des Unterrichtes besprochen wurden. Im Gegensatz zum Regelheft ist das Schulheft ein Arbeitsheft und darf (soll) auch falsche Ansätze oder Durchgestrichenes enthalten. Hausaufgaben und Übungsaufgaben gehören ins Schulheft.

Hausaufgabe sind grundsätzlich alle im Unterricht ausgelassenen Aufgaben, bei welchen mindestens ein Teil markiert ist ($\boxed{f_2}$). Faustregel: Ein Schüler mit Note n sollte (mindestens) n Aufgaben (pro Unterrichtsstunde) als Hausaufgabe machen (auch wenn dies nicht kontrolliert wird). Der markierte Teil $\boxed{f_2}$ wird kontrolliert und muss von jedem Schüler als HA präsentabel vorbereitet werden. Damit hat (fast) jede Stunde Hausaufgaben. Ag mit $\textcircled{a}_2$ (auch (f) (U) oder Index 'f') sind gefilmt worden (Youtube Kanäle Mathe Schmid + Schmid happens). Während des Filmens ist die Mitarbeit freiwillig und es werden keine mündlichen Noten gemacht. Zu allen Aufgaben gibt es Lösungsvorschläge im Netz; diese sollten aber erst konsultiert werden, wenn Sie einige Zeit erfolglos versucht haben, die Aufgabe zu bearbeiten. Damit entfällt auch die Ausrede: 'Ich konnte die Hausaufgabe nicht machen, weil ich diese nicht verstanden habe'. Sollten Sie (trotz auswendig gelernter Formeln) einmal eine Ag (Ihres Niveaus) nicht herausbekommen, gehen Sie wie folgt vor:

- 1) Schreiben Sie die Lösungsvorschläge ab.
- 2) Mailen Sie an Sd@slt.biz die Aufgabe - ich versuche dann die LöVo zu ergänzen; (goto 1).
- 3) Erwirken Sie über den Kurssprecher im Unterricht eine Besprechung der Aufgabe (bis Niveau 3). Bitte melden Sie mathematische Fehler und auch Rechtschreibfehler sofort (per Mail).

Was wir zu Schülern sagen...



Cartoon 1

Im **Krankheitsfalle** streame ich gerne. Der versäumte Stoff soll unter anderem mit Hilfe der Filme und der Lösungen nachgearbeitet werden. Dazu gehören auch die Hausaufgaben. Im Falle des **Onlineunterrichts** beginnen wir zur gleichen Zeit wie beim Präsenzunterricht unter stream.slt.biz. Den Plan des Tages finden Sie dann unter 'Klasse'.slt.biz. Mein Onlinekonzept finden Sie unter ou.slt.biz. **Notentransparenz:** Im Regelfall schreibe ich pro Halbjahr 1 bis 3 Tests (diese zählen einfach → Heft) und 2 KA (diese zählen doppelt). Wer wiederholt bei einem Test oder einer KA oder bei der letzten KA fehlt, muss damit rechnen, diese (oder diesen) während der nächsten Unterrichtsstunde nachschreiben zu müssen. Die mündliche Leistung werte ich wie einen Test. Mit der letzten Arbeit jedes Halbjahres können Sie einen Papier-Streifen mit Ihren bisherigen Leistungen (ohne Gewähr!) erhalten. Das Erstellen dieses Streifen kann den Datenschutz leicht verletzen. Bitte melden Sie rechtzeitig, wenn Sie sich vor diesen Daten schützen wollen also keinen Streifen wünschen. Wenn Sie einen Streifen haben, können Sie sich in meiner Sprechstunde (nicht im Unterricht - zusammen mit Ihrer besten Freundin) zur erteilten Note äußern. Wenn alle KA/Tests mitgeschrieben wurden, kann die Note eventuell durch einen Vortrag bzw. GFS aufgewertet werden. Goto 391/3a+4a.

Zwillingsaufgaben (markiert durch einen Index Z) kommen verstärkt ab der Version 6.8 vor und sind Textaufgaben, die neben der eigentlichen Mathematik noch ein kleines Rätsel beinhalten. Gesucht ist meist eine Person (oft mit einem verfremdeten Namen oder anderem Geschlecht), eine Erzählung oder ein Ereignis; die Lösung wird im Unterricht nicht besprochen und kann in den LöVo auf Sd.SLT.biz nachgeschlagen werden. Aufgaben mit Index 'g' haben einen geschichtlichen Bezug. Goto 16/1.3.2

Is nich gibts nicht: Grundsätzlich findet jeder Unterricht (auch das Tutorium) statt, selbst wenn auf dem Vertretungsplan 'Entfall' steht. In der Regel werde ich dann von einem Schüler vertreten (SZU), der mit Ihnen Übungsaufgaben oder KA Besprechungen macht. Manchmal übernehme ich Stunden von Kollegen, die sonst entfallen würden. Dem, der das nicht so toll findet sei gesagt: 'Wer keine Lust auf Lernen hat, der gehe bitte arbeiten'.



Ein **Hauptfach** definiert sich u.a. dadurch, dass Sie zur Nacharbeit (zu Hause) etwa die Zeit benötigen, die Sie das Fach in der Schule haben (für Mathematik sind dies also etwa 4-5 Schulstunden). Dazu gehört das Rechnen der Hausaufgaben (das waren die im Unterricht ausgelassenen Aufgaben), das Auswendiglernen der Formeln und (als Abivorbereitung) das Rechnen alter Abituraufgaben. Optimalerweise tun Sie dies zu festen Zeiten in der Woche (Stundenplan; gleichverteilt, nicht blockweise) und in Gruppen (wenn Sie nicht zusammen arbeiten, beaufsichtigen Sie sich wenigstens gegenseitig).

1.1 Formelsammlung

Matheformeln auswendig lernen - ist in Mathe nicht viel mehr das Verständnis entscheidend? Man muss doch nicht wissen wie's geht sondern nur wissen wo's steht. **NEIN!** Entscheidend ist, dass man überhaupt weiß, wofür es eine Formel gibt und durch die Formeln Zusammenhänge erst klar werden. Wissen Sie, was die Formel $a^2 + b^2 = |a + ib|^2$ bedeutet? Nein? Aber Sie wissen, dass diese Formel von Formel 29 abstammt, und damit haben Sie schon einen Großteil verstanden. Und Formeln geben Ihnen die Sicherheit in einer Prüfung das Richtige zu tun. Übrigens: Bei einer Sprache verzichten Sie auch nicht aufs Vokabeln lernen, wenn Sie doch ein Wörterbuch haben ☺).

Bitte beachten Sie, dass sowohl die Formelsammlung als auch die Minimalanforderungen (am Ende jeder Unterrichtseinheit) nur als Basis für die weiteren Kapitel zu verstehen sind. Eine KA Vorbereitung sollte weit mehr beinhalten. Besonders relevant zur KA Vorbereitung (für den Reproduktionsteil) sind Aufgaben mit der Markierung (KA_X) ($X \in \{ \text{'T'ransfer, 'l'okal, 'B'asis, 'G'lobal, 'Z'entral} \}$; optional bis zur Markierung ($\overline{\text{KA}}$)). Und denken Sie immer dran: Wenn Sie in einer KA nur Falsches hinschreiben, gibt es 0 Punkte, wenn Sie aber nichts hinschreiben, werden es auch nicht mehr (falsch $\geq$ nichts).

Folgende Formeln sind unbedingt auswendig zu lernen; (W) bedeutet dabei 'wichtig'; (A) 'auswendig'; (Z) 'zentral'. Zentrale Formeln sind praktisch Voraussetzung für jede Unterrichtseinheit. Die Formelsammlung ist nicht unbedingt vollständig. Weitere Formeln dürfen gerne auch gelernt werden. Taucht im Aufgabentext der Hinweis (**Formel 1**) auf, so wird die Formel 1 an dieser Stelle eingeführt. Weitere Erwähnungen sind mit F1 gekennzeichnet. Vielen Dank an Familie Tressel und allen Formelsammlern für die Mithilfe.

1.1.1 Formelsammlung bis Klasse 7

Merkwürdig wenn Sie das Wort hören, denken Sie an sonderbar skurril - im eigentlichen Sinne bedeutet es aber es ist würdig, es sich zu merken. Wenn Sie Information mit einem durchaus merkwürdigen Bild kombinieren, so können Sie sich diese oft viel besser merken. Ziel ist es, jede Formel mit einem merkwürdigen erklärenden Bild zu versehen. Vorschläge sind willkommen (zB Formel 10).

- (A) Die ersten 20 Quadratzahlen sind: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400; $25^2 = 625$; Kubikzahlen: $2^3 = 8, 3^3 = 27, 4^3 = 64, 5^3 = 125$.
(A) Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl >1 , die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist. Die ersten acht Primzahlen sind 2,3,5,7,11,13,17,19.

- (A) Ein Term ist immer nach der Verknüpfung benannt, die als letztes ausgeführt wird.

- (Z) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, dann gilt das Kommutativgesetz $a+b = b+a$, $a \cdot b = b \cdot a$, das Assoziativgesetz $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ und das Distributivgesetz $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;

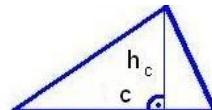
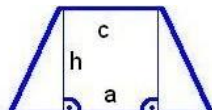
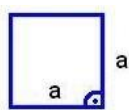
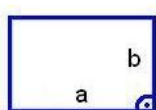


Abb. 1 Rechteck Quadrat

Kreis

Trapez

Dreieck

Parallelogramm

- (A, Ag 57/134) (Vermehrter / verminderter Grundwert) Ein Bestand wächst mit p Prozent pro Zeitschritt, dann gilt für den Wachstumsfaktor q : $q = 1 + \frac{p}{100}$.

5. FD 3: (A) Flächenberechnung von Dreiecken, Vierecken und Kreisen:

Kreis:	$A = \pi \cdot r^2$, $U = 2 \cdot \pi \cdot r$	
Quadrat:	$A = a^2$,	
Rechteck:	$A = a \cdot b$	Länge mal Breite,
Parallelogramm:	$A = g \cdot h$	Grundseite mal Höhe,
Dreieck:	$A = \frac{c \cdot h_c}{2}$	Grundseite mal Höhe durch zwei,
Trapez:	$A = \frac{a+c}{2} \cdot h$	mit $a \parallel c$ und Höhe h .

6. (W) Der Schwerpunkt S eines Dreiecks teilt die Schwerlinie im Verhältnis 2:1.
Die Winkelsumme im Dreieck ist $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.
7. (W) $a \cdot b = \text{ggT}(a, b) \cdot \text{kgV}(a, b) = \text{größter gemeinsamer Teiler} \cdot \text{kleinstes gemeinsames Vielfaches}$.
8. (W) 'Der kleine Gauß:' $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n^2+n}{2}$;
9. (Z) Die Steigung m einer Geraden durch $P(x_1; y_1)$ und $Q(x_2; y_2)$ mit $x_1 \neq x_2$ berechnen wir mit

$$\text{Zwei-Punkte-Formel (ZPF): } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Die Steigung m das merk' dir fix, ist delta yps durch delta x!

10. (Z) Die Gleichung einer Geraden mit der Steigung m durch $P(x_1; y_1)$ ist

$$\text{Punkt-Steigungs-Form (PSF): } y = m \cdot (x - x_1) + y_1.$$

Ein Sektglas [y] steht auf zwei Skiern [=] und fährt einen Berg hinauf. Oben steht Angela Merkel [m] mit einem roten Muttermal [·] am Bein. Sie öffnet eine Türe [()] und man sieht eine Straßenkreuzung [x]. Ein Speer [-] fliegt mitten in eine andere Kreuzung hinein und trifft dort eine Kerze [x₁]. Vom Luftzug wird die Türe wieder zugeschlagen [)]. Draußen findet eine Party statt auf der Spaten [+] tanzt. Alle Partygäste haben in der rechten Hand ein Sektglas und in der linken Hand eine Kerze [y₁].

Die x -Achse hat die Gleichungsdarstellung $y = 0$, die y -Achse: $x = 0$.

1.1.2 Formelsammlung Klasse 8

11. (Z, Ag 20/4, FD 2) **Binomische Formeln:** i) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; ii) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
iii) $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$; (W, Ag 20/5) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
12. (Z, Ag 21/10) Bei Äquivalenzumformungen sind die Multiplikation mit 0 sowie die Division durch 0 und durch x (Tipp: Ausklammern + F14) verboten.
13. (W, Abs 231/9.1.8, FD 9) **Satz des Thales:** Genau die Dreiecke in einem Halbkreis sind rechtwinklig. **Umfangswinkelsatz:** (auf dem Themenfriedhof) Jeder Umfangswinkel ist halb so groß wie der Mittelpunktswinkel. Also sind alle Umfangswinkel auf einer Seite gleich groß.
14. (Z, Ag 23/15) Satz vom Nullprodukt: Sei $a \cdot b = 0$, dann ist $a = 0$ oder $b = 0$.
15. (A, Ag 29/38) Sei $n \geq 0$, $\sqrt{n}$ ist diejenige positive Zahl, die quadriert $= n$ ergibt.
 $x^2 = n$ wird von $x = \pm\sqrt{n}$ gelöst. Damit ist $(\sqrt{n})^2 = n$ und für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sqrt{x^2} = |x|$.
(A, Ag 30/45) Seien $a, b \geq 0$, $n > 0$ dann gilt: i) $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$; ii) $\sqrt{\frac{a}{n}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{n}}$;
16. (W, Ag 91/214) Für den Scheitel $S(x_s; y_s)$ einer Parabel $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) gilt: $x_s = -\frac{b}{2a}$.
Die Scheitelform der Parabel ist: $y = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$.

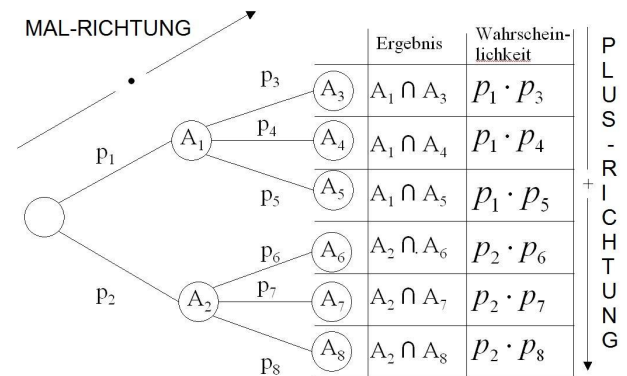
17. (A, Ag 319/788) Es werden k aus n Kugeln mit Berücksichtigung der Reihenfolge gezogen. Mit Zurücklegen ergeben sich n^k mögliche Ergebnisse, ohne Zurücklegen $\frac{n!}{(n-k)!}$. Die Anzahl der Permutationen von n Elemente ist $n!$.
18. (A, Ag 322/796) Gegeben sei ein mehrstufiges Zufallsexperiment mit zugehörigem Baum.

Die Pfadregel:

In einem mehrstufigen Zufallsexperiment erhält man die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses, indem man die Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades multipliziert: Die 'Malrichtung' ist von links nach rechts.

Der spezielle Additionssatz:

Die einzelnen Ergebnisse eines Ereignisses dürfen addiert werden: Die 'Plusrichtung' ist von oben nach unten.

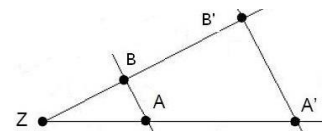
**Abb. 2** Pfadregel

19. (Z, Ag 32/57, FD 6) Mitternachtsformel: Seien $a \neq 0$, $D := b^2 - 4ac \geq 0$ (Diskriminante) dann

$$\text{gilt} \quad ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

(W, Ag 33/60) Wenn $D > 0$ ist, hat $ax^2 + bx + c = 0$ zwei (verschiedene) Lösungen, bei $D = 0$ hat sie (genau) eine Lösung und bei $D < 0$ hat sie keine Lösung.

20. (A, Ag 33/62) **Linearfaktorzerlegung:** Hat $p(x) = ax^2 + bx + c$ die Nullstellen x_1 und x_2 , dann ist $p(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$;
 (W, Ag 34/67) **Satz von Vieta:** $x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \Leftrightarrow p = -(x_1 + x_2), q = x_1 \cdot x_2$.
21. (A, Ag 233/559, FD 1) Der (zweite) Strahlensatz: Seien Z, A, B und Z, A', B' je auf einer Geraden (oder kollinear), $A'A \parallel B'B$, dann gilt: $k = \frac{ZA'}{ZA} = \frac{ZB'}{ZB} = \frac{A'B'}{AB}$. k ist dabei der Streckfaktor der zentrischen Streckung, die das ΔZAB auf das $\Delta ZA'B'$ abbildet.

**Abb. 3** Strahlensatzfig.

22. (W, Abs 233/9.2.4) Bei einer zentrischen Streckung mit Streckfaktor k wird aus einer Fläche mit dem Inhalt A eine Fläche mit dem Inhalt $k^2 \cdot A$ (aus einem Körper mit Volumen V ein Körper mit Volumen $k^3 \cdot V$).

1.1.3 Formelsammlung Klasse 9

23. (A, Abs 38/2.3.2, FD 5) Seien $a, b > 0$, $n, m \in \mathbb{R}$, dann gilt:
- | | | | |
|------|---|------|--|
| 1 PG | $a^n \cdot a^m = a^{n+m}; \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m};$ | 2 PG | $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n};$ |
| 3 PG | $(a^n)^m = a^{n \cdot m}; \quad (a^n)^m = (a^m)^n;$ | 4 PG | $a^{-n} = \frac{1}{a^n};$ |
| 5 PG | $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a};$ | 6 PG | $a^n \cdot b^m$ kann nicht zusammengefasst werden |
24. (A, Ag 39/94) Die Gleichung $x^n = a$ hat für ungerades n genau eine Lösung $x = \sqrt[n]{a}$; falls n gerade ist, so hat die Gleichung für $a < 0$ keine Lösung, für $a > 0$ gilt $x = \pm \sqrt[n]{a}$ und für $a = 0$ ist $x = 0$.
25. (W, Abs 228/9.1) Wenn zwei Dreiecke in
- (sss) allen drei Seiten
 - (sws) zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel
 - (wsw) einer Seite und den zwei anliegenden Winkeln
 - (Ssw) zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel
- übereinstimmen, dann sind sie kongruent (deckungsgleich).

Jede der oben angegebenen Kombinationen legt ein Dreieck in Form und Größe eindeutig fest (thx Cf).

26. (W, Abs 41/2.4.1) Seien $a, b > 0$, $a \neq 1$, dann gilt $a^x = b \Leftrightarrow x = \frac{\log b}{\log a} (= \frac{\ln b}{\ln a}) = \log_a(b)$.
 Insbesondere ist $\log(10^c) = c$ (für alle $c \in \mathbb{R}$) und $10^{\log(c)} = c$ (nur für $c > 0$) (thx Trs).
 (W) Spezielle Werte: $\log(1) = 0$, $\log(10) = 1$, $\log(100) = 2$, $\log(1000) = 3$, usw.
 (*) Limites: $\log(0) = -\infty$, $\log(\infty) = \infty$, (Klasse 11: $\ln(e) = 1$).
27. (A, Abs 41/2.4.2, FD 5) Seien $a, b > 0$, $n \in \mathbb{R}$, dann gilt:
 1 LogG $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$; $\log(\frac{a}{b}) = \log(a) - \log(b)$;
 2 LogG $\log(a^n) = n \cdot \log(a)$; 3 LogG $\log(a + b)$ kann iA nicht vereinfacht werden.
28. (A, Ag 237/580, FD 21) $y = m_1 \cdot x + c_1$ und $y = m_2 \cdot x + c_2$ sind orthogonal $\Leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$.
29. (Z, Ag 238/584, FD 8) Der Satz von Pythagoras: Im rechtwinkligen Dreieck A, B, C mit $\gamma = 90^\circ$ gilt $a^2 + b^2 = c^2$ oder die Summe der Kathetenquadrate ist gleich dem Hypotenusenquadrat.
 (W, auch Ag 241/601) Die Zahlen (3;4;5) (und entsprechende Vielfache) bilden ein pythagoreisches Tripel, d.h. es gibt ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seitenlängen 3; 4 und 5. Es hat die weiteren Winkel 36.87° und 53.13° . Die Zahlen 1;2;2;3 bilden ein pythagoreisches Quadrupel, d.h. $1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$ oder ein Quader mit den Seitenlängen 1;2;2 hat Diagonale 3.
30. (W, Ag 239/589) Die Diagonale d eines Quadrates mit der Seitenlänge a ist $d = a\sqrt{2}$.
 Die Höhe h eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a ist $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.
31. (A, Ag 239/593) Die Pkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ haben den Abstand $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
 (W, Ag 240/595) Jeder Punkt $P(x; y)$ eines Kreises K um $M(m_1; m_2)$ mit Radius r erfüllt
 die Gleichung $(x - m_1)^2 + (y - m_2)^2 = r^2$ oder $x^2 + y^2 = r^2$ falls $M(0; 0)$.
32. (A, Ag 241/601) Die Diagonale d eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b ist $d = \sqrt{a^2 + b^2}$.
 Die Raumdiagonale d_R eines Quaders (Seitenlängen a, b, c) ist $d_R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
33. (W, Ag 98/236) $f(\bar{f}(x)) = \bar{f}(f(x)) = x$ bzw. $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$ (falls $f^{-1}(x)$ existiert).
34. (Z, Ag 243/613, FD 7) Im rechtwinkligen Dreieck gilt (Regel: GAGA HühnerHof AG)
 $\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$; $\cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$; $\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$;
 Nach dem Satz des Pythagoras gilt $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.
35. (W, Ag 244/617) (auch Ag 113/278) Winkel - spezielle Werte:
- | | | | | | |
|----------------|---------------------------|-----------------------------|-----------------------|-----------------------|---------------------------|
| α | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° |
| $\sin(\alpha)$ | $\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$ | $\frac{1}{2}\sqrt{1} = 0.5$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$ |
- | | | | | | |
|----------------|-----------|-----------------------|-----------------------|---------------|------------|
| α | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° |
| $\cos(\alpha)$ | 1 | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
36. (W, Ag 245/619) (auch Ag 116/287) Sinus und Kosinus sind 360° periodisch:
 Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\sin(\alpha) = \sin(\alpha + k \cdot 360^\circ)$ und $\cos(\alpha) = \cos(\alpha + k \cdot 360^\circ)$.
 Eine Gleichung der Form $\sin(x) = a$ wird von $x_1 = \arcsin(a)$ und $x_2 = 180^\circ - x_1$ gelöst.
 Eine Gleichung der Form $\cos(x) = a$ wird von $x_1 = \arccos(a)$ und $x_2 = 360^\circ - x_1$
 In diesem Abschnitt sind A, B beliebige Ereignisse.
37. (W, Ag 325/804) Additionssatz: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
38. (W, Ag 326/809, FD 26) Eine Zufallsgröße $\mathcal{X}$ ist ein Wkraum mit reellen Ergebnissen; hier x_1, x_2, x_3 und sei $P(\mathcal{X} = x_1) = p_1$ usw. Erwartungswert $\mu = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3$.
 Varianz: $(x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + (x_3 - \mu)^2 \cdot p_3$; Standardabweichung $\sigma = \sqrt{V(\mathcal{X})}$.

39. (W, Ag 329/817, FD 24) Def. bedingte Wk: $P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
 (W, Ag 331/819) A und B sind unabhängig $\Leftrightarrow P_B(A) = P(A)$ oder $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
40. (W, Ag 334/825) Man muss mindestens $\lceil \frac{\log(1-p)}{\log(1-p_0)} \rceil$ mal ein Experiment mit Erfolgswk p durchführen um mit einer Wk von mind. p_0 ein Mal oder öfter erfolgreich zu sein.
41. (A, Ag 247/632) Die Fläche A eines Kreissektors mit Öffnungswinkel α ist $A = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$, die Bogenlänge b ist $b = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$ (Sektorformel).
42. (A, Ag 248/639) Für Prismen und zylinderförmige Körper (Säulen) mit Grundfläche G gilt $V = G \cdot h$, für kegelförmige Körper gilt $V = \frac{G \cdot h}{3}$. Für Kugeln gilt $V = \frac{4\pi}{3} r^3$; $O = 4\pi \cdot r^2$.

1.1.4 Formelsammlung Klasse 10 teilweise vorgelesen unter <http://fs10.slt.biz>

43. (A, Ag 103/248) $f(x-a)$ bedeutet 'statt x schreibe $(x-a)$ '.
 Beispiel: $f(x) = 2x^2 - 4x \rightarrow f(x-a) = 2(x-a)^2 - 4(x-a)$.
 (W, Ag 103/248) Wenn das Schaubild von f um a nach rechts und um b nach oben verschoben werden soll, so hat der resultierende Graph die Funktionsdarstellung $y = f(x-a) + b$.
 (W, Ag 104/250) Soll K_f an der x -Achse gespiegelt werden, so gilt $f_{neu}(x) = -f(x)$; wenn K_f an der y -Achse gespiegelt wird, so gilt $f_{neu}(x) = f(-x)$.
44. (A, Ag 106/256) Die Vielfachheit von Nullstellen (siehe Abb. 4). Einfache Nullstellen x_0 treten als Linearfaktor $(x-x_0)^1$ doppelte Nst als $(x-x_0)^2$ und dreifache Nst als $(x-x_0)^3$ in der Linearfaktorzerlegung auf.
45. (W, Ag 108/263) **Fundamentalsatz** der Algebra: Eine ganzrationale Funktion n -ten Grades hat höchstens n Nullstellen. Eine ganzrat. Fktn ungeraden Grades hat mindestens eine Nullstelle.

Satz der Linearfaktorzerlegung: $p(x) = 0 \Leftrightarrow p(x)$ ist durch $(x-x_0)$ teilbar.

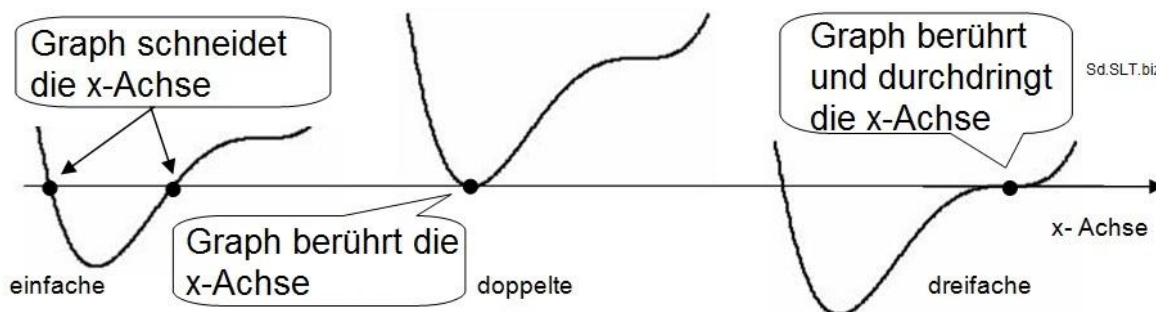


Abb. 4 Vielfachheit von Nullstellen

46. (A, Ag 110/269) Formel der speziellen Symmetrie: Sei f eine Funktion, mit Schaubild K_f .
 K_f ist achsensymmetrisch zur y -Achse $\Leftrightarrow f(-x) = f(x)$; (gerade Funktion);
 K_f ist punktsymmetrisch zum Ursprung $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$; (ungerade Funktion).
47. (A, Ag 336/12.3.1, FD 25) $0! = 1, 1! = 1, 2! = 1 \cdot 2 = 2, 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$.
 Das n -Tupel $\underbrace{E, \dots, E}_k \underbrace{\bar{E}, \dots, \bar{E}}_{n-k}$ kann auf $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$ Weisen angeordnet werden.
 Das Tupel $\underbrace{1, \dots, 1}_{n_1} \underbrace{2, \dots, 2}_{n_2} \underbrace{3, \dots, 3}_{n_3} \underbrace{4, \dots, 4}_{n_4}$ kann auf $\frac{(n_1+n_2+n_3+n_4)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot n_4!}$ Weisen angeordnet werden.
48. (W, Ag 340/843) Wir ziehen k aus n Kugeln, dann gilt für die Anzahl der möglichen

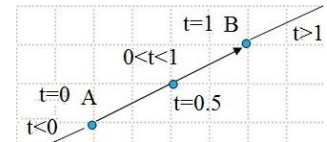
Permutationen: (das Quadrat)	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen (Tupel)
mit Berücksichtigung der Anordnung (Baum)	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
ohne Berücksichtigung der Anordnung	$\binom{n-1+k}{k}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

49. (A, Ag 342/849) Ein Experiment mit den Ergebnissen Erfolg und Misserfolg und gleichbleibender Erfolgswahrscheinlichkeit p heißt Bernoulliexperiment. Dieses wird n mal durchgeführt. Sei $\mathcal{X}$ die Anzahl der Erfolge, dann gilt die Formel von Bernoulli: $P(\mathcal{X} = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ [= binompdf(n, p, k)]. $\mathcal{X}$ heißt dann $B_{n,p}$ -verteilt oder $\mathcal{X} \sim B_{n,p}$.
50. (A, Ag 343/853) Sei $\mathcal{X} \sim B_{n,p}$, d.g.: $P(\mathcal{X} \geq k) = 1 - P(\mathcal{X} \leq k-1) = 1 - \text{binomcdf}(n, p, k-1)$. Für $1 \leq a \leq b \leq n$ ($a, b \in \mathbb{N}$) gilt: $P(a \leq \mathcal{X} \leq b) = P(\mathcal{X} \leq b) - P(\mathcal{X} \leq a-1)$.
51. (A, Ag 346/856, FD 26) Sei $\mathcal{X} \sim B_{n,p}$, dann gilt: Der Erwartungswert von $\mathcal{X}$ ist $E(\mathcal{X}) = \mu = n \cdot p$, $V(\mathcal{X}) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$ ist die Varianz und $\sigma(\mathcal{X}) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ ist die Standardabweichung.
52. (W, Ag 347/858) Sei $\mathcal{X} \sim B_{n,p}$, dann gilt: $P(\mathcal{X} \leq k) \approx \Phi\left(\frac{k - n \cdot p + 0.5}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right)$.
53. (W, Ag 139/319) $\infty \notin \mathbb{R}$, sei $a \in \mathbb{R}$ $a \pm \infty = \pm\infty$, $\frac{a}{\infty} = 0$, $a \cdot \infty = \begin{cases} \infty & (a > 0) \\ \text{undefiniert} & (a = 0) \\ -\infty & (a < 0) \end{cases}$; undefiniert sind $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty$
54. (W, Ag 140/324) Die mittlere Geschwindigkeit (Änderungsrate) oder **Sekantensteigung** einer Weg/Zeitfunktion f zwischen x_0 und x_1 ist $\bar{v} = m = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ (**Differenzenquotient**). (FD 13) Die Momentangeschwindigkeit (**Tangentensteigung**) einer Weg/Zeitfunktion f ist $v(x_0) = m(x_0) = f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ (**Differenzialquotient**).
55. (W, Ag 142/333) Eine Funktion $f(x)$ hat an der Stelle x_0 den Steigungswinkel ihrer Tangente: $\alpha = \arctan(f'(x_0))$ bzw. falls $f(x) = mx + c$ gilt $\alpha = \arctan(m)$. [Der Winkel zwischen den Geraden $y = m_1x + c$ und $y = m_2x + c$ ist $|\arctan m_1 - \arctan m_2|$ eigentlich: $\arctan \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right|$.]
56. (Z, Ag 141/327, FD 14) Die Potenzregel der Ableitung: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, für alle $n \in \mathbb{R}$.
57. (A, Ag 141/329, FD 15) Die Linearität der Ableitung: $(r \cdot f(x) + s \cdot g(x))' = r \cdot f'(x) + s \cdot g'(x)$.
58. (A, Abs 142/6.1.7) Tangente in $B(u/f(u))$ (allgemeine Tggleichung): $y = (f'(u))(x - u) + f(u)$; Normale: $y = \frac{-1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u)$. **Faustregel:** Ist $P(a; b)$ ein Punkt der Funktion, so setze $u = a$, sonst (externer Punkt) setze $x = a$ und $y = b$; im Zweifelsfalle setze $u = a$.
59. (W, Abs 113/5.4.2, FD 12) Umrechnung (Bogenmaß $\leftrightarrow$ Gradmaß): $\frac{\alpha}{360} = \frac{x}{2\pi}$.
- | x | $0 \hat{=} 0^\circ$ | $\frac{\pi}{6} \hat{=} 30^\circ$ | $\frac{\pi}{4} \hat{=} 45^\circ$ | $\frac{\pi}{3} \hat{=} 60^\circ$ | $\frac{\pi}{2} \hat{=} 90^\circ$ | $\pi \hat{=} 180^\circ$ | $\frac{3\pi}{2} \hat{=} 270^\circ$ | $2\pi \hat{=} 360^\circ$ |
|-----------|---------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|-------------------------|------------------------------------|--------------------------|
| $\sin(x)$ | $\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$ | $\frac{1}{2}\sqrt{1} = 0.5$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$ | 0 | -1 | 0 |
| $\cos(x)$ | 1 | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | -1 | 0 | 1 |
60. (A, Abs 114/5.4.3, FD 11) $\sin(-x) = -\sin(x)$, d.h. $\sin(x)$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung; $\cos(-x) = \cos(x)$, d.h. $\cos(x)$ ist achsensymmetrisch zur y -Achse. $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ $\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$. (für alle $k \in \mathbb{Z}$)
61. (A, Ag 114/284) $f(x) = a \sin(b(x - c)) + d$ hat Periode $p = \frac{2\pi}{b}$. K_f entsteht aus $K_{\sin(x)}$ durch Streckung mit dem Faktor a in y -Richtung und mit dem Faktor $\frac{1}{b}$ in x -Richtung sowie einer Verschiebung um $(c; d)$ Regel: Erst strecken, dann verschieben.
62. (W, Ag 118/291) Von $f(x) = a \sin(b(x - c)) + d$ sind zwei aufeinanderfolgende Extrema $T(x_{\min}, y_{\min})$ und $H(x_{\max}, y_{\max})$ gegeben, dann gilt:
 $a = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2}$; $c = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2}$; $d = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2}$; $p = 2 \cdot (x_{\max} - x_{\min})$;
63. (A, Ag 119/293, FD 14) $(\sin(x))' = \cos(x)$, $(\cos(x))' = -\sin(x)$, $(\sin(bx + c))' = b \cos(bx + c)$.
64. (A, Ag 253/652) Seien $A(a_1|a_2|a_3)$ und $B(b_1|b_2|b_3)$, dann ist $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$ (Ende - Anfang).

65. (A, Abs 434/14.17.16) **Die Parallelogrammgesetze:**(1 PaG) Für die Mitte M von A und B gilt $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$;(2 PaG) A, B, C, D ist ein Parallelogramm $\Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$;(3 PaG) Für jede Spiegelung gilt: Sei A' der an einem Gebilde G (Punkt, Gerade, Ebene) gespiegelte Punkt von A , dann ist $\overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OA}$, wobei L der Lotfußpunkt von A auf G ist.(4 PaG) Für den Schwerpkt S eines Dreiecks A, B, C gilt $\overrightarrow{OS} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$; (einer Dreieckspyramide A, B, C, D gilt $\overrightarrow{OS} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{4}$); dies sind Verallgemeinerungen vom (1 PaG).

Nur bei den Parallelogrammgesetzen dürfen sinnvollerweise Ortsvektoren (Punkte) addiert werden.

66. (Z, Ag 256/669) Die Gerade durch A und B in Parameterform ist $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$, ($t \in \mathbb{R}$). Für $t = 0$ ist $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA}$, für $t = 1$ ist $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OB}$, für $t = 0.5$ zeigt $\overrightarrow{OX}$ auf die Mitte von A und B . Falls $t < 0$ ist, liegt X 'links' von A ; falls $0 < t < 1$ ist, liegt X 'zwischen' A und B und falls $t > 1$ ist, liegt X 'rechts' von B .



(A) Die x_1 -Achse ist $\overrightarrow{OX} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; x_2 -Achse: $\overrightarrow{OX} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; x_3 -Achse: $\overrightarrow{OX} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

Abb. 5 Skalierung

67. (W, Ag 258/674) ('Der Baum:') Seien $g_1 : \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP}_1 + t \cdot \vec{r}_1$ und $g_2 : \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP}_2 + t \cdot \vec{r}_2$.

Es gilt: $\vec{r}_1 \parallel \vec{r}_2 \Leftrightarrow g_1 \parallel g_2$, wenn zusätzlich das LGS $\overrightarrow{OP}_1 = \overrightarrow{OP}_2 + t \cdot \vec{r}_1$ lösbar ist, so ist $g_1 = g_2$, ansonsten sind g_1 und g_2 echt parallel.

Falls $\vec{r}_1 \nparallel \vec{r}_2$ so ist $g_1 \nparallel g_2$, wenn zusätzlich das LGS $\overrightarrow{OP}_1 + s \cdot \vec{r}_1 = \overrightarrow{OP}_2 + t \cdot \vec{r}_2$ lösbar ist, so schneiden sich g_1 und g_2 ansonsten sind g_1 und g_2 windschief.

68. (W, Ag 260/684, 278/753) Ein Objekt bewegt sich vom Punkt P aus geradlinig in Richtung $\vec{r}$ mit konstanter Geschwindigkeit v , so befindet es sich zum Zeitpunkt t bei $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \frac{v}{|\vec{r}|} \cdot \vec{r}$.

Bogenlängenparametrisierung: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \frac{d}{|\vec{r}|} \cdot \vec{r}$. X hat von P den (orientierten) Abstand d .

69. (A, Ag 148/353) f ist bei x_0 (lokal) extremal $\Leftrightarrow f'(x)$ wechselt bei x_0 das Vorzeichen $\Rightarrow f'(x_0) = 0$; VZW $+$ $\rightarrow$ $-$ bedeutet Maximum; VZW $-$ $\rightarrow$ $+$ bedeutet Minimum. Signalwort maximal (minimal) bedeutet: 'Ableiten und die Ableitung = 0 setzen'.

70. (A 6.2.4) $f''(x_0) < 0$ und $f'(x_0) = 0 \Rightarrow H(x_0; f(x_0))$ ist Hochpunkt; $[f''(x_0) > 0$ usw. ... Tiefpunkt].

$f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$ ist eine hinreichende Bedingung für Extremwert, $f'(x_0) = 0$ ist eine notwendige Bedingung: $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0 \Rightarrow E(x_0; f(x_0)) \Rightarrow f'(x_0) = 0$.

71. (A, Ag 151/364) $W(x_0; f(x_0))$ ist ein Wendepunkt $\Leftrightarrow$ VZW von $f''(x)$ bei $x_0 \Rightarrow f''(x_0) = 0$;

72. (W, Ag 154/376) Sei f differenzierbar auf $(a; b)$ mit $f'(x) > 0$ (für alle $x \in (a; b)$), dann ist f streng monoton wachsend ($f'(x) > 0 \Rightarrow f$ smw); smf analog. Im Abitur gibt es nur strenge Monotonie! Innere Extrempunkte zerstören die strenge Monotonie; Terrassen(Sattel)punkte hingegen nicht. Monotoniebereiche: Zwischen einem Minimum und einem Maximum ist f smw und umgekehrt. Streng monotone Funktionen sind umkehrbar (injektiv).

1.1.5 Formelsammlung Klasse 11

73. (Z, Ag 163/405, FD 14) $(e^x)' = e^x$, $(e^{ax+b})' = a \cdot e^{ax+b}$ und (A, Ag 167/421) $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$.

74. (A, Ag 164/407) Seien $a, b > 0; a \neq 1$, dann gilt $a^x = b \Leftrightarrow x = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$; $e^{\ln b} = b$; $\ln(e^b) = b$;

(W) $[\ln(0) = -\infty, \ln(1) = 0, \ln(2) \approx 0.693, \ln(e) = 1, \ln(\infty) = \infty]$.

75. (A, Ag 165/410, FD 18) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$ (waagrechte Asymptote $y = 0$),
 $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$; $e^x > 0, e^{-x} > 0$.
76. (A, Ag 165/412, FD 15) Die Kettenregel: $(f(g(x)))' = g'(x) \cdot f'(g)$ oder $\frac{df}{dx} = \frac{dg}{dx} \cdot \frac{df}{dg}$
 $\Leftrightarrow (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Beachten Sie, dass bei $f'(g)$ nach g abgeleitet wird.
 Die innere Funktion $g(x)$ ist immer das, was zuerst berechnet wird.
 Bsp: $(e^{x^2})'$ sagt $g(x) = x^2, f(g) = e^g, (e^{x^2})' = 2x \cdot e^g = 2x \cdot e^{x^2}$;
 $(a^x)' = (e^{x \ln(a)})' = \ln(a) \cdot e^{x \ln(a)} = \ln(a) \cdot a^x$ ($a > 0$).
77. (A, Ag 166/416, FD 15) Die Produktregel: $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$.
78. (A, Ag 168/424) Quotientenregel: $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.
79. (W, Ag 178/454, FD 16) Der Hauptsatz der Differenzial und Integralrechnung:
 'Ableiten ist das Gegenteil vom Integrieren' oder $\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = (F_a(x))' = f(x)$.
80. (W, Ag 179/455, FD 17) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =$ (orientierte) Fläche begrenzt von K_f und den Geraden $x = a, x = b$ und $y = 0$.
81. (A, Ag 180/460) Potenzregel: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ bzw. $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)} + c$, falls $n \neq -1$;
 (A, Ag 187/495) für $n = -1$ gilt: $\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$.
 (A, Ag 180/461) Die Linearität des Integrals: $\int (r \cdot f(x) + s \cdot g(x))dx = r \cdot \int f(x)dx + s \cdot \int g(x)dx$.
82. (A-Z, Ag 182/473) Lineare Substitution: Sei $F'(x) = f(x)$, dann gilt für $a \neq 0$:
 $\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$; **Bsp:** $\int \sin(ax+b)dx = \frac{-\cos(ax+b)}{a} + c$; $\int e^{ax+b}dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c$;
83. (W, Ag 185/487, FD 19) Rotiert der Graph einer Funktion f um die x -Achse, so gilt für das Volumen des entstehenden Rotationskörpers im Intervall $[a; b]$: $V = V_a(b) = \pi \cdot \int_a^b f^2(t)dt$.
84. (W, Ag 186/492) Der Mittelwert m einer Funktion f auf $[a, b]$ ist $m = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx$.
85. (A, Ag 255/664, FD 22) Das Skalarprodukt: $\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$; $\vec{a} \circ \vec{a} = |\vec{a}|^2$.
 $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}} = \sqrt{(\vec{a})^2}$. Multipliziere zwei Vektoren **nie** komponentenweise.
 Normierter Vektor: Sei $\vec{a} \neq \vec{0}$ dann zeigt $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ in Richtung $\vec{a}$ und hat Länge 1.
86. (Z, Ag 262/691) Für den von $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ eingeschlossenen Winkel γ gilt: $\cos(\gamma) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.
 Insbesondere gilt $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 0$. Hinweis: Teile **nie** durch einen Vektor!
87. (W, Ag 264/699) Sei $\vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b}$, dann ist deren Winkelhalbierende: $\vec{w} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$.
88. (A, Ag 357/881) Bei einem linksseitigen Hypothesentest mit $(\alpha = 0.1)$ ist $H_0 : p \geq p_0, H_1 : p < p_0$.
 Das Quantil k der Ordnung 0.1 (= die Grenze) ist $k \approx n \cdot p - 1.282\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} - 0.5$.
 Etwa bei k wird in der Wertetabelle $P(\mathcal{X} \leq k)$ das Signifikanzniveau α übersprungen.
 Rechtsseitiger Test: $H_0 : p \leq p_0, H_1 : p > p_0$; Quantil $k \approx n \cdot p + 1.282\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} + 0.5$.
 H_1 generiert die Wertetabelle: $p < p_0 \rightarrow P(\mathcal{X} \leq k)$; $\alpha_1 = P_{p_0}(Abl)$, $\beta_1 = P_{p_1}(\overline{Abl})$.
89. (W, Abs 361/13.2.1) Sei F eine Verteilungsfunktion einer Zufallsgrößen $\mathcal{X}$ mit Dichte f , dann gilt: $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$, $P(a < \mathcal{X} \leq b) = F(b) - F(a)$, $\lim_{n \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x) = 1$,
 $F(x)$ ist monoton wachsend und F ist rechtsseitig stetig. $\mu = E(\mathcal{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)dt$;
 (nur HM III) $\sigma = \sqrt{V(\mathcal{X})} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (t - \mu)^2 \cdot f(t)dt}$;

90. (W, Abs 363/13.2.2, FD 26) Sei $\mathcal{X} \sim N(0; 1) \Rightarrow \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}; \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$. Sei $\mathcal{X} \sim N(\mu, \sigma)$ (normalverteilt), dann gilt: Dichte $= \varphi(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}; P(\mathcal{X} \leq k) = \Phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right), P(a \leq \mathcal{X} \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right), \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ und $\Phi^{-1}(1 - \alpha_0) = -\Phi^{-1}(\alpha_0)$.

Sigmaregel: (FD 27) Mit Wk 68% hat ein Wert höchstens Abstand σ vom Erwartungswert μ , mit Wk 95% Abstand 2σ und mit Wk 99% Abstand 3σ .

1.1.6 Formelsammlung Klasse 12

91. (W, Ag 265/704, FD 23) Die Ebene durch (drei) nicht kollineare Punkte A, B und C in Parameterform ist $\vec{OX} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AB} + t \cdot \vec{AC} = \vec{a} + r \cdot \vec{s}_1 + t \cdot \vec{s}_2$ ($r, t \in \mathbb{R}$).

Es gibt (mindestens) drei Darstellungsformen der Ebene:

- a) Die Parameterform (s.o.) wenn aus drei Punkten eine Ebene berechnet werden soll;
- b) Die Punktnormalenform $(\vec{x} - \vec{p}) \circ \vec{n} = 0$ ($\vec{n}$ heißt Normalenvektor, bei Verfahren Abs. 10.5.8);
- c) die Koordinatenform $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = e$ (sonst immer gut).

Es gilt $\vec{n} \perp \vec{s}_1$ und $\vec{n} \perp \vec{s}_2$; Ein möglicher Normalenvektor $\vec{n}$ kann durch $\vec{s}_1 \times \vec{s}_2$ berechnet werden.

92. (A 259/678+269/717) Die Koordinatenebenen sind: x_1x_2 -Ebene: $x_3 = 0$; x_1x_3 -Ebene: $x_2 = 0$; x_2x_3 Ebene: $x_1 = 0$. Die Ebene $x_1 + x_3 = 1$ ist echt parallel zur x_2 -Achse.

93. (A, Ag 266/708) Seien $\vec{a}, \vec{b}$ dreidimensional, dann definieren wir $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$ (Vektor- oder Kreuzprodukt).

Sei $E : \vec{OX} = \vec{OP} + r \cdot \vec{s}_1 + t \cdot \vec{s}_2$ eine Ebene (in Parameterform mit $\vec{s}_1, \vec{s}_2$ l.u.). Berechne $\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2$; setze P in die Koordinatenform $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = e$ ein und berechne so e .

94. (A, Abs 266/10.3.3) Seien $\vec{a}, \vec{b}$ dreidimensional, dann gilt: i) $\vec{a} \perp (\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$;
 ii) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}$ und $\vec{b}$ sind parallel (linear abhängig);
 iii) $|\vec{a} \times \vec{b}|$ = die Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.
 iv) Die Fläche eines Dreiecks A, B, C ist $\frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$.

95. (A, Ag 272/731) Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ dreidimensional, dann gilt: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ ist das (orientierte) Volumen, des von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten Spates (räumliches Parallelogramm). Dabei ist $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} > 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden ein Rechtssystem; $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind linear abhängig.

Das Volumen V einer Pyramide mit Spitze S und

parallelogrammförmiger Grundfläche A, B, C, D ist: $V = \frac{1}{3} |(\vec{AB} \times \vec{AC}) \circ \vec{AS}|$.

dreieckiger Grundfläche A, B, C , ist: $V = \frac{1}{6} |(\vec{AB} \times \vec{AC}) \circ \vec{AS}|$.

96. In den Formeln 96-98 sind $g_i : \vec{OX} = \vec{OP}_i + t \cdot \vec{r}_i$ (Geraden) und $E_i : (\vec{OX} - \vec{OP}_i) \circ \vec{n}_i = 0$ (Ebenen).
 $\nless (g_1, g_2) = \arccos \left(\left| \frac{\vec{r}_1 \circ \vec{r}_2}{|\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2|} \right| \right), \quad \nless (E_1, E_2) = \arccos \left(\left| \frac{\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \right| \right),$
 (A, Ag 275/741) $\nless (E_1, g_1) = \arcsin \left(\left| \frac{\vec{n}_1 \circ \vec{r}_1}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{r}_1|} \right| \right)$. aber $\nless (\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \arccos \left(\frac{\vec{v}_1 \circ \vec{v}_2}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|} \right).$
 $g \perp E \Leftrightarrow \vec{r} \parallel \vec{n}; \quad g \parallel E \Leftrightarrow \vec{r} \perp \vec{n}; \quad E_1 \parallel E_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2; \quad E_1 \perp E_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2.$

97. (A, Ag 276/749) Sei $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = e$ eine Ebene, dann ist deren Abstandsform (HNF):
 $d = \left| \frac{n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 - e}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \right|$ oder $d_{\text{orient}} = \frac{n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 - e}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$ (Orientierung in Richtung von $\vec{n}$).

98. (W, Ag 277/751) Der Abstand windschiefer Geraden ist $d = \left| (\vec{OP}_2 - \vec{OP}_1) \circ \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|} \right|$.

1.1.7 Formeln des Themenfriedhofs, die früher auswendig zu lernen waren

99. (Kl. 9, Ag 237/577) Sei A, B, C ein rechtwinkliges Dreieck, $q = c_a$ und $p = c_b$ die Hypotenusenabschnitte, dann gilt: $h^2 = p \cdot q$ Höhensatz $a^2 = c \cdot p, \quad b^2 = c \cdot q$ Kathetensätze.

100. (Kl. 9, Abs 245/9.4.5) Sei A, B, C ein allgemeines Dreieck, R dessen Umkreisradius, dann gilt

$$\text{Sinussatz: } \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2R \quad \text{Kosinussatz: } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

Damit ist der Kosinussatz eine Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras.

101. (Kl. 9+10, Ag 112/276) Die Additionstheoreme lauten:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta) \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

102. (Kl. 9+10, Ag 333/823 + 61/148) Geometrische Summe: $1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Für $|q| < 1$ geht $q^{n+1} \rightarrow 0$: Damit gilt: $1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1-q}$ (geometrische Reihe).

3. binomische Formel: $(a-b) \cdot (a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + a^{n-3}b^3 + \dots + ab^{n-1} + b^n) = a^{n+1} - b^{n+1}$.

103. (Kl. 10, Ag 111/272 + 112/274) Formel der allgemeinen Symmetrie:

K_f ist achsensymmetrisch + zur Achse $x = a \Leftrightarrow f(a-t) = f(a+t)$;

K_f ist punktsymmetrisch zum Punkt $(a; b) \Leftrightarrow f(a-t) + f(a+t) = 2b$; (t hebt sich weg).

104. (Kl. 8+11, Ag 21/9 + 262/689) $\det \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \hat{=} \text{der (orientierten) Fläche}$
des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

105. (A, Abs 202/8.1) Ein exponentielles Wachstum wird durch die Funktion $f(x) = y = c \cdot e^{kx}$ beschrieben. Es genügt der Dgl $y' = k \cdot y$. Ein beschränktes Wachstum (mit Schranke S) wird durch die Funktion $y = S - c \cdot e^{-kx}$ beschrieben. Es genügt der Dgl $y' = k \cdot S - k \cdot y \Leftrightarrow y' = k \cdot (S - y)$.

1.1.8 Formeln von M_+ oder aus HM

106. (A $\rightarrow$ 3.1.2, S. 52) Komplexe Zahlen: **Die vierte Binomische Formel:** $(a+ib) \cdot (a-ib) = a^2 + b^2$;
 $|z| = |a+ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\tan(\varphi) = \frac{b}{a}$; **Eulerformel:** $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$;
 $e^{2\pi i} = e^{2k\pi i} = 1$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. **Moivreformel:** $z^n = r \cdot e^{i\varphi} \Leftrightarrow z = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}$ $k = 0..n-1$.

107. (A 203/8.2.1) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$; $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}$;
für $|x| < 1$ gilt: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$; $-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$;

108. (A 188/502) Partielle Integration: Seien u, v, f, g diffbar, dann gilt: $\int u'v dx = uv - \int uv' dx$;
Substitutionsregel der Integration: $\int f(g) \cdot dg = \int f(g(x)) \cdot g'(x) \cdot dx$ oder $dg = g'(x) \cdot dx$.

109. Sei $\underline{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine 2×2 Matrix mit $\det(\underline{A}) = ad - bc \neq 0$, dann gilt $\underline{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

110. ($\rightarrow$ 12.4, S. 350) Es werden n aus N Kugeln ohne Zurücklegen gezogen; M der N Kugeln sind Erfolge. Sei $\mathcal{X}$ die Anzahl der gezogenen Erfolge, dann ist $P(\mathcal{X} = k) = \binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k} : \binom{N}{n}$; $E = \frac{n \cdot M}{N}$.

111. (W) (369/13.3.2) Seien $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ Zufallsgrößen, $|\mathcal{X}| = n$, $P(\mathcal{X} = x_i) = p_i$, ($i = 1..n$), $a, b \in \mathbb{R}$,
 $\mu = E(\mathcal{X}) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$; Standardabweichung: $\sigma = \sigma(\mathcal{X}) = \sqrt{V(\mathcal{X})} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot p_i}$
 $E(\mathcal{X} + \mathcal{Y}) = E(\mathcal{X}) + E(\mathcal{Y})$, $E(a\mathcal{X} + b) = a \cdot E(\mathcal{X}) + b$, $V(\mathcal{X}) = E(\mathcal{X}^2) - (E(\mathcal{X}))^2$,
 $V(a\mathcal{X} + b) = a^2 \cdot V(\mathcal{X})$, $\chi^2 = \sum \frac{(n_{O} - n_{E})^2}{n_{E}}$

Falls $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ unabhängig sind, gilt $E(\mathcal{X} \cdot \mathcal{Y}) = E(\mathcal{X}) \cdot E(\mathcal{Y})$, $V(\mathcal{X} + \mathcal{Y}) = V(\mathcal{X}) + V(\mathcal{Y})$.

Eine **Stichprobenverteilung** $\bar{\mathcal{X}} = \frac{\mathcal{X}_1 + \dots + \mathcal{X}_n}{n}$ ($\mathcal{X}_i$ identisch verteilt mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ) ist näherungsweise $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ verteilt ($\sigma(\bar{\mathcal{X}}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$).

112. (A) (376/930) **Satz von Schwarz:** Sei $z = f(x, y)$ diffbar, dann gilt $\frac{d}{dx}(\frac{d}{dy}(f)) = \frac{d}{dy}(\frac{d}{dx}(f))$.
Die Hessematrix ist symmetrisch.

113. (L) (377/932, 378/933 und 378/934) Sei $P_i(x_i; y_i)$ ($i = 1..n$) eine Punktwolke.

Die RGP optimierte Regressionsgerade berechnen wir mit folgendem LGS:

$$\begin{aligned} m \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \cdot \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \\ m \cdot \sum_{i=1}^n x_i + c \cdot n &= \sum_{i=1}^n y_i \end{aligned}$$

$$\text{Kovarianz: } \text{Cov}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{n};$$

$$\text{Korrelationskoeffizient } r_{x,y} := \frac{\text{Cov}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}{\sigma(\mathcal{X}) \cdot \sigma(\mathcal{Y})};$$

114. **Lambertsche W-Funktion:** $W(x)$ ist die UKF von xe^x ; $e^x + ax = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a} - W\left(\frac{e^{b/a}}{a}\right)$ ($a, b > 0$).

115. **(Vorbereitung auf Wettbewerbe)** Wichtige Zahlen sind: $e \approx 2.718$, $\pi \approx 3.1416$,
 $\sqrt{2} \approx 1.414$, $\sqrt{3} \approx 1.732$, $\sqrt{5} \approx 2.236$, $\sqrt{10} \approx 3.162$, $\ln(2) \approx 0.693$, $\arcsin(0.6) \approx 36.87^\circ$,
 $\arcsin(0.8) \approx 53.13^\circ$. Ein n -Eck hat $\frac{n}{2}(n-3)$ Diagonalen. Wichtige Zahlenfolgen sind:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	natürliche Zahlen $\cup \{0\}$
$\sum_{i=1}^n$	0	1	3	6	10	15	21	28	Dreieckszahlen
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5040	Fakultäten
$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$	1	1	2	3	5	8	13	21	Fibonacci-Zahlen

1.1.9 Fehlercodes und Abkürzungen

Folgende Fehlercodes verwende ich in der Regel bei der Korrektur von Arbeiten.

Kürzel	Erklärung	Punktabzug
R, Vz, PvS, ug	Rechenfehler, Vorzeichen, Punkt vor Strich, ungenau	manchmal
$uv / ub / D / !$	unvollständig / unbrauchbar / Denkfehler / schlimmer Fehler	normal ja
Alg = Algorithmus; Arg = Argumentation; AS = Antwortsatz; EH = Einheit; Erg = Ergebnis; Int = Interpretation; MA = mathematischer Ansatz; Rg = Rechnung; Tg = Tangente sind Zusätze z.B. bei uv		
$Deshalb$	Deshalb bringe ich Ihnen es anders bei	ja
Ad, FS, S, SF, Sw	Ausdruck, Fachsprache, Schreibfehler, Schreibweise	nein
$Agtxt / f / uk$	Aufgabentext - in der Aufgabe steht etwas anderes / falsch / unklar	meistens
$folgenschwer$	auch <i>fatal</i> R oder SF mit problemändernden Folgen	ja
$\checkmark / (\checkmark)$	richtig / mit falschem Wert richtig weitergerechnet	nein
$PRWT$	die Produktregel (der Ableitung) gilt auch im Wahlteil	ja
$Algebra!$	die Algebra der Mittelstufe ist mangelhaft	normal ja
GTR	GTR Befehle sind (im Abitur) nicht zugelassen	nein
'I hope so'	hier wurde der Aufgabentext vom Schüler falsch (oder eben anders) interpretiert, was aber leider möglich war	nein
naja	falsche oder dürftige Ausdrucksweise, vermutlich richtig gedacht	nein
$wdh, kü, un$	Hinweise: wiederholen, kürzen, unnötig, $\ddot{U}$ = Übertrag (aktuelle Punktzahl)	

Die volle Punktzahl ohne Korrekturzeichen bedeutet meist, dass alles richtig ist.

Abkürzungen:

Abs = Abschnitt,	Ag = Aufgabe oft als Seite/Nummer,
as = achsensymmetrisch,	BAG = Basisaufgabe,
ber = berechnen, best = bestimmen, beschr = beschreiben,	BD = Binnendifferenzierung,
$\overline{DHBW}$ = kein Stoff der DHBW	BFS = Banachscher Fixpunktsatz,
ExAg = Extremwertaufgaben,	Dgl = Differenzialgleichung, diffbar = differenzierbar,
GTR = grafischer Taschenrechner, HA = Hausaufgabe,	exp = exponentielles, Fkt = Funktion,
ihlDglmkK = inhomogene lineare Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten,	HP = Hochpunkt,
HgV = hypergeometrische Vert.	ia = im allgemeinen, idR = in der Regel,
KA = Klassenarbeit,	KF = Koordinatenform, kü = kürzen
LFZ = Linearfaktorzerlegung,	LGS = lineares Gleichungssystem, l.a. (l.u.) linear(un)abhängig
LöVo = Lösungsvorschläge	mBdA (oBdA) = mit (ohne) Berücksichtigung der Anordnung
mEn = meines Erachtens nach,	MNF = Mitternachtsformel, mf = monoton fallend,
MK = Mathe Känguru	Ne = Nenner, Nst = Nullstelle,

oZ = ohne Zurücklegen,	PFZ = Primfaktorzerlegung,	Pkt = Punkt,
PNF = Punktnormalenform,	PF = Parameterform	ps = punktsymmetrisch,
PSF = Punktsteigungsform,	sA = senkrechte Asymptote,	smw = streng monoton wachsend,
twwz = teilweise Wurzelziehen	SvN = Satz vom Nullprodukt,	SvP = Satz von Pythagoras,
TdV = Trennung der Variablen,	Tg = Tangente,	TP = Tiefpunkt,
trig = trigonometrische,	UE = Unterrichtseinheit,	UKF = Umkehrfunktion,
VdK = Variation der Konst.	Vert = Verteilung,	Vorber = Vorbereitung,
VZW = Vorzeichenwechsel,	wA = waagrechte Asymptote,	Wk = Wahrscheinlichkeit,
WP = Wendepunkt, $\hat{=}$ = Widerspruch,	Wt = Wachstum,	Wth = Wahrscheinlichkeitstheorie
Zä = Zähler Zch = Zeichnung	ZPF = Zweipunkteformel	ZG = Zufallsgröße.

1.1.10 Die Vorbereitung zwischen den Schuljahren

Wie soll ich mich auf das nächste Schuljahr vorbereiten? Was soll ich in den Sommerferien wiederholen? Diese Fragen versuche ich in diesem Abschnitt zu beantworten. Zu einer guten Vorbereitung gehört auch die Wiederholung (Beherrschung) der bis zu diesem Zeitpunkt bekannten Formeln.

Vorbereitung auf Klasse 9: 20/2, 22/11, 31/51 99/238f, 322/797, 25/28 und 34/65.

Klasse 10: 33/64, 91/214 ab f, 99/238f, 246/629, 336/833, später 94/219, 95/227 und 244/617.

Vorbereitung auf Klasse 11 (GK + LK) 110/271, 121/301, 147/350, 162/402, 262/687, 349/863, danach 95/227, 143/338, 149/357, 151/365, 258/676, 348/12.3.11, LK: 157/388.

Vorbereitung auf den SemKu bzw. auf HM2 für den Abs. 'Die Normalverteilung' 361/13.2 99/238, 115/285, 159/393, ((I*) 167/418, Abs. 426/14.16), 323/798, nur SemKu: 326/809 + 349/863.

Klasse 12: 258/676, (259/677, 261/685), 262/687, 262/690, 262/691f, 263/695, 349/863, 348/12.3.11.

Vorbereitung auf das Ingenieurstudium

Sie möchten sich auf ein MINT Studium vorbereiten? Dann ist dieses Buch für Sie genau richtig. Aus dem Schulteil empfehle ich Ihnen besonders folgende Abschnitte:

Klasse 9: Ungleichungen (Abs: 2.2.7), Anwendungen des Umfangswinkelsatzes (Abs: 9.2.11 nur M+I), der Kosinussatz (Abs: 9.4.6), Kugeln (Abs: 9.6.4), Restklassenringe (Abs: 2.4.5, nur M+I);

Klasse 10: das komplette Wachstum (Abs: 4.2), Linearfaktorzerlegungen (Abs: 5.3.11), Symmetrie + Additionstheoreme (Abs: 5.4.3), trigonometrische Gleichungen (Abs: 5.4.6), der Monotoniesatz (Abs: 6.2.6, nur M+I; ja, diesen unterrichte ich in Klasse 10 (jetzt 11) tatsächlich!);

Klasse 11: Folgen (Abs: 4.3), implizites Differenzieren (Abs: 6.3.7, oder wie haben Sie bewiesen, dass $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$?), die komplette Integralrechnung (Abs: 7.1) - beachten Sie hierbei, dass die schweren Themen (Abs: 14.16 und 7.4) kein Schulstoff mehr sind, Beweise mit Vektoren (Abs: 10.2.4, nur M+I);

Klasse 12 inkl. Vertiefungskurs: Komplexe Zahlen (Abs: 3.1), die Regel von de l'Hospital (Abs: 6.3.11), Taylor und Dgln (Abs: 8.2), das Spatprodukt (Abs: 10.4), die HNF (Abs: 10.5.5).

Falls Sie Mathe, Informatik oder Wirtschaft studieren möchten, sollten Sie auch die komplette Wahrscheinlichkeitstheorie Abs. 12.1 bis 13.2.2 wiederholen.

Vorber **HM1:** 124f, 127g, 129j, 415, 417, 425, 443, 499, 502 a,b,d, 687, 725, 732, 758, 767b, 771, 778g, 776f.

Vorber **HM2:** 517, 525g, 526gh, 527e, 530e, 532e, 533e, 818, 824, 833, 860f, 863, 869, 873.

Vorber **HM3:** 301, 876, 893, 901, 902e, 906d, 916d, 919b, 13.3.4, 13.3.5, 931, 932, 934e.

1.1.11 Der Versuch eines 1 NP Plans für LK oder BK (ohne Garantie)

Das Abi ist sicher, nur es besteht die Gefahr 0 NP im Mathe-LK-Abi zu schreiben? Dann ist dieser Abschnitt für Sie! Wenn Sie folgende Aufgaben (Themen) beherrschen sollte 1 NP (oder mehr) drin sein. Grundsätzlich empfehle ich die Minimalanforderungen am Ende vieler Kapitel.

Analysis: 147/350; 174/441; 183/480; 183/481; 110/271; 121/301; 126/317_{LK}; 162/402; 188/499;

Geometrie: (244/616_{LK}); 262/687; 263/695; 270/725; 275/738_{LK}; 280/758; 285/773;

Wahrscheinlichkeit: 336/833_{LK}; 349/863; 360/893_{LK}; 366/908;

1.2 Der Themenfriedhof (GFS)

Dieser Abschnitt soll an die Themen erinnern, die zu meiner Zeit noch Schulstoff waren und inzwischen ersatzlos aus dem Lehrplan gestrichen wurden - (sie nennen es 'entrümpeln'). Ich vermisse Euch alle!

2016: Folgen + Differentialgleichungen, beschränktes Wachstum; rekursive Darstellungen; Heronverfahren.

2012: zweiseitiger Hypothesentest, schiefe Asymptoten und Näherungskurven, LGS mit Parameter, rechnerischer Nachweis der linearen Abhängigkeit, die Sehnentrapezregel, Kepler-Fass-Regel (Simpsonregel), Polynomdivision, vollständige Induktion;

2011: ε, n_0 - Definition der Konvergenz, ε, δ -Definition der Stetigkeit, logistisches Wachstum;

2004: äußere nicht lineare Substitutionsregel der Integration, partielle Integration, lineare Optimierung, Kreisgleichungen, Kugelgleichungen, Additionstheoreme, Sinussatz, Kosinussatz, Boolesche Algebra, Schalteralgebra, Körper und Gruppentheorie auch zyklische Gruppen, Schubspiegelungen, Drehstreckungen inkl. Konstruktion eines Drehstreckenzentrums, Ellipsen inkl. Gärtnerkonstruktion und Krümmungskreisconstruction, affine Abbildungen, affine Koordinatensysteme, Eigenwerte und Eigenvektoren, Invariantes Rechtwinkelpaar, Nichtdiagonalisierbarkeit von Scherstreckungen, Hauptachsentransformation auch von Kegelschnitten, Konstruktionen bei Achsenaffinitäten, allgemeine Skalarprodukte, Die Cantorschen Diagonalverfahren, Die Russellsche Antinomie, Innere Substitution der Integration, Rotationskörper um die y -Achse, Diskussion von Wurzel und Betragsfunktionen, Aussagenlogik inkl. Isomorphie zur Mengenlehre, Zahlensysteme, Aufbau eines Zahlenbereiches mit den Peanoaxiomen, Satz von Bolzano-Weierstraß (Weierstraß'sches Halbierungsverfahren), geometrische Summe, geometrische und die harmonische Reihe, Potenzmengen, Mengenlehre, Determinante;

Bemerkung: 2012 war in BW der flächendeckende Übergang von G9 auf G8 und dieser sollte eigentlich keinen Stoff kosten. Die Einführung des LK 2019 brachte (eigentlich) keinen neuen Stoff.

1.3 Vorworte

1.3.1 Vorwort zur Version 7.0 (2019): mobile Mathe

Hurra Mathe gab es von V7 bis V7.4 (Probe V6.9) als online Version mobile Mathe und wurde von Pascal Köstler entwickelt (vielen Dank). Gezeigt werden Aufgabe, Lösung und zugehörige Videos. Jetzt kann Hurra Mathe überall hin mitgenommen werden und ist auch im Unterricht Tablet-fähig. Leider ist der Support für Mobile Mathe seit 2024 eingestellt worden; daher gibt es keine neuen Versionen.

1.3.2 Vorwort zur Version 6.7 (2016): Die Mathematik ist ein Rosamunde-Pilcher-Film

Welche Filme schauen Sie am liebsten? Einen, bei dem am Ende der Held nicht seine Angebetete bekommt, gar stirbt und die Welt in Schutt und Asche liegt? Nein! Deshalb braucht auch jede Mathematikaufgabe ein Happy End. Mein neues Ziel ist es, dass bei allen Aufgaben 'schöne' Ergebnisse (was auch immer das sein mag) herauskommen, auch wenn das mit der Realität nur selten etwas zu tun hat. Es ist wichtig dem Schüler ein gutes Gefühl zu vermitteln. Die Beschreibung der Wirklichkeit ist nicht unsere Aufgabe, sondern die der anwendenden Wissenschaften. Der Mathematik-Unterricht ist wie ein Rosamunde-Pilcher Film: Die Probleme scheinen anfangs unlösbar, am Ende werden alle (manchmal noch mehr) gelöst, und nie geglaubte Verwandtschaften treten zu Tage. Bei Winkelaufgaben (und bei Ag mit $(\overline{RP})$) kann dies leider kaum gelingen, deshalb sind diese von diesem Umbau ausgenommen.

14 Anekdoten

14.1 Erziehungs- und Bildungsauftrag

14.1.1 Gleichwertige Feststellung von Schülerleistungen (oder ganze Familie schafft)

Ich freue mich über Ihr Interesse an einer GFS im Fach Mathematik. Besonders empfehlenswert ist eine GFS für Schüler, die auf der Kippe stehen, oder die in Mathematik zu kämpfen haben. Voraussetzung für eine GFS ist, dass alle Klassenarbeiten mitgeschrieben (oder nachgeschrieben) wurden.

1) Ich nehme nur GFS in Form einer Unterrichtsstunde (45') entgegen. Wenn die Zeugnisnote 'ausreichend' angestrebt wird, ohne dass eine Klassenarbeit mit 'ausreichend' oder besser erreicht wurde, gehört zur GFS auch eine mündliche Prüfung, die zu 50% in die Gesamtnote einfließt. Eine schriftliche Ausarbeitung muss nicht gemacht werden. Bitte schieben Sie die GFS nicht zu sehr nach hinten.

2) Das Thema der GFS muss folgenden Kriterien genügen:

- a) Ich muss es verstehen (+ die Klasse muss es verstehen können).
- b) Es darf noch nicht im Unterricht behandelt worden sein.
- c) Es muss (genügend) mathematischen Gehalt haben.

Somit sind 'Geschichte der Mathematik' oder Wiederholungen normalerweise nicht GFS-fähig. Die GFS sollte (mindestens) ein eigenes Beispiel (also nicht aus meinem Buch) enthalten.

3) Im Allgemeinen hat jede GFS zwei Vortreffen und (wenn gewünscht) ein Nachtreffen: Beim ersten Vortreffen sollten Sie sich ins Thema eingearbeitet haben und eine Unterrichtsstunde im Großen und Ganzen geplant haben. Das Vortreffen sollte spätestens 1 Woche vor dem GFS-Termin stattfinden. Beim zweiten Vortreffen sollten Sie meine Änderungswünsche eingearbeitet haben.

Bitte halten Sie sich an vereinbarte Termine - Termintreue wird mit bewertet.

Der größte Feind der Qualität ist die Eile



4) Eine Unterrichtsstunde besteht in der Regel aus (vielen Dank an Frau Straub)

- a) einer Problemdarstellung (wichtig: Wecken Sie ein Problembewusstsein beim Schüler) (≈ 5 min),
- b) einer Problemlösung am Beispiel (oft wird Teil a gelöst) (≈ 10 min),
- c) einer Verallgemeinerung (≈ 5 min),
- d) einer Formulierung als Satz (mit Voraussetzung) - arbeiten Sie dies als **Höhepunkt** heraus ($\approx 5'$),
- e) dem Beweis (dieser kann auch in der Herleitung b), c) stecken) (≈ 10 min),
- f) Beispiele und Übungsaufgaben; eine Aufgabe dauert ca 5 Minuten, (≈ 10 min).

Bemerkung für Referendare: Der vorgestellte Unterrichtsaufbau ist nur als Richtlinie zu sehen. Beachten Sie, dass Sie kurze Zeit für Hausaufgaben einplanen. Überhaupt ist ein guter Unterricht das Ergebnis eines guten **Zeitmanagements**. Es ist wichtig, dass Sie lernen Ihren eigenen Stil zu finden und zu unterrichten und bleiben Sie sich treu, sonst enden Sie als schlechte Kopie. Wenn Sie bei mir hospitieren, machen Sie bitte ein Stundenprotokoll und planen Sie danach Zeit für Fragen + Kritik ein.

5) Die GFS sollte frei (und nicht abgelesen) gehalten werden. Bitte schreiben Sie Wichtiges wie Definitionen und Sätze an und sagen Sie diese nicht nur. Verwenden Sie gerne auch Folien, vor allem an Stellen, an welchen Sie unsicher sind; aber: Sagen Sie etwas dazu und legen Sie die Folie nicht nur auf. Wichtige Teile (oft 4 e) sollten von Ihnen im Unterricht vorgerechnet werden. Es ist kein guter Stil, Folien aufzulegen und 'abschreiben' zu sagen (und sonst nichts); auch angeschriebene Lösungen sollten erklärt und nicht nur reproduziert werden.

6) Sprechen Sie wenn möglich zum Publikum nicht zu schnell und nicht zu leise und schreiben Sie Arbeitsaufträge an. Und reden Sie nicht, wenn andere reden (Ruhe einfordern). Vergewissern Sie sich (eventuell durch Rückfragen), ob etwas beim Zuhörer angekommen ist. Stellen Sie gegebenenfalls Querverweise her. Sollten Sie mein Buch verwenden (oder der Klasse Fragen stellen) sollten Sie die Antwort nicht gleich nach der Fragestellung geben, sondern der Klasse erst Zeit zur Besinnung geben. Bauen Sie etwas 'Spannung' auf und geben Sie die Ergebnisse nicht sofort preis ('überlegt euch, wie das geht'), die Zuhörer sollen die Möglichkeit haben, selbst auf das Ergebnis zu kommen (siehe entdeckendes Lernen). Bitte geben Sie bei Übungsaufgaben nicht nur das Ergebnis, sondern auch noch dessen Rechenweg an.

7) Machen Sie in jedem Falle **Probenvorträge** - am besten mit interessiertem Publikum. Fragend

entwickelnder Unterricht ist erwünscht (aber nicht notwendig). Achten Sie auch auf angemessene Zeit bei den Arbeitsphasen; vor allem gegen Ende sollten diese nicht zu lang sein.

8) Wichtig: Stellen Sie Kontakt zu den Schülern her. Der Klassenprimus ist ein guter Indikator dafür, ob überhaupt etwas angekommen ist. Sie dürfen (und sollen) gerne durch das Klassenzimmer gehen. Vermeiden Sie lange 'Privatgespräche'; entscheiden Sie, ob eine persönliche Frage individuellen oder allgemeinen Charakter hat und bringen Sie die Frage gegebenenfalls ins Plenum. Bereiten Sie genügend Übungsaufgaben (eventuell auf Folie) vor.

Zum **Outfit** nur soviel: Es sollte evtl. ein Bisschen besser als normal sein. Bitte tragen Sie keine Kleidung mit fragwürdigem Aufdruck (z.B. Totenkopf) (und bei mündlichen Prüfungen keine Turnschuhe).

14.1.2 Leitfaden für mündliche Prüfungen (im Abitur)

(Thx J. Schölkopf + L. Bonfert, 2016) Bei einer mündlichen Prüfung (mP) gibt es 4 Beteiligte: **1)** der Prüfling (= Sie), **2)** der Prüfer (= Sd), **3)** der Protokollant (= ?/Mz) und **4)** der Vorsitzende (das ist hier in der Probeprüfung der ganze Rest der Klasse). Als Protokollant notieren Sie die Fragen von Sd und dessen Bemerkungen; NICHT die Antworten des Prüflings.



Ein Merz und eine Seele

Die mP in Mathe besteht aus einem 10' Präsentationsteil und einem 10' Prüfungsteil. Beim Präsentationsteil erhalten Sie eine Aufgabe (oft mit einer Schar), die Sie 20' vorbereiten. Diesen Vortrag halten Sie meistens mit Ihren Aufzeichnungen unter der Dokumentenkamera, nicht an der Tafel.

Beispielaufgabe Analysis: Gegeben sei die Kurvenschar $f_t(x) = \frac{x-t}{x^2-4}$ ($t \in \mathbb{R}$). a) Berechnen Sie den maximalen Definitionsbereich ID von $f_t(x)$. b) Skizzieren Sie K_{f_1} und K_{f_3} und erläutern Sie die Wirkung von t . c) Berechnen Sie die Asymptoten abhängig von t . d) Für welches t ist K_{f_t} symmetrisch? e) Sei $a \neq b$. Weisen Sie nach, dass sich K_{f_a} und K_{f_b} nicht schneiden.

Geo: **a)** Ber. Sie die Gerade g , durch $A(1; 5; -1)$ und $B(1; 7; 0)$. **b)** Ber. Sie den Abstand von $P(3; 4; 7)$ zu g . **c)** Spiegeln Sie P an g . **d)** Beschreiben Sie möglichst viele Verfahren, mit deren Hilfe Sie den Abstand von einer Gerade zu einem Punkt berechnen können. LöVo siehe 276/744 und Abs. 10.5.2.

Prüfungsteil: Eine mP ist nicht ganz das, was sie zu sein scheint. Grundsätzlich geht es in einer mP darum, dass Sie + Sd *gemeinsam* den Vorsitzenden von einer möglichst guten Note überzeugen. Eine mP müssen Sie sich wie einen Tanz vorstellen, bei dem Sie gut mit Sd harmonieren müssen:

1) Versuchen Sie der Prüfung + der Mathematik positiv gegenüber zu treten (Körpersprache + Mimik!). Stehen Sie aufrecht; die Füße sollten etwa unter den Schultern sein.

2) Tun Sie immer, was Sd sagt (Sd führt, wie beim Tanzen). Gehen Sie vom Wohlwollen des Prüfers aus und verärgern (oder unterbrechen) Sie weder ihn noch den Vorsitzenden. Lächeln ist erwünscht / Lachen nicht. Putzen Sie bitte nur nach Aufforderung die Tafel.

3) Versuchen Sie keine Rückfragen zu stellen. Beachten Sie auch, dass bei Aussagesätzen die Stimme nach unten geht. Folgendes sollten Sie nonverbal kommunizieren: Sie schauen zur Tafel = Sie überlegen (lange Denkphasen verbessern die Note nicht); Sie schauen Sd an = Sie wissen nicht, wie es weitergeht. Zeigen Sie nicht körperlich, dass Sie nicht weiterwissen (Hand / Kopfhaltung!). Meiden Sie Konjunktive und Worte wie 'vielleicht' oder 'ach so'. Schütteln Sie nicht den Kopf.

4) Auf eine allgemeine Frage dürfen Sie auch mit einem Beispiel oder einer Zeichnung antworten. Empfehlung: Erst die Kurve, dann das Achsenkreuz zeichnen und sagen Sie etwas zu dem, was Sie schreiben (es ist eine mündliche Prüfung; führen Sie aber keine Selbstgespräche). Wenn Sie nichts mehr an die Tafel schreiben, sollten Sie mir immer zeigen, was Sie geschrieben haben (= ein Schritt zur Seite). Schreiben Sie ruhig eine Formel an, die Sie verwenden.

5) Je mehr Sie wissen und auch präsentieren, desto tiefer kann Sd gehen, je mehr Sie Sd fragend anschauen, desto seichter bleibt die Prüfung (sanfte Initiative Ihrerseits ist möglich). Besonders wichtig ist es hierbei, die Formelsammlung und Definitionen auswendig zu können. Outfit: Siehe GFS.

6) Bei einer mündlichen Prüfung können Sie normalerweise ihre Anmeldenote erwarten, aber nur, wenn Sie vorbereitet sind. Dazu empfehle ich neben dem Auswendiglernen der Formeln (vor allem ab Klasse 10) aus der Formelsammlung, das Rechnen vieler Pflichtteilaufgaben bzw. der Minimalanforderungen + nennen Sie mir bitte vorher die Note(n), die Sie benötigen.

7) Antworten Sie immer auf ja/nein Fragen. Wenn Sd fragt: 'Sind Sie sich sicher?' Bedeutet dies eventuell nein (also falsch); Sd fragt weiter bedeutet entweder alles ok oder das Gegenteil. Sd ist desinteressiert / abwesend bedeutet meistens 'alles richtig'.

Ich mache nicht nur leere Versprechungen; ich halte mich auch daran (Stoiber)



Eine 'Wieso'-Frage kann auch ein Hinweis auf einen Fehler sein.

Beispiele für Prüfungen. Texte in eckigen Klammern gehören nicht zum Aufgabentext, sondern sind Hinweise für den Prüfer. (*) = Prüfung noch uv

- a)** Definieren Sie Momentangeschwindigkeit (MG) [F 54, 140/324]. **b)** Erklären Sie, wie aus der mittleren Änderungsrate die MG entsteht. **c)** Führen Sie den Grenzübergang (GÜ) bei der Funktion $f(x) = x^2$ durch. **d)** Wie lautet der äquivalente mathematische Begriff? **e)** Zeigen Sie mit Hilfe eines GÜ, dass $(a^x)' = k \cdot a^x$ + definieren Sie so eine irrationale Zahl [Ag 163/405].
- a)** Was ist eine allgemeine Sinusfunktion $[y = a \sin(b(x-c)) + d]$, **b)** Erklären Sie die Koeffizienten $a-d$. [Ag 114/284] **c)** Lösen Sie die Gleichung $\sin(x) = 0$. $[x = k\pi]$, **d)** $\sin(x) = \frac{1}{2}$. [Ag 116/287] **e)** Wie wirkt sich der Parameter b aus? [Streckung in x Richtung $\frac{1}{b}$] **f)** Warum erst strecken, dann verschieben? [Verschobene x -Achse wird weggestreckt]
- a)** Ist $f(x) = 2x$ streng monoton wachsend (smw)? [Ja] **b)** Geben Sie weitere Bsp von smw Fkt an und weisen Sie diese nach. **c)** Definieren Sie smw? $[x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)]$ **d)** Welche Punkte enthält eine smw Funktion nicht? [Extrempkt] **e)** Wie lautet der Monotoniesatz? $[f'(x) > 0 \text{ auf } [a; b] \Rightarrow f \text{ smw}]$ **f)** Zeigen Sie, dass nur ' $\Rightarrow$ ' gilt $[x^3]$.
- a)** Leiten Sie $\ln(x)$ ab. **b)** Beweisen Sie $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$. **c,d)** Berechnen Sie $(a^x)'$, $(\log_a)'$. Für welche a gilt ihre Formel? $[(a^x)' = \ln(a)a^x, a > 0; (\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln(a)}, a > 0, a \neq 1]$. **e)** Was wäre $y = \log_1(x)$? $[1^y = x \not\Rightarrow \text{für } x \neq 1]$
- a)** Der Graph von $f(x) = 0.5x - 1$ rotiere im Intervall $[1;2]$ um die x -Achse. Berechnen Sie dessen Volumen. $[\frac{13\pi}{3}]$ **b)** Um welchen Körper handelt es sich? [Kegelstumpf] **c)** Wie lautet die Kegelstumpfvolumenformel der Mittelstufe? $[V = \pi(r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2) \cdot h]$ **d)** Beweisen Sie diese Formel mit Integralrechnung. $[r_2^3 - r_1^3 = (r_2 - r_1) \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2)]$
- a)** Berechnen Sie $\int_0^1 x^{-0.5} dx$ [2]. **b)** Was ist ein uneigentliches Integral? **c)** Welche uneigentlichen Integrale gibt es noch? [gegen unendlich] **d)** Für welche r ist $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^r dx$ endlich? $[r < -1]$
- a)** Geben Sie ein Beispiel für ein exponentielles Wachstum an. **b)** Was ist allgemein ein exponentielles Wachstum [rekursiv/Differentialgleichung (Dgl)]? **c)** Was ist eine Dgl? **d)** Nennen Sie eine Dgl und lösen Sie diese. **e)** Erklären Sie bei der Dgl $y' = S - ce^{-kt}$ die Bedeutung der Variablen S, k, c . **f)** Leiten Sie aus dem rek Bildungsgesetz die Dgl des beschr Wt her.
- a)** Sei $A(1|2|3)$, $B(3|2|1)$, $C(2|2|2)$, $D(4|2|0)$. Welche Lage haben die Geraden g_{AB} und g_{CD} ? [id] **b)** Erklären Sie allgemein, wie man die Lage zweier Geraden bestimmt. [F 67] **c)** Alle Punkte haben die gleiche x_2 -Koordinate. Warum können die Geraden nicht windschief sein? $[A..D \text{ liegen in der Ebene } x_2 = 2, \text{ ws Geraden liegen nie in einer Ebene}]$
- a)** Sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ linear abhängig? [Ja] **b)** Definieren Sie lineare Abhängigkeit. **c)** Geben Sie Bsp für zwei l.a. Vektoren an. **d)** Was kann man zum $\vec{0}$ sagen? $[\vec{0} \text{ ist immer l.a.}]$ **e)** Wie ist l.a. für 3 Vektoren definiert? $[(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0]$
- a)** Welche Lage haben die Gerade g durch $A(0|1|-1)$ und $B(2|-1|0)$ und $E : x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$? $[g \subset E]$ **b)** Erklären Sie allgemein, wie man die Lage von einer Geraden und einer Ebene bestimmt. [Ag 268/715] **c)** Wann ist $g \perp E$? $[\vec{r}_g \text{ und } \vec{n}_E \text{ sind l.a.}]$

11. **a)** Welche Lage haben die Ebenen E durch $A(0|1|-1)$, $B(2|-1|0)$ und $C(2|0|-1)$ und $F: x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$? [id] **b)** Erklären Sie allgemein, wie man die Lage zweier Ebenen bestimmt. [Ag 269/721] **c)** Wo gibt es windschiefe Ebenen? [4 dim]
12. **a)** Spiegeln Sie $P(2|-1)$ am Punkt $L(1|1)$. [(0|3)] **b)** Erklären Sie, wie man allg. bei einer Punktspiegelung einen Spiegelpunkt berechnet. [F 65] **c)** Sei $E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$. Spiegeln Sie $Q(1|2|2)$ an E [$L(0|0|0)$, $Q'(-1|-2|-2)$]. **d)** Erklären Sie allgemein, wie man einen Punkt (bzw. eine Gerade) an einer Ebene spiegelt. [Ag 276/748]
13. (*) **a)** Es wird ein Mal gewürfelt. Sei A das Ereignis 'Zahl gerade' und B : 'Zahl > 3 '. Berechnen Sie $P(A \cup B)$ mit Hilfe des Additionssatzes. **b)** Erklären Sie den Additionssatz mit Hilfe eines Diagramms. **c)** Gibt es einen Additionssatz für $P(A \cup B \cup C)$? **d)** Wie lautet dieser?
14. **a)** Was ist ein Benoulliexperiment (BE)? [Ag 342/849] **b)** Geben Sie ein Bsp. für ein BE an. **c)** Was ist eine Bernoullikette? **d)** Wie lautet die Formel von Bernoulli (FvB) und was berechnet man mit dieser? **e)** Erklären Sie jeden Faktor der FvB. [Ag 342/849]
15. Mit Abb. 344/204 **a)** Was ist eine Hypothese? [Ag 353/874] **b)** $H_0: p = 0.5$ soll gegen die Hypothese $H_1: p = 0.3$ mit $n = 10$ Versuchen getestet werden. H_0 soll bei weniger als 3 Treffern abgelehnt werden. Geben Sie α und β an. [$\alpha \approx 0.174$, $\beta \approx 0.617$] **c)** Der Test soll so verändert werden, dass $\alpha \leq 0.05$ ist. Geben Sie Abl an. [$Abl = \{0; 1\}$]

14.1.3 Lesen eines Aufgabentextes (Thx an Dr. Tanja Schmid)

Wie lese ich einen Agtext richtig? Lesekompetenz ist ein schwieriges Thema und sicher nur individuell lösbar. Trotzdem möchte ich versuchen hier ein paar Hinweise zu geben. Vgl auch 390/14.1.4 (2).

- 1) Wie lautet das Thema und welche wichtigen Formeln oder Definitionen gehören dazu?
- 2) Text überfliegen um Merkmale wie wichtige Textteile zu erkennen: Erste vorläufige Thesen über den Textinhalt formulieren. Vorhersagen über den Text treffen und kontinuierlich evaluieren.
- 3) Schlüsselsätze herschreiben; Signalworte unterstreichen.
- 4) Was wird von mir verlangt? Geben Sie die Inhalte in eigenen Worten wieder. Gibt es ähnliche Ag?
- 5) Text selektiv und mehrfach lesen; trotz Verstehensschwierigkeiten weiterlesen.
- 6) Inhalte gezielt bildlich vorstellen; gedanklich (oder physisch) ausführen, was der Text rät.
- 7) Fehlende Information vorwissensbasiert auffüllen.
- 8) Gezielt nach Informationen mit Neuigkeitswert suchen.
- 9) Diesen Plan an vielen Klassenarbeitsaufgaben durchspielen.

14.1.4 Mein pädagogisches Handbuch

Wer das folgende Kapitel nicht mit dem nötigen Augenzwinkern lesen kann, sollte sich umso genauer über seinen Inhalt Gedanken machen. Frei nach Mr. Spock gilt: Die einfache Pädagogik ist oft die beste.

1. Mathe macht glücklich – deshalb entsteht bei einem Schüler der Mathe macht ein zufriedenes Lächeln (und nicht ein Lachen). Nichtlächelnde Schüler machen demzufolge nicht mit.
2. **a)** Goethe sagt: 'Im Anfang war die Tat' oder in der Mathematik gilt: 'Erst tun, dann denken'. Einige Schüler sind davon überzeugt, dass das ausschließliche Bestarren eines weißen Blattes Papier lösungsförderlich ist. Sie nennen es 'Denken' – ich nenne es aber 'Warten' und das problemlösende Warten werde ich nicht als Lösungsansatz. Stattdessen kann nach dem Lesen ($\rightarrow$ Abs. 14.1.3) eines Aufgabentextes meistens folgendes getan werden:
 - 1) Finden von Signalwörtern (unterstreichen im Text)
 - 2) Auffinden von Formeln oder Ideen, die mit den Signalwörtern unmittelbar in Zusammenhang stehen.
 - 3) Erstellen einer Zeichnung (Wth: Baum) oder einer Wertetabelle.



Cartoon 67

16 Abiturvorbereitung

Inhaltsverzeichnis:

16.1	Operatoren aus dem Bildungsplan 2016	1002
16.3	Das WTR Curriculum von Herrn Bittermann	1008
16.4	Inhaltsbezogene Kompetenzen für das Abitur des LK	1010
16.5	Die Abituraufgaben der letzten drei Jahre	1011
16.6	Musteraufgaben für das Abitur 2021+23	1037
16.8	Stochastik-Abiturteile vor 2019 komplett auf Niveau Klasse 10	1043
16.9	Die mündliche Prüfung des Basiskurses (GK)	1046
16.10	Aufgaben aus dem IQB-Pool (Aufgaben: IQB21.slt.biz)	1054
16.10.7	Funktionen aus dem Analysisteil des Leistungskurses	1069
16.10.8	Aufgaben aus dem Mathe Känguru ohne WTR	1069
16.11	Wegen Platzmangels aussortierte Abiture	1072

Die LoeVo aus Kap 16 finden Sie unter <http://www.slt.biz/Unterricht/Kapitel16.htm>

Zwar darf ich mit Ihnen keine Absprachen treffen, aber von der Weitergabe meiner bisherigen Wahlen hat niemand etwas gesagt. Deshalb hier der Abschnitt 'Wie habe ich gewählt?'

2025: 1 1 2, 2024: 1 2 2, 2023: 1 1 2 2, 2022: 2 1 2 1, 2021: 2 2 2 2, 2020: 1 1 1, 2019: 2 1 1,
2018: 1 2 2, 2017: 1 1 1, 2016: 2 1, '15: 2 1, '14: 1 2, '13: 1 2, '12: 3 2, '11: 3 2, '10: 3 1;

16.1 Operatoren aus dem Bildungsplan 2016

Die Bemerkungen in eckigen Klammern [] sind Zusätze von mir.

In den Standards für inhaltsbezogene Kompetenzen werden Operatoren (handlungsleitende Verben [Imperative]) verwendet. Standards legen fest, welche Anforderungen die Schülerinnen und Schüler in der Regel erfüllen. Zusammen mit der Zuordnung zu einem der drei Anforderungsbereiche (AFB) dienen Operatoren einer Präzisierung. Dies sichert das Erreichen des vorgesehenen Niveaus und die angemessene Interpretationen der Standards.

16.1.1 Beschreibung der drei Anforderungsbereiche

AFB I umfasst das Wiedergeben von Sachverhalten und Kenntnissen sowie das Anwenden und Beschreiben geübter Arbeitstechniken und Verfahren [Reproduktion: Aufgabenniveau 1 und teilweise 2].

AFB II umfasst das selbstständige Verarbeiten und Darstellen bekannter Sachverhalte in einem durch Übung bekannten Zusammenhang und das selbstständige Übertragen des Gelernten auf vergleichbare, neue Sachverhalte [Reproduktion und teilweise Transfer: Aufgabenniveau 2-3].

AFB III umfasst das Verarbeiten komplexer Sachverhalte mit selbstständiger Auswahl geeigneter Arbeitstechniken mit dem Ziel, zu selbstständigen Lösungen, Gestaltungen oder Deutungen, Folgerungen, Verallgemeinerungen, Begründungen und Wertungen zu gelangen und das eigene Vorgehen zu reflektieren [Transfer: Aufgabenniveau 3-5].

16.1.2 Zuordnung zu Anforderungsbereichen

Die Zuordnung eines Operators ist im Einzelfall auch vom Kontext von Aufgabenstellungen und ihrer unterrichtlichen Einordnung abhängig. Im Folgenden werden die Operatoren dem überwiegend in Betracht kommenden Anforderungsbereich zugeordnet. Verben der mathematischen Fachsprache Handlungsleitende Verben wie rechnen, multiplizieren, lösen, differenzieren, zeichnen, messen, erweitern, kürzen, umwandeln, vergrößern, abschätzen, schließen, konstruieren, Darstellungen wechseln oder ineinander überführen werden hier nicht beschrieben. Ihre Bedeutung ist fachsprachlich definiert, die Zuordnung zu einem Anforderungsbereich ist dem Kontext zu entnehmen.

Operatoren	Beschreibung	AFB
angeben, nennen	Ergebnisse numerisch oder verbal formulieren, ohne Darstellung des Lösungsweges und ohne Begründungen	I
anwenden, durchführen	nach bekannten Regeln oder Anweisungen von einer Aufgabenstellung zu einem definierten Ziel gelangen	II
auswerten	Daten, Einzelergebnisse oder sonstige Sachverhalte zu einer abschließenden, begründeten Gesamtaussage zusammenführen	II
begründen	eine Aussage, einen Sachverhalt durch Berechnungen, nach gültigen Schlussregeln, durch Herleitungen oder inhaltliche Argumentation verifizieren oder falsifizieren	III
berechnen	Ergebnisse von einem Ansatz oder einer Formel ausgehend durch Rechenoperationen gewinnen. Die Argumentation mit Hilfe einer Zeichnung genügt nicht. [Die Ergebnisse sind ausreichend vereinfachter Form anzugeben.]	I [-III]
beschreiben, formulieren	einen Sachverhalt oder ein Verfahren in vollständigen Sätzen unter Verwendung der Fachsprache mit eigenen Worten wiedergeben (hier sind auch Einschränkungen möglich: 'Beschreiben Sie in Stichworten') beziehungsweise in einer vorgeschriebenen Form darstellen (zum Beispiel: 'Beschreiben Sie als Term')	II
bestimmen, erschließen, erläutern	Lösungen, Lösungswege beziehungsweise Zusammenhänge auf der Basis von Vorkenntnissen oder Verfahren finden und darstellen. Die Argumentation mit Hilfe einer Zeichnung kann genügen.	II
beurteilen, bewerten	einen Sachverhalt nach fachwissenschaftlichen oder fachmethodischen Kriterien, persönlichem oder gesellschaftlichem Wertebezug begründet einschätzen und ein selbstständiges Urteil formulieren	III
beweisen, [zeigen]	Aussagen unter Verwendung von bekannten mathematischen Sätzen, logischen Schlüssen und Äquivalenzumformungen und unter Beachtung formaler Kriterien verifizieren	III
darstellen	mathematische Objekte in einer fachlich üblichen oder in einer vorgeschriebenen Form wiedergeben graphisch darstellen: Anfertigen einer zeichengenauen, graphischen Darstellung auf der Basis der genauen Wiedergabe wesentlicher Punkte beziehungsweise maßgetreues oder maßstäbliches zeichnerisches Darstellen eines Objekts	I
deuten, interpretieren	Sachverhalte, Phänomene, Strukturen oder Ergebnisse in eine andere mathematische Sichtweise umdeuten oder rückübersetzen auf das ursprüngliche Problem	II
entnehmen	aus vorgegebenen Darstellungen Daten zur Beantwortung von Fragen oder zur Weiterbearbeitung aufbereiten	II
erkennen	Muster ohne ausführliche Begründung feststellen beziehungsweise feststellen, dass in einer Situation bestimmte fachliche Definitionen zutreffen	I
erklären, erläutern	Sachverhalte auf der Grundlage von Vorkenntnissen so darlegen und veranschaulichen, dass sie verständlich werden	II
identifizieren	mathematische Objekte und die zugehörigen Fachbegriffe begründet miteinander verbinden	I
nutzen, umgehen mit, verwenden	Fachbegriffe, Regeln, mathematische Sätze, Zusammenhänge oder Verfahren auf einen anderen Sachverhalt beziehen	II
skizzieren	die wesentlichen Eigenschaften eines Objekts graphisch vereinfacht darstellen	II
überprüfen	durch Anwendung mathematischer Regeln oder Kenntnisse in einer ergebnisoffenen Situation einen vorgegebenen Sachverhalt verifizieren oder falsifizieren	III

untersuchen	Sachverhalte, Probleme, Fragestellungen nach bestimmten, fachlich üblichen beziehungsweise sinnvollen Kriterien zielorientiert erkunden. [Betrachten (berechnen) Sie alle möglichen Fälle]	II
vergleichen	Gemeinsamkeiten und Unterschiede herausarbeiten	II
zuordnen	einen begründeten Zusammenhang zwischen Objekten oder Darstellungen herstellen	II

16.1.3 Anforderungen an Schülerlösungen und deren Dokumentation

Von den Schülerinnen und Schülern wird eine saubere und nachvollziehbare Dokumentation erwartet, dazu gehören insbesondere:

- 1) durch Verbalisierung des Vorgehens und Ergebnissätze strukturierte Darstellung
- 2) angemessener sprachlicher Ausdruck, insbesondere korrekte Fachsprache
- 3) Definition neu eingeführter Bezeichnungen (insbesondere von Zufallsgrößen)
- 4) keine Angaben über Tastenfolgen von WTR-Eingaben

Wird in einer Aufgabenstellung ein 'exakter Wert' gefordert, dann ist damit ein mathematisch exakter Ausdruck (z.B. $\frac{6}{7}$, $\ln(2)$, $\frac{\sqrt{2}}{\pi}$,) gemeint, nicht eine gerundete Dezimalzahl.

16.2 Das Formeldokument

'Wer intelligent genug ist, das Formeldokument verwenden zu können, braucht es nicht'; *Sd.*

Im Abitur ist das Formeldokument (FD) nur für den Notfall gedacht. Normalerweise sollten Sie alle Formeln des Formeldokumentes sowieso auswendig beherrschen.

- (1) Die Darstellung des FD ist stark reduziert. Oft fehlen die Definition oder Einschränkung der Variablen:
 Bsp a: Im Dreieck gilt: $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$ ohne zu erklären, was g und h ist.
 Bsp b: $\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$; es fehlt: Seien $a, b, c > 0$, $a \neq 1$.
- (2) Manche Inhalte beginnen mit 'Folgende Aussagen sind äquivalent'. Dabei entspricht oft die erste Aussage der 'Begrifflichkeit' (Definition); die weiteren Aussagen entsprechen mathematischen Inhalten (Formeln oft in Prosa) dazu.
- (3) Die Notation ist teilweise neu (anders, gewöhnungsbedürftig). Unter anderem werden Variablen umbenannt. **Bsp:** $u^2 + v^2 = w^2$.
- (4) Mein Unterricht ist teilweise anders fokussiert: Im Unterricht verwenden wir die a, b, c -Formel; im FD steht die p, q -Formel (die Sie gerne auch verwenden dürfen).

Das vorliegende FD ist komprimiert und enthält Nummern und Verweise (FS = Formelsammlung (ab Seite 4); Ag = Aufgabe; Abs = Abschnitt). Zur Vorbereitung und in Klassenarbeiten müssen Sie das Original <http://FD.slt.biz> verwenden.

16.2.1 Grundlagen

1. **Ähnlichkeit zweier Dreiecke:** etwa FS 6/21, Ag 233/557.

Die folgenden Aussagen zu zwei Dreiecken sind äquivalent:

- (1) Die Dreiecke sind ähnlich.
- (2) Die Größen der Winkel des einen Dreiecks stimmen mit den Größen der Winkel des anderen Dreiecks überein.

(3) Die Verhältnisse der Seitenlängen des einen Dreiecks stimmen mit den Verhältnissen der Seitenlängen des anderen Dreiecks überein.

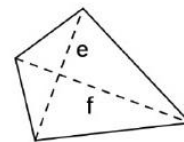
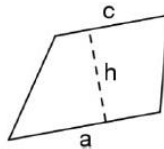
2. **Binomische Formeln:** FS 5/11; Ag 20/4.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \quad (a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2;$$

3. **Maße von Figuren:** FS 5/5, Ag 247/632.

Dreieck: $A = \frac{1}{2}g \cdot h;$	Parallelogramm: $A = g \cdot h;$	Trapez: $A = \frac{a+c}{2} \cdot h;$	Drachenviereck: $A = \frac{1}{2}e \cdot f;$	Kreis $A = \pi r^2; U = 2\pi r;$
---	-------------------------------------	---	--	-------------------------------------

Ein Parallelogramm mit vier gleich langen Seiten wird als Raute bezeichnet.



4. **Maße von Körpern:** FS 8/42, Abs 248/9.6.2;

Prisma: $V = A_G \cdot h;$	Pyramide: $V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h;$	Zylinder: $V = A_G \cdot h;$ für gerade Zylinder $A_O = 2 \cdot A_G + 2\pi \cdot r \cdot h;$	Kegel $V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h;$ für gerade Kegel $A_O = A_G + \pi \cdot r \cdot m;$
-------------------------------	---	---	---

(m : Abstand der Spitze [des Kegels] vom Rand der Grundfläche)

5. **Potenzen und Logarithmen:** FS: 6/23, Abs 38/2.3.2 + FS 7/27, Abs 41/2.4.1.

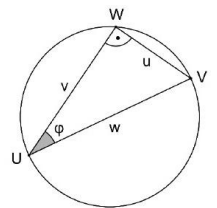
$$\begin{aligned} a^r \cdot b^r &= (a \cdot b)^r & a^r \cdot a^s &= a^{r+s}; & (a^r)^s &= a^{r \cdot s}; & a^{\frac{m}{n}} &= \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \\ \frac{a^r}{b^r} &= \left(\frac{a}{b}\right)^r; & \frac{a^r}{a^s} &= a^{r-s}; & a^{-r} &= \frac{1}{a^r}; \\ \log_a(b \cdot c) &= \log_a(b) + \log_a(c) & \log_a\left(\frac{b}{c}\right) &= \log_a(b) - \log_a(c) & \log_a(b^r) &= r \cdot \log_a(b) \end{aligned}$$

6. **Quadratische Gleichung:** FS: 6/19, Abs 32/2.2.6.

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \text{ und } x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \text{ sind die Lösungen der Gleichung } x^2 + px + q = 0.$$

7. **Rechtwinkliges Dreieck:** FS: 7/34, Ag 243/613.

$$\begin{aligned} (1) \sin(\varphi) &= \frac{u}{w}; \\ (2) \cos(\varphi) &= \frac{v}{w}; \\ (3) \tan(\varphi) &= \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \frac{u}{v}; \end{aligned}$$



8. **Satz des Pythagoras:** FS: 7/29, Ag 238/584.

Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, dann gilt für die Längen u und v der beiden Katheten und die Länge w der Hypotenuse $u^2 + v^2 = w^2$.

Wenn für die Längen u , v und w der Seiten eines Dreiecks $u^2 + v^2 = w^2$ gilt, dann hat dieses Dreieck einen rechten Winkel, der der Seite mit der Länge w gegenüber liegt.

9. **Satz des Thales:** FS: 5/13, Abs 231/9.1.8.

Wenn ein Dreieck beim Eckpunkt W einen rechten Winkel hat, dann liegt W auf dem Kreis, der den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite als Mittelpunkt hat und durch die beiden anderen Eckpunkte verläuft.

Wenn der Eckpunkt W eines Dreiecks auf dem Kreis liegt, der den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite als Mittelpunkt hat und durch die beiden anderen Eckpunkte verläuft, dann hat dieses Dreieck bei W einen rechten Winkel.

10. **Symbole in Verbindung mit Mengen:** FS: –, Ag 102/245 + Ag 317/12.1.

$$\begin{array}{lll}
\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}; & \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}; & [a; b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}; \\
\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}; & \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}; &]a; b[= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}; \\
A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\} & A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\} & A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}
\end{array}$$

11. **Trigonometrie:** FS: 9/60, Abs 114/5.4.3.

$$\begin{array}{lll}
\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi); & \sin(\varphi - 90^\circ) = -\cos(\varphi); & \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1; \\
\cos(-\varphi) = \cos(\varphi); & \cos(\varphi - 90^\circ) = \sin(\varphi); &
\end{array}$$

12. **Winkelmaße:** FS: 9/59, Abs 113/5.4.2.

Beträgt die Größe eines Winkels im Gradmaß 360° , so beträgt sie im Bogenmaß 2π .

16.2.2 Analysis

13. **Ableitung:** FS: 9/54, Abs 140/6.1.3.

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

14. **Ableitungen ausgewählter Funktionen:**

FS: 9/56, Ag 141/327; FS: 9/63, Ag 119/293; FS: 10/73, Ag 163/405 + 167/421.

Term der Funktion	x^r	$\sin(x)$	$\cos(x)$	e^x	$\ln(x)$	$x \ln(x) - x$
Term der Ableitungsfunktion	$r \cdot x^{r-1}$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	e^x	$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$

15. **Ableitungsregeln:** FS: 9/57, Ag 141/329; FS: 11/76, Ag 165/412; FS: 11/77, Ag 166/416.

Term der Funktion	$k \cdot u(x)$	$u(x) + v(x)$	$u(x) \cdot v(x)$	$u(v(x))$
Term der Ableitungsfunktion	$k \cdot u'(x)$	$u'(x) + v'(x)$	$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$	$u'(v(x)) \cdot v'(x)$

16. **Ableitung von Integralfunktionen:** FS: 11/79, Ag 178/454.

Für $I(x) = \int_a^x f(t)dt$ gilt $I'(x) = f(x)$.

17. **Bestimmtes Integral:** FS: 11/80, Ag 179/455.

Ist F eine Stammfunktion von f , so gilt $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

18. **Grenzwerte:** FS: 11/75, Ag 165/410.

Ist $p(x)$ ein Polynom, so gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0$.

Ist $p(x)$ ein nicht konstantes Polynom, so gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{p(x)} = 0$.

Ist $p(x)$ ein Polynom ohne konstanten Summanden, so gilt $\lim_{x \rightarrow 0} p(x) \cdot \ln(x) = 0$.

19. **Rotationskörper:** FS: 11/83, Ag 185/487.

$$V = \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

20. **Schneiden und Berühren zweier Funktionsgraphen:** FS: –, Ag 144/341

Die Graphen zweier Funktionen f und g schneiden sich in einem Punkt genau dann, wenn sie diesen Punkt gemeinsam haben.

Die Graphen zweier Funktionen f und g berühren sich in einem Punkt genau dann, wenn sie diesen Punkt gemeinsam und dort die gleiche Steigung haben.

21. **Zueinander senkrechte Geraden:** FS: 7/28, Ag 237/580.

Zwei Geraden mit den Steigungen m_1 und m_2 sind genau dann senkrecht zueinander, wenn $m_1 \cdot m_2 = -1$ gilt.

16.2.3 Analytische Geometrie / Lineare Algebra**22. Skalarprodukt:** FS: 11/85, Ag 255/664.

$$a \circ b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$a \circ b = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

$$\vec{a} \circ \vec{a} = |\vec{a}|^2.$$

23. Ebenen: FS: 12/91, Ag 265/704.

(i) Parameterform: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$

(ii) Koordinatenform: $n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + k = 0$

(iii) Normalenform: $\vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0$

16.2.4 Stochastik**24. Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit:**

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

FS: 8/39, Ag 329/817 + Ag 331/819.

Die folgenden Aussagen zu Ereignissen A und B sind äquivalent:(i) A und B sind stochastisch unabhängig.

(ii) $P_B(A) = P(A)$

(iii) $P_A(B) = P(B)$

25. Binomialkoeffizient: FS: 8/47, Abs 336/12.3.1.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

26. Zufallsgrößen: FS: 7/38, Ag 326/809; FS 9/51, Ag 346/856; FS: 12/90, Abs 363/13.2.2.(i) Für eine Zufallsgröße $\mathcal{X}$ mit den Werten $x_1, x_2, \dots, x_n$ gilt:

(a) Erwartungswert: $E(\mathcal{X}) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(\mathcal{X} = x_i)$

(b) Varianz: $Var(\mathcal{X}) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(\mathcal{X}))^2 \cdot P(\mathcal{X} = x_i)$

(c) Standardabweichung: $\sqrt{Var(\mathcal{X})}$

(ii) Für eine binomialverteilte Zufallsgröße $\mathcal{X}$ gilt:

(a) $P_p^n(\mathcal{X} = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

(b) Erwartungswert: $\mu = n \cdot p$

(c) Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

(iii) Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsgröße: $\varphi(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

27. Sigma-Regeln: FS: 12/90, Abs 363/13.2.2.Ist $\mathcal{X}$ eine normalverteilte Zufallsgröße, so gilt:

(i) $P(\mu - \sigma \leq \mathcal{X} \leq \mu + \sigma) \approx 68.3\%$

(ii) $P(\mu - 1.64\sigma \leq \mathcal{X} \leq \mu + 1.64\sigma) \approx 90.0\%$

(iii) $P(\mu - 1.96\sigma \leq \mathcal{X} \leq \mu + 1.96\sigma) \approx 95.0\%$

(iv) $P(\mu - 2\sigma \leq \mathcal{X} \leq \mu + 2\sigma) \approx 95.4\%$

(v) $P(\mu - 2.58\sigma \leq \mathcal{X} \leq \mu + 2.58\sigma) \approx 99.0\%$

(vi) $P(\mu - 3\sigma \leq \mathcal{X} \leq \mu + 3\sigma) \approx 99.7\%$

28. **Prognoseintervall und Konfidenzintervall (nicht abirelevant in BW):** FS: –, Abs –.

Für eine binomialverteilte Zufallsgröße gilt näherungsweise:

(i) Prognoseintervall: $\left[p - c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}; p + c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \right]$

(ii) Die Gleichung $|h - p| = c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$ liefert die beiden Grenzen eines Konfidenzintervalls für den Wert von p .

29. **Signifikanztest:** FS: –, Abs 444/14.19.5.

Wird die Nullhypothese irrtümlich abgelehnt, so bezeichnet man dies als Fehler erster Art. Das Signifikanzniveau ist der Wert, den die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art nicht überschreiten soll.

Wird die Nullhypothese irrtümlich nicht abgelehnt, so bezeichnet man dies als Fehler zweiter Art.

16.3 Auszug aus dem WTR Curriculum von Herrn Bittermann

16.3.1 Basisfunktionen bis Klasse 8

Tausender-Trennung ein-/ausschalten

Im Setup-Menü: **SHIFT** **MENU** **▼** **▼** **2**

1000er-Trennung?
1:Ein
2:Aus

--> Werte speichern

gespeicherte Werte abrufen und löschen.

Zahl 13 unter A speichern, Speicher anzeigen und löschen:

1 **3** **STO** **(-)** **=**

SHIFT **STO**

SHIFT **9** **2** **=** **AC**

13→A
13

A=13 B=0
C=0 D=0
E=0 F=0
H=0 X=0

Zurücksetzen?
1:Setupdaten
2:Speicher
3:Alle initialis.

--> Setup-Einstellungen

Einstellung der Präferenzen Bruch oder Dezimalzahl als Ergebnis

SHIFT **MENU** **1**

Option 1: Ausgabe als Zahl in math. Schreibweise

Option 2: Ausgabe als Dezimalzahl

Option 3 und 4: Eingabe ohne math. Schreibweise – nicht zu empfehlen!

1:Math --> Math
2:Math --> Dezim.
3:Lin. --> Linear
4:Lin. --> Dezim.

--> Es kann immer zwischen den Anzeigen umgeschaltet werden mit der Taste **S↔D**. (Schmid - Taste)

Einstellung des Bruchergebnisses als Bruch oder gemischte Zahl.

Empfehlung: als Bruch.

SHIFT **MENU** **▼** **1**

1:ab/c
2:d/c

16.3.2 Wertetabellen von Funktionen (ab Ag 89/206)

--> Im Setup-Menü kann man festlegen, ob die Wertetabelle für eine oder zwei Funktionen angezeigt wird. **SHIFT** **MENU** **▼** **4**

Eingabe der Wertetabelle:

MENU **6** **x** **x²** **=** **2** **x** **=**

Eingabe von Start- und Endwert incl. Schrittweite.

Man kann jetzt direkt in der Wertetabelle einzelne Argumente ändern (überschreiben). Es wird sofort der neue Funktionswert berechnet.

Mit der Taste **AC** kommt man zurück zur Eingabe der Funktionsgleichung.

Aus der Wertetabelle heraus kommt man mit **SHIFT** **OPTN** zur Anzeige des QR-Codes, den man z.B. mit einem Smartphone auslesen kann. Die Schaubilder werden angezeigt.

1:f(x)
2:f(x), g(x)

Tabellenbereich
Start:1
Ende:5
Inkre:1

16.3.3 Berechnung von Binomialkoeffizienten (ab Ag 337/836)

--> Binomialkoeffizienten können direkt berechnet werden,

$\binom{10}{2}$ wird mit nCr im WTR eingegeben:

1 0 SHIFT ÷ 2 =

10C2
45

16.3.4 Die Binomialverteilung (ab Ag 343/852)

--> Einstellung des richtigen Menü-Eintrages:

MENU 4

Menüpunkt **4** führt zur Binomialverteilung, geht man ins Menü der nächsten Seite, kommt man zur kumulierten Binomialverteilung.

Zur Eingabe der Werte für k, n und p geht man zu Eintrag „2:Variable“.

Es können die Werte eingegeben werden. **=** führt wieder zurück zur Eingabe neuer Werte.

Will man eine Übersicht mehrerer Werte für k und/oder p, so geht man zu

„1:Liste“. Es können Werte für k eingegeben werden. **=** führt weiter zur Eingabe der Werte für n und p.

Es können die Werte für k auch direkt in der Tabelle geändert werden.

Geht man mit den Pfeiltasten auf das Ergebnis für P, kann man dieses auch z.B. unter A speichern:

▶ STO (-)

1:Normal-Dichte
2:Kumul. Normal-V
3:Inv. Normal-V
4:Binomial-Dichte

1:Kumul. Binom.-V
2:Poisson-Dichte
3:Kumul. Poisson-V

1:Liste
2:Variable

k	P
1	0,0264
2	0,3019
3	0,3019
4	0,2684

Binomial Dichte 5

k	P
1	0,0264
2	0,3019
3	0,3019
4	0,2684

Binomial Dichte
0,0264241152

16.3.5 Testen von Hypothesen (ab Ag 355/878)

Beispiel: Die Nullhypothese $H_0: p \geq 0,3$ soll mit einem Stichprobenumfang von $n = 200$ auf einem Signifikanzniveau von 5% getestet werden. Bestimmen Sie die Entscheidungsregel.

Hier liegt ein linksseitiger Test vor. X ist die Anzahl der Treffer der Stichprobe und im Extremfall binomialverteilt mit $n=200$ und $p=0,3$.

Es muss gelten: $P(X \leq k) < 0,05$. Gesucht ist der größte Wert für k , der diese Bedingung erfüllt. Der Erwartungswert von X ist $E(X) = 200 \cdot 0,3 = 60$, also muss k kleiner als 60 sein.

Die Wahrscheinlichkeiten sind noch zu hoch. Direkt in der Tabelle können

die Werte für k korrigiert werden. Bestätigung mit **=** führt zur Eingabe von

n und p . **=** auch hier berechnet die Werte neu.

Somit ist der Ablehnungsbereich der Nullhypothese von 0 bis 48, im Bereich von 49 bis 200 kann die Nullhypothese nicht abgelehnt werden.

k	P
1	0,0505
2	0,0695
3	0,0934
4	0,1227

Kumul. Binom.-V 49

k	P
1	0,0249
2	0,0359
3	0,0505
4	0,1227

Kumul. Binom.-V 47

16.3.6 Binomialverteilung: n bestimmen / Mimimi Aufgaben (ab Ag 348/861)

Beispiel: Wie oft muss man das Glücksrad mindestens drehen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über 99% mindestens einmal die Farbe Blau zu bekommen?

Wahrscheinlichkeit für Blau beträgt $\frac{1}{4}$.

Es ist zu berechnen:

$$P(X \geq 1) > 0,99 \Leftrightarrow P(X = 0) < 0,01$$

P ist zu groß. Durch **=** Ändern des Wertes für n .

Für $n=17$ erhält man 0,0075

Binomial-Dichte
k : 0
n : 15
p : 0,25

P=
0,01336346101

P=
7,516946818 $\times 10^{-3}$

16.4 Inhaltsbezogene Kompetenzen für das Abitur des LK

Im LK-Abitur rechne ich ua (thx Hmb) mit den Themen Extremwertag, Tangenten von außerhalb, Vektorbeweis + LGS mit Parameter.

16.4.1 Algebra: (Voraussetzung)

Faktorisierung durch Ausklammern	Ag. 20/2	Abs. 40/2.3.5	Kl. 8
Anwendung einer binomischen Formel 'rückwärts'	Ag. 21/6	Abs. 40/2.3.5	Kl. 8
Substitution	Abs. 40/2.3.5		Kl. 8
Lineare Gleichungen (z.B. $ax = x + 3$)	Ag. 23/18 -	24/20	Kl. 8
Quadratische Gleichungen	Ag. 32/58	33/60	Kl. 8
Potenzgleichungen mit natürlichen Exponenten	Ag. 39/94		Kl. 9
Exponentialgleichungen (mit beliebiger Basis)	Ag. 41/106	Ag. 164/407	Kl. 9+11
Wurzelgleichungen	Abs. 37/2.2.8		Kl. 8+9
Bruchgleichungen	Ag. 35/69		Kl. 8+9
Trigonometrische Gleichungen	Ag. 117/289		Kl. 10
Betragsgleichungen	Ag. 37/79		Kl. 8
Lösen von Ungleichungen	Abs. 35/2.2.7		Kl. 8
Lineare Gleichungssysteme (auch mit Parameter)	Abs. 256/10.1.8	280/10.6	Kl. 8-11
nicht: Mehrfaches Quadrieren (bei mehreren Wurzeltermen), Bruchgleichungen, mit mehreren Linearfaktoren im Nenner, Angabe aller Lösungen bei trigonometrischen Gleichungen, Auflösung einer Ungleichung durch Äquivalenzumformungen, (LGS mit Parameter 'links')			

16.4.2 Analysis: (Im Wahlteil 20 VP)

Kenntnis grundlegender Funktionstypen und ihrer charakteristischen Eigenschaften:

Potenzfunktionen und ganzrationale Funktionen	Abs. 95/5.2.1,	99/5.3	Kl. 9+10
trigonometrische Funktionen	Abs. 112/5.4		Kl. 10
einfache gebrochen-rationale Funktionen	Abs. 121/5.5		Kl. 11
natürliche (und allgemeine neu '24) Exponentialfkt	Abs. 163/6.3		Kl. 11
einfache Wurzel, ln und Umkehr-Funktionen	Abs. 95/5.2,	Ag 169/428	Kl. 9+11
Bei Umkehrfunktionen speziell Definitions und Wertebereich, Graph und Funktionsterm			

Wirkung von Parametern, insbesondere:

Verschiebungen in x - und y -Richtung	Abs. 169/6.3.8,	410/14.8.7	Kl. 8-10
Streckungen in x - und y -Richtung	Abs. 89/208	114/5.4.4	Kl. 8-10
Spiegelungen an x - bzw. y -Achse	Abs. 104/5.3.6		Kl. 8-10

Zusammengesetzte Funktionen: Summen, Differenzen:

einfache Produkte, Quotienten einfache Verkettungen	Abs. 97/5.2.3,	165/6.3.4	Kl. 9-11
---	----------------	-----------	----------

Bestimmung von Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften:

Interpolation; 'Steckbriefaufgaben'	Abs. 158/6.2.10,	282/10.6.2	Kl. 10+11
Funktionenscharen, (Ortslinien fehlt ab 2024)	Abs. 100/5.3.2,	159/6.2.11	Kl. 10
{höhere} Ableitung (e: {higher order} derivative)	Abs. 142/6.1.7,	163/6.3	Kl. 10
Änderungsrate	Abs. 64/4.2.5,	202/8.1.1	Kl. 10-11
Ableitungsfunktion, Tangente und Normale	Abs. 142/6.1.7,		Kl. 10

Ableitungsregeln:

Potenzregel, Summen- und Faktorregel	Abs. 141/6.1.5	141/6.1.6	Kl. 10
Kettenregel, Produktregel	Abs. 165/6.3.4	166/6.3.6	Kl. 11

Untersuchung von Funktionen (quasi madness) und Graphen, insbesondere:

Definitions- und Wertemenge	Ag 169/428,	102/5.3.4	Kl. 9-10
Nullstellen, elementare Symmetrie	Abs. 105/5.3.8	109/5.3.12	Kl. 10
Grenzverhalten, senkrechte und waagerechte Asymptoten	Abs. 104/5.3.7	121/5.5	Kl. 10+11
Monotonie, Krümmungsverhalten	Abs. 149/6.2.4,	153/6.2.6	Kl. 10
Extrempunkte, Wendepunkte	Abs. 147/6.2		Kl. 10

Anwendung der Differenzialrechnung, insbesondere:

Extremwertbestimmungen, auch mit Nebenbedingungen	Abs. 92/5.1.3,	152/6.2.5	Kl. 10
---	----------------	-----------	--------

Stammfunktionen:

Summenregel, Faktorregel, lineare Substitution	Abs. 180/7.1.8,	182/7.1.10	Kl. 11
--	-----------------	------------	--------

Integralfkt, Hauptsatz der Differential- und Integralrg	Abs. 178/7.1.5	179/7.1.6	Kl. 11
---	----------------	-----------	--------

Anwendungen der Integralrechnung:

Berechnung von Flächeninhalten	Abs. 183/7.1.11,	183/7.1.12	Kl. 11
--------------------------------	------------------	------------	--------

(nicht ab 24) Ber. unbegrenzter Flächen + Mittelwerte	Abs. 184/7.1.13	186/7.1.15	Kl. 11
---	-----------------	------------	--------

rekonstruierter Bestand, Volumen von Rotationskörpern	Abs. 181/7.1.9	185/7.1.14	Kl. 11
---	----------------	------------	--------

nicht: Folgen (Abs. 60/4.2), Iterationen (zB Newton), Differenzialgleichungen (Abs. 202/8.1)

16.4.3 Analytische Geometrie: (Im Wahlteil 12.5 VP)

Vektor, Ortsvektor, Betrag	Abs. 254/10.1.4,	253/10.1.2	Kl. 10
----------------------------	------------------	------------	--------

Linearkombination, Geraden	Abs. 256/10.1.9,	256/10.1.10	Kl. 10
----------------------------	------------------	-------------	--------

Ebenen (Parameter-, Koordinaten-, Normalenform),	Abs. 265/10.3		Kl. 12
--	---------------	--	--------

Geraden- und Ebenenscharen	Ag. 259/677,	270/724	Kl. 10+12
----------------------------	--------------	---------	-----------

Lagebeziehungen	Abs: 258/10.1.12,	268/10.3.5,	269/10.3.7	Kl. 10+12
-----------------	-------------------	-------------	------------	-----------

Skalarprodukt, Orthogonalität, Vektorprodukt	Abs. 262/10.2,	271/10.4	Kl. 10+11
--	----------------	----------	-----------

Spiegelungen Abstands- und Winkelberechnungen	Abs. 254/10.1.5,	275/10.5	Kl. 10+12
---	------------------	----------	-----------

Abstand windschiefer Geraden	Abs. 277/10.5.6		Kl. 10+11
------------------------------	-----------------	--	-----------

Flächen- und Volumenberechnungen	Abs. 271/10.4		Kl. 12
----------------------------------	---------------	--	--------

zeichnerische Darstellung von Objekten im Raum:

Schrägbilder, Spurpunkte, Spurgeraden	Abs. 252/10.1.1,	269/10.3.6	Kl. 10+12
---------------------------------------	------------------	------------	-----------

Anwendung der analytischen Geometrie:

Beschreibung von Bewegungen im Raum	Abs: 260/10.1.14,	278/10.5.7	Kl. 10+12
-------------------------------------	-------------------	------------	-----------

nicht ab 2024: Beweise mit Hilfe von Vektoren	Abs. 264/10.2.4		Kl. 11
---	-----------------	--	--------

nicht: Verfahren des geschlossenen Vektorzugs (Abs. 274/10.4.5)

16.4.4 Stochastik: (Im Wahlteil 12.5 VP)

Wahrscheinlichkeitsverteilung	Abs. 321/12.1.4		Kl. 8+9
-------------------------------	-----------------	--	---------

mehrstufige Zufallsexperimente, Bäume, Pfadregeln	Abs. 322/12.1.5		Kl. 8+9
---	-----------------	--	---------

Erwartungswert, Neu: Standardabweichung, Varianz	Abs. 326/12.2.2		Kl. 9
--	-----------------	--	-------

nicht ab 2024: stetige Zufallsgröße, Dichtefunktion	Abs. 361/13.2.1		Kl. 11
---	-----------------	--	--------

Formel von Bernoulli, Binomialverteilung	Abs. 341/12.3.5 -	343/12.3.6	Kl. 10
--	-------------------	------------	--------

Erwartungswert, Standardabweichung Histogramme	Abs. 346/12.3.7,	346/12.3.8	Kl. 10
--	------------------	------------	--------

Testen von Hypothesen mithilfe der Binomialverteilung

ein- und zweiseitiger Test	Abs. 353/13.1.1 -	358/13.1.4	Kl. 11
----------------------------	-------------------	------------	--------

Fehler 1. und 2. Art	Abs. 353/13.1.1,	358/13.1.5	Kl. 11
----------------------	------------------	------------	--------

Normalverteilung (Dichte, μ, σ , Glockenkurve)	Abs. 361/13.2		Kl. 11
---	---------------	--	--------

16.5 Die Abituraufgaben '23-'25, Filme: <http://Abi25.slt.biz>**16.5.1 Pflichtteil Abitur 2025 Filme: <http://Abi25.slt.biz>**

Was sollte ich vom Abitur 2025 nach welcher Unterrichtseinheit können?

Kl. 10: P1a, P2b, P4, W2a, W5, W6, I 1.1abd, I 1.2, III 1a-d, III 2ef

UE 11₂: W1, I 2.1 **UE 11₃:** P1b, P2a, W2b, I 1.1ce, **UE 11₄:** I 2.2,

UE 12₁: P3, W4, II 2\{d} **UE 12₄:** W3, II 1, II 2d, **UE 11₇:** III 1ef **UE 11₈:** III 2a-d,g

Aufgabe P1: Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$.

a₁) (Nach Abs 149/6.2.4, Kl.10, BA 149/360g) Es gilt $f'(2) \neq 0$. Zeigen Sie, dass 2 eine Extremstelle

von f ist. (2 BE) **b₂)** (Nach Abs 186/7.1.15, Kl.11, (BAG 184/482)) Einer der in Abb. 1012/567c abgebildeten Graphen I und II ist der Graph einer Stammfkt von f . Geben Sie diesen Graphen an und begründen Sie Ihre Angabe. (3 BE)

Aufgabe P2: Abb. 1012/567d zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot \cos(x)$.
a₁) (1 BE, nach Abs 186/7.1.15, Kl.11, BAG 182/475) Geben Sie den Wert des Integrals $\int_0^\pi f(x) dx$ an.
b₂) (4 BE, nach Abs 112/5.4, Kl.10, BAG 158/390) Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion g ist gegeben durch $g(x) = a \cdot f(x) + b \cdot x$ mit reellen Zahlen a und b . Die Punkte $(0 | -3)$ und $(\frac{\pi}{2} | \frac{3\pi}{4})$ liegen auf dem Graphen von g . Ermitteln Sie a und b .

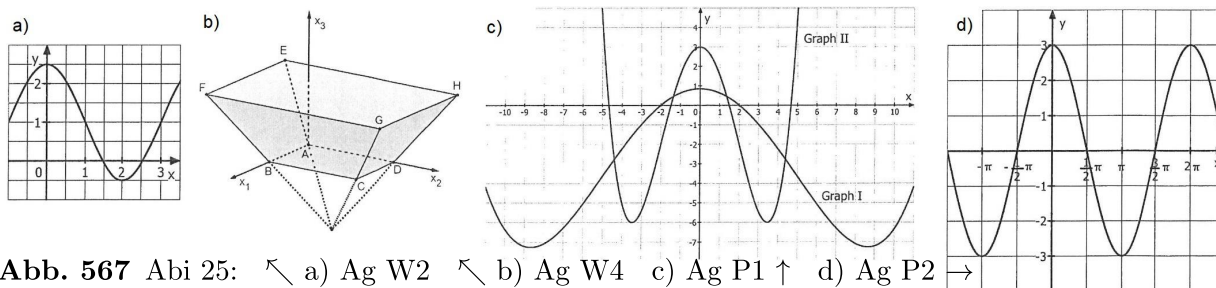


Abb. 567 Abi 25: ↖ a) Ag W2 ↖ b) Ag W4 c) Ag P1 ↑ d) Ag P2 →

Aufgabe P3: (Nach Abs 265/10.3, Kl.12) Abb. 1013/568a zeigt einen Würfel $ABCDEFGH$ der Kantenlänge 4 in einem Koordinatensystem. Drei Seitenflächen dieses Würfels liegen in Koordinatenebenen. Die Ebene K enthält die Punkte $A(0|0|0)$, $B(4|0|0)$ und den Mittelpunkt der Kante $\overline{FG}$.

a₁) (BAG 269/718) Die Ebene K teilt den Würfel in zwei Teilkörper. Berechnen Sie das Volumen des kleineren Teilkörpers. (2 BE)

b₂) (BAG 254/661) Eine zweite Ebene L enthält die Punkte E und F sowie den Mittelpunkt der Kante $\overline{BC}$. Zeichnen Sie die Schnittfigur dieser Ebene mit dem Würfel in Abb. 1013/568a in der Anlage ein und geben Sie eine Gleichung der Schnittgerade der Ebenen K und L an. (3 BE)

Aufgabe P4: (Nach Abs 325/12.2, Kl.9, BAG 328/813) Bei einem Spiel wird ein Würfel zweimal geworfen. Die Seiten des Würfels sind mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert.

a₁) (2 BE) Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, bei keinem der beiden Würfe die Zahl 3 zu erzielen, $\frac{25}{36}$ beträgt. **b₂)** Der Einsatz bei diesem Spiel beträgt 2 Euro. Je nachdem, wie oft dabei die Zahl 3 erzielt wird, werden folgende Auszahlungen getätigt: Bei keiner Drei: Null Euro, bei einer Drei: 5 Euro, bei zwei Dreien: x Euro. Bei wiederholter Durchführung des Spiels ist zu erwarten, dass sich auf lange Sicht Einsätze und Auszahlungen ausgleichen. Ermitteln Sie den Wert von x . (3 BE)

Wahlaufgaben Bearbeiten Sie **zwei** der Aufgaben W1 bis W6.

Aufgabe W1: (5 BE, nach Abs 163/6.3, Kl.11, BAG 160/398) **a₂)** Für jedes $a > 0$ ist eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f_a(x)$ gegeben durch $f_a(x) = x \cdot e^{\frac{x}{a}}$. Der Graph jeder Funktion f_a besitzt einen Extrempunkt E_a . Weisen Sie nach, dass es eine Ursprungsgerade gibt, auf der alle Punkte E_a liegen.

Aufgabe W2: In Abb. 1012/567a ist der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x) = a \cdot \cos(\frac{\pi}{2} \cdot x) + b$ abgebildet; dabei sind a und b reelle Zahlen.

a₁) (Nach Abs 112/5.4, Kl.10, BAG 158/390) Geben Sie die Werte von a und b an (2 BE).

b₄) (3 BE, nach Abs 186/7.1.15, Kl.11, BAG 183/481) Gegeben ist die Funktion J_0 durch $J_0(x) = \int_0^x f(t) dt$ mit $x \in]0; \infty[$. Begründen Sie ohne Rechnung, dass der Graph von J_0 keinen Schnittpunkt mit der x -Achse hat.

Aufgabe W3: (5 BE, nach Abs 275/10.5, Kl.12, BAG 260/683) **a₃)** Die Punkte $A(8|0|0)$, $B(0|6|0)$ und $C(4|3|10)$ sind die Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks mit Basis AB . Das Dreieck ABC wird so um die Achse AB gedreht, dass der entstehende Punkt C^* in der x_1, x_2 -Ebene liegt. Bestimmen Sie die Koordinaten eines möglichen Punkts C^* .

Aufgabe W4: (Nach Abs 265/10.3, Kl.12) Der in Abb. 1012/567b abgebildete Körper $ABCDEFGH$ ist Teil einer geraden Pyramide mit rechteckiger Grundfläche $EFGH$. Die Rechtecke $ABCD$ und

$EFGH$ liegen in zwei zueinander parallelen Ebenen mit dem Abstand 5. Der Flächeninhalt von $EFGH$ ist viermal so groß wie der von $ABCD$. Es gilt: $A(0|0|0)$, $B(4|0|0)$, $C(4|6|0)$ und $D(0|6|0)$. $\downarrow$ (1 BE)

a₁) (BAg 269/718) Geben Sie eine Gleichung einer der beiden Symmetrieebenen des Körpers

$ABCDEFGH$ an.

b₃) (BAg 260/683) Begründen Sie, dass die Koordinaten des Punkts F mit

folgendem Term ermittelt werden können: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ (4 BE).

Aufgabe W5: (Nach Abs 325/12.2, Kl.9, BAg 328/813) Betrachtet wird ein Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert sind.

a₁) Der Würfel wird zweimal geworfen. Die Zufallsgröße $\mathcal{X}$ gibt das Produkt der dabei erzielten Zahlen an. Begründen Sie, dass $P(\mathcal{X} = 10) = P(\mathcal{X} = 15)$ ist. (2 BE)

b₃) Nun wird der Würfel n -mal geworfen, wobei n größer als 2 ist. Ermitteln Sie einen Term, mit dem man die Wahrscheinlichkeit für das folgende Ereignis berechnen kann: 'Das Produkt der n erzielten Zahlen ist 2, 3 oder 5.' (3 BE)

Aufgabe W6: (5 BE, Nach Abs 325/12.2, Kl.9, BAg 332/822) ₃) Zu einem Zufallsexperiment werden zwei stochastisch unabhängige Ereignisse A und B betrachtet. Es gilt $P(B) = P(A) + 0.64$ sowie $P(A \cap \bar{B}) = 0.04$. Bestimmen Sie $P(A)$.

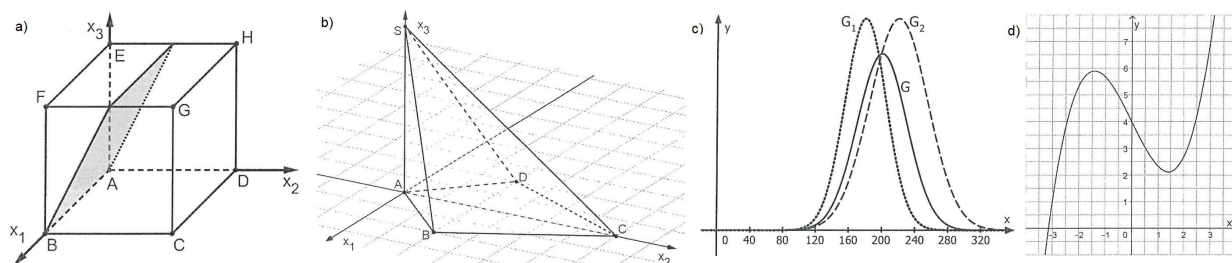


Abb. 568 Abi 2025: $\nwarrow$ a) Ag P3 b) Ag II 1 $\uparrow$ c) Ag III 2 $\uparrow$ d) Ag I 1.1 $\uparrow$

16.5.2 Wahlteil Abitur 2025 Filme: <http://Abi25.slt.biz>

Aufgabe I 1.1 (Nach Abs 149/6.2.4, Kl.10) Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax + 2a$ mit $a \in \mathbb{R}$. Abb 1013/568d zeigt einen Graphen der Schar.

a₂) (BAg 160/400) Der Graph aus Abb 568d verläuft durch den Punkt $(0|4)$. Begründen Sie, dass es sich um den Graphen von f_2 handelt. (2 BE)

b₁) (BAg 151/364) Zeigen Sie rechnerisch, dass jeder Graph der Schar genau einen Wendepunkt besitzt, und geben Sie dessen Koordinaten an. (5 BE)

c₁) (4 BE, nach Abs 186/7.1.15, Kl.11, BAg 182/475) Bestimmen Sie denjenigen Wert von a , für den $\int_0^2 f_a(x) dx = 0$ gilt.

Betrachtet wird im Folgenden die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x + 4$. Die Funktion f entspricht der Funktion f_2 der Schar, Abb. 1013/568d zeigt somit den Graphen G_f von f . Dieser ist symmetrisch bezüglich des Punkts $(0|4)$. Die Tangente an G_f im Punkt $P(3|f(3))$ wird mit t bezeichnet; $y = 7x - 14$ ist eine Gleichung von t .

d₂) (BAg 106/257) Zeigen Sie rechnerisch anhand geeigneter Termumformungen, dass $f(x) - (7x - 14) = \frac{1}{3} \cdot (x - 3)^2 \cdot (x + 6)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Begründen Sie mithilfe dieses Zusammenhangs, dass t und G_f neben P genau einen weiteren gemeinsamen Punkt besitzen. (6 BE)

e₄) (Nach Abs 186/7.1.15, Kl.11) Betrachtet wird die Gleichung $\int_k^{k+1} f(x) dx = 4$ mit $k \in \mathbb{R}$.

(BAg 183/481) Für $-1.5 < k < 1.5$ besitzt diese Gleichung genau eine Lösung. Untersuchen Sie mithilfe von Abb. 1013/568d, wie viele Lösungen diese Gleichung für $k \geq 1.5$ besitzt. (4 BE)

Aufgabe I 1.2 (Nach Abs 149/6.2.4, Kl.10) Die Länge einer Fahrstrecke, die ein Elektroauto mit vollständig geladener Batterie ohne erneutes Aufladen unter bestimmten Bedingungen zurücklegen

kann, wird als Nennreichweite des Elektroautos bezeichnet und ist für jedes Elektroauto ein fester Wert. Die tatsächliche Reichweite hängt von vielen Faktoren ab; im Folgenden wird ausschließlich die Abhängigkeit von der Außentemperatur betrachtet. Diese Abhängigkeit kann für eine Vielzahl von Elektroautos modellhaft im Intervall $[-12; 36]$ durch eine Funktion r beschrieben werden. Dabei ist x die Außentemperatur in $^{\circ}\text{C}$ und $r(x)$ der Quotient aus der tatsächlichen Reichweite eines Elektroautos und dessen Nennreichweite. 1014/569 b zeigt den Graphen der Funktion r . Hat also r beispielsweise für eine bestimmte Außentemperatur den Wert 0,6, so beträgt die tatsächliche Reichweite eines Elektroautos bei dieser Außentemperatur 60% seiner Nennreichweite.

(BAg 187/494) Im Folgenden werden nur Temperaturen im Bereich von -12°C bis 36°C sowie Elektroautos betrachtet, bei denen der durch die Funktion r beschriebene Zusammenhang gilt. $\downarrow$ (4 BE)

a₁) Geben Sie anhand von Abb. 1014/569 b die Koordinaten des Hochpunkts des Graphen von r an. Beschreiben Sie die Bedeutung des Hochpunkts und seiner Koordinaten im Sachzusammenhang.

b₂) Die Nennreichweite eines Elektroautos A beträgt 320 km, die Nennreichweite eines Elektroautos B beträgt 500 km. Bestimmen Sie mithilfe von Abbildung 2 eine Außentemperatur, bei der das Elektroauto A dieselbe tatsächliche Reichweite besitzt wie das Elektroauto B bei einer Außentemperatur von 0°C . (5 BE)

Aufgabe I 2.1 (Nach Abs 163/6.3, Kl.11, BAg 166/413) In einem Tierpark soll ein Tier mit Hilfe einer Diät abnehmen. Die Masse dieses Tieres wird für $t \geq 0$ durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(t) = 36 \cdot e^{-0.05t} + 80$ beschrieben (t in Wochen nach Beginn der Diät, $f(t)$ in Kilogramm).

a₁) Bestimmen Sie die Masse des Tieres sechs Wochen nach Beginn der Diät. (1 BE)

b₁) Geben Sie die Masse an, die das Tier auf lange Sicht erreicht. (1 BE) $\downarrow$ (4 BE)

c₂) Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem das Tier 25% seiner Masse seit Beginn der Diät verloren hat.

d₂) Bestimmen Sie die momentane Abnahme der Masse des Tieres zum Zeitpunkt $t=8$. (3 BE)

e₂) Für alle $t > 0$ gilt $f'(t) < 0$ und $f''(t) > 0$. Geben Sie die Bedeutung dieser Aussage im Sachzusammenhang an. (2 BE)

(BAg 169/430d) Für die Funktion h gilt $h(f(t)) = t$ für $t \in \mathbb{R}$.

f₃) Bestimmen Sie einen Term der Funktion h . (3 BE)

g₃) Für zwei reelle Zahlen v und w gilt $h(v) = w$. Interpretieren Sie diese Gleichung im Sachzusammenhang. (2 BE)

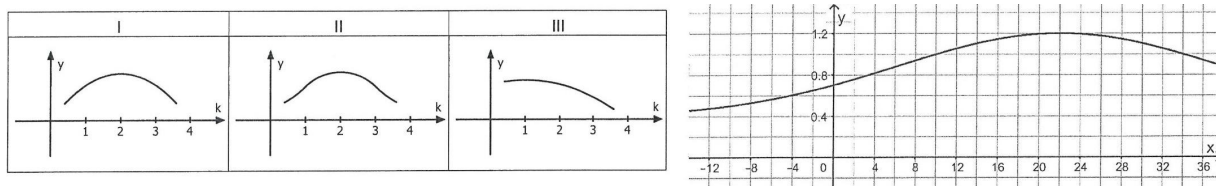


Abb. 569 Abi 2025: $\uparrow$ a) Ag II 2 (Graph von f)

b) Ag I 1.2 $\uparrow$

Aufgabe I 2.2 (Nach Abs 121/5.5, Kl.11) Für jedes $a > 0$ ist eine Funktion g_a gegeben durch $g_a(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{a \cdot x}$ mit maximalem Definitionsbereich. G_a ist der Graph von g_a .

a₁) (BAg 122/303) Geben Sie eine Gleichung der senkrechten Asymptote von G_a an. (1 BE)

b₂) (BAg 187/497) Zeigen Sie, dass für alle $a > 0$ gilt: $\int_1^e g_a(x) dx < 1 - \frac{1}{e}$. (4 BE)

Jeder Graph G_a besitzt genau einen Punkt P_a mit waagerechter Tangente.

c₂) (BAg 159/397) Weisen Sie nach, dass P_a die x -Koordinate $2a$ besitzt. (3 BE)

Für jeden Wert von a gilt: N_a ist der Schnittpunkt von G_a mit der x -Achse.

d₃) BAg 147/349c Der Kreis K_a hat den Mittelpunkt P_a und verläuft durch N_a . Bestimmen Sie denjenigen Wert von a , für den K_a die y -Achse berührt. (6 BE)

Aufgabe II 1 (Nach Abs 275/10.5, Kl.12) Abb. 1013/568b zeigt die Pyramide $ABCD$. Ihre Grundfläche $ABCD$ ist ein Drachenviereck mit den Eckpunkten $A(0|0|0)$, $B(2|2|0)$, $C(0|6|0)$ und $D(-2|2|0)$. Die Spitze der Pyramide liegt im Punkt $S(0|0|6)$.

a₁) (BAg 255/664) Berechnen Sie die Länge der kürzesten der acht Kanten sowie das Volumen der Pyramide $ABCD$. Die Seitenfläche BCS der Pyramide liegt in der Ebene E . (4 BE)

b₃) (BAgn 266/708 + 267/712) Betrachtet werden die Vektoren $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$, deren Koordinaten nicht alle gleich null sind. Begründen Sie, dass ein solcher Vektor, für den $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ gilt, ein Normalenvektor von E ist. (3 BE)

c₁) (BAg 275/740) Die Ebene E hat die Gleichung $2x_1 + x_2 + x_3 = 6$. Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den E mit der x_1x_2 -Ebene einschließt. (3 BE)

Gegeben ist die Schar der Ebenen $F_K : k \cdot x_2 + (k - 2) \cdot x_3 = 2k$ mit $k \in]0; 3[$. Jede Ebene F_k der Schar schneidet die Pyramide $ABCD$ in einem Dreieck BDQ_k , wobei der Pkt Q_k auf der Strecke SC liegt.

d₂) (BAg 269/718) Geben Sie eine Gleichung der Ebene F_2 an und zeichnen Sie in Abb 1013/568 die Schnittfigur von F_2 mit der Pyramide $ABCD$ ein. (4 BE)

e₃) (BAg 153/372d) Es gibt einen Wert von k , für den der Flächeninhalt des Dreiecks BDQ_k minimal ist. Ermitteln Sie diesen Wert. (6 BE)

Aufgabe II 2 (Nach Abs 265/10.3, Kl.12) Gegeben ist die Ebene $F : x_1 - 3x_2 - x_3 = -6$.

a₁) (BAg 269/718) Stellen Sie F in einem Koordinatensystem dar. (2 BE)

b₁) (BAg 275/740) Berechnen Sie die Größe des Winkels, den F mit der Ebene $G : -2x_1 + 6x_2 = 8$ einschließt. (3 BE)

Betrachtet wird die Schar der Ebenen $E_k : 2x_1 - 6x_2 + (4 - k) \cdot x_3 = -2k$ mit $k \in \mathbb{R}$. ↓(1 BE)

c₁) (BAg 271/726) Die Ebene F gehört zu dieser Schar. Geben Sie den zugehörigen Wert von k an.

d₂) (BAg 275/741, nach Abs 275/10.5, 3 BE) Für einen Wert von k ist E_k orthogonal zu F . Ermitteln Sie diesen Wert von k .

e₄) (BAg 153/372d) Für jedes k mit $0.4 < k < 3.6$ sind die Spurpunkte von E_k auf der x_1 - und der x_2 -Achse und der Punkt $(0|\frac{4}{3}|0)$ die Eckpunkte eines Dreiecks D_k . Einer der drei abgebildeten Graphen stellt den Flächeninhalt von D_k in Abhängigkeit von k dar. Entscheiden Sie, welcher Graph aus Abb 1014/569a das ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung. (4 BE)

f₂₋₃) (BAg 270/724) Es gibt eine Gerade h , die in allen Ebenen der Schar liegt. Ermitteln Sie eine Gleichung von h . (4 BE)

$$\text{Zur Kontrolle } \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

g₁) (BAg 268/714) Begründen Sie, dass h parallel zur x_1x_2 -Ebene verläuft. (1 BE)

h₃) (BAg 270/724f) Die Ebene J enthält die Gerade h , sie ist jedoch keine Ebene der Schar. Geben Sie eine Gleichung von J an. (2 BE)

Aufgabe III 1 (BAg 349/863, nach Abs 336/12.3, Kl.10) Unter den Touristen eines Naturparks nutzen erfahrungsgemäß 14 % das Fahrrad für Ausflüge vor Ort. Im Folgenden werden diese Touristen als Radausflügler bezeichnet. Es soll davon ausgegangen werden, dass in einer zufälligen Auswahl von Touristen des Naturparks die Anzahl der Radausflügler binomialverteilt ist. Für eine Stichprobe werden 300 Touristen des Naturparks zufällig ausgewählt.

a₁) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in der Stichprobe genau 36 Radausflügler befinden. (1 BE)

b₁) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der Radausflügler in der Stichprobe um mindestens 10 % größer ist als der Erwartungswert für diese Anzahl. (3 BE)

(BAG 330/818) Um den Naturpark als Reiseziel attraktiver zu machen, setzt der dortige Tourismusverband Shuttlebusse ein. Die Fahrkarten für diese Busse können ausschließlich online gebucht werden und sind jeweils für einen bestimmten Tag gültig. Erfahrungsgemäß werden 80 % aller gebuchten Fahrkarten spätestens am Vortag der Fahrt gebucht. Von diesen spätestens am Vortag gebuchten Fahrkarten werden 90 % auch tatsächlich genutzt. Bei den restlichen, erst am Tag der Fahrt gebuchten Fahrkarten liegt dieser Anteil mit 95 % etwas höher.

c₂) (3 BE) Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar. ↓ (3 BE)

d₃) Betrachtet wird eine zufällig ausgewählte, nicht genutzte Fahrkarte. Beurteilen Sie die folgende Aussage: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Fahrkarte spätestens am Vortag gebucht wurde, ist achtmal so groß wie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie erst am Tag der Fahrt gebucht wurde.

(BAG 360/893, nach Abs 353/13.1) Der Tourismusverband vermutet, dass sich der bisherige Anteil der Radausflügler unter den Touristen von 14 % durch den Einsatz der Shuttlebusse erhöht hat. Die Verantwortlichen planen die Durchführung eines Signifikanztests mit einem Signifikanzniveau von 8 % und der Nullhypothese 'Der Anteil der Radausflügler unter allen Touristen liegt bei höchstens 14 %.' Vor der Durchführung des Tests wird festgelegt, die Shuttlebusse nur dann weiter zu betreiben, wenn die Nullhypothese aufgrund des Testergebnisses abgelehnt wird.

e₂) Es ist geplant, den Test auf der Grundlage einer Stichprobe von 500 Touristen durchzuführen. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel. (5 BE)

f₄) Angenommen, der beschriebene Test wird auf der Grundlage einer Stichprobe von nur 200 Touristen durchgeführt. In diesem Fall wird die Nullhypothese abgelehnt, wenn sich unter diesen mehr als 35 Radausflügler befinden. Damit die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art höchstens 15 % beträgt, muss der tatsächliche Anteil der Radausflügler unter allen Touristen mindestens einen bestimmten Wert haben. Ermitteln Sie diesen Wert auf ganze Prozent genau und beschreiben Sie die Bedeutung des Fehlers zweiter Art im Sachzusammenhang. (5 BE)

Aufgabe III 2 (BAG 364/905 ab 1, nach Abs 361/13.2, Kl.11) Die Zufallsgröße Z gibt die Fahrzeit eines Linienbusses zwischen zwei bestimmten Haltestellen an. Sie kann näherungsweise als normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 200$ und der Standardabweichung $\sigma = 30$ angenommen werden (alle Werte in Sekunden).

a₁) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer zufällig ausgewählten Fahrt die Fahrzeit zwischen den beiden Haltestellen weniger als 150 Sekunden beträgt. (1 BE)

b₂) Ermitteln Sie das kleinste Intervall, in dem die Fahrzeit einer zufällig ausgewählten Fahrt mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 % liegt. (4 BE)

c₂) (BAG 349/863) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von zehn zufällig ausgewählten Fahrten die Fahrzeit bei genau zwei Fahrten mehr als 220 Sekunden beträgt. (3 BE)

An Markttagen ist die Fahrzeit zwischen den beiden Haltestellen durchschnittlich etwas länger als an den übrigen Tagen. Diese Fahrzeit kann durch die normalverteilte Zufallsgröße Z^* beschrieben werden.

d₃) (BAG 365/906) In Abb. 1013/568c ist G der Graph der Dichtefunktion von Z . Untersuchen Sie, ob einer der Graphen G_1 und G_2 der Graph der Dichtefunktion von Z^* sein könnte. (3 BE)

(Nach Abs 325/12.2, Kl.9) Eine Fahrt mit einer Fahrzeit von mehr als 240 Sekunden zwischen den beiden Haltestellen gilt als verspätet. Dies ist bei 9% aller Fahrten der Fall. 20% aller Fahrten finden an Markttagen statt. Ein Viertel der Fahrten an Markttagen ist verspätet. Zu einer zufällig ausgewählten Fahrt werden folgende Ereignisse betrachtet:

V: 'Die Fahrt ist verspätet.'

M: 'Die Fahrt findet an einem Markttag statt.'

↓(4 BE)

e₂) (BAG 325/807) Stellen Sie den Sachverhalt in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar.

f₂) (BAG 330/818) Von den Fahrten ohne Verspätung wird eine Fahrt zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese an einem Tag ohne Markt stattfindet. (2 BE)

g₄) (BAG 364/905 ab 1, nach Abs 361/13.2, Kl.11, 4 BE) Eine städtische Mitarbeiterin hält 240 Sekunden als Grenze, ab der eine Fahrt als verspätet gilt, für zu streng. Deshalb schlägt sie vor, eine neue Grenze so festzulegen, dass nur noch 15 % der Fahrten an einem Markttag als verspätet gelten. Mit dieser neuen Grenze finden 51% der verspäteten Fahrten an einem Markttag statt. Bestimmen Sie diese neue Grenze.

16.5.3 Pflichtteil Abitur 2024 Filme: <http://Abi24.slt.biz>

Was sollte ich vom Abitur 2024 nach welcher Unterrichtseinheit können?

Kl. 10: P1b, P4, W1, W4a, W5, W6, I1.1\c, I1.2\d, I.2.2, II.1.1a, II2c, III1a-c+g+h, III2a-d

UE 11₂: P2, I2.1a-c+f,

UE 11₃: P1a, I1.1c, I1.2d, I2.1e+f,

UE 12₁: P3, W2, II.1.1b+c+e+g, II2\c

UE 12₄: W3, W4b, II.1.1df, II2f

UE 11₇: III1d-f

UE 11₈: III2e-h

Aufgabe P1: (Nach Abs 186/7.1.15, Kl.11; (BAG 183/481)) Die Abb. 1017/570a zeigt den Graphen G_f der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x) = 2 \cdot \sin(\frac{1}{2} \cdot x)$.

a₂) (2 BE) Beurteilen Sie mithilfe der Abbildung, ob der Wert des Integrals $\int_{-2}^8 f(x)dx$ negativ ist.

b₂) (3 BE) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die folgende Aussage zutrifft: Die Tangente an G_f im Koordinatenursprung ist die Gerade durch die Punkte $(-1 | -1)$ und $(1 | 1)$.

Aufgabe P2: (Nach Abs 163/6.3.2; (BAG 167/417)) G_f ist der Graph der Fkt f mit $f(x) = e^{2x-1}$.

a₁) (2 BE) G_f besitzt einen Schnittpunkt mit einer Koordinatenachse und eine Asymptote. Geben Sie die Koordinaten dieses Schnittpunkts sowie eine Gleichung dieser Asymptote an.

b₂) (3 BE) G_g ist der Graph der Funktion g mit $g(x) = e^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x}$. Es gilt $g'(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$. Zeigen Sie, dass sich G_g und G_f an der Stelle $x_0 = \frac{1}{2}$ orthogonal schneiden.

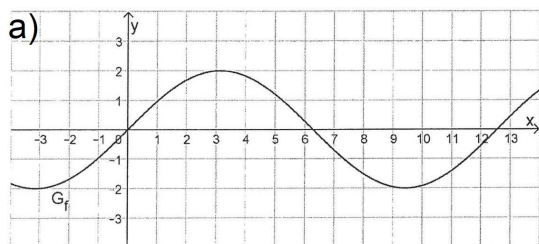
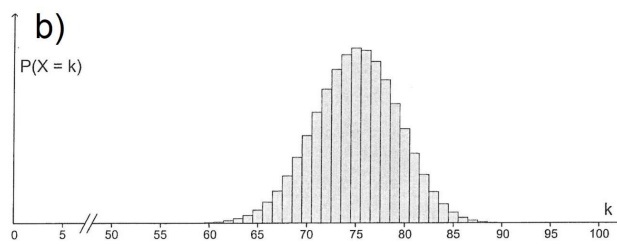


Abb. 570

Aufgabe P1



Aufgabe P4

Aufgabe P3: (Nach Abs 265/10.3, (BAG 270/724)) Gegeben ist die Schar der Ebenen

$E_a : 2ax_1 - 4x_2 + (a-2) \cdot x_3 = 12$ mit $a \in \mathbb{R}$. **a₁₋₂)** (2 BE) Ermitteln Sie denjenigen Wert von a ,

für den E_a parallel zur Gerade mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ verläuft.

b₂) (3 BE) Prüfen Sie, ob die Ebene mit der Gleichung $6x_1 - 8x_2 + x_3 = 24$ zur Schar gehört.

Aufgabe P4: (Nach Abs 336/12.3 Kl. 10, (BAG 346/857)) Ein Glücksrad ist in 20 gleich große Sektoren unterteilt, die entweder blau oder gelb eingefärbt sind. Das Glücksrad wird 100-mal gedreht. Die binomialverteilte Zufallsgröße $\mathcal{X}$ beschreibt die Anzahl, wie oft dabei die Farbe 'Blau', die binomialverteilte Zufallsgröße $\mathcal{Y}$, wie oft dabei die Farbe 'Gelb' erzielt wird.

a₂) (BAG 346/856) (2 BE) Begründen Sie, dass $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ die gleiche Standardabweichung haben.

b₂₋₃) (BAG 346/857h) (3 BE) Der Erwartungswert von $\mathcal{X}$ ist ganzzahlig. Die Abb. 1017/570b zeigt

Werte der Wahrscheinlichkeitsverteilung von $\mathcal{X}$. Bestimmen Sie die Anzahl der blauen Sektoren des Glücksrads.

Wahlaufgaben Bearbeiten Sie **zwei** der Aufgaben W1 bis W6.

Aufgabe W1: (Nach Abs 143/6.1.8, (BAG 144/340)) Gegeben ist für jede positive reelle Zahl a die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f_a mit $f_a(x) = a \cdot x^2$. Die Abb 1018/571a zeigt den Graphen von $f_{\frac{1}{2}}$ sowie die Tangente t an den Graphen von $f_{\frac{1}{2}}$ im Punkt $(4|f_{\frac{1}{2}}(4))$.

a₁) (1 BE) Geben Sie anhand der Abbildung eine Gleichung der Tangente t an.

b₂₋₃) (4 BE) Weisen Sie nach, dass für jeden Wert $u \in \mathbb{R}$ die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $(u|f_a(u))$ die y -Achse im Punkt $(0| -f_a(u))$ schneidet.

Aufgabe W2: (Nach Abs 186/7.1.15, Kl.11; BAG 183/481+169/430) (5 BE)

s) Abb 1018/571b zeigt die Graphen einer Funktion f sowie ihrer Umkehrfunktion $\bar{f}$. F ist eine Stammfunktion von f . Die Punkte $P(4|2)$ und $Q(6|3)$ liegen auf dem Graphen von $\bar{f}$. Begründen Sie mithilfe geeigneter Eintragungen in der Abbildung, dass der Inhalt der markierten Fläche durch $10 - (F(3) - F(2))$ berechnet werden kann.

Aufgabe W3: (Nach Abs 275/10.5, (BAG 276/745)) Die Mittelpunkte der Seitenflächen eines Würfels sind die Eckpunkte eines Oktaeders (vgl. Abb 1018/571c). Die Eckpunkte $A(1|2|1)$, B , $C(-3|-6|9)$ und D des Oktaeders liegen in der Ebene H mit der Gleichung $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6$.

a₁) (2 BE) Weisen Sie nach, dass die Kantenlänge des Würfels 12 beträgt.

b₃) (3 BE) Bestimmen Sie die Koordinaten eines der beiden Eckpunkte des Oktaeders, die nicht in H liegen.

Aufgabe W4: (Nach Abs 275/10.5, (BAG 276/745)) Gegeben ist die Schar der Geraden

$$g_k: \vec{x} = \begin{pmatrix} k \\ -4k \\ k \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \mu \in \mathbb{R} \text{ und } k \in \mathbb{R}.$$

a₁) (1 BE) Begründen Sie, dass alle Geraden der Schar parallel zueinander sind.

b₄) (4 BE) Betrachtet wird das Quadrat mit folgenden Eigenschaften: (i) Die Punkte $O(0|0|0)$ und $P(11|4|5)$ sind Eckpunkte des Quadrats. (ii) Zwei Seiten des Quadrats liegen auf Geraden der Schar. Weisen Sie nach, dass O und P keine benachbarten Eckpunkte dieses Quadrats sind.

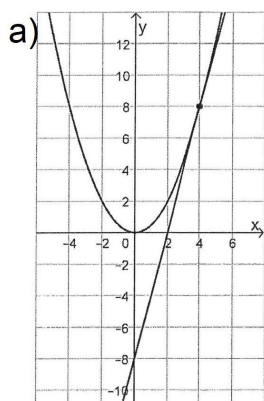
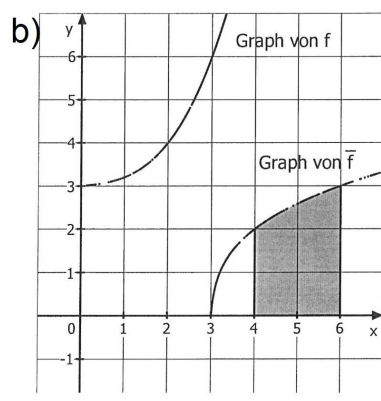
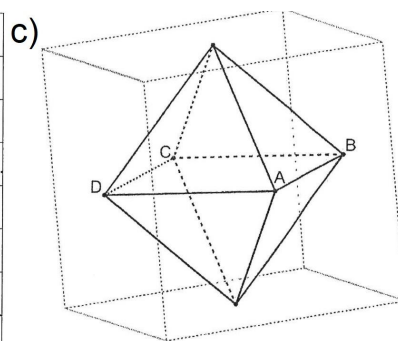


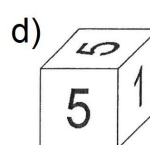
Abb. 571 Aufgabe W1



W2



W3



W5

Aufgabe W5: (Nach Abs 326/12.2.2, Kl.9, (BAG 327/812)) (5 BE)

3-4) Die drei nicht sichtbaren Seiten des in Abb 1018/571d abgebildeten Würfels sollen jeweils mit einer der Zahlen 3, 4, 5 oder 6 beschriftet werden. Dabei können Zahlen auch mehrfach verwendet werden. Nach der Beschriftung soll der Würfel folgende Eigenschaften haben:

i) Beim einmaligen Werfen ist der Erwartungswert für die erzielte Zahl gleich 4.

ii) Auf den sechs Seiten des Würfels kommen genau drei verschiedene Zahlen vor.

iii) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim zweimaligen Werfen des Würfels zweimal die gleiche Zahl erzielt wird, beträgt $\frac{1}{2}$.

Untersuchen Sie, ob es möglich ist, die nicht sichtbaren Seiten des Würfels so zu beschriften, dass er alle drei Eigenschaften besitzt.

Aufgabe W6: (Nach Abs 331/12.2.5, Kl.9, (BAG 332/822)) (5 BE)

3) Bei einem Zufallsexperiment gilt für zwei Ereignisse A und B :

i) $P(A \cap B) = 3x$ mit $x > 0$, ii) $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$, iii) $P_B(A) = \frac{3}{4}$.

Stellen Sie den beschriebenen Zusammenhang in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar und begründen Sie, dass $x \leq \frac{1}{5}$ gelten muss.

16.5.4 Wahlteil Abitur 2024 Filme: <http://Abi24.slt.biz>

Aufgabe I 1.1 (A1.1): (Nach Abs 147/6.2) Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_{a,b}$ durch $f_{a,b} = ax^3 - bx$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$. Abb. 1021/573a zeigt den Graphen einer der Fktn der Schar. a_{2-3} (BAG 110/270) (2 BE) Begründen Sie, dass jeder Graph der Schar symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist.

b_2) (BAG 149/360g) (6 BE) Weisen Sie in Abhängigkeit von a und b nach, dass der Graph von $f_{a,b}$ einen Tiefpunkt mit der x -Koordinate $\sqrt{\frac{b}{3a}}$ hat. Begründen Sie, dass er zudem einen Hochpunkt besitzt und dass dieser eine kleinere x -Koordinate hat als der Tiefpunkt.

c_{2-3}) (Nach Abs 186/7.1.15, (BAG 183/478)) (7 BE) Es gibt eine Funktion der Schar, die bei $x = 3$ eine Nullstelle hat und deren Graph im vierten Quadranten mit der x -Achse ein Flächenstück mit dem Inhalt 40.5 einschließt. Bestimmen Sie die zugehörigen Werte von a und b .

Die Funktion der Schar, deren Graph in Abb. 1021/573a dargestellt ist, wird mit f bezeichnet; ihr Funktionsterm ist $f(x) = x^3 - 4x$.

d_2) (BAG 143/338) (7 BE) Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $A(2|0)$, die x -Achse und die Gerade g mit der Gleichung $y = -x - 2$ schließen ein Dreieck ein. Berechnen Sie seinen Flächeninhalt.

e_4) (BAG 254/658 + 256/669) (4 BE) Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist: Ist P ein beliebiger Punkt auf dem Graphen von f , so liegt der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke von P und dem Koordinatenursprung auf dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion h mit $h(x) = 4x^3 - 4x$.

Aufgabe I 1.2 (A1.2): (Nach Abs 147/6.2) Die Leitung eines großen Unternehmens versendet jeden Arbeitstag um 7:00 Uhr eine E-Mail mit tagesaktuellen Informationen an alle Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter. Diese wurden gebeten, nach dem Lesen der E-Mail eine Lesebestätigung zu versenden. Die folgende Tabelle zeigt für einen bestimmten Tag, wie viele Lesebestätigungen bei der Leitung des Unternehmens bis zum jeweiligen Zeitpunkt bereits eingegangen sind.

Zeitpunkt (Uhrzeit)	7:30	8:00	8:30	9:00	9:30	10:00	...	14:30	15:00	...
Anzahl der bis dahin eingegangenen Lesebestätigungen	252	899	1701	2627	3503	4364	...	7552	7572	...

Beispielsweise sind von 7:00 Uhr bis 10:00 Uhr 4364 Lesebestätigungen eingegangen.

a_1) (BAG 142/333) (3 BE) Ermitteln Sie mithilfe der Tabelle für den betrachteten Tag, wie viele Lesebestätigungen im Zeitraum von 8:30 Uhr bis 10:00 Uhr im Mittel pro Stunde eingegangen sind.

Auf der Grundlage der über viele Tage erfassten Lesebestätigungen wurde mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen u mit $u(x) = 100x^3 - 900x^2 + 2300x$ und v mit $v(x) = 20x^2 - 520x + 2880$ die Funktion k entwickelt: $k(x) = \begin{cases} u(x) & \text{für } 0 \leq x < 3 \\ v(x) & \text{für } 3 \leq x \leq 8 \end{cases}$

Die Funktion k beschreibt modellhaft für einen Zeitraum von acht Stunden eines Arbeitstages die zeitliche Entwicklung der momentanen Änderungsrate der Anzahl der eingegangenen Lesebestätigungen. Dabei ist x die seit 7:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden und $k(x)$ die momentane Änderungsrate der Anzahl der seit 7:00 Uhr eingegangenen Lesebestätigungen in der Einheit $\frac{1}{h}$.

b_2) (BAG 154/379) (3 BE) Berechnen Sie $k(2)$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

c_2) (3 BE) Es gilt $v(x) = 20 \cdot (x - 18) \cdot (x - 8)$. Begründen Sie, dass die Funktion v nicht geeignet ist,

die momentane Änderungsrate auch für den Zeitraum nach 15:00 Uhr zu beschreiben.

d₂) (Nach Abs 186/7.1.15, BAbs 181/7.1.9) (5 BE) Berechnen Sie mithilfe der Funktion k die Anzahl der im Zeitraum von 10:00 Uhr bis 15:00 Uhr eines Arbeitstages eingegangenen Lesebestätigungen. Ermitteln Sie, um wie viel Prozent diese auf der Grundlage des Modells berechnete Anzahl von der entsprechenden Anzahl des eingangs betrachteten Tages (vgl. Tabelle) abweicht.

Aufgabe I 2.1 (A2.1): (Nach Abs 186/7.1.15) Zur Untersuchung der Lungenfunktion muss eine Person tief einatmen und anschließend zügig in ein Messgerät ausatmen. Die Änderungsrate des Luftvolumens pro Zeiteinheit beim Ausatmen heißt Atemfluss. Bei einer Messung wird der Atemfluss für $0 \leq t \leq 2$ näherungsweise durch die Funktion f mit $f(t) = 30 \cdot (e^{-3t} - e^{-6t})$ beschrieben (t in Sekunden seit Beginn des Ausatmens, $f(t)$ in Liter pro Sekunde). In Abb. 1020/572a ist der Graph von f abgebildet. Für die Ableitungsfunktion f' Graph von f gilt $f'(t) = -90e^{-3t} \cdot (1 - 2e^{-3t})$.

a₂) (BAG 171/433)a (4 BE) Weisen Sie nach, dass der maximale Atemfluss 7.5 Liter pro Sekunde beträgt.

b₂) (2 BE) Zeigen Sie, dass der Atemfluss zwei Sekunden nach Beginn des Ausatmens weniger als ein Prozent seines maximalen Werts beträgt.

c₃) (BAG 171/433)c (7 BE) Bestimmen Sie rechnerisch die Länge des Zeitraums, in dem der Atemfluss mindestens 5 Liter pro Sekunde beträgt.

d₂₋₃) (BAG 187/494) (3 BE) Formulieren Sie eine Fragestellung im Sachzusammenhang, die auf die Gleichung $\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{4} \cdot \int_0^2 f(t)dt$ führt.

e₂₋₃) (BAG 182/474) (4 BE) Berechnen Sie $\int_0^2 f(t)dt$.

f₂₋₃) (BAG 143/338) (4 BE) Bei einer anderen Modellierung wird der Atemfluss ab dem Zeitpunkt $t_1 = 1.5$ nicht mehr durch die Funktion f , sondern durch die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(1.5|f(1.5))$ beschrieben. Bei dieser Modellierung gibt es einen Zeitpunkt ($t_2 > 0$, zu dem der Atemfluss 0 Liter pro Sekunde beträgt. Bestimmen Sie den Wert von t_2 .

g₃₋₄) (4 BE) Bei ärztlichen Untersuchungen werden Atemfluss-Volumen-Diagramme betrachtet. Diese stellen den Atemfluss in Abhängigkeit vom Volumen der ausgeatmeten Luft dar. In Abb. 1020/572b ist das Diagramm zu derjenigen Messung, die durch die Funktion f beschrieben wird abgebildet. Betrachtet wird der Hochpunkt $H(x_0|y_0)$ der abgebildeten Kurve. Begründen Sie, dass y_0 der in a) genannte maximale Atemfluss ist, und geben Sie einen Term an, mit dem man x_0 berechnen kann.

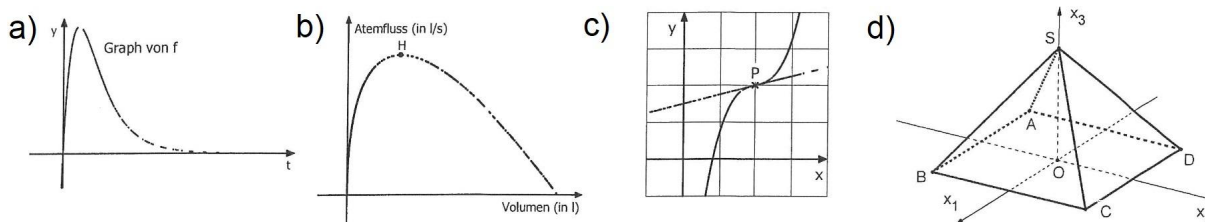


Abb. 572 Aufgabe I 2.1 (A2.1),

I 2.1g,

I 2.2 (A2.2),

II 1.1 (B1.1)

Aufgabe I 2.2 (A2.2): (Nach Abs 147/6.2) Für jedes a mit $0 < a < 1$ ist eine Funktion f_a mit $f_a(x) = (x-2)^3 + a(x-2) + 2$ gegeben.

a₂) (BAG 153/375) (4 BE) Weisen Sie nach, dass jede Funktion f_a streng monoton wachsend ist.

Die Tangente t_a an den Graphen von f_a im Punkt $P(2|2)$ (Abb. 1020/572c), die Tangente an den Graphen der Umkehrfunktion $\tilde{f}_a$ im Punkt P und die Koordinatenachsen schließen im 1. Quadranten des Koordinatensystems ein Viereck V_a ein. Q_a ist der Schnittpunkt von t_a mit der y -Achse. Abgebildet (Abb. 1020/572c) sind beispielhaft der Graph von $f_{0.25}$ sowie die Tangente $t_{0.25}$.

b₂₋₃) (BAG 143/338) (5 BE) Begründen Sie, dass der Punkt Q_a zwischen dem Ursprung und dem Punkt $(0|2)$ liegt und dass der Flächeninhalt des Vierecks V_a kleiner als 4 ist.

c₂) (BAG 143/338) (3 BE) Für einen Wert von a hat der Innenwinkel des Vierecks V_a bei P die Größe 60° . Begründen Sie ohne Berechnung des Werts von a , dass der Steigungswinkel der zugehörigen Tangente t_a die Größe 15° hat.

Aufgabe II 1.1 (B1.1): Nach Abs. 275/10.5. Abb. 1020/572d zeigt die Pyramide $ABCD S$ mit den Eckpunkten $A(-3|-3|0)$, $B(3|-3|0)$, $C(3|3|0)$, $D(-3|3|0)$ und $S(0|0|4)$ sowie den Punkt $O(0|0|0)$, der in der quadratischen Grundfläche der Pyramide liegt. Die Seitenfläche CDS der Pyramide liegt in der Ebene E .

a₁) (BAG 242/603 oder 272/730) (4 BE) Berechnen Sie den Inhalt der Oberfläche der Pyramide.

b₂₋₃) (BAG 264/699) (3 BE) Genau eine der folgenden Gleichungen i) bis iii) beschreibt eine Symmetrieebene der Pyramide. Geben Sie diese Gleichung an und begründen Sie für eine der anderen Gleichungen, dass die durch sie beschriebene Ebene keine Symmetrieebene der Pyramide ist.

i) $x_1 - x_3 = 0$, ii) $x_1 + x_2 + x_3 = 4$, iii) $x_1 + x_2 = 0$

c₁) (BAG 267/712) (3 BE) Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

(zur Kontrolle: $4x_2 + 3x_3 = 12$)

d₃) (BAG 275/743 + 277/750) (5 BE) Es gibt einen Punkt $P(0|0|p)$, der im Innern der Pyramide liegt und von allen vier Seitenflächen sowie der Grundfläche der Pyramide den gleichen Abstand hat. Mithilfe des folgenden Gleichungssystems lässt sich der Wert von p bestimmen:

i) $\vec{OQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, ii) $4 \cdot 4t + 3 \cdot (p + 3t) = 12$, iii) $|\vec{PQ}| = p$.

Erläutern Sie die Überlegungen im geometrischen Zusammenhang, die diesem Vorgehen zur Bestimmung des Werts von p zugrunde liegen.

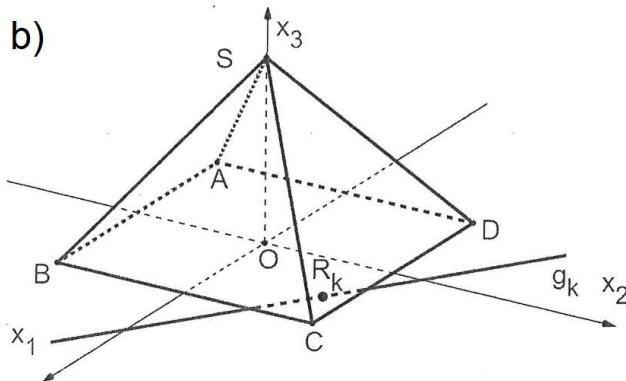
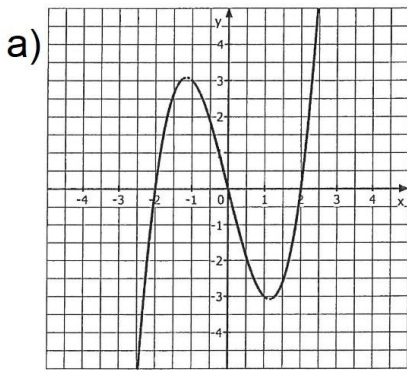


Abb. 573 zu Aufgabe I 1.1a (A1.1)

Beiblatt zu Aufgabe II 1 (B.1) das abzugeben ist

Die Ebene E gehört zur Schar der Ebenen $E_k: 4k \cdot x_1 + 4 \cdot \sqrt{1 - k^2} \cdot x_2 + 3x_3 = 12$ mit $k \in [-1; 1]$. Die Seitenfläche ADS der Pyramide liegt in der Ebene E_{-1} der Schar, die Seitenfläche BCS in der Ebene E_1 .

e₁) (BAG 270/724) (1 BE) Zeigen Sie, dass der Punkt S in allen Ebenen der Schar enthalten ist.

f₂) (BAG 275/741+270/724) (4 BE) Weisen Sie nach, dass die Größe des Winkels, unter dem die Gerade OS die Ebene E_k schneidet, unabhängig von k ist.

Jede Ebene E_k der Schar schneidet die x_1x_2 -Ebene in einer Geraden g_k . Mit R_k wird jeweils derjenige Punkt auf g_k bezeichnet, der von O den kleinsten Abstand hat. In Abb. 1021/573b sind g_k und R_k beispielhaft für eine Ebene E_k der Schar dargestellt.

g₁₋₂) (BAG 276/744) (2 BE) Zeichnen Sie die Punkte R_{-1} und R_1 in Abb. 1021/573b ein.

h₃) (3 BE) Durchläuft k alle Werte von -1 bis 1 , dann dreht sich die Fläche OR_kS um die Strecke $\overline{OS}$. Dabei entsteht ein Körper. Beschreiben Sie die Form des entstehenden Körpers und bestimmen Sie das Volumen dieses Körpers.

Aufgabe II 2 (B2): Nach Abs. 275/10.5. Gegeben sind die Ebene $E: 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 12$ und die

Schar der Geraden $g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a-2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

a₁₋₂) (BAG 275/741) (2 BE) Untersuchen Sie, ob g_4 orthogonal zu $g_{0,5}$ ist.

b₁₋₂) (BAG 275/741) (3 BE) Berechnen Sie die Größe des Winkels, den g_4 mit E einschließt.

c₂) (BAG 257/670) (3 BE) Untersuchen Sie, ob eine Gerade der Schar den Ursprung enthält.

d₂) (BAG 267/711h) (4 BE) Alle Geraden der Schar liegen in der Ebene F . Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung von F . (Kontrollerg.: $x_1 - 2x_2 - x_3 = -8$)

Betrachtet werden die Punkte $P_r(1+r|2-2r|5-r)$ mit $r \in \mathbb{R}_0^+$.

e₂) (BAG 275/741) (3 BE) Begründen Sie, dass die Punkte P_r auf einer zu F orthogonalen Gerade liegen.

f₃) (BAG 276/744) (4 BE) Beurteilen Sie die folgende Aussage: Jeder Punkt P_r hat von jeder Gerade der Schar den Abstand $\sqrt{6} \cdot r$.

g₂₋₃) (BAG 270/724) (3 BE) Gegeben ist die Gerade $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass k in F liegt, aber nicht zur Schar gehört.

h₃) (BAG 268/714+270/724) (3 BE) Die Schnittpunkte aller Geraden g_a mit der x_1x_2 -Ebene liegen auf der Gerade h . Auf h gibt es einen Punkt, der auf keiner Gerade g_a liegt. Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Punkts.

Aufgabe III 1 (C1): Nach Abs. 341/12.3.5 (Kl. 10). Ein bekannter Video-Streamingdienst bietet einen kostenpflichtigen Zugang zu Spielfilmen und Serien an. Personen, die davon gegen Zahlung einer monatlichen Gebühr Gebrauch machen, werden im Folgenden als Abonnenten bezeichnet. Sie haben sich entweder für das Spielfilmpaket oder für das Komplettpaket entschieden, das neben den Spielfilmen auch noch Serien enthält. Unter den Abonnenten sind 70% höchstens 40 Jahre alt. Von diesen haben 80% das Komplettpaket gewählt. Unter denjenigen Abonnenten, die älter als 40 Jahre sind, haben sich 50% für das Komplettpaket entschieden.

a₁) (BAG 325/807) (3 BE) Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar.

b₂) (BAG 330/818) (3 BE) Eine unter allen Abonnenten zufällig ausgewählte Person hat sich für das Komplettpaket entschieden. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie höchstens 40 Jahre alt ist.

c₂₋₃) (BAG 346/857) (4 BE) Bestimmen Sie die Anzahl der Abonnenten, die man mindestens zufällig auswählen müsste, damit unter ihnen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% mehr als fünf Personen älter als 40 Jahre sind.

Nach Abs. 353/13.1. Der Anteil der zufriedenen Abonnenten von derzeit 60% soll gesteigert werden. Dazu wird ein Algorithmus entwickelt, der jedem Abonnenten täglich individuell einen Spielfilm vorschlägt. Als Basis für die Entscheidung über den dauerhaften Einsatz des Algorithmus plant das Management einen Probetrieb. Im Anschluss soll die Nullhypothese 'Der Anteil der zufriedenen Abonnenten beträgt höchstens 60%.' mithilfe einer Stichprobe von 200 zufällig ausgewählten Abonnenten auf einem Signifikanzniveau von 5% getestet werden.

d₃) (BAG 354/876) i) (2 BE) Geben Sie an, welche Überlegung des Managements zur Wahl dieser Nullhypothese geführt haben könnte.

Für den beschriebenen Test ergibt sich $\{132;133;\dots;200\}$ als der Ablehnungsbereich der Nullhypothese.

e₃) (BAG 357/884) (4 BE) Zur Bestimmung der unteren Grenze dieses Ablehnungsbereichs wurden zunächst folgende Lösungsschritte ausgeführt: i) $\mathcal{Y}$: Anzahl der zufriedenen Abonnenten in der Stichprobe, ii) $P_{0,6}^{200}(\mathcal{Y} \geq 132) \approx 0.047$,

Begründen Sie, dass die beiden Lösungsschritte zur Bestimmung der unteren Grenze nicht ausreichend sind, und ergänzen Sie diese geeignet.

f₂) (BAG 360/893) (4 BE) Weisen Sie nach, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler zweiter Art bei diesem Ablehnungsbereich der Nullhypothese mehr als 90% betragen könnte.

Nach Abs. 336/12.3.1, Kl. 10. Zur Anmeldung auf der Webseite des Streamingdiensts ist ein persönliches Kennwort erforderlich. Für das Kennwort können 80 verschiedene Zeichen verwendet werden: je 26 Groß- und Kleinbuchstaben, 10 Ziffern sowie 18 Sonderzeichen.

g₂) (BAG 338/838) (2 BE) Einige Abonnenten verwenden ein Kennwort, das genau acht Zeichen lang ist und nur aus Kleinbuchstaben besteht. Dabei können Zeichen mehrfach vorkommen. Zeigen Sie,

dass für diese Abonnenten weniger als ein Tausendstel aller möglichen Kennwörter infrage kommen, die aus genau acht Zeichen bestehen.

h_2) (BAG 339/840) (3 BE) Niclas beschließt ein Kennwort zu wählen, das die beiden folgenden Bedingungen erfüllt: i) Es besteht aus genau acht Zeichen, die untereinander verschieden sind. ii) Die Buchstaben seines Namens sind in der korrekten Reihenfolge und unter Berücksichtigung der Groß- und Kleinschreibung enthalten. Damit sind beispielsweise Nic4+las oder nNicl*as mögliche Kennwörter. Bestimmen Sie die Anzahl aller derartigen Kennwörter.

Aufgabe III 2 (C2): Nach Abs. 341/12.3.5, Kl. 10. Eine Berghütte wird von Gästen mit Mountainbike und ohne Mountainbike besucht. Es gibt Gäste, die eigene Verpflegung mitbringen. Erfahrungsgemäß kommen 44% der Gäste mit dem Mountainbike. 73% der Gäste bringen keine eigene Verpflegung mit. 11% der Gäste kommen mit dem Mountainbike und bringen eigene Verpflegung mit. Ein Gast wird zufällig ausgewählt. Betrachtet werden die folgenden Ereignisse:

M: 'Der Gast kommt mit dem Mountainbike.'

V: 'Der Gast bringt eigene Verpflegung mit.'

a_1) (BAG 325/807) (3 BE) Stellen Sie den Sachverhalt in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar.

b_2) (BAG 330/818) (3 BE) Untersuchen Sie, ob der Anteil der Gäste, die eigene Verpflegung mitbringen, unter den Gästen mit Mountainbike gleich groß ist wie unter den Gästen ohne Mountainbike.

c_{1-2}) (BAG 325/804) (2 BE) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $M \cup V$.

d_2) (BAG 348/862) (4 BE) Geben Sie jeweils einen Wert für die Parameter a und b an ($a > 0$, $b > 0$), sodass mit dem Term $a \cdot 0.44 \cdot 0.56^b + 0.56^{10}$ die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses im Sachzusammenhang berechnet werden kann. Beschreiben Sie das zugehörige Zufallsexperiment und das Ereignis.

Nach Abs. 361/13.2. Auf der Berghütte werden Bananen, Birnen und Äpfel angeboten. Die Masse der Bananen wird als normalverteilt mit einem Erwartungswert von 120 g und einer Standardabweichung von 10 g angenommen.

e_{1-2}) (BAG 364/905) (3 BE) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Masse einer zufällig ausgewählten Banane um höchstens 10% vom Erwartungswert abweicht.

f_2) (BAG 364/905) (3 BE) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Banane eine größere Masse als m hat, beträgt 69% (m in Gramm). Ermitteln Sie den Wert von m .

g_{2-3}) (BAG 364/905) (4 BE) Die Masse der Birnen wird ebenfalls als normalverteilt mit einem ganzzahligen Erwartungswert in Gramm und einer Standardabweichung von 25g angenommen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Birne eine Masse von höchstens 121g hat, beträgt 10%. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Birne mindestens 180 g wiegt.

h_3) (BAG 344/854) (3 BE) Die Masse eines Apfels wird als normalverteilt mit μ_a und σ_a angenommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von vier zufällig ausgewählten Äpfeln zwei eine kleinere Masse als μ_a und zwei eine größere Masse als μ_a haben.

16.5.5 Beispielaufgaben für den 'Pflichtteil' des Abiturs 2024 <http://Muster24.slt.biz>

Was sollte ich vom Musterabi 2024 nach welcher Unterrichtseinheit können?

Kl. 10: P1a, P4, W1, W2, W4a, W5, W6, I.1\{h}; I.1.2, I.1.3ac, I.2dgh, II.2ab, III.1a-d,g; III.2.1

UE 11₂: P2ab; I.2ab **UE 11₃:** P1b, P2c, I.1h; I.2cf; I.1.3b **UE 11₄:** I.2e

UE 11₆: W4b, II.1c **UE 11₈:** III.1ef; III.2.2a **UE 12₁:** W3, II.1a-d **UE 12₄:** P3, II.2e-g

Bearbeiten Sie alle Aufgaben P1 bis P4. (2 BE = 1 VP)

Aufgabe P1: Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = \sin x$. Abb 1024/574 a) zeigt den Graphen G_f von f sowie die Tangenten an G_f in den dargestellten Schnittpunkten mit der x -Achse.

a₁) (Zu Beginn von Kl. 11 lösbar; (BAG 118/292)) Zeigen Sie, dass diejenige der beiden Tangenten, die durch den Koordinatenursprung verläuft, die Steigung 1 hat. (1 BE)

b₂₋₃) (Nach Abs 186/7.1.15; BAG 183/481) Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das von G_f und den beiden Tangenten eingeschlossen wird. (4 BE)

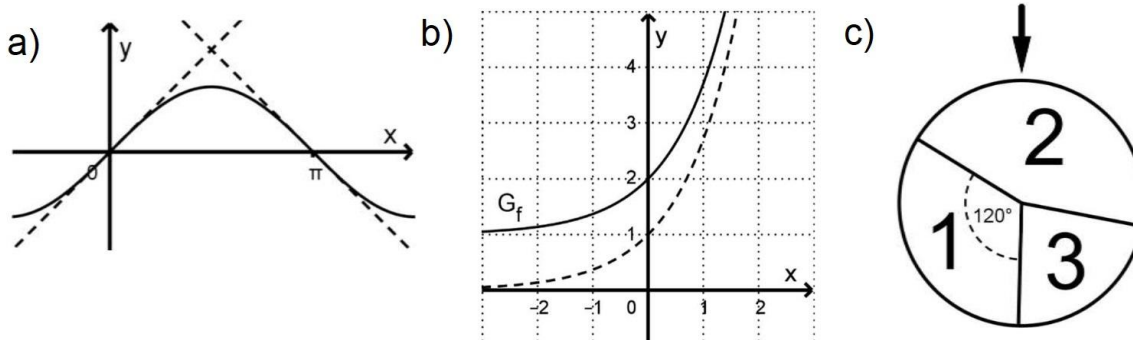


Abb. 574

Aufgabe P2: Die Verbreitung eines Computervirus lässt sich modellhaft mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(t) = 2 \cdot t \cdot e^{-0.01t}$ beschreiben. Dabei ist t die Zeit in Tagen, die seit der ersten Infizierung eines Computers mit dem Virus vergangen ist, und $f(t)$ die Rate der Infizierungen zum Zeitpunkt t in der Einheit 'Eintausend Computer pro Tag'.

a₁₋₂) (Nach Abs 163/6.3.2; (BAG 167/417)) Zeigen Sie, dass $2 \cdot (1 - 0.01t) \cdot e^{-0.01t}$ ein Term der ersten Ableitungsfunktion von f ist. (2 BE)

b₂) (Nach Abs 171/6.3.10; BAG 171/433) Geben Sie den Zeitpunkt an, zu dem die Rate der Infizierungen am größten ist. (1 BE)

c₂₋₃) (Nach Abs 186/7.1.15; (BAG 181/468)) Betrachtet wird der Zeitraum der zweiten Woche nach der ersten Infizierung eines Computers mit dem Virus. Geben Sie einen Term an, mit dem die Anzahl der Computer berechnet werden kann, die in diesem Zeitraum infiziert werden. (2 BE)

Aufgabe P3: (Nach Abs 275/10.5) Gegeben sind der Punkt $P(-1|7|2)$ und die Ebene $E : x_1 + 3x_2 = 0$.

a₁) (BAG 266/706) Zeigen Sie, dass P nicht in E liegt. (1 BE)

b₂) (BAG 277/750d) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts, der entsteht, wenn P an E gespiegelt wird. (4 BE)

Aufgabe P4: (Mit Wth Kl 9. lösbar) Die Vierfeldertafel gehört zu einem Zufallsexperiment mit den Ereignissen A und B . Für die Wahrscheinlichkeit p gilt $p \neq 0$.

a) (BAG 325/807) **i₁)** Vervollständigen Sie die Vierfeldertafel.

ii₂) Zeigen Sie, dass p nicht den Wert $\frac{1}{5}$ haben kann (3 BE).

b₂₋₃) (BAG 332/821) Für einen bestimmten Wert von p sind A und B stochastisch unabhängig. Ermitteln Sie diesen Wert von p (2 BE).

	B	$\overline{B}$	
A	p		$3p$
$\overline{A}$			$1 - 3p$
	$4p$		

Wahlaufgaben: Bearbeiten Sie zwei der Aufgaben W1 bis W6.

Aufgabe W1: (Zu Beginn von Kl. 11 lösbar; (BAG 110/270)) Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f und g . Der Graph von f ist symmetrisch bezüglich der y -Achse, der Graph von g ist symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs. Beide Graphen haben einen Hochpunkt im Punkt $P(2|1)$.

a₂) Geben Sie für die Graphen von f und g jeweils die Koordinaten und die Art eines weiteren Extrempunkts an. (2 BE)

b₃) Untersuchen Sie die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion h mit $h(x) = f(x) \cdot (g(x))^3$ im Hinblick auf eine mögliche Symmetrie ihres Graphen. (3 BE)

Aufgabe W2: (Zu Beginn von Kl. 11 lösbar; (BAG 157/388)) Abb 1024/574 b) zeigt den Graphen G_f einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f sowie den Graphen der ersten Ableitungsfunktion von f .

a₁₋₂) Geben Sie die Steigung der Tangente an G_f im Punkt $(0|f(0))$ an. (1 BE)

b₄) (BAG 115/285 + 141/330) Betrachtet wird die Schar der Funktionen g_c mit $c \in \mathbb{R}^+$. Der Graph von g_c geht aus G_f durch Streckung mit dem Faktor c in y -Richtung hervor. Die Tangente an den Graphen von g_c im Punkt $(0|g_c(0))$ schneidet die x -Achse. Bestimmen Sie rechnerisch die x -Koordinate des Schnittpunkts. (4 BE)

Aufgabe W3: (Nach Abs 265/10.3) Die Ebene $E: 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6$ enthält einen Punkt, dessen drei Koordinaten übereinstimmen. **a₁₋₂)** (BAG 268/714) Bestimmen Sie diese Koordinaten. (2 BE)

b₄) (BAG 270/724d) Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist: Es gibt unendlich viele Ebenen, die keinen Punkt enthalten, dessen drei Koordinaten übereinstimmen. (3 BE)

Aufgabe W4: (Nach Abs 262/10.2) Gegeben sind die Punkte $A(0|0|0)$, $B(3|4|1)$, $C(1|7|3)$ und $D(-2|3|2)$.

a₁) (Mit Stoff Kl. 10 lösbar, (BAG 254/661)) Weisen Sie nach, dass das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist. (1 BE)

b₄) (BAG 264/700e) Der Punkt T liegt auf der Strecke $\overline{AC}$. Das Dreieck ABT hat bei B einen rechten Winkel. Ermitteln Sie das Verhältnis der Länge der Strecke $\overline{AT}$ zur Länge der Strecke $\overline{CT}$. (4 BE)

Aufgabe W5: (Mit Stoff Kl. 8 lösbar; (BAG 322/797))

In einem Behälter befinden sich Kugeln, von denen jede dritte gelb ist.

a₁) Aus dem Behälter wird zweimal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Kugeln gelb sind. (1 BE)

b₃) Im Behälter werden zwei gelbe Kugeln durch zwei blaue Kugeln ersetzt. Anschließend wird aus dem Behälter erneut zweimal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Kugeln gelb sind, beträgt nun $\frac{1}{16}$. Ermitteln Sie, wie viele gelbe Kugeln sich nach den beschriebenen Vorgängen im Behälter befinden. (4 BE)

Aufgabe W6: ₂₋₃) (Mit Stoff Kl. 9 lösbar; (BAG 327/812))

Für ein Spiel wird ein Glücksrad verwendet. Abb 1024/574 c) zeigt dieses Glücksrad schematisch. Die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einmaligem Drehen die Zahl 2 zu erzielen, wird mit p bezeichnet. Bei dem Spiel bezahlt jeder Spieler zunächst einen Einsatz von 1 €. Anschließend dreht er das Glücksrad zweimal. Erzielt er dabei zwei Zahlen, deren Summe mindestens 5 ist, wird ihm der Wert der Summe als Betrag in Euro ausgezahlt; ansonsten erfolgt keine Auszahlung. Wird das Spiel wiederholt durchgeführt, so ist zu erwarten, dass sich auf lange Sicht die Einsätze der Spieler und die Auszahlungen ausgleichen. Leiten Sie unter Verwendung der beschriebenen Spielregeln eine Gleichung her, mit der der Wert von p berechnet werden könnte; erläutern Sie dabei Ihr Vorgehen. (5 BE)

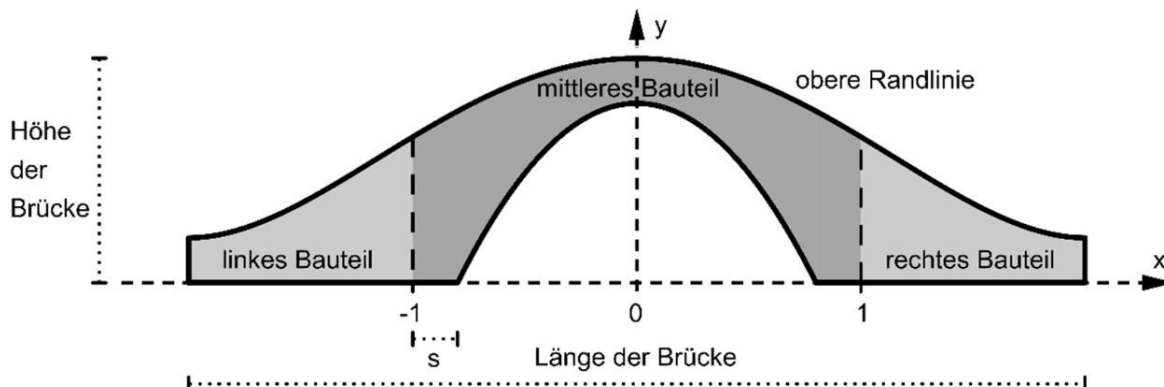


Abb. 575 Bauteile

16.5.6 Beispielaufgaben für den 'Wahlteil' des Abiturs 2024

Aufgabe I.1: (Mit Stoff Kl. 10 lösbar; (BAG 327/812)) Abb 1025/575 zeigt modellhaft den Längsschnitt einer dreiteiligen Brücke aus Holz für eine Spielzeugeisenbahn. Die Züge können sowohl über die Brücke fahren als auch darunter hindurch. Die obere Randlinie des Längsschnitts der Brücke kann mithilfe des Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{20}x^4 - \frac{2}{5}x^2 + 1$ beschrieben werden. Dabei werden die Endpunkte dieser Randlinie durch die beiden Tiefpunkte des Graphen von f dargestellt. Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die x -Achse die Horizontale; eine Längeneinheit entspricht einem Dezimeter in der Realität.

a₁) (BAG 110/270) Zeigen Sie rechnerisch, dass die obere Randlinie achsensymmetrisch ist. (2 BE)

b₁₋₂) (BAG 149/360 g-h) Bestimmen Sie rechnerisch die Höhe und die Länge der Brücke. (zur Kontrolle: Ein Tiefpunkt des Graphen von f hat die x -Koordinate 2.) (5 BE)

c₁) (BAG 160/401) Betrachtet wird derjenige Punkt der oberen Randlinie, der sich am Übergang vom mittleren zum rechten Bauteil befindet. Prüfen Sie, ob dieser Punkt auf halber Höhe zwischen dem höchsten Punkt der oberen Randlinie und deren rechtem Endpunkt liegt. (3 BE)

d₂) (BAG 140/323d,e) Geben Sie die Bedeutung des Terms $\frac{f(2)-f(1)}{2-1}$ im Sachzusammenhang an und berechnen Sie seinen Wert. (2 BE)

e₁₋₂) (BAG 143/338 + 150/363) Berechnen Sie die Größe des größten Steigungswinkels der Brücke, der beim Überfahren zu überwinden ist. (5 BE)

Der parabelförmige Teil der unteren Randlinie des Längsschnitts der Brücke kann mithilfe des Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $q(x) = 0.8 - a \cdot x^2$ mit $a \in \mathbb{R}$ beschrieben werden.

f₁₋₂) (BAG 35/71) In Abbildung 1025/575 ist die Länge einer der beiden Bodenflächen des mittleren Bauteils mit s bezeichnet. Bestimmen Sie alle Werte von a , die für diese Länge mindestens 0.1 dm liefern. (4 BE)

g₂₋₃) (BAG 160/401) Begründen Sie im Sachzusammenhang, dass für die Beschreibung der unteren Randlinie beliebige große Werte von a nicht infrage kommen. (2 BE)

h₂₋₃) (Erst ab Abs 186/7.1.15, (BAG 183/481)) Für die Brücke gilt $a = 1.25$. Die drei Bauteile der Brücke werden aus massivem Holz hergestellt;

1 dm³ des Holzes hat eine Masse von 800 Gramm. Die Brücke ist 0.4 dm breit. Ermitteln Sie die Masse des mittleren Bauteils. (7 BE)

Aufgabe I.1.2 ₄) (BAG 110/270) Während der Planung der Brückenform kamen zur Beschreibung der oberen Randlinie für das linke Bauteil eine Funktion g_l und für das rechte Bauteil eine Funktion g_r infrage. Auch bei Verwendung dieser Funktionen wäre die obere Randlinie achsensymmetrisch gewesen. Beurteilen Sie jede der folgenden Aussagen:

(I) $-g_l(x) = g_r(-x)$ für $-2 \leq x \leq 1$ (II) $g_l(x-1) = g_r(-x+1)$ für $-1 \leq x \leq 0$ (4 BE)

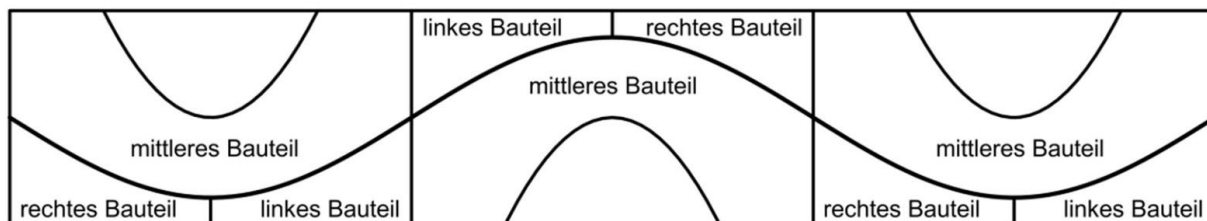


Abb. 576 Bauteile

Aufgabe I.1.3 Die Form und die Größe der Brücke werden verändert, indem im bisher verwendeten Modell die obere Randlinie des Längsschnitts mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion k mit

$k(x) = \frac{3}{5} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) + \frac{4}{5}$ beschrieben wird. Die Bauteile der veränderten Brücke lassen sich nach dem in der Abbildung 1026/576 dargestellten Prinzip aus einem quaderförmigen Holzblock sägen. Der beim Sägen auftretende Materialverlust soll im Folgenden vernachlässigt werden.

a₃) Der Graph von k ist symmetrisch bezüglich jedes seiner Wendepunkte. Beschreiben Sie, wie diese Eigenschaft mit dem in der Abbildung 1026/576 dargestellten Prinzip zusammenhängt. (2 BE)

b₂) (BAG 119/295) Ermitteln Sie mithilfe des Funktionsterms von k den Flächeninhalt der gesamten in der Abbildung 576 gezeigten rechteckigen Vorderseite des Holzblocks. (4 BE)

Aufgabe I.2 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = e^x$.

a₁) (BAG 143/338) Bestimmen Sie rechnerisch eine Gleichung der Tangente an den Graphen von f in dessen Schnittpunkt mit der y -Achse. Geben Sie eine Gleichung der Gerade an, die in diesem Punkt senkrecht zur Tangente steht, sowie den Inhalt der Fläche, die von dieser Gerade, der Tangente und der x -Achse eingeschlossen wird. (4 BE)

b₃) (BAG kommt noch) Geben Sie alle Werte von $m \in \mathbb{R}$ an, für die die Gerade mit der Gleichung $y = m \cdot x + 1$ mit dem Graphen von f genau einen Punkt gemeinsam hat. (3 BE)

c_{2-3, LK}) (Nach Abs 186/7.1.15; BAG 185/488) Der Graph von f , die Koordinatenachsen und die Gerade mit der Gleichung $x = a$ mit $a > 0$ begrenzen ein Flächenstück. Rotiert dieses Flächenstück um die x -Achse, so erzeugt es einen Körper mit dem Volumen $3 \cdot \pi$. Bestimmen Sie den Wert von a . (5 BE)

Gegeben sind außerdem die in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierte Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{x}$ sowie die Funktion h mit $h(x) = \frac{1}{x-2} + 4$, deren Definitionsmenge so groß wie möglich gewählt wurde.

d₂) (Nach Abs 121/5.5; BAG 103/248) Beschreiben Sie, wie der Graph von h aus dem Graphen von g erzeugt werden kann. Geben Sie die Definitionsmenge von h sowie den Grenzwert von h für $x \rightarrow \infty$ an. (4 BE)

e₂₋₃) (Nach Abs 121/5.5; BAG 124/309) Abbildung 1028/577 a) soll den Graphen von h sowie die Gerade w mit der Gleichung $y = x$ darstellen. Ergänzen Sie die fehlenden Koordinatenachsen und skalieren Sie diese passend. (3 BE)

f₃) (Nach Abs 186/7.1.15; BAG 178/454c+d) Für jede Stammfunktion H von h gilt für jede reelle Zahl $b > 5$: $H(b) - H(5) > 4 \cdot (b - 5)$. Beschreiben Sie die geometrische Bedeutung dieser Aussage und veranschaulichen Sie die Aussage grafisch. (4 BE)

Die Umkehrfunktion von h wird mit k bezeichnet.

g₂₋₃) (eigentlich nach Klasse 9 lösbar; BAG 169/427) Alle gemeinsamen Punkte der Graphen von h und k liegen auf der Gerade w . Berechnen Sie die x -Koordinaten dieser gemeinsamen Punkte. (5 BE)

h₃) (eigentlich nach Klasse 10 lösbar; BAG 169/427 + 143/338) Begründen Sie ohne zu rechnen, dass jede Tangente mit der Steigung -1 an den Graphen von h auch Tangente an den Graphen von k ist. (3 BE)

Betrachtet werden nun die in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierte Funktion u mit $u(x) = f(g(x))$ sowie die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion v mit $v(x) = g(f(x))$. Für die erste Ableitungsfunktion u' von u gilt $u'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}$

i₂) (Nach Abs 163/6.3, BAG 167/417) Geben Sie für jede der Funktionen u und v einen Funktionsterm an, der zwar die Variable x , aber keine Funktionsbezeichnung wie ' f ' oder ' g ' enthält. Nennen Sie die Wertemengen von u und v . (4 BE)

j₂₋₃) (Nach Abs 163/6.3, BAG 150/363) Zeigen Sie, dass u genau eine Wendestelle hat, und bestimmen Sie diese Wendestelle. (5 BE)

Aufgabe II.1: (Nach Abs 265/10.3) In einem Koordinatensystem wird der in Abb 1028/577 b abgebildete Körper $ABCDEF$ mit $A(0|10|1)$, $B(10|20|1)$, $C(0|20|1)$, $D(0|7|0)$ und $F(0|20|0)$ betrachtet. Die beiden Seitenflächen $ACFD$ und $BEFC$ stehen senkrecht zur x_1x_2 -Ebene.

Aufgabe II.1.1 a₁₋₂) (BAg 267/712) A, B und D liegen in der Ebene H . Bestimmen Sie eine Gleichung von H in Koordinatenform. (zur Kontrolle: $x_1 - x_2 + 3x_3 = -7$) (4 BE)

b₁₋₂) (BAg 268/714) b) Begründen Sie, dass die Gerade $i: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ sowohl in der x_1x_2 -Ebene als auch in der Ebene H liegt. (2 BE)

Der Punkt E liegt auf i , wobei der Abstand von E zu F ebenso groß ist wie der Abstand von D zu F .

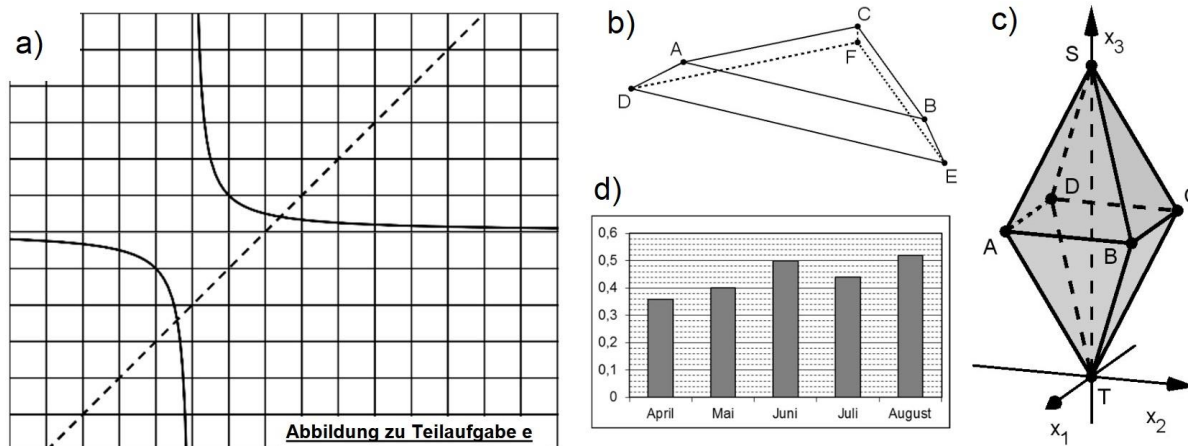


Abb. 577 a) Graph, b) Podest, c) Doppelpyramide, d) verkaufte Mountainbikes

c₁₋₂) (BAg 275/742 + 258/676a) Ermitteln Sie die Koordinaten von E . (5 BE)

d₂) Begründen Sie ohne zu rechnen, dass die Vierecke $ACFD$ und $BEFC$ den gleichen Flächeninhalt haben. (3 BE)

Aufgabe II.1.2 Der Körper $ABCDEF$ stellt modellhaft ein Podest dar, das auf der Bühne eines Theaters steht, das Viereck $ADEB$ die Vorderseite des Podests und der Punkt D deren untere linke Ecke. Die x_1x_2 -Ebene beschreibt den horizontalen Boden der Bühne. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

a₁) (BAg 263/695) Zeigen Sie, dass die Deckfläche des Podests rechtwinklig ist, und berechnen Sie deren Flächeninhalt. (3 BE)

b₂) (BAg 261/686 + 271/726e) Die Position eines Scheinwerfers kann im Modell durch den Punkt $S(5|-3|z)$ dargestellt werden. Vom Scheinwerfer ausgehendes Licht trifft an der unteren linken Ecke der Vorderseite des Podests unter einem Winkel der Größe 47° auf den Boden auf. Ermitteln Sie die Höhe des Scheinwerfers über dem Boden der Bühne. (4 BE)

c₂₋₃) Die Position eines zweiten Scheinwerfers lässt sich im Modell durch den Punkt $P(2|4|8)$ beschreiben. Die Gerade mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mu \in \mathbb{R}$ schneidet die Ebene mit der

Gleichung $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ im Punkt $Q(-2|8|1)$. Es gilt $\overline{PQ} = 9$. ↓ (4 BE)

Treffen Sie auf der Grundlage dieser Informationen eine Aussage über den Abstand des zweiten Scheinwerfers von der Vorderkante der Deckfläche des Podests. Begründen Sie Ihre Aussage ohne zu rechnen.

Aufgabe II.2: Gegeben sind die Punkte $A(5|-5|12)$, $B(5|5|12)$ und $C(-5|5|12)$.

a₁) (BAg 263/695) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenkelig ist. (2 BE)

b₁) (BAg 263/695) Begründen Sie, dass A, B und C Eckpunkte eines Quadrats sein können, und geben Sie die Koordinaten des vierten Eckpunkts D dieses Quadrats an. (3 BE)

Im Folgenden wird die in Abb Abb 1028/577 c abgebildete Doppelpyramide betrachtet. Die beiden Teilpyramiden $ABCD S$ und $ABCD T$ sind gleich hoch. Der Punkt T liegt im Koordinatenursprung, der Punkt S ebenfalls auf der x_3 -Achse. Die Seitenfläche BCT liegt in einer Ebene E .

c₁₋₂) (BAg 267/712) Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.
(zur Kontrolle: $12x_2 - 5x_3 = 0$) (3 BE)

d₁) (BAg 275/740) Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den die Seitenfläche BCT mit der Fläche $ABCD$ einschließt. (3 BE)

E gehört zur Schar der Ebenen $E_k : kx_2 - 5x_3 = 5k - 60$ mit $k \in \mathbb{R}$.

e_{2,LK}) (BAg 270/724 + 277/750g) Alle Ebenen der Schar schneiden sich in einer Gerade. Weisen Sie nach, dass die Kante BC auf dieser Gerade liegt. (2 BE)

f_{3,LK}) (BAg 269/721) Ermitteln Sie diejenigen Werte von k , für die E_k mit der Seitenfläche ADS mindestens einen Punkt gemeinsam hat. (4 BE)

g₃) (BAg 277/750d) Die Seitenfläche ADT liegt in der Ebene F . Geben Sie einen Normalenvektor von F an und begründen Sie Ihre Angabe, ohne die Koordinaten von A und D zu verwenden. Bestimmen Sie denjenigen Wert von k , für den E_k senkrecht zu F steht. (4 BE)

h_{3,LK}) Die Doppelpyramide wird so um die x_1 -Achse gedreht, dass die bisher mit BCT bezeichnete Seitenfläche in der x_1x_2 -Ebene liegt und der bisher mit S bezeichnete Punkt eine positive x_2 -Koordinate hat. Bestimmen Sie diese x_2 -Koordinate und veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen durch eine Skizze. (4 BE)

Aufgabe III.1: (Ab Klasse 10 lösbar) Ein Unternehmen produziert Stahlkugeln für Kugellager. Erfahrungsgemäß sind 4% aller Kugeln fehlerhaft. 800 Kugeln werden zufällig ausgewählt. Die Anzahl der fehlerhaften Kugeln unter den ausgewählten kann durch eine binomialverteilte Zufallsgröße beschrieben werden.

a₁) (BAg 343/853 e) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den ausgewählten Kugeln weniger als 30 fehlerhaft sind. (2 BE)

b₁₋₂) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der fehlerhaften Kugeln unter den ausgewählten höchstens um eine halbe Standardabweichung vom Erwartungswert dieser Anzahl abweicht. (5 BE)

Eine fehlerhafte Kugel hat entweder einen Formfehler oder einen Größenfehler. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Kugel einen Formfehler hat, beträgt 3%. Alle Kugeln werden vor dem Verpacken geprüft. Dabei werden 95% der Kugeln mit Formfehler, 98% der Kugeln mit Größenfehler, aber auch 0.5% der Kugeln ohne Fehler aussortiert.

c₂₋₃) (BAg 322/797) Stellen Sie den Sachzusammenhang in einem beschrifteten Baumdiagramm dar.

d_{3,LK}) (BAg 330/818) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine aussortierte Kugel keinen Formfehler hat. (3 BE)

Die Teile e+f sind nur LK und lösbar nach Abs 353/13.1.1. Aufgrund zunehmender Reklamationen wird vermutet, dass der Anteil der fehlerhaften Kugeln auf über 4% angestiegen ist. Um diese Vermutung zu prüfen, soll die Nullhypothese 'Der Anteil der fehlerhaften Kugeln beträgt höchstens 4%.' auf der Grundlage einer Stichprobe von 500 Kugeln getestet werden. Wenn das Ergebnis des Tests die Vermutung nicht entkräftet, soll die Produktion unterbrochen werden, um die Maschinen zu warten. Das Risiko, die Produktion irrtümlich zu unterbrechen, soll höchstens 3% betragen.

e_{2-3,LK}) (BAg 360/893) Beschreiben Sie für diesen Test im Sachzusammenhang den Fehler zweiter Art. Geben Sie die Konsequenz an, die sich aus diesem Fehler für die Produktion ergeben würde. (3 BE)

f_{3,LK}) Für den beschriebenen Test wird der Ablehnungsbereich betrachtet. Eine der beiden Grenzen dieses Ablehnungsbereichs ist größer als 0 und kleiner als 500; diese Grenze wird mit k bezeichnet. Zur

Bestimmung des Werts von k soll die binomialverteilte Zufallsgröße $\mathcal{Y}$ mit den Parametern $n = 500$ und $p = 0.04$ verwendet werden. Begründen Sie, dass keine der beiden Ungleichungen I und II den korrekten Wert von k liefert. I $P(\mathcal{Y} \leq k) \leq 0.03$ II $P(\mathcal{Y} \leq k) \geq 0.97$ (4 BE)

g_{3-4}) (Lösbar nach Klasse 10) Die Kugeln werden in Packungen verkauft. Ein Teil der verkauften Packungen wird zurückgegeben. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine verkaufte Packung zurückgegeben wird, beträgt 3%. Dem Unternehmen entsteht pro Packung, die zurückgegeben wird, ein Verlust von 5.80 Euro; pro Packung, die nicht zurückgegeben wird, erzielt das Unternehmen einen Gewinn von 8.30 Euro. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der das Unternehmen bei einem Verkauf von 200 Packungen einen Gesamtgewinn von mindestens 1500 Euro erzielt. (4 BE)

Aufgabe III.2: Ein Fahrradhändler hat festgestellt, dass es sich bei 40% aller von ihm verkauften Fahrräder um Mountainbikes handelt. Es soll davon ausgegangen werden, dass in einer zufälligen Auswahl verkaufter Fahrräder die Anzahl der Mountainbikes binomialverteilt ist. $\downarrow$ (1 BE)

Aufgabe III.2.1 (Ab Kl.10, BAg 342/851c,d) a_1) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in einer zufälligen Auswahl von 100 verkauften Fahrrädern genau 30 Mountainbikes befinden.

b_{1-2}) (BAg 348/862b) Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment, bei dem die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit dem Term $1 - 0.6^{10} - 10 \cdot 0.4 \cdot 0.6^9$ berechnet werden kann. Geben Sie dieses Ereignis an. (3 BE)

c_1) (BAg 343/853 e) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer zufälligen Auswahl von 250 verkauften Fahrrädern die Anzahl der Mountainbikes um mindestens 10% größer ist als der Erwartungswert für diese Anzahl. (3 BE)

d_2) (BAg 325/807) 20% aller verkauften Fahrräder haben einen Rahmen aus Aluminium. 45% aller verkauften Fahrräder sind weder Mountainbikes noch haben sie einen Rahmen aus Aluminium. Bestimmen Sie den Anteil der Fahrräder mit einem Rahmen aus Aluminium unter den verkauften Mountainbikes. (4 BE)

e_3) (BAg 347/860e) Der Händler hat berechnet, dass er im September des Jahres 2020 mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 96% mehr als 800 Mountainbikes verkaufen wird. Ermitteln Sie, von welcher Anzahl verkaufter Fahrräder er bei seiner Berechnung mindestens ausgegangen ist. (4 BE)

Abbildung 1028/577d zeigt für einige Monate des Jahres 2019 jeweils den Anteil der Mountainbikes unter allen verkauften Fahrrädern.

f_1) (BAg 321/792) Im April wurden 810 Mountainbikes verkauft. Bestimmen Sie für diesen Monat die Anzahl aller verkauften Fahrräder. (2 BE)

g_{1-2}) (BAg 327/812) Der Anteil der Mountainbikes lag im Mai und Juni insgesamt bei 46%; im Juli war er größer als im Mai und im August größer als im Juni. Entscheiden Sie, ob es dennoch möglich ist, dass der Anteil der Mountainbikes im Juli und August insgesamt kleiner war als insgesamt im Mai und Juni. Begründen Sie Ihre Entscheidung. (3 BE)

Aufgabe III.2.2: (Nach Abs 361/13.2): Zucker wird in unterschiedlich großen Packungen angeboten. Es soll davon ausgegangen werden, dass für jede Packungsgröße die tatsächliche Masse des Zuckers durch eine normalverteilte Zufallsgröße beschrieben werden kann.

a_2) (BAg 365/906) Für eine bestimmte Packungsgröße ist $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{200\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-500)^2}{200}}$ der Term der zugehörigen Dichtefunktion, wobei x die Masse des Zuckers in Gramm ist. Geben Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung für die Masse jeweils in Gramm an. (2 BE)

b_2) (BAg 364/905l+m) Bei einer anderen Packungsgröße beträgt der Erwartungswert für die Masse des Zuckers 250 g, die Standardabweichung 5 g. Bestimmen Sie – auf 1 g genau – das kleinste Intervall, das mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 98% die tatsächliche Masse des Zuckers enthält und symmetrisch bezüglich des Erwartungswerts ist. (3 BE)

16.5.7 Pflichtteil Abitur 2023, Aufgabensätze 1+2 (jede Aufgabe ergibt 2.5 VP)

Was sollte ich vom Abitur 2023 nach welcher Unterrichtseinheit können?

Kl. 10: P1.2a, P1.3a, P1.6, P2.1, P2.4, P2.5, P2.6, A1.2a, A2.1\{b_{ii}\}, A2.2, C1abcg;

UE 11₂: A1.1\{e\}, A1.2b;

UE 11₃: P1.1, P1.2b, P1.3b, P2.2, P2.3, A1.1e;

UE 12₁: P1.4, P1.5, P1.3b, B1be, B2a, B2ef; **UE 12₄:** P1.4, P1.5, P1.3b, B1, B2;

UE 11₇: C2;

UE 11₈: C1def;

Aufgabe P1.1 (Nach Abs. 186/7.1.15 (Kl. 11). Abb 1031/578a zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x+2}$ und die Gerade durch die Punkte $A(2|2)$ und $B(3|0)$.

a₁) (0.5 VP) Geben Sie die maximale Definitionsmenge der Funktion f an. (BAg 170/431)

b₂) (2 VP) Bestimmen Sie den Inhalt der markierten Fläche. (BAg 183/481)

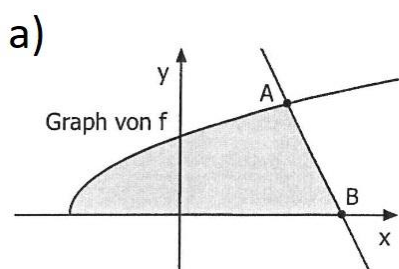
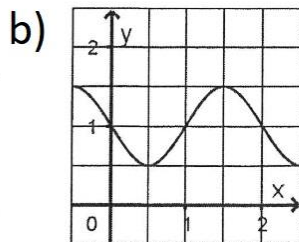
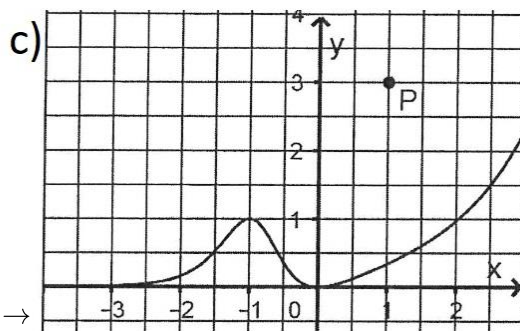


Abb. 578 Aufgaben P1.1



↑ P1.3

P1.2 →



Aufgabe P1.2 Abb 1031/578c zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f , dessen einzige Extrempunkte $A(-1|1)$ und $B(0|0)$ sind, sowie den Punkt P .

a₂₋₃) (Nach Abs 147/6.2, Kl.10) (1 VP) Geben Sie die Koordinaten des Tiefpunkts des Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g mit $g(x) = -f(x-3)$ an. (BAg 103/248)

b₂₋₃) (Nach Abs 186/7.1.15, Kl.11) (1.5 VP) Der Graph einer Stammfunktion von f verläuft durch P . Skizzieren Sie diesen Graphen in der Abb 1031/578c. (BAg 157/388)

Aufgabe P1.3 (Nach Abs 186/7.1.15) Abb 1031/578b zeigt den Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten Fkt f .

a₁) (Nach Abs 147/6.2, Kl.10) (1 VP) Beurteilen Sie die folgende Aussage: 'Für jeden Wert von x mit $0 < x < 2$ ist die Steigung des Graphen von f kleiner als 3.'

(BAg 157/388)

b₄) (1.5VP) Mit dem Term $\pi \cdot \int_0^2 (f(x))^2 dx$ kann das Volumen eines Körpers berechnet werden. Begründen Sie, dass dieses Volumen größer als $\pi \cdot 0.5^2 + \pi \cdot 1^2$ ist. (BAg 185/487)

Aufgabe P 1.4 (Nach Abs 265/10.3) Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

a₁) (1 VP) Zeigen Sie, dass g in der Ebene $E: x_1 + x_2 + x_3 = 2$ liegt. (BAg 268/714)

b₂₋₃) (1.5 VP) Gegeben ist außerdem die Schar der Geraden $h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Weisen Sie nach, dass g und h_a für jeden Wert von a windschief sind. (BAg 259/677)

Aufgabe P1.5 (Nach Abs 265/10.3) Gegeben sind die Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } r, s \in \mathbb{R}.$$

a₁) (0.5 VP) Begründen Sie, dass g und h nicht identisch sind. (BAg 258/675)

b₃) (2 VP) Die Gerade g soll durch Spiegelung an einer Ebene auf die Gerade h abgebildet werden. Bestimmen Sie eine Gleichung einer geeigneten Ebene und erläutern Sie Ihr Vorgehen. (BAg 264/699)

Aufgabe P1.6 (Nach Abs 326/12.2.2, Kl.9) In einem Behälter befinden sich fünf Kugeln, auf denen jeweils eine Zahl steht. Auf drei der Kugeln steht die Zahl 2, auf zwei der Kugeln die negative Zahl a . Zweimal nacheinander wird eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt.

a₁) (0.5 VP) Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem

Term $2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}$ berechnet werden kann.

(BAG 322/797)

b_{2-3} (2 VP) Die Zufallsgröße $\mathcal{X}$ gibt das Produkt der Zahlen an, die auf den beiden entnommenen Kugeln stehen. Der Erwartungswert von $\mathcal{X}$ ist 4. Bestimmen Sie den Wert von a .

(BAG 326/809)

Aufgabe P2.1 (Nach Abs 147/6.2, Kl.10) Eine in $\mathbb{R}$ definierte ganzrationale, nicht lineare Funktion f mit erster Ableitungsfunktion f' und zweiter Ableitungsfunktion f'' hat folgende Eigenschaften:

(I) f hat bei x_1 eine Nullstelle. (II) Es gilt $f'(x_2) = 0$ und $f''(x_2) \neq 0$.

(III) f' hat ein Minimum an der Stelle x_3 . Abb 1032/579b zeigt die Positionen von x_1 , x_2 und x_3 .

a_2 (1 VP) Begründen Sie, dass der Grad von f mindestens 3 ist.

(BAG 160/401)c

b_3 (1.5 VP) Skizzieren Sie in Abb 1032/579b einen möglichen Graphen von f .

(BAG 157/388)

Aufgabe P2.2 (Nach Abs 186/7.1.15) Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit

$f(x) = -x^2 + 2ax$, $a \in]1; +\infty[$. Die Nullstellen von f sind 0 und $2a$. a_2 (1 VP) Zeigen Sie, dass das Flächenstück, das der Graph von f mit der x -Achse einschließt, den Inhalt $\frac{4}{3}a^3$ hat.

(BAG 183/478)

b_3 (1.5 VP) Der Hochpunkt des Graphen von f liegt auf einer Seite eines Quadrats; zwei Seiten dieses Quadrats liegen auf den Koordinatenachsen (vgl. Abb 1032/579a). Der Flächeninhalt des Quadrats stimmt mit dem Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von f mit der x -Achse einschließt, überein. Bestimmen Sie den Wert von a .

(BAG 160/400)

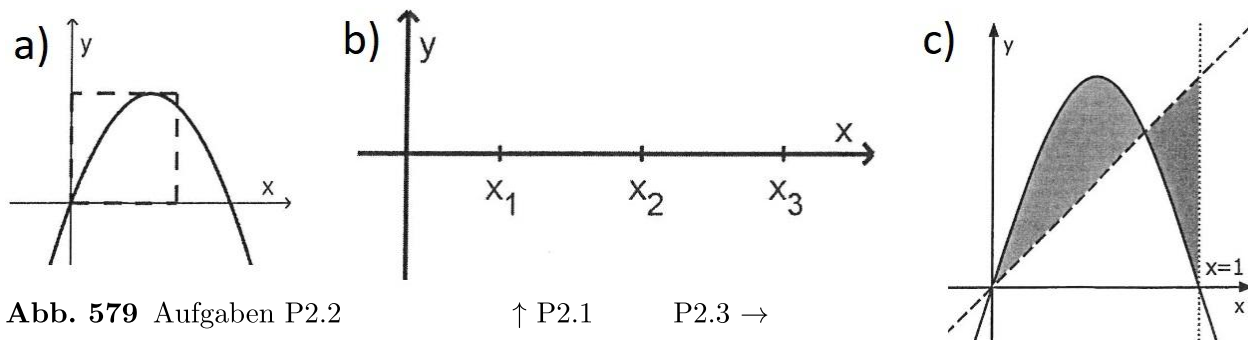


Abb. 579 Aufgaben P2.2

↑ P2.1

P2.3 →

Aufgabe P2.3 (Nach Abs 186/7.1.15, Kl.11) In Abb 1032/579c sind der Graph der Funktion f mit $f(x) = \sin(\pi x)$ sowie eine Ursprungsgerade g mit der Steigung m abgebildet. a_2 (1 VP) Bestimmen Sie einen Term der Stammfunktion von f , deren Graph den Ursprung enthält.

(BAG 182/475)

b_3 (1.5 VP) Berechnen Sie den Wert von m , für den die Inhalte der beiden markierten Flächen gleich groß sind.

(BAG 183/481)

Aufgabe P2.4 (Nach Abs 252/10.1, Kl.10) Gegeben sind die Punkte $A(3|5|5)$ und $B(1|1|1)$ sowie die Geraden g und h , die sich in B schneiden.

Die Gerade g hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, die Gerade h den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a_1 (0.5 VP) Weisen Sie nach, dass A auf g liegt.

(BAG 257/670)

b_{2-3} (2 VP) Bestimmen Sie die Koordinaten zweier Punkte C und D so, dass C auf h liegt und das Viereck $ABCD$ eine Raute ist.

(BAG 260/683)

Aufgabe P2.5 (Nach Abs 331/12.2.5, Kl.9) Ein Glücksrad besteht aus zwei Sektoren, die mit den Zahlen 2 bzw. 3 beschriftet sind. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einmaligem Drehen die Zahl 2 erzielt wird, beträgt p . Bei einem Spiel dreht eine Person das Glücksrad genau so oft, bis die Summe der erzielten Zahlen 5, 6 oder 7 beträgt. Bei der Summe 6 gewinnt die Person das Spiel, sonst verliert sie. a_1 (1 VP) Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar. (BAG 322/797) b_3 (1.5 VP) Die beiden folgenden Ereignisse sind stochastisch unabhängig: E : 'Beim ersten Drehen des Glücksrads wird die Zahl 2 erzielt.' G : 'Die Person gewinnt das Spiel.' Ermitteln Sie eine Gleichung, die die Variable p enthält und die Berechnung des Werts von p ermöglicht.

(BAG 332/822)

Aufgabe P2.6 (Nach Abs 322/12.1.5, Kl.8) In einen leeren Behälter werden drei Kugeln gelegt. Dabei wird die Farbe jeder Kugel durch Werfen eines Würfels festgelegt, dessen Seiten mit den Zahlen 1 bis 6 durchnummeriert sind: Wird die '1' oder die '2' erzielt, wird eine gelbe Kugel gewählt, sonst eine schwarze. a_{1-2} (1 VP) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich nun

mindestens zwei schwarze Kugeln im Behälter befinden, $\frac{20}{27}$ beträgt.

b₂) (1.5 VP) Aus dem Behälter werden zwei der drei Kugeln zufällig entnommen. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide entnommenen Kugeln schwarz sind. (BAg 322/797)

16.5.8 Wahlteil Abitur 2023 <http://Abi23.slt.biz>

Aufgabe A1.1 (Nach Abs 163/6.3, Kl.11) Für jedes $t \in \mathbb{R}_0^+$ ist G_t der Graph der Funktion f_t mit $f_t(x) = (1 - tx^2) \cdot e^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$.

a₁) i) (0.5 VP) Zeigen Sie, dass der Schnittpunkt von G_t mit der y -Achse unabhängig von t ist.

ii) (1 VP) Entscheiden Sie, welcher der in Abb 1033/580c) abgebildeten Graphen G_{10} darstellt, und begründen Sie Ihre Entscheidung. (BAg 164/406)

b₂) i) (1 VP) Begründen Sie, dass f_0 umkehrbar ist. ii) (1.5 VP) Ermitteln Sie einen Term der Umkehrfunktion von f_0 und geben Sie die Definitionsmenge dieser Umkehrfunktion an. (BAg 169/430)

c₂) Betrachtet wird die Tangente an G_0 im Punkt $B(0.5|f_0(0.5))$. i) (1 VP) Bestimmen Sie die Größe des Schnittwinkels dieser Tangente mit der x -Achse. (BAg 143/338)

ii) (1.5 VP) Diese Tangente begrenzt mit den Koordinatenachsen ein rechtwinkliges Dreieck. Berechnen Sie die Längen der Katheten dieses Dreiecks exakt. (BAg 147/349)

iii₃) (1.5 VP) Bei Rotation dieses Dreiecks um die x - bzw. y -Achse entsteht jeweils ein Körper. Interpretieren Sie in diesem Zusammenhang folgende Ungleichung geometrisch: $\frac{2\pi}{3e} > \frac{4\pi}{3e^2}$. (BAg 185/489)

d₂₋₃) (2 VP) Für einen bestimmten Wert von t besitzt der Graph G_t zwei Schnittpunkte mit der x -Achse, die voneinander den Abstand 8 haben. Berechnen Sie diesen Wert von t . (BAg 160/400)

e₂) (Nach Abs 186/7.1.15, Kl.11) (2.5 VP) Die Funktion H mit $H(x) = -(x^2 + x + \frac{1}{2}) \cdot e^{-2x}$ ist eine Stammfunktion von h mit $h(x) = f_t(x) - f_{t+2}(x)$. Die Graphen G_t und G_{t+2} besitzen für $x > 0$ keine gemeinsamen Punkte und schließen mit der y -Achse eine nach rechts unbegrenzte Fläche ein. Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche. (BAg 185/486)

f₂) (2.5 VP) Für jedes $t > 0$ hat der Graph G_t zwei Extrempunkte P_t und Q_t . Begründen Sie, dass der Mittelpunkt der Strecke P_t, Q_t auf der Gerade mit der Gleichung $x = \frac{1}{2}$ liegt. (BAg 160/400)

Aufgabe A1.2 Gegeben ist eine Schar von Funktionen f_k mit $k > 0$, deren Ableitungsfunktionen f'_k folgende Gleichung besitzen: $f'_k(x) = -\frac{1}{k^2}(x - k)(x + 3k)$. a₂) (Nach Abs 147/6.2, Kl.10) (2 VP) Jeder Graph der Schar besitzt einen Wendepunkt. Betrachtet werden die Tangenten in diesen Wendepunkten. Zeigen Sie, dass alle diese Wendetangenten parallel zueinander sind. (BAg 151/365 + 184/482)

b₂₋₃) (Nach Abs 186/7.1.15, Kl.11) (2 VP) Jeder Graph der Schar hat einen Extrempunkt im ersten Quadranten. Alle diese Extrempunkte liegen auf der ersten Winkelhalbierenden. Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von f_k . (BAg 160/400)

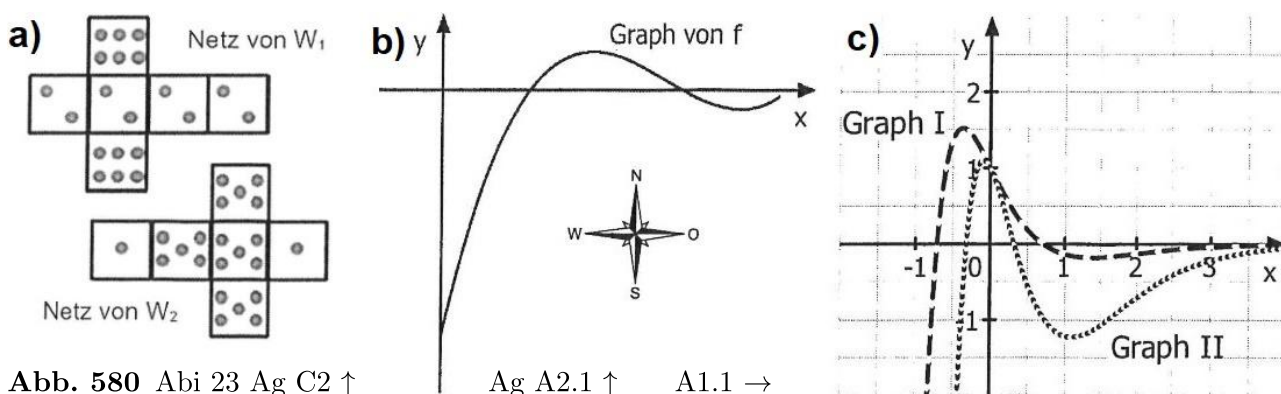


Abb. 580 Abi 23 Ag C2 ↑

Ag A2.1 ↑ A1.1 →

Aufgabe A2.1 (Nach Abs 147/6.2, Kl.10) Abb. 1033/580b stellt die Planskizze einer Landstraße dar. Der Verlauf dieser Landstraße wird durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{27}{8}x^2 + 9x - \frac{13}{2}$ für $0 \leq x \leq \frac{9}{2}$ beschrieben. Die positive y -Achse beschreibt dabei die Himmelsrichtung Norden, die positive x -Achse die Himmelsrichtung Osten. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Kilometer in der Realität. a) i₁) (2.5 VP) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts P , der den nördlichsten Punkt der Landstraße darstellt. (BAg 148/352)

ii₁₋₂) (1 VP) An der Stelle

$x_0 = 3$ wechselt das Vorzeichen der Funktion f'' vom Negativen ins Positive. Beschreiben Sie, was dies für den Verlauf der Landstraße bedeutet. (Teilergebnis: $P(2|1)$) (BAg 149/360)

b₁₋₂) i) (2 VP) Ein Teil des Graphen der Funktion g mit $g(x) = -\frac{27}{8}x^2 - \frac{75}{8}x - \frac{13}{2}$ stellt einen Fahrradweg dar, der zwei Punkte der Landstraße verbindet. Diese beiden Punkte werden durch $A(a|f(a))$ und $B(b|f(b))$ mit $a < b$ dargestellt. Bestimmen Sie die Koordinaten von A und B . (Teilergebnis: $a=0$, $b=1$) (BAg 33/61 + 105/254) ii) (2.5 VP) (Nach Abs 186/7.1.15, Kl.11) Berechnen Sie $\int_0^1 (g(x) - f(x))dx$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. (BAg 183/480)

Im Folgenden wird auch der Höhenverlauf der Landstraße betrachtet. Stellt $R(r|f(r))$ einen Punkt auf der Landstraße dar, so gilt für seine Höhe $h(r)$: $h(r) = u(f(r))$ mit $u(x) = 2 - \frac{1}{500} \cdot (x - 1)^2$ ($h(r)$ in Kilometer über der Meereshöhe).

c) i₁) (1.5 VP) Zeigen Sie, dass der westlichste Punkt der Landstraße auf einer Höhe von etwa 1890 Meter liegt. ii₁₋₂) (1.5 VP) Begründen Sie, dass kein Punkt der Landstraße höher als 2000 Meter liegt. iii₂) (1.5 VP) Der am höchsten gelegene Punkt auf der Landstraße wird durch den Punkt S auf dem Graphen von f dargestellt. Bestimmen Sie die Koordinaten von S .

d₂) (2 VP) Zum Abfluss von Regenwasser sind die durch $P(2|1)$ und $Q(0|f(0))$ dargestellten Punkte auf der Landstraße durch ein geradlinig verlaufendes Rohr verbunden. Berechnen Sie das Gefälle dieses Rohrs.

Aufgabe A2.2 (Nach Abs 147/6.2, Kl.10) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist eine Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = \sin\left(\frac{\pi}{a^2+1} \cdot x\right)$. Die zugehörigen Graphen werden mit G_a bezeichnet.

a₁₋₂) (1.5 VP) Berechnen Sie die Größe des Steigungswinkels der Tangente an G_0 im Ursprung.

b₁₋₂) (1 VP) Bestimmen Sie denjenigen Wert von a , für den die Periode von f_a minimal wird.

c₃) (3 VP) Die Tangente an G_a an der Stelle $x_0 = 0$ und die Tangente an G_a an der kleinsten positiven Nullstelle von f_a schließen mit der x -Achse ein Dreieck ein. Bestimmen Sie alle Werte von a , für die der Inhalt dieses Dreiecks 2.5π beträgt.

Aufgabe B1 (Nach Abs 275/10.5) Auf einem ebenen, horizontalen Gelände steht ein 15 m hoher Mast, an dem drei rechteckige Werbeflächen befestigt sind. In Abb 1035/581c ist eine der Werbeflächen grau dargestellt. Der Mast ist zylinderförmig und hat einen Durchmesser von 80 cm; er verläuft ebenso wie die seitlichen Kanten der Werbeflächen vertikal. In einem Koordinatensystem wird das Gelände durch die x_1x_2 -Ebene beschrieben; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Wirklichkeit. Der Mittelpunkt der Grundfläche des Masts wird durch den Koordinatenursprung dargestellt. Die Punkte $A(5|-2|11)$, $E(-2|5|15)$ und $F(-2|-2|15)$ stellen Eckpunkte der Werbeflächen dar.

a₁₋₂) i) (1 VP) Bestimmen Sie den Flächeninhalt der grau dargestellten Werbefläche.

ii) (1 VP) Prüfen Sie, ob die beiden anderen Werbeflächen einen rechten Winkel einschließen.

b₁₋₂) (Nach Abs 265/10.3) Die grau dargestellte Werbefläche liegt im Modell in einer Ebene, deren Gleichung in der Form $ax_1 + ax_2 = b$ dargestellt werden kann. Ermitteln Sie passende Werte von a und b .

c₂₋₃) Begründen Sie, dass der Abstand der grau dargestellten Werbefläche zum Mast mit dem Abstand des Mittelpunkts der oberen Kante dieser Werbefläche zum Mast übereinstimmt.

Auf dem Gelände befindet sich ein Sportplatz. Von dort aus blickt ein Kind zur grau dargestellten Werbefläche. Die Sicht des Kindes wird durch eine Mauer eingeschränkt. Die obere Kante der Mauer wird im Modell durch die Strecke zwischen den Punkten $P(20|-5|3)$ und $Q(20|25|3)$ dargestellt. Der Punkt, von dem der Blick des Kindes ausgeht, wird durch $K(24|15|1)$ beschrieben. Das Kind kann denjenigen Teil der Werbefläche, der durch das Dreieck GBH mit $G(4|-1|11)$ dargestellt wird, nicht sehen (siehe Abb 1035/581a).

d) i₂) Eine Sichtlinie verläuft im Modell von K zu G . Berechnen Sie die Größe des Winkels dieser Sichtlinie gegenüber der Horizontalen. ii₃) Beschreiben Sie, wie man die Koordinaten von H rechnerisch bestimmen könnte.

e₁₋₂) (Nach Abs 265/10.3) Auf dem Sportplatz wird ein Fußball geschossen. Die Flugbahn des Balls wird im Modell durch Punkte der Form $R_t(32 - 8t | 5 | -5t^2 + 6.5t + 0.3)$ mit $t \in \mathbb{R}^+$ beschrieben. Dabei ist t die seit dem Schuss vergangene Zeit in Sekunden. Der Ball bewegt sich im Modell in der Ebene L .

i) (1 VP) Beschreiben Sie die besondere Lage von L im Koordinatensystem und geben Sie eine Gleichung dieser Ebene an. ii) (2 VP) Untersuchen Sie, ob der Ball die Mauer trifft, bevor

er den Boden (Ebene $x_3 = 0$) berührt.

Aufgabe B2 (Nach Abs 275/10.5) Abb 1035/581b zeigt den Körper $ABCDEF$ mit $A(6|3|0)$, $B(0|6|0)$, $C(3|0|0)$, $D(6|3|6)$, $E(0|6|6)$ und $F(3|0|12)$.

a₁) (Nach Abs 265/10.3) Die Punkte D , E und F liegen in der Ebene L . Ermitteln Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform. (Teilergebnis: $L : 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 42$)

b₁) Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den L mit der x_1x_2 -Ebene einschließt.

c₂) (Nach Abs 265/10.3) Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC kann mit dem Term $6 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6$ berechnet werden. i) (1.5VP) Veranschaulichen Sie diese Tatsache durch geeignete Eintragungen in Abb 1035/581b. ii) (1.5 VP) Berechnen Sie das Volumen des Körpers $ABCDEF$.

d₃₋₄) (Nach Abs 265/10.3) Die Ebene N_k enthält die x_3 -Achse und den Punkt $P_k(1 - k|k|0)$ mit $k \in]0; 1[$. Welche Kanten des Körpers von N_k geschnitten werden, ist abhängig von k . Durchläuft k alle Werte zwischen 0 und 1, so gibt es Bereiche $]a; b[$, für die N_k für alle Werte von $k \in]a; b[$ jeweils die gleichen Kanten des Körpers schneidet. Bestimmen Sie den größten dieser Bereiche und geben Sie die zugehörigen Kanten an.

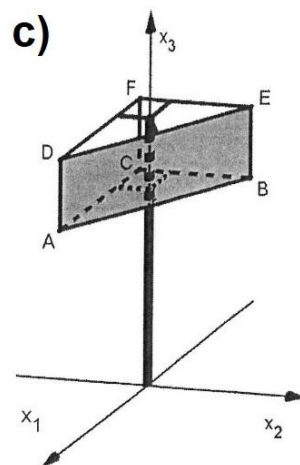
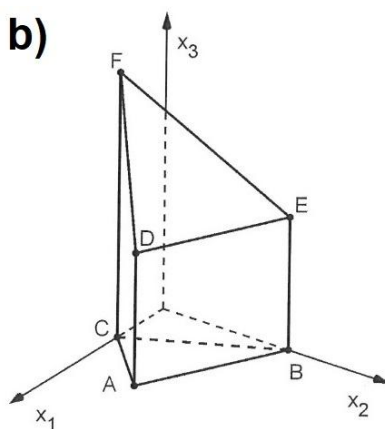
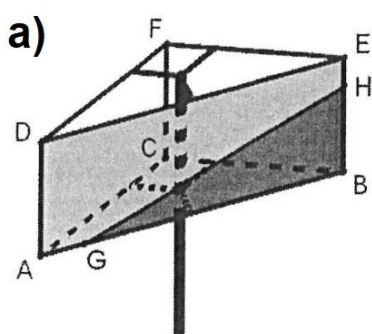


Abb. 581 Abi 23 Ag B1d ↑

Ag B2c ↑ Ag B1 →

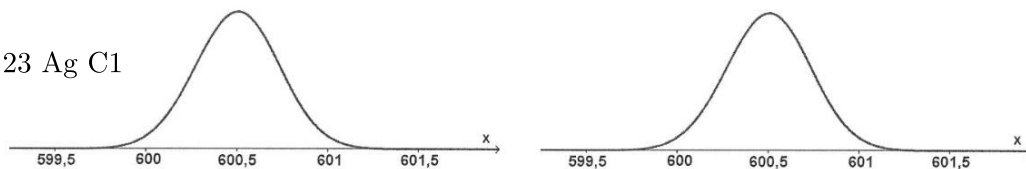
e₂₋₃) (Nach Abs 262/10.2, Kl.11)) Auf der Kante AD liegt der Punkt Q , auf der Kante BE der Punkt $R(0|6|2)$. Das Dreieck FQR hat in Q einen rechten Winkel. Bestimmen Sie die x_3 -Koordinate von Q .

f₃₋₄) (Nach Abs 265/10.3) Der Körper wird so um die Gerade AB gedreht, dass der mit D bezeichnete Eckpunkt nach der Drehung in der x_1x_2 -Ebene liegt und dabei eine positive x_2 -Koordinate hat. Die folgenden Rechnungen liefern die Lösung einer Aufgabe im Zusammenhang mit der beschriebenen Drehung:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \Leftrightarrow t = 0.8, \text{ d.h. } S(4.8|3.6|0) \quad \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OS} + |\overrightarrow{CS}| \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung und geben Sie die Bedeutung von S an.

Abb. 582 Abi 23 Ag C1



Aufgabe C1 (Nach Abs 336/12.3, Kl.10) Ein Unternehmen stellt Olivenöl her und füllt es in Flaschen ab. Laut Aufdruck beträgt die Füllmenge jeder Flasche 600 ml. Die Flaschen werden in Kartons verpackt; jeder Karton enthält zwölf Flaschen. Ein Karton gilt als fehlerhaft, wenn mehr als eine Flasche weniger als 600 ml Öl enthält. Für jede Flasche beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie weniger als 600 ml Öl enthält, 1,5 %.

a₂) (1.5 VP) Die Rechnung $0.985^{12} \approx 83.4\%$ stellt im Sachzusammenhang die Lösung einer Aufgabe dar. Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung und erläutern Sie den Ansatz der Rechnung.

b₂) (1.5 VP) An einen Supermarkt wird regelmäßig die gleiche Anzahl von Flaschen geliefert. Dabei enthalten im Mittel mehr als 780 Flaschen mindestens 600 ml Öl. Ermitteln Sie, wie viele Flaschen

mindestens geliefert werden.

c₃) (2 VP) Ein Supermarkt erhält eine Lieferung von 150 Kartons. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 3 % der Kartons fehlerhaft sind.

(Nach Abs 361/13.2) Die Füllmenge der Flaschen soll als normalverteilt mit einem Erwartungswert von 600.5ml und einer Standardabweichung von 0.23ml angenommen werden.

d₁) Eine Flasche wird zufällig ausgewählt. Ermitteln Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:

A: (0.5 VP) 'Die Flasche enthält mehr als 601 ml Öl.'

B: (1 VP) 'Die Füllmenge der Flasche weicht höchstens um 0.5 ml vom Erwartungswert ab.'

e₂) (1 VP) Die Füllmenge einer Flasche ist nie negativ. Die Normalverteilung, die zur Beschreibung der Füllmenge der Flaschen verwendet wird, ist jedoch auch für negative reelle Zahlen definiert und nimmt dabei ausschließlich positive Werte an. Begründen Sie, dass die Verwendung der Normalverteilung dennoch sinnvoll ist.

f) (3 VP) Das Unternehmen möchte die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Flasche weniger als 600 ml Öl enthält, verringern. Für die nötige Änderung der Maschine, die die Flaschen befüllt, gibt es zwei Vorschläge:

Vorschlag 1: Die eingestellte Füllmenge von 600.5 ml wird erhöht.

Vorschlag 2: Die Genauigkeit, mit der die eingestellte Füllmenge von 600.5 ml erreicht wird, wird erhöht.

Abb 1035/582a und b zeigen jeweils den Graphen der Dichtefunktion, die vor der Änderung der Maschine die Füllmenge der Flaschen beschreibt.

i₂) Skizzieren Sie in Abb 582a den Graphen einer Dichtefunktion, die sich aus dem Vorschlag 1 ergeben könnte, und in der Abb 582b den Graphen einer Dichtefunktion, die zum Vorschlag 2 passt.

ii₃) Begründen Sie für jeden Vorschlag mithilfe des skizzierten Graphen, dass damit das Ziel des Unternehmens erreicht wird.

g₂₋₃) (Nach Abs 322/12.1.5, Kl.8) (2 VP) Jede Flasche wird mit einem Anhänger versehen. Die Anhänger gibt es mit n verschiedenen Motiven. Für jede Flasche wird eines dieser Motive zufällig ausgewählt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei n zufällig ausgewählten Flaschen alle Motive verschieden sind, ist kleiner als 1 %. Ermitteln Sie den kleinsten möglichen Wert von n .

Aufgabe C2 (Nach Abs 333/12.2.6, Kl.9) Michael und Torsten spielen mit den beiden Würfeln, deren Netze in Abb 1033/580a abgebildet sind, folgendes Spiel: Michael würfelt mit dem Würfel W_1 , Torsten würfelt mit dem Würfel W_2 . Der Spieler mit der höheren Augenzahl gewinnt.

a₁) (2 VP) i) Geben Sie alle möglichen Würfelresultate an, bei denen Michael das Spiel gewinnt.

ii) Begründen Sie, dass Michaels Gewinnwahrscheinlichkeit $\frac{5}{9}$ beträgt.

b₁) (Nach Abs 336/12.3, Kl.10) (2 VP) Michael und Torsten spielen 30 Spiele. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

A: 'Michael gewinnt mindestens 13, aber höchstens 20 Spiele.'

B: 'Torsten gewinnt mehr Spiele als Michael.'

c₂₋₃) (2 VP) Es werden n Spiele gespielt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Michael dabei nur das letzte Spiel gewinnt, soll weniger als 5% betragen. Bestimmen Sie den kleinst möglichen Wert von n .

d₂₋₃) (2.5 VP) Das Spiel wird folgendermaßen verändert: Vor dem Würfeln wird ein Glücksrad mit einem grünen und einem roten Sektor einmal gedreht. Wenn dabei grün erscheint, dann behalten Michael und Torsten ihre Würfel; erscheint rot, dann tauschen sie die Würfel. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Michael bei diesem Spiel eine höhere Zahl als Torsten würfelt $\frac{7}{15}$, beträgt. Bestimmen Sie für den grünen Sektor die Größe des Mittelpunktswinkels.

(Nach Abs 353/13.1) Torsten hat den Verdacht, dass beim Würfel W_2 die Wahrscheinlichkeit für die Augenzahl 5 nicht $\frac{2}{3}$ beträgt. Daher wird ein einseitiger Hypothesentest mit 500 Würfeln auf dem Signifikanzniveau s durchgeführt. Dabei ergibt sich die Entscheidungsregel, dass die Nullhypothese genau dann abgelehnt wird, wenn weniger als 318-mal die Augenzahl 5 erzielt wird.

e) i₂) (0.5 VP) Formulieren Sie die zugehörige Nullhypothese.

ii₃) Bestimmen Sie alle ganzzahligen Prozentwerte, die für s in Frage kommen.

f₂) i) (1 VP) Formulieren Sie den Fehler zweiter Art im Sachzusammenhang.

ii) (1 VP) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art unter der Annahme, dass beim Würfel W_2 die Augenzahl 5 mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 % erzielt wird.

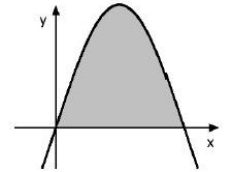
16.6 Musteraufgaben für das LK-Abitur 2021+2023

Was aus dem Musterabitur sollte ich nach welcher Unterrichtseinheit können?

Kl. 10: 1037/16.6.1 P3,7; 1039/16.6.4 C1abc, 1040/16.6.5 C2ab; **UE 11₂:** 1039/16.6.4 A2.1;
UE 11₃: P1,2,4,9; A1.1c,d,e; **UE 12₁:** P5; **UE 12₄:** P6; 1039/16.6.3 B;
UE 11₇: C1de; **UE 11₈:** P8, C2de; .

16.6.1 Pflichtteil - 20 VP

Aufgabe 1) ₂) Erst nach Abs. 183/7.1.12 aus Kl. 11 (2.5 VP).
 (BAG: 182/474 + 183/481) Abgebildet ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot \sin(2x)$. Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.



Aufgabe 2) Erst nach Abs. 186/7.1.15 aus Kl. 11 (2.5 VP).

An einer Messstation wurde über einen Zeitraum von 10 Std die Anzahl der Pollen pro m^3 Luft ermittelt. Dabei kann die Anzahl der Pollen pro Kubikmeter zum Zeitpunkt t (in Std nach Beginn der Messung) durch die Gleichung $n(t) = t^2 - 60t + 500$ mit $t \in \mathbb{R}$; $0 \leq t \leq 10$, beschrieben werden.

a₂) (BAG 140/323) Bestimmen Sie die mittlere Änderung der Anzahl der Pollen pro Kubikmeter und Stunde während der ersten beiden Stunden der Messung.

b₂) (BAG 143/336) Ermitteln Sie den Zeitpunkt nach Beginn der Messung, zu dem die momentane zeitliche Änderung der Anzahl der Pollen pro Kubikmeter und Stunde -30 beträgt.

Aufgabe 3) Kann mit dem Stoff Klasse 10 bearbeitet werden (2.5 VP).

Die Abbildung 583 a) zeigt den Graphen G_f der in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierten Funktion f mit $f(x) = \frac{4}{x^2}$. G_f ist symmetrisch bezüglich der y -Achse.

a₃) Die Gerade, die parallel zur x -Achse durch den Punkt $P(0|p)$ verläuft, schneidet G_f in zwei Punkten. Der Abstand dieser beiden Schnittpunkte ist 1. Berechnen Sie den Wert von p .

b₂) (Basisformel 9/58) Die Koordinatenachsen schließen mit der Tangente an G_f in einem Punkt $Q(u|f(u))$ mit $u \geq 0$ ein gleichschenkliges Dreieck ein. Berechnen Sie die Koordinaten von Q .

Aufgabe 4) Erst nach Abs. 186/7.1.15 aus Kl. 11 (2.5 VP).

(BAG: 184/482) Abbildung 1037/583 b) zeigt den Graphen einer Stammfunktion F einer Funktion f . Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

(1₂) f' besitzt im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ eine Nullstelle. (2₃) $f(F(-2)) > 0$

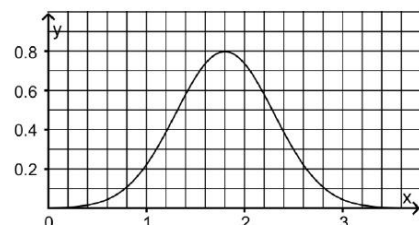
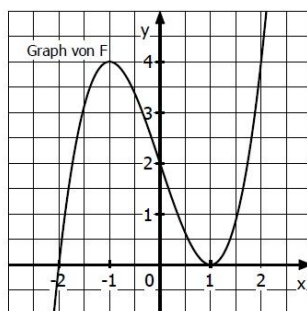
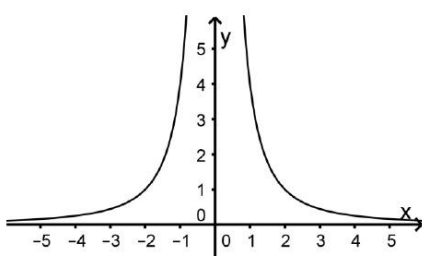


Abb. 583 a) zu Aufgabe 3;

b) zu Aufgabe 4;

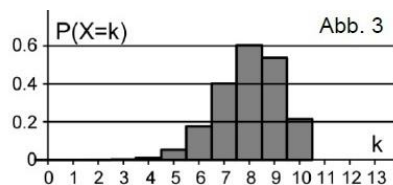
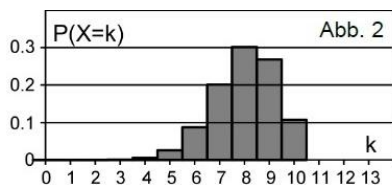
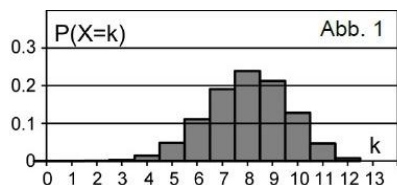
c) zu Aufgabe 8;

Aufgabe 5) Erst nach Abs. 265/10.3 aus Kl. 12 berechnen (2.5 VP).

Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$.

a₂) (BAG: 257/672 + 263/696) Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von g und h an. Zeigen Sie, dass g und h senkrecht zueinander verlaufen.
 ↓ (BAG: 267/712)

b₃) Die Ebene E enthält die Geraden g und h . Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.



Aufgabe 6) Erst nach Abs. 271/10.4 aus Kl. 12 (2.5 VP).

Das Dreieck $\triangle(A, B, C)$ mit den Punkten $A(3|3|3)$, $B(6|7|3)$ und $C(2|10|3)$ ist im Punkt B rechtwinklig und liegt in der Ebene mit der Gleichung $x_3 = 3$.

a₂) (BAg: 272/730) Weisen Sie nach, dass das Dreieck $\triangle(A, B, C)$ den Flächeninhalt $\frac{25}{2}$ (FE) besitzt.

b₂) (BAg: 273/732) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punkts D so, dass das Volumen der Pyramide A, B, C, D gleich 25 ist.

Aufgabe 7) Kann mit dem Stoff Klasse 10 bearbeitet werden (2.5 VP) (BAg 346/857).

a₂) Die Zufallsgröße $\mathcal{X}$ ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0,8$. Eine der nachfolgenden Abbildungen stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $\mathcal{X}$ dar. Geben Sie die beiden Abbildungen an, die die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $\mathcal{X}$ nicht darstellen. Begründen Sie Ihre Angabe.

b₂) Betrachtet wird die binomialverteilte Zufallsgröße $\mathcal{Y}$ mit den Parametern n und p . Es gilt:

(1) Der Erwartungswert von $\mathcal{Y}$ ist 8. (2) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $\mathcal{Y}$ ist symmetrisch.

Ermitteln Sie den Wert von n .

Aufgabe 8) (BAg 365/906) Erst nach Abs. 361/13.2 (nur SemQ oder LK) aus Kl. 11 / 12 (2.5 VP).

Die Abb.1037/583 c) zeigt den Graphen der Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsgröße $\mathcal{X}$.

a₁) Geben Sie den Erwartungswert von $\mathcal{X}$ an.

b₁₋₂) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit (Wk) dafür an, dass $\mathcal{X}$ den Wert 2.4 annimmt.

c₂) Bestimmen Sie [etwa] die Wk dafür, dass $\mathcal{X}$ einen Wert aus dem Intervall $[1; 1.4]$ annimmt.

16.6.2 Wahlteil Analysis Basisabschnitte 119/5.4.9 + 125/5.5.4 + 171/6.3.10 + 181/7.1.9

Aufgabe 1.1 Nur LK, die Teile a) + b) sind schon zu Beginn Klasse 11 lösbar.

Abb. 1039/584 zeigt den Graphen einer Funktion f , die für $0 \leq t \leq 15$ das Volumen des Wassers in einem Becken in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $f(t)$ das Volumen in Kubikmetern.

a) (5 VP) 1) Geben Sie das Volumen des Wassers fünf Stunden nach Beobachtungsbeginn an. 1) Geben Sie den Zeitraum an, in dem das Volumen mindestens 350 Kubikmeter beträgt. 2) Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate des Wasservolumens zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn. 2) (BAg: 105/252 + 110/270) Begründen Sie, dass die Funktionsgleichung von f weder die Form I noch die Form II hat: **I** $y = -0.3t^4 + at^2 + 100$, $a \in \mathbb{R}$ **II** $y = 8.5t^3 + 3.7t^2 + bt + 100$, $b \in \mathbb{R}$

b₂₋₃) (3.5 VP) Die 15 Stunden nach Beobachtungsbeginn vorliegende momentane Änderungsrate des Wasservolumens bleibt bis zu dem Zeitpunkt erhalten, zu dem das Becken kein Wasser mehr enthält. Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man diesen Zeitpunkt grafisch bestimmen kann. Interpretieren Sie die Gleichung $f(t+6) = f(t) - 350$ im Sachzusammenhang. Geben Sie eine Lösung der Gleichung an.

Ab hier erst nach Abs. 186/7.1.15 aus Kl. 11 zu bearbeiten

Für ein anderes Becken wird die momentane Änderungsrate des Volumens des enthaltenen Wassers für $0 \leq t \leq 15$ durch die Funktion g mit $g(t) = 0.4 \cdot (2t^3 - 39t^2 + 180t)$ beschrieben. Dabei ist t die seit

Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $g(t)$ die Änderungsrate in $\frac{m^3}{h}$. Die Funktion G mit $G(t) = 0.2 \cdot (2t^4 + 26t^3 + 180t^2)$ ist eine Stammfunktion von g .

c) (4.5 VP) (BAg 149/357+153/375) ₂) Berechnen Sie für den beschriebenen Zeitraum denjenigen Zeitpunkt, zu dem die momentane Änderungsrate des Wasservolumens maximal ist. ₃) Ermitteln Sie rechnerisch den Zeitraum, in dem das Volumen des Wassers abnimmt.

d₄) (4.5 VP) (BAg 179/457) Drei Stunden nach Beobachtungsbeginn sind im Becken 350 Kubikmeter Wasser enthalten. Bestimmen Sie das Volumen des Wassers zu Beobachtungsbeginn. Untersuchen Sie rechnerisch, ob es nach Beobachtungsbeginn einen Zeitpunkt gibt, zu dem das Wasservolumen ebenso groß ist wie zu Beobachtungsbeginn.

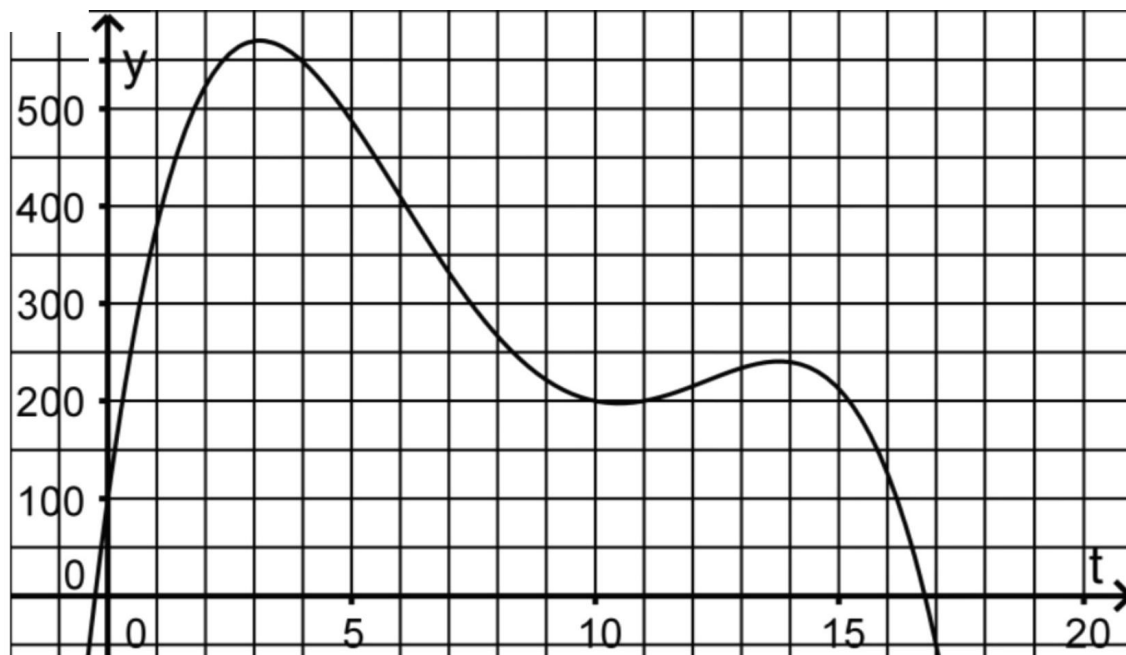


Abb. 584 Schaubild Wahlteil Analysis

Wahlteil Analysis Aufgabe 1.2 (Nur LK, 2.5 VP) Erst nach Abs. 170/6.3.9 aus Kl. 11.

(Partneraufgabe 147/349) Zeigen Sie: Wenn der Graph einer differenzierbaren Funktion f die x -Achse in einem Punkt P berührt, dann gilt dies auch für den Graphen der Funktion g mit $g(x) = e^{f(x)} - 1$.

16.6.3 Wahlteil Analytische Geo. Basisabs. 261/10.1.15 + 276/10.5.5 + 279/10.5.8

Aufgabe B 1.1 Erst nach Abs. 275/10.5 aus Kl. 12.

a) (4 VP) (BAg 263/695 + 267/712) Gegeben sind die Punkte $A(6|1|0)$, $B(4|5|-4)$ und $C(-2|8|2)$.
₁) Zeigen Sie, dass das Dreieck $\triangle(A, B, C)$ bei B einen rechten Winkel besitzt. Die drei Punkte liegen in einer Ebene E .
₁₋₂) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E .
₁) Es gibt einen Punkt D , für den das Viereck A, B, C, D ein Rechteck ist. Ermitteln Sie die Koordinaten von D .

b) (Nur LK; 3.5 VP; BAg 269/718 + 277/750) Gegeben ist die Ebenenschar E_k :
 $kx_1 + kx_2 + x_3 = 14$; ($k \in \mathbb{R}$).
₁₋₂) Beschreiben Sie die besondere Lage der Ebene E_0 im Koordinatensystem.
₂₋₃) Bestimmen Sie die Ebenen der Schar, von denen der Pkt $R(1|1|4)$ den Abstand 2 hat.

Aufgabe B 1.2 Nur LK, bis 2022; erst nach dem Basisabschnitt 264/10.2.4 aus Kl. 12 (2.5 VP).

₃₋₄) Beweisen Sie: Wenn in einem Parallelogramm die Diagonalen gleich lang sind, so ist es ein Rechteck.

16.6.4 Wahlteil Stochastik - 10 VP

(Basisabschnitt 348/12.3.11)

Aufgabe C1: Die Teile a) - c) sind schon zu Beginn Klasse 11 lösbar.

Die Tabelle zeigt die prozentualen Anteile von Haushalten unterschiedlicher Größe an der Gesamtzahl der Haushalte im Jahr 2013 in Deutschland.

1-Personen-Haushalte	40.5%
2-Personen-Haushalte	34.5%
3-Personen-Haushalte	12.5%
4-Personen-Haushalte	9.2%
Haushalte mit mindestens 5 Personen	3.3%

a) (2.5 VP) (BAG 344/854) Für eine Umfrage im Jahr 2013 sollten 100 Haushalte zufällig ausgewählt werden. Bestimmen Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:

1) A: 'Es wurden genau vierzig 1-Personen-Haushalte ausgewählt.'

2) B: 'Unter den ersten zehn ausgewählten Haushalten war kein 4-Personen-Haushalt und unter den restlichen neunzig Haushalten waren höchstens fünf 4-Personen-Haushalte.'

b₂) (1.5 VP) (BAG: BAG 344/854) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in drei im Jahr 2013 zufällig ausgewählten Haushalten insgesamt genau fünf Personen lebten.

c₃) (2 VP) (Nur LK; Basisabschnitt 347/12.3.10) Ermitteln Sie, wie viele Haushalte man im Jahr 2013 mindestens hätte zufällig auswählen müssen, damit darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mehr als zwanzig 2-Personen-Haushalte sind.

Ab hier nur LK und erst nach Abs. 353/13.1 aus Kl. 11 oder 12 zu bearbeiten

d₄)_{LK} (1.5 VP) (BAG: 354/876) Im Jahr 2014 wurde vermutet, dass der tatsächliche Anteil der 1-Personen-Haushalte größer als im Jahr 2013 ist. Um einen Anhaltspunkt dafür zu gewinnen, ob diese Vermutung zutrifft, sollte auf der Grundlage einer Stichprobe von 500 Haushalten und einem Signifikanzniveau von 5 % ein Hypothesentest durchgeführt werden. Dabei sollte möglichst vermieden werden, dass irrtümlich von einem zu hohen Anteil der 1-Personen-Haushalte ausgegangen wird. Formulieren Sie eine Nullhypothese, die dieser Zielsetzung entspricht, und begründen Sie Ihre Wahl.

e₃)_{LK} (2.5 VP) (BAG: 360/893) Man bezweifelt, dass der Anteil der 2-Personen-Haushalte heute immer noch 34.5 % beträgt. Dies (H_0 : Abs. 1001/15.13.3) soll mit einem Stichprobenumfang $n = 500$ auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden. Dabei ergibt sich der Ablehnungsbereich $A = \{0, \dots, 154\}$ und die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art beträgt 25 %. Formulieren Sie den Fehler 2. Art im Sachzusammenhang. Zeigen Sie, dass der wahre Anteil der 2-Personen-Haushalte nicht 30 % betragen kann.

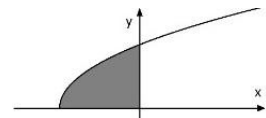
16.6.5 Neue Musteraufgaben für das Abi 2023 (nur LK) (Basisabschnitte 348/12.3.11)

Aufgabe 9: 2) Erst nach Abs. 183/7.1.12 aus Kl. 11 (2.5 VP).

(BAG: 182/474 + 183/481) Abgebildet ist der Graph der Funktion f mit

Abgebildet ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{4x + 16}$.

Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.



Aufgabe C2: In Deutschland liegt bei 1 % der Bevölkerung eine Glutenunverträglichkeit vor. Die betroffenen Personen reagieren auf den Verzehr von bestimmten Getreidesorten mit körperlichen Beschwerden. Ob eine Glutenunverträglichkeit vorliegt oder nicht, kann mithilfe eines Schnelltests diagnostiziert werden. Zeigt das Ergebnis dieses Tests die Glutenunverträglichkeit an, so bezeichnet man es als positiv. Liegt bei einer Person eine Glutenunverträglichkeit vor, so ist das Testergebnis mit einer Wahrscheinlichkeit von 98 % positiv. Liegt bei einer Person keine Glutenunverträglichkeit vor, so beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Testergebnis dennoch positiv ist, 4 %. Bei einer Person, die aus der Bevölkerung Deutschlands zufällig ausgewählt wurde, wird der Test durchgeführt.

a₂₋₃) (ab Klasse 9) BAG 330/818 Erstellen Sie zu dem beschriebenen Sachzusammenhang ein beschriftetes Baumdiagramm. Ermitteln Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit: A: 'Bei der Person liegt eine Glutenunverträglichkeit vor und das Testergebnis ist positiv.' B: 'Das Testergebnis ist negativ.' Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Glutenunverträglichkeit vorliegt, wenn das Testergebnis positiv ist. (4.5 VP)

b₁) (BAG 344/854, ab Klasse 10) Im Rahmen einer Studie werden aus der Bevölkerung Deutschlands 20000 Personen zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße $\mathcal{X}$ gibt die Anzahl der ausgewählten Personen an, bei denen eine Glutenunverträglichkeit vorliegt. Berechnen Sie in einem geeigneten Modell die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der ausgewählten Personen, bei denen eine Glutenunverträglichkeit vorliegt, um mehr als 10 % vom Erwartungswert von $\mathcal{X}$ abweicht. (2 VP)

Der Test wird mithilfe eines Teststreifens durchgeführt, auf dem ein Indikator aufgebracht ist. Ist die Indikatormenge auf einem Teststreifen kleiner als 15 mg, so ist dieser unbrauchbar. Der Hersteller der Teststreifen verfolgt das Ziel, dass höchstens 10 % der hergestellten Teststreifen unbrauchbar sind, und führt deshalb regelmäßig eine Qualitätskontrolle durch. Dazu wird der laufenden Produktion eine Stichprobe von 100 Teststreifen entnommen. Nur wenn sich darunter mindestens 16 unbrauchbare Teststreifen befinden, entscheidet man sich dafür, das Herstellungsverfahren zu verbessern.

c₄) (BAG 355/877 + 358/887) Beschreiben Sie, welche Fehlentscheidungen bei dieser Qualitätskontrolle auftreten können. Der Hersteller entschließt sich, die Kontrolle künftig mit einer größeren Stichprobe von 200 Teststreifen durchzuführen. Die Wahrscheinlichkeit für eine unnötige Verbesserung des Herstellungsverfahrens soll sich durch diese Änderung jedoch nicht erhöhen. Ermitteln Sie, wie groß die Anzahl unbrauchbarer Teststreifen, ab der man sich dafür entscheidet, das Herstellungsverfahren zu verbessern, nun mindestens sein muss. (4 VP)

d₂₋₃) (BAG 360/893) Die Indikatormenge auf den Teststreifen ist normalverteilt. Vor einer Verbesserung des Herstellungsverfahrens hatte der Erwartungswert 20 mg und die Standardabweichung 4.0 mg betragen. Durch die Verbesserung konnte die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Teststreifen aufgrund der Indikatormenge unbrauchbar ist, halbiert werden. Der Erwartungswert für die Indikatormenge blieb dabei unverändert. Bestimmen Sie die geänderte Standardabweichung (auf eine Dezimale gerundet). (2 VP)

16.7 Musteraufgaben von Herrn Trs

Bereiten Sie einen 10-minütigen Vortrag zur Aufgabe vor. Eigene Ergänzungen sind möglich. Vorbereitete Notizen dürfen verwendet werden. Der Einsatz von Medien (Tafel, Dokumentenkamera) zu Visualisierungszwecken ist ebenfalls möglich. Vorbereitungszeit: 20 min Hilfsmittel: WTR

16.7.1 Aufgabe und Lövo zu analytische Geometrie

Gegeben sind die Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$.

- Definieren Sie möglichst präzise, was man unter 'windschiefen Geraden' versteht.
- i) Beschreiben Sie eine effiziente Strategie zur Untersuchung der Lagebeziehung zweier Geraden im Raum. ii) Begründen Sie mit Hilfe dieser Strategie, dass die beiden Geraden g und h windschief sind.
- i) Bestimmen Sie den Abstand der Geraden g und h ohne größere Rechnung, indem Sie die besondere Lage von g und h im Raum ausnutzen. ii) (nur LK) Kontrastieren Sie zwei Strategien, um im allgemeinen Fall den Abstand zweier windschiefer Geraden zu bestimmen.
- (nur LK) Für $a \in \mathbb{R}$ ist die Geradenschar $l_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2+a \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ gegeben. i) Untersuchen Sie die Lagebeziehung von l_a und g sowie von l_a und h in Abhängigkeit von a . ii) Begründen Sie, dass die Geraden der Schar in einer Ebene liegen. Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Ebene.

ERWARTUNGSHORIZONT (Lösungsvorschläge)

- Definition 'windschiefe Geraden': Zwei Geraden sind windschief, wenn sie keinen gemeinsamen Punkt haben, aber auch nicht parallel sind.

b) i) Strategie zur Untersuchung der Lagebeziehung zweier Geraden im Raum (**(Formel 67)** = der Baum) (aus Hurra Mathe:) Seien $g : \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{u}$ und $h : \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OQ} + t \cdot \vec{v}$.

Es gilt: $\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow g \parallel h$, wenn zusätzlich das LGS $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + t \cdot \vec{u}$ lösbar ist, so ist $g = h$, ansonsten sind g und h echt parallel. Falls $\vec{u} \nparallel \vec{v}$ so ist $g \nparallel h$, wenn zusätzlich das LGS $\overrightarrow{OP} + s \cdot \vec{u} = \overrightarrow{OQ} + t \cdot \vec{v}$ lösbar ist, so schneiden sich g und h ansonsten sind g und h windschief.

ii) Anwendung der Strategie auf die Geraden g und h : Die Richtungsvektoren von g und h sind keine Vielfachen $\Rightarrow g$ und h schneiden sich in einem Punkt oder sind windschief.

Die Geraden g und h können keinen gemeinsamen Punkt haben, da die x_3 Koordinate = 1 für alle Punkte auf g ist und die x_3 Koordinate = 2 für alle für alle Punkte auf h ist. So ergibt sich im linearen Gleichungssystem in der dritten Zeile die falsche Aussage $1=2$.

c) i) Abstand der Geraden g und h : Beide Geraden sind parallel zur x_1x_2 Ebene $\Rightarrow$ die Geraden haben den Abstand 1 aufgrund der Differenz der x_3 -Koordinaten der Aufpunkte.

ii) Kontrastierung allgemeiner Strategien zur Bestimmung des Abstands windschiefer Geraden:

Seien $g : \vec{x} = \overrightarrow{OP} + s \cdot \vec{u}$ und $h : \vec{x} = \overrightarrow{OQ} + t \cdot \vec{v}$, $s, t \in \mathbb{R}$.

Strategie 1: Hilfsebene (ähnlich vollständiges Fünfeck)

Wie definieren die Hilfsebene $E : \vec{x} = \overrightarrow{OP} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$, $s, t \in \mathbb{R}$, dann gilt E beinhaltet g und E ist parallel zu h . Damit kann das Abstandsproblem windschiefer Geraden auf die Berechnung des Abstandes Punkt Ebene zurückgeführt werden.

Vorteil: relativ anschaulich und rechnerisch gut zu bewältigen.

Nachteil: keine Berechnung der Koordinaten der Lotfußpunkte.

Strategie 2: Orthogonalitätskriterium

Man bestimmt denjenigen Pkt G auf g und den Pkt H auf h , sodass $\overrightarrow{HG} \perp \vec{u}$ und $\overrightarrow{HG} \perp \vec{v}$ gilt.

Damit ist der Verbindungsvektor der gesuchten Punkte $\overrightarrow{HG}$ orthogonal zu beiden Richtungsvektoren. Hierzu wählt man Wanderpunkte G_s auf g und H_t auf h und löst das lineare Gleichungssystem, welches sich aus den Bedingungen $\overrightarrow{G_s H_t} \cdot \vec{u} = 0$ und $\overrightarrow{G_s H_t} \cdot \vec{v} = 0$ ergibt.

Vorteil: Man erhält auch die Koordinaten der Lotfußpunkte.

Nachteil: Lösungsweg relativ technisch und fehleranfällig (Aufstellen des allgemeinen Verbindungsvektors $\overrightarrow{G_s H_t}$ und Lösen des linearen Gleichungssystems).

d) i) Lagebeziehung von l_a und g : $a = -1 \Rightarrow l_{-1}$ und g schneiden sich im Punkt $S(1|0|1)$.

$a \neq -1 \Rightarrow l_a$ und g sind windschief (aufgrund der jeweils konstanten, aber verschiedenen x_3 -Koordinaten).

Lagebeziehung von l_a und h $a = 0 \Rightarrow l_a$ und h sind identisch $a \neq 0 \Rightarrow l_a$ und h sind (echt) parallel. Begründung, dass alle Geraden der Schar in einer Ebene liegen: Alle Geraden der Schar sind parallel zueinander und zur x_1x_2 -Ebene und unterscheiden sich lediglich in der konstanten x_3 -Koordinate aller Punkte auf der jeweiligen Geraden.

ii) Gleichung der Ebene, in der alle Geraden der Schar liegen: Anhand des Richtungsvektors lässt sich

erkennen, dass die Ebene parallel zur x_3 -Achse ist: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ($r, s \in \mathbb{R}$).

16.7.2 Aufgabe und LöVo zu Analysis (nur LK)

Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f einer gebrochenrationalen Funktion und Abbildung 2 den Graphen G_h einer trigonometrischen Funktion h .

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen von f und h .

b) Interpretieren Sie die folgenden Aussagen graphisch unter Verwendung der mathematischen Fachsprache. Nehmen Sie hierbei Bezug zu den Graphen von f und h .

i) $f(x) \rightarrow 2$ für $x \rightarrow \pm\infty$

ii) $f''(x) > 0$ für $x > 2$

iii) $h''(z) = 0$ und $h'''(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{Z}$

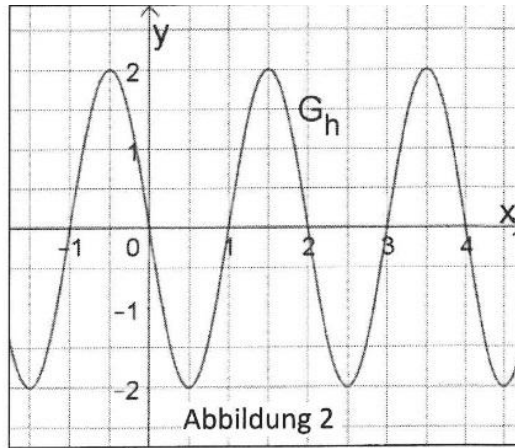
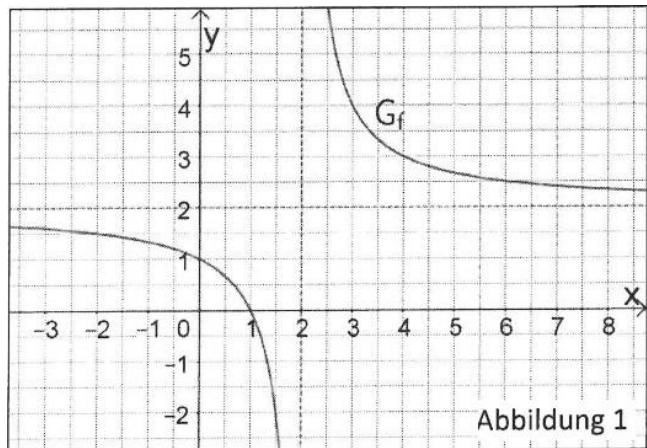
iv) $h(-x) = -h(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

c) i) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung einer Exponentialfunktion g [durch $P(3;4)$], welche den

rechten Ast des Graphen der Funktion f auf dem Intervall $[3; \infty[$ annähert.

ii) Beurteilen Sie, ob der Graph der ermittelten Exponentialfunktion g den rechten Ast des Graphen von f auch auf dem Intervall $]2; \infty[$ gut approximiert.

d) Ermitteln Sie die Funktionsgleichung einer gebrochenrationalen oder einer trigonometrischen Funktion k sowie zwei Grenzen a und b so, dass gilt: $\int_a^b k(x) dx = 10$.



ERWARTUNGSHORIZONT (Lösungsvorschläge)

a) i) senkrechte Asymptote $x = 2$, waagrechte Asymptote $y = 2$, Nullstelle $x = 1$; $f(x) = \frac{2x-2}{x-2}$.

ii) Amplitude $|a| = 2$, Periode $p = 2 \Rightarrow b = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Wählt man die Sinusfunktion als Grundfunktion, so muss der Graph zusätzlich an der x -Achse gespiegelt werden. $\Rightarrow h(x) = -2 \cdot \sin(\pi x) = 2 \cdot \sin(\pi(x-1))$.

b) i) Der Graph von f hat die waagrechte Asymptote $y = 2$. ii) Der Graph von f ist auf dem Intervall $]2; \infty[$ eine Linkskurve.

iii) Der Graph von h hat unendlich viele Wendepunkte, und zwar befinden sich diese genau an den Stellen mit ganzzahligen x -Koordinaten.

iv) Der Graph von h ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

c) i) Gleichung der Exponentialfunktion waagrechte Asymptote $y = 2$ der Punkt $P(3|4)$ liegt auf dem Graphen von g $g(x) = 2 \cdot e^{-(x-3)} + 2 = 2 \cdot e^{-x+3} + 2$. ii) Güte der Annäherung auf dem Intervall $]2; \infty[$: schlechte Approximation für $x \rightarrow 2$, da der Graph von f bei $x = 2$ im Gegensatz zum Graphen der Exponentialfunktion g eine senkrechte Asymptote besitzt.

d) i) Beispielhafte Vorgehensweise mit einer möglichst einfache Funktion:

Ansatz: $k(x) = \frac{r}{x}$. Variante 1: Wähle $a = 1$ und $b = 2$ und bestimme passenden Wert von r :

$\int_1^2 \frac{10/\ln(2)}{x} \cdot dx = 10$. Variante 2: Wähle $a = r = 1$ und bestimme passenden Wert von b : $\int_1^{e^{10}} \frac{1}{x} \cdot dx = 10$.

ii) Ansatz: Bsp: Wähle $k(x) = r \cdot \sin(x)$, $a = 0$ und $b = \pi$ und bestimme passenden Wert von r : $\int_0^\pi \frac{10}{\cos(1)-\cos(2)} \cdot \sin(x) \cdot dx = 10$.

16.8 Stochastik-Abiteile vor 2019 auf Niveau Kl. 10 (GK Niveau)

Alle Aufgaben von Abs 16.8 sind verfilmt; diese Filme mit LöVo finden Sie auf <http://stochastik.SLT.biz>

16.8.1 Abitur 2018 Wahlteil C1.1 Teil a (1.5 VP)

Ein Unternehmen stellt Kunststoffteile her. Erfahrungsgemäß sind 4% der hergestellten Teile fehlerhaft. Die Anzahl fehlerhafter Teile unter zufällig ausgewählten kann als binomialverteilt angenommen werden.

a.) 800 Kunststoffteile werden zufällig ausgewählt. Berechnen Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:

A: 'Genau 30 der Teile sind fehlerhaft.'

B: 'Mindestens 5% der Teile sind fehlerhaft.'

16.8.2 Abitur 2018 Wahlteil C1.2 Teil a (2 VP)

Für ein Spiel wird ein Glücksrad verwendet, das drei Sektoren in den Farben rot, grün und blau hat. Für einen Einsatz von 5 Euro darf ein Spieler das Glücksrad dreimal drehen. Erzielt der Spieler dreimal die gleiche Farbe, werden ihm 10 Euro ausgezahlt. Erzielt er drei verschiedene Farben, wird ein anderer Betrag ausgezahlt. In allen anderen Fällen erfolgt keine Auszahlung. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dreimal die gleiche Farbe erzielt wird, ist $\frac{1}{6}$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass drei verschiedene Farben erzielt werden, beträgt ebenfalls $\frac{1}{6}$.

a₃) Bei einem Spiel ist zu erwarten, dass sich die Einsätze der Spieler und die Auszahlungen auf lange Sicht ausgleichen. Berechnen Sie den Betrag, der ausgezahlt wird, wenn drei verschiedene Farben erscheinen.

16.8.3 Abitur 2018 Wahlteil C2 Teile a und b (3+3 VP)

Ein Affe sitzt vor einer Tastatur, deren Tasten mit den Ziffern 1, 2, 3 und 4 sowie mit den Buchstaben A, B, C, D, E und F beschriftet sind. Zunächst wird angenommen, dass der Affe zufällig auf die Tasten tippt. Die Tastatureingaben werden aufgezeichnet.

a) Es werden die ersten fünf Tastaturanschläge des Affen betrachtet. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:

1) A: 'Der Affe tippt nur auf Tasten mit Ziffern.'

1) B: 'Der Affe tippt höchstens dreimal eine Ziffer.'

2) C: 'Die vom Affen getippte Zeichenfolge enthält die Buchstaben A F F E direkt hintereinander.'

b) Nun werden Versuchsreihen mit jeweils 20 Tastaturanschlägen durchgeführt. 1) Wie viele Buchstaben pro Versuchsreihe kann man dabei auf lange Sicht im Mittel erwarten? 2) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Versuchsreihe die Anzahl der getippten Buchstabentasten um höchstens 20% von diesem erwarteten Wert abweicht.

16.8.4 Abitur 2017 Wahlteil C1 Teile a und c (3+2.5 VP)

Die Tabelle zeigt die prozentualen Anteile einiger Farben der in Deutschland fahrenden Autos:

Farbe	silber oder grau	schwarz	weiß
Anteil	29.9%	28.8%	15.1%

Diese Anteile werden im Folgenden als Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der jeweiligen Autofarben verwendet. Zwei Kinder beobachten vorbeifahrende Autos und achten auf deren Farbe.

a) Zunächst beobachten die beiden Kinder 80 Autos.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

1-2) A: 'Genau 22 Autos sind silber oder grau.'

1) B: 'Mindestens 33 Autos sind schwarz.'

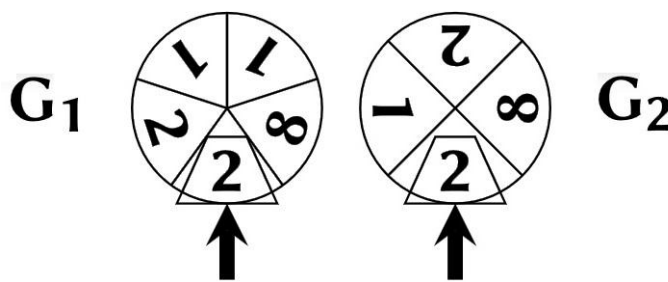
3) C: 'Unter den ersten zehn Autos sind mindestens drei, die keine der in der Tabelle angegebenen Farben haben, und von den anderen 70 Autos sind höchstens 20 schwarz'.

c₂₋₃) Das eine Kind bietet dem anderen folgendes Spiel an:

'Wenn von den nächsten vier Autos mindestens drei hintereinander nicht schwarz sind, bekommst du von mir ein Gummibärchen, ansonsten bekomme ich eines von dir'. Untersuchen Sie, ob dieses Spiel fair ist.

16.8.5 Abitur 2017 Wahlteil C2 (3+2+2+3 VP)

Bei dem dargestellten Glücksspielautomaten sind zwei Glücksräder G_1 und G_2 mit fünf bzw. vier gleich großen Kreissektoren angebracht. Bei jedem Spiel werden sie in Drehung versetzt und laufen dann unabhängig voneinander aus. Schließlich bleiben sie so stehen, dass von jedem Rad genau eine Zahl im Rahmen angezeigt wird.



Der Spieleinsatz beträgt 2€. Sind die beiden

angezeigten Zahlen gleich, so wird deren Summe in Euro ausgezahlt; andernfalls wird nichts ausgezahlt. Der Hauptgewinn besteht also darin, dass 16€ ausgezahlt werden.

a) Ein Spieler spielt zehn Mal. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

- 1-2) A: 'Das Glücksrad G_1 zeigt genau fünf Mal die Zahl 1.'
- 2) B: 'Beim ersten Spiel beträgt die Summe der beiden angezeigten Zahlen 10.'
- 2) C: 'Der Spieler erhält mindestens einmal den Hauptgewinn.'

b₂) Mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% soll in mindestens einem Spiel der Hauptgewinn erzielt werden. Berechnen Sie, wie oft man dazu mindestens spielen muss.

c₂) Berechnen Sie, wie viel der Betreiber auf lange Sicht durchschnittlich pro Spiel verdient.

d₄) Der Betreiber möchte erreichen, dass bei zehn Spielen die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Hauptgewinn maximal 25% beträgt. Dazu möchte er beim Glücksrad G_2 den Mittelpunktswinkel des Kreissektors verändern, der mit der Zahl 8 beschriftet ist. Berechnen Sie, wie weit der Mittelpunktswinkel dieses Kreissektors maximal gewählt werden darf.

16.8.6 Abitur 2016 Wahlteil B2.2 (5 VP)

Eine Tanzgruppe besteht aus 8 Anfängerpaaren und 4 Fortgeschrittenenpaaren. Aus der Erfahrung vergangener Jahre weiß man, dass Anfängerpaare mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % bei den abendlichen Tanzstunden anwesend sind, Fortgeschrittenenpaare mit einer Wahrscheinlichkeit von 75%. Man geht davon aus, dass die Entscheidungen der Tanzpaare über die Teilnahme an der Tanzstunde voneinander unabhängig sind.) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an einem Abend alle Fortgeschrittenenpaare anwesend sind.

2) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an einem Abend mindestens 6 Anfängerpaare und höchstens 3 Fortgeschrittenenpaare anwesend sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an einem Abend mindestens 11 Paare anwesend sind?

16.8.7 Abitur 2015 Wahlteil B2.2 Teile a und b (1+3 VP)

Bei einem Biathlonwettbewerb läuft ein Athlet eine 2.5 km lange Runde, dann schießt er liegend fünf Mal; anschließend läuft er eine zweite Runde und schießt stehend fünf Mal; nach einer dritten Runde erreicht er das Ziel. Für jeden Fehlschuss muss er direkt nach dem Schießen eine 200 m lange Strafrunde laufen. Aufgrund der bisherigen Schießleistungen geht der Trainer davon aus, dass der Athlet stehend mit 88% und liegend mit 93% Wahrscheinlichkeit trifft. Es wird vereinfachend davon ausgegangen, dass die Ergebnisse der einzelnen Schüsse voneinander unabhängig sind.

a₁) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Athlet stehend bei fünf Schüssen genau vier Mal trifft. b₂) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Athlet im gesamten Wettbewerb höchstens einmal eine Strafrunde laufen muss.

16.8.8 Abitur 2014 Wahlteil B1.2 (4+3 VP)

In einem Gefäß G_1 sind 6 schwarze und 4 weiße Kugeln. In einem Gefäß G_2 sind 3 schwarze und 7 weiße Kugeln.

a₁) Aus dem Gefäß G_1 wird 20 Mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 12 Mal eine schwarze Kugel gezogen wird. a₂) Aus Gefäß G_2 wird 8 Mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 2 schwarze Kugeln gezogen werden, und zwar bei zwei direkt aufeinander folgenden Zügen.

b₃) Nun werden aus G_1 zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen und in das Gefäß G_2 gelegt. Anschließend wird eine Kugel aus G_2 gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Kugel schwarz?

16.8.9 Pflichtteile aus dem Abitur vor 2019 (Aufgabe 7)

Abitur 2018: Zwei ideale Würfel werden gleichzeitig geworfen.

- a₁₋₂) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei verschiedene Augenzahlen fallen.
- b₁) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man eine '1' und eine '2'?
- c₂) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigen die Würfel zwei aufeinanderfolgende Zahlen?

Abitur 2017: a₂) In einer Urne liegen drei rote, zwei grüne und eine blaue Kugel. Es werden so lange nacheinander einzelne Kugeln gezogen und zur Seite gelegt, bis man eine rote Kugel erhält. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man höchstens drei Kugeln zieht.

16.9 Die mündliche Prüfung des Basiskurses (GK)

Vom Kultusministerium BW bzw. ZPG 7; thx Trs; Die Indizierung auf ist auf LK Niveau
Zusätze von Sd sind mit (Sd:) gekennzeichnet um offene Aufgaben zu konkretisieren.

16.9.1 Aufgabe 1: (Teil 1: Analysis, Teil 2: Geometrie ohne LöVo)

Teil 1: a+b nach Kl 10; c+d nach Abs 182/7.1.10: Die Abbildungen zeigen die Graphen einer ganzrationalen Funktion f , einer trigonometrischen Funktion g und einer Exponentialfunktion h .

a₁) Ordnen Sie die Fktn f , g und h den abgebildeten Graphen zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.

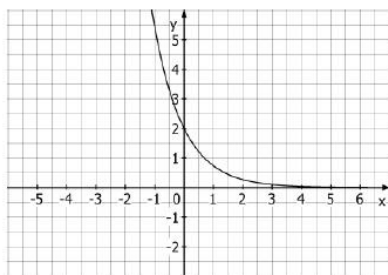


Abbildung I

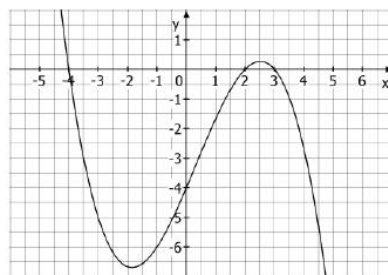


Abbildung II

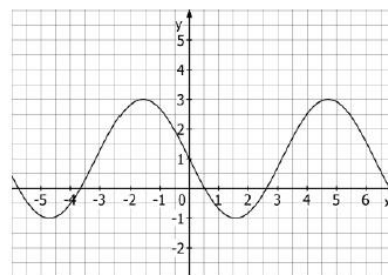


Abbildung III

b₂) Geben Sie für einen der abgebildeten Graphen einen möglichen Funktionsterm an. Erklären Sie, wie Sie dabei vorgegangen sind.

c₂) Der Graph der Funktion in Abbildung II schließt mit der x -Achse eine Fläche ein. Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man den Inhalt dieser Fläche berechnen kann, und geben Sie einen entsprechenden Rechenausdruck an.

d₂₋₃) Gegeben ist die Funktion i mit $i(x) = -e^{-x}$. Berechnen Sie a so, dass $\int_0^a i(x) dx = -2$ gilt.

e₂₋₃) Bestimmen Sie eine nichtkonstante ganzrationale Funktion j und Werte für b und c , so dass gilt $\int_b^c j(x) dx = -8$.

Teil 2: Nach Abs 275/10.5: Eine senkrechte Pyramide mit quadratischer Grundfläche mit den Eckpunkten $A(0;0;0)$, $B(3;0;0)$, $C(3;3;0)$ und $D(0;3;0)$ hat die Höhe 4. Im Punkt (Sd:) $L(0;3;5)$ befindet sich eine punktförmige Lichtquelle.

- a) (AFB I) **i₁**) Skizzieren Sie den Sachverhalt. **ii₁₋₂**) Geben Sie die Koordinaten von S an. **iii₁**) Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide. **iv₁₋₂**) Ermitteln Sie die Koordinatengleichung einer Seitenfläche.
- b) (Anforderungsbereich AFB II) **i₁**) Weisen Sie die Gleichschenkligkeit eines Seitendreiecks nach. **ii₂**) Beschreiben Sie ein Verfahren zur Bestimmung der Pyramidenoberfläche. **iii₂**) Ermitteln Sie eine Formel zur Bestimmung des Winkels zwischen Grund- und einer Seitenfläche.
- c) (AFB III) **i₂**) Bestimmen Sie mehrere Ebenengleichungen, so dass die Ebenen jeweils die Pyramide in zwei volumengleiche Teile zerlegen. **ii₃**) Überprüfen Sie, ob der Punkt (Sd:) $(1;1;1)$ im Pyramideninneren liegt oder nicht. **iii₃**) Untersuchen Sie den Schattenwurf der Pyramide.

16.9.2 Aufgabe 2: (Teil 1: Analysis, Teil 2: Geometrie ohne LöVo)

Teil 1: Nach Abs 182/7.1.10: Die Geschwindigkeit eines Autos auf einer Teststrecke wird beschrieben durch eine Funktion f mit $f(x) = 24 + 24 \cdot e^{-0.08x}$ für $0 \leq x \leq 60$, (x in Sekunden, $f(x)$ in Meter pro Sekunde).

- a₁) Berechnen Sie $f(0)$ und $f'(0)$ und $\int_0^{60} f(x)dx$. Deuten Sie diese Werte im Sachzusammenhang.

Das Auto und ein Motorrad befinden sich zum Zeitpunkt $x = 0$ nebeneinander und fahren in den nächsten 60 Sekunden in die gleiche Richtung. Abb 1047/585 (1) zeigt den Graphen der Funktion f und den Graphen der Funktion g , die die Geschwindigkeit des Motorrads beschreibt.

- b₂) Beschreiben Sie die Bewegungen des Autos und des Motorrads.

c₃) Abb 1047/585 (2) stellt für einen Ausschnitt der Fahrt den Abstand der beiden Fahrzeuge dar. Beschreiben Sie, wie man die x -Koordinate des Punktes H mithilfe von Abb. 1 ermitteln kann. Entscheiden Sie, ob die y -Koordinate von H größer als 500 ist, und Abb. 1 begründen Sie Ihre Entscheidung.

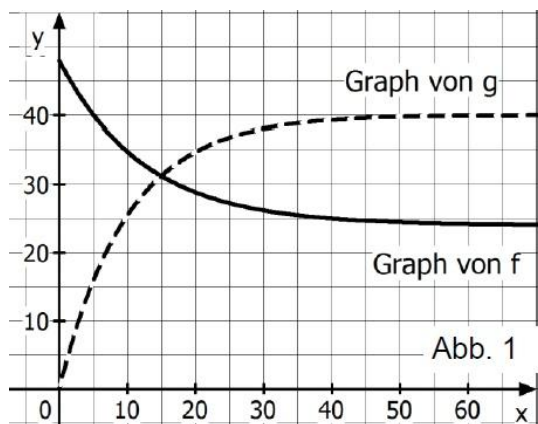


Abb. 585 Mündliche Prüfung: Abb. 1

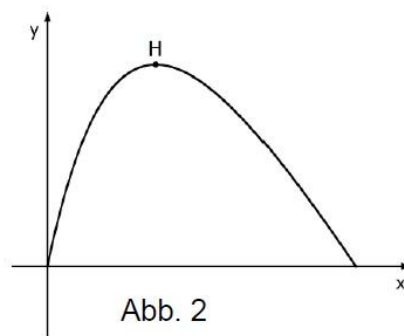


Abb. 2

- d₃) Das Motorrad überholt das Auto zum Zeitpunkt x_0 . Bestimmen Sie eine Gleichung, mit der man bei gegebenem Funktionsterm von g den Zeitpunkt x_0 berechnen kann.

Teil 2: Nach Abs 265/10.3: Gegeben seien die Ebenen $E: 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6$ und $F: 2x_1 - x_2 = 6$.

- a₁) (AFB I) Veranschaulichen Sie die Lage der Ebene E mit Hilfe von Spurpunkten. (Sd:) Liegt $P(1; -1; 1)$ in E ? Geben Sie den Normalenvektor von E an. **i₁₋₂**) Welche besondere Lage hat F ?
- b) (AFB II) **i₁₋₂**) Welche Beziehung besteht zwischen der Anzahl der Spurpunkten und der besonderen Lage einer Ebene? **i₁**) Geben Sie eine vektorielle Darstellung (Sd: Parameterform) der Ebene E an und erläutern Sie die geometrische Bedeutung ihrer Bestandteile. **i₁₋₂**) Ermitteln Sie den Abstand des

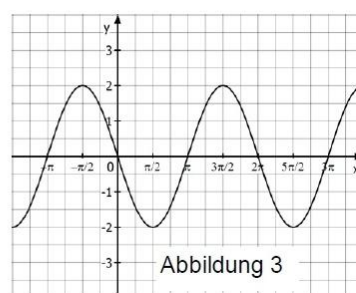
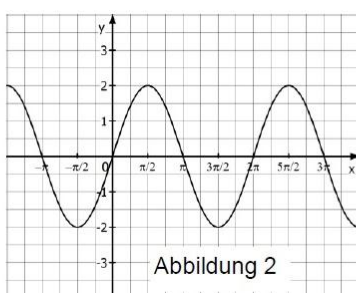
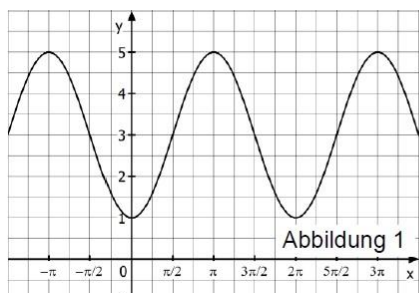
Ursprungs zur Ebene E .
 1-2) Bestimmen Sie eine Gleichung einer orthogonalen bzw. parallelen Ebene zu E .
 2) Spiegeln Sie die Gerade durch (Sd:) $A(5; -3; 4)$ und $B(2; -1; 5)$ an der Ebene E .
 (Sd:) LöVo: $L_a(1; -1; 1)$, $L_b(0; 0; 2)$; $A'(-3; 1; -2)$, $B'(-2; 1; -1)$.

c) (AFB III) 2-3) Erläutern Sie, welcher Ausschnitt der Parameterform von E aus Teil b für $0 \leq r \leq 1$ und für $0 \leq s \leq 1$ beschrieben wird.
 2) Bestimmen Sie gemeinsame Punkte der Ebenen E und F .

16.9.3 Aufgabe 3: (Teil 1: Analysis, Teil 2: Geometrie ohne LöVo)

Teil 1: Teil a+d nach Kl 10. Teil b+c nach Abs 182/7.1.10: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2 \cdot \sin(x - \frac{\pi}{2}) + 3$.

a₁) Abbildung 1 zeigt den Graphen von f . Erläutern Sie, wie man den Graphen von f aus dem Graphen der Funktion g mit $g(x) = \sin(x)$ erhält.



b₂) Eine der Abbildungen 2 und 3 zeigt den Graphen von f' . Entscheiden Sie, in welcher der Abbildungen der Graph von f' dargestellt ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.
 Begründen Sie ohne Rechnung, dass $\int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = 0$ gilt.

c₁₋₂) Berechnen Sie das Integral $\int_0^{\pi} (5 - f(x)) dx$ und interpretieren Sie Ihr Ergebnis geometrisch.

d₃) Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.
 'Eine trigonometrische Funktion ist durch die Angabe der Koordinaten eines beliebigen Hochpunktes und eines beliebigen Tiefpunktes ihres Graphen eindeutig bestimmt.'

Teil 2: Teil a+b nach Kl 10. Teil c nach Abs 265/10.3: Gegeben ist die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und die Gerade } h \text{ durch } A(2|5|-2) \text{ und } B(6|2|-2).$$

a₁) (AFB I) Ermitteln Sie eine Gleichung von h . Interpretieren Sie alle Bestandteile einer Geradengleichung geometrisch. Liegt (Sd:) $C(-1|2|-1)$ auf g ? Geben Sie weitere Gleichungen von g an.

b₂) (AFB II) Bestimmen Sie die gegenseitige Lage von g und h . Ermitteln Sie die Gleichung einer weiteren Geraden, welche parallel zu g ist und h schneidet. Bestimmen Sie Punkte auf der Geraden g , die vom Punkt $P(1|-2|3)$ den Abstand 6 haben.

c) (AFB III) 2) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E , die g enthält und parallel zu h liegt.
 2-3) Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden durch (Sd:) $D(-3|3|1)$, die g orthogonal schneidet.
 LöVo: $L = C$, g_{DC} .

16.9.4 Aufgabe 4: (Teil 1: Analysis, Teil 2: Stochastik ohne LöVo)

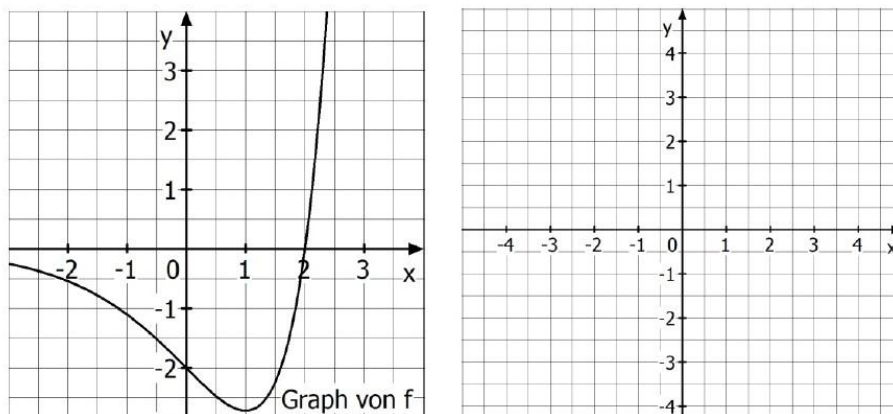
Teil 1: Nach Abs 182/7.1.10: Die Abb. 1049/586 zeigt den Graphen einer Funktion f .

a₁) Bestimmen Sie $f'(0)$. b₁) Ermitteln Sie $\int_0^2 f(x) dx$. c₂) F ist eine Stammfunktion von f . Untersuchen Sie mit Hilfe des Graphen von f , ob der Graph von F im abgebildeten Bereich [Nullstellen], Hoch-, Tief- bzw. Wendepunkte besitzt. Geben Sie gegebenenfalls die entsprechenden Stellen an.

d₂) Entscheiden Sie, welche der folgenden Funktionsgleichung zu f gehört:

$f_1(x) = (x-2) \cdot e^{-x}$ $f_2(x) = (x-2) \cdot e^x$, $f_3(x) = x \cdot e^x - 2$. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Abb. 586



e_{2-3}) Der Graph der Funktion g mit $g(x) = (x-2)^2 \cdot e^x$ besitzt den Hochpunkt $H(0|4)$. Skizzieren Sie den Graphen von g in das beigegefügte Koordinatensystem und erläutern Sie Ihr Vorgehen.

Teil 2: Nach Abs 361/13.2: Gegeben ist eine normalverteilte Zufallsgröße $\mathcal{X}$ mit $\mu = 20$ und $\sigma = 4$.

a) (AFB I) ₁) Skizzieren der Kurve zu dieser Zufallsgröße ₁) Erläutern Sie, wie $P(\mathcal{X} \leq 21)$, $P(\mathcal{X} = 21)$ und $P(\mathcal{X} \geq 21)$ bestimmt werden kann. ₂) Geben Sie einen Sachkontext zu einer normalverteilten Zufallsvariablen an. ₁) Beschreiben Sie, wie sich die Kurve ändert, wenn μ verändert wird.

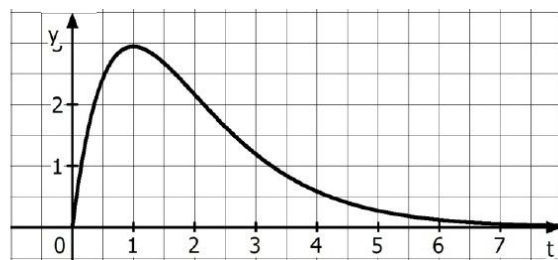
b₂) (AFB II) Beschreiben Sie, wie sich die Kurve ändert, wenn σ verändert wird Nennen und erläutern Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen Binomialverteilung und Normalverteilung.

c_{2-3}) (AFB III) Ermitteln Sie eine diskret verteilte Zufallsgröße, deren Histogramm eine ähnliche Form wie die skizzierte Kurve hat.

16.9.5 Aufgabe 5: (Teil 1: Analysis, Teil 2: Stochastik mit LöVo)

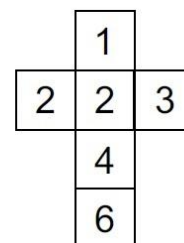
Teil 1: Nach Abs 182/7.1.10: Die Funktion f beschreibt für $t \geq 0$ die Wachstumsrate einer Pflanze. Die Zeit t wird dabei in Tagen und die Wachstumsrate $f(t)$ in cm pro Tag angegeben. Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen von f .

Abb. 587



Zum Teil 2
(Stochastik)

Das Netz
des Würfels



a₁) Bestimmen Sie anhand der Abbildung $f'(2)$ und $\int_0^2 f(t) dt$.

b₁₋₂) Bestimmen Sie die ungefähre Höhe der Pflanze nach dem zweiten Tag, wenn die Pflanze zu Beobachtungsbeginn 20 cm hoch war.

c₂) Die Funktion f hat den Funktionsterm $f(t) = 8t \cdot e^{-t}$. Für die Ableitung f' von f gilt: $f'(t) = (8 - 8t) \cdot e^{-t}$. Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Wachstumsrate am stärksten abnimmt.

d₃) F ist eine Stammfunktion von f . Formulieren Sie eine Fragestellung im Sachzusammenhang, die auf die Gleichung $F(t+1) = F(t) + 2.5$ führt. ₃₋₄) Beschreiben Sie, wie man mithilfe der Abbildung eine Lösung dieser Gleichung ermitteln kann.

Teil 2: (mit LöVo) Nach Kl 10: Gegeben ist das Netz eines Würfel (siehe Abb. 1049/587).

a₁) (AFB I) Die Zufallsgröße $\mathcal{X}$ beschreibt die Augenzahl beim einmaligen Würfeln. Bestimmen Sie $P(\mathcal{X} < 4)$. Bestimmen Sie den Erwartungswert von $\mathcal{X}$.

b) (AFB II) ₂) Erläutern Sie die Bedeutung des Erwartungswerts. ₁₋₂) Beurteilen Sie, ob folgendes Spiel fair ist: Der Einsatz ist 1€; Beim Würfeln der Augenzahl 2: 3€; sonst geht der Einsatz verloren. ₁₋₂)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit beim zweimaligen Würfeln für die Augensumme 8 zu erhalten.
₁₋₂) Beschreiben Sie ein Zufallsexperiment mit diesem Würfel, das eine Bernoulli-Kette darstellt.

c) (AFB III) Beurteilen Sie die folgende Aussage: ₂₋₃) 'Der Erwartungswert einer Zufallsgröße ist der Wert, der am wahrscheinlichsten ist.' ₃) Beim 100-maligen Würfeln werden sechs Sechser geworfen. Beurteilen Sie die Aussage: 'Ich zweifle an, dass der Würfel ideal ist.'

16.9.6 Aufgabe 6: (Teil 1: Geometrie, Teil 2: Analysis ohne LöVo)

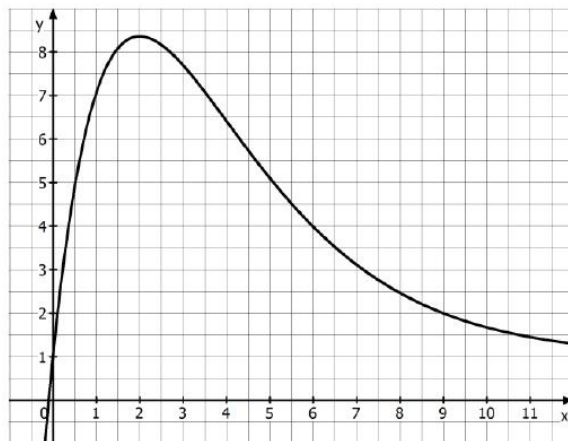
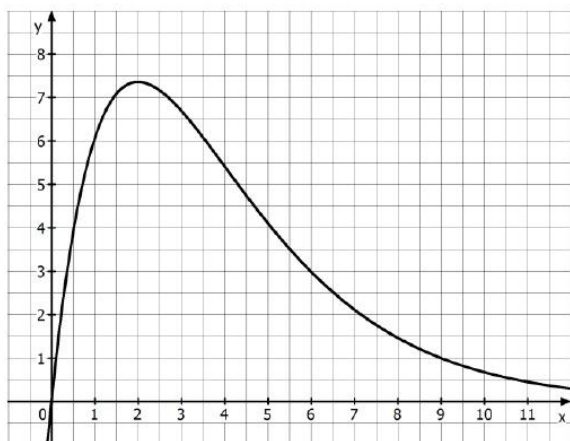
Teil 1: Erst nach Abs 275/10.5: _{a₁₋₂}) Beschreiben Sie, welche gegenseitige Lage eine Ebene und eine Gerade im Raum haben können und wie man diese bestimmen kann. Gegeben sind die Gerade $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$ und die Ebene $E: x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1$.

b) ₁₋₂) Zeigen Sie, dass g und E parallel sind. ₂₋₃) Die Gerade h schneidet die Gerade g orthogonal in $P(2|0|2)$ und verläuft parallel zur Ebene E . Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden h .

c₂) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes, der von E den Abstand $3 \cdot \sqrt{21}$ hat.

d₂₋₃) Von allen Geraden, die in der Ebene E liegen und parallel zu g verlaufen, ist die Gerade j diejenige mit dem geringsten Abstand zur Geraden g . Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man eine Gleichung der Geraden j bestimmen kann.

Teil 2: Erst nach Abs 182/7.1.10: Die Funktion f mit $f(x) = 10xe^{-0.5x}$ beschreibt für $x \geq 0$ modellhaft die Schneefallrate in einem Skigebiet (x in Stunden nach 6 Uhr, $f(x)$ in cm pro Stunde). Eine der Abbildungen zeigt den Graphen von f .



a₁) (AFB I) Welches Schaubild zeigt K_f . Ermitteln Sie die Schneefallrate nach einer Stunde. Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem es am stärksten schneit (eine graphische Bestimmung ist erlaubt). Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem die Schneefallrate am stärksten abnimmt (nur graphisch).

b₂) (AFB II) Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem es am stärksten schneit. Ermitteln Sie den Zuwachs an Schneehöhe in den ersten fünf Stunden (nur graphisch)

c₂) (AFB III) Annahme: die Schneefallrate nimmt vom Zeitpunkt $x = 4$ an konstant ab. Erläutern Sie, wie man rechnerisch den Zeitpunkt bestimmt, zu dem es dann aufhört zu schneien.

Annahme: Es taut gleichzeitig mit einer Rate von 2 cm pro Stunde.

₃) Ermitteln Sie die Zeitspanne, in der die Schneehöhe zunimmt.

16.9.7 Aufgabe 7: (Teil 1: Geometrie, Teil 2: Analysis ohne LöVo)

Teil 1: Erst nach Abs 265/10.3: Die Punkte $A(2|1|0)$ und $B(4|0|2)$ liegen auf der Geraden g .

a₁) Prüfen Sie, ob der Punkt $C(0|2|-2)$ auf der Geraden g liegt.

b₂) Zeigen Sie, dass die Gerade g in der Ebene $E : x_1 + 2x_2 = 4$ liegt. Ermitteln Sie die Gleichung einer weiteren Ebene, die ebenfalls die Gerade g enthält.

c₂₋₃) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes D , der auf der Geraden g liegt und vom Punkt A den Abstand 9 hat.

d₃₋₄) Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man die Koordinaten eines Punktes P bestimmen kann, der mit den beiden Punkten A und B ein gleichseitiges Dreieck bildet.

Teil 2: Erst nach Abs 182/7.1.10: Gegeben ist die Funktion f mit $f(t) = -2t^2 + 12t$.

In dem Intervall, in welchem $f(t) \geq 0$ ist, beschreibt f die momentane Zuflussrate von Wasser in ein Becken (t in Stunden; $f(t)$ in Liter pro Stunde). Zu Beginn enthält das Becken 20 Liter Wasser.

a₁) (AFB I) Ermitteln Sie die Nullstellen und die Extrempunkte des Graphen von f . Erstellen Sie eine Skizze des Graphen von f .

b) (AFB II) ₁₋₂) Ermitteln Sie das zugeflossene Wasservolumen in der ersten Stunde. Zusätzlich zum Zufluss sollen konstant 10 Liter pro Stunde abfließen. ₂₋₃) Bestimmen Sie graphisch die Zeitpunkte des minimalen und des maximalen Wasservolumens. ₂) Berechnen Sie das Wasservolumen nach 3 Stunden. ₂) Beschreiben Sie das Wasservolumen in Abhängigkeit von der Zeit.

c₃) (AFB III) Ab $t = 4$ soll die konstante Abflussrate so geändert werden, dass das Becken zum Zeitpunkt $t = 6$ leer ist. Erläutern Sie die Vorgehensweise zur Bestimmung der notwendigen konstanten Abflussrate.

16.9.8 Aufgabe 8: (Teil 1: Geometrie, Teil 2: Analysis ohne LöVo)

Teil 1: Teil a+b nach Abs 265/10.3; Teil c nach Abs 275/10.5:

a₁) Gegeben sind die Punkte $A(2|3|-2)$ und $B(0|1|6)$.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts der Strecke AB . A und B liegen spiegelbildlich bezüglich einer Ebene E . Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E . Gegeben ist die Ebene $F : 2x_1 + x_2 = 4$.

b) ₁) Skizzieren Sie die Ebene F im Koordinatensystem.

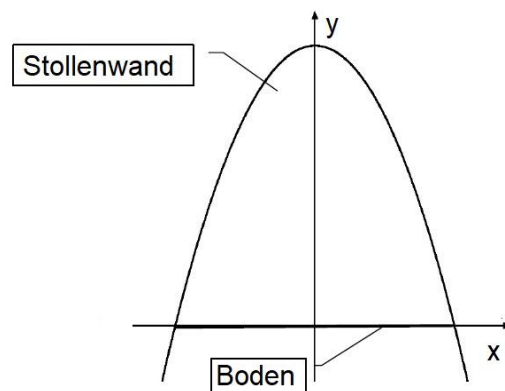
₁₋₂) Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden, die sowohl in F als auch in der x_1x_2 Ebene liegt.

c₃) Ber. Sie die Größe des Winkels, unter dem F die x_1x_3 -Ebene schneidet. Durch Ersetzen des Koeffizienten 2 in der Ebenengleichung von F durch eine reelle Zahl a mit $a \neq 0$ verändert sich der Schnittwinkel der Ebene mit der x_1x_3 -Ebene. Bestimmen Sie einen Wert von a , für den dieser Schnittwinkel 45° groß ist. Untersuchen Sie, welche Größe dieser Schnittwinkel für $a \neq 0$ annehmen kann.

Teil 2a nach Kl 10

Der Querschnitt eines Bergstollens wird beschrieben durch die x -Achse (Boden) und den Teil des Graphen der Funktion f mit $f(x) = 8 - \frac{x^2}{2}$, der oberhalb der x -Achse verläuft (Stollenwände).

a) (AFB I) ₁) Skalieren Sie die Achsen der Abbildung.
₁) Erklären Sie, warum der Graph eben jene Form hat.
₁) Berechnen Sie die Winkel, den die Wände mit dem Boden einschließen. ₁₋₂) Ermitteln Sie die Stellen, an denen die Wände am steilsten verlaufen.



Teil b+c nach Abs 182/7.1.10:

b₁₋₂) (AFB II) Schließen Sie auf Eigenschaften von Graphen aus deren Ableitungen. Der Bergstollen ist 50 m lang und läuft voll mit Wasser. Bestimmen Sie das Wasservolumen im Stollen.

c) (AFB III) ₂) Der Bergstollen ist 50 m lang und es steht 3.5 m hoch Wasser im Stollen, bestimmen Sie das Wasservolumens im Stollen. ₃) Ein würfelförmiger Behälter soll so in den Stollen gestellt werden, dass er auf einer seiner Seitenflächen steht. Ermitteln Sie die maximale mögliche Breite des Behälters.

16.9.9 Aufgabe 9: (Teil 1: Stochastik, Teil 2: Analysis ohne LöVo)

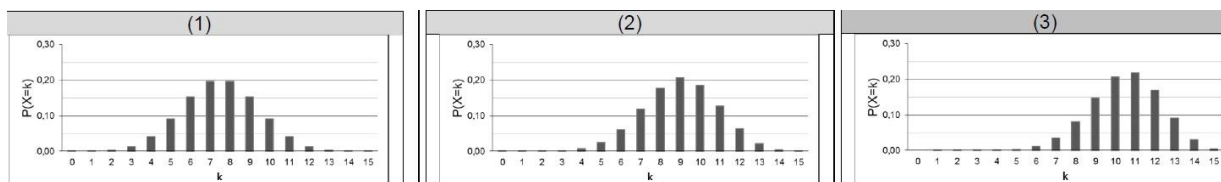
Teil 1: Nach Kl 10: In einer Urne befinden sich sechs blaue und vier weiße Kugeln. Betrachtet wird das Zufallsexperiment, bei dem aus der Urne mehrmals nacheinander eine Kugel mit Zurücklegen gezogen wird.

a₁) Das Zufallsexperiment wird dreimal nacheinander durchgeführt. Geben Sie für die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse jeweils einen Term an:

A : 'Alle Kugeln sind blau.'

B : 'Genau zwei der gezogenen Kugeln sind blau.'

Das Zufallsexperiment wird nun 15 Mal nacheinander durchgeführt. Die Zufallsgröße $\mathcal{Y}$ gibt die Anzahl der dabei gezogenen blauen Kugeln an.



b₁) Begründen Sie, dass $\mathcal{Y}$ binomialverteilt ist. Bestimmen Sie den Erwartungswert von $\mathcal{Y}$ und erläutern Sie dessen Bedeutung für das durchgeführte Zufallsexperiment. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 5 und höchstens 10 blaue Kugel gezogen werden.

c₂) Die Histogramme stellen die Binomialverteilungen von Zufallsgrößen bei 15-maliger Durchführung des entsprechenden Bernoulli-Experiments dar. Untersuchen Sie, welches der Diagramme die Verteilung von $\mathcal{Y}$ darstellt. Untersuchen Sie für die beiden anderen Diagramme, welche Aussagen jeweils über die zugehörige Trefferwahrscheinlichkeit möglich sind.

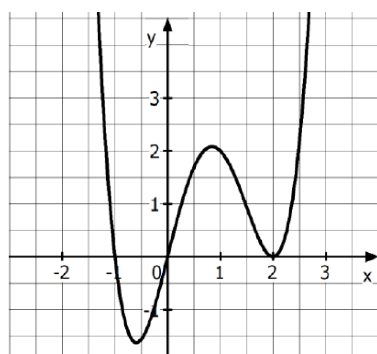


Schaubild
von $f'(x)$

<- Zu Aufgabe 9 Teil 2

Zu Aufgabe 10 Teil 1 ->

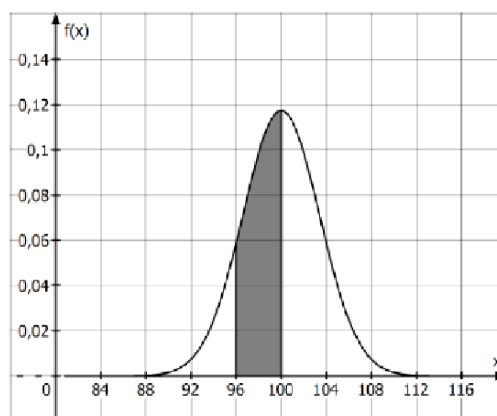


Abb. 588

Teil 2: Teile a+b nach Kl 10; Teil c+d nach Abs 182/7.1.10:

In Abb. 1052/588 ist ausschnittsweise der Graph der Ableitungsfunktion f' einer ganzrationalen Funktion f gegeben.

a₁) (AFB I) Bestimmen Sie $f'(1)$. Erläutern Sie die Bedeutung von $f'(1) = 2$ für den Graphen von f . Ermitteln Sie die Nullstellen von f' .

b) (AFB II) ₂) Erläutern Sie die Bedeutung der Nullstellen von f' für den Graphen von f . ₂) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f . Bestimmen Sie einen Näherungswert für $f''(1)$ und erläutern Sie dessen Bedeutung für den Graphen von f . Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen

von f . $_{2-3}$) Erstellen Sie eine Skizze des Graphen von f mit den Zusatzinformationen $f(0) = 0.6$ und $f(2) = 3$.

c_2) Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f' im Intervall $[0; 2]$ mit der x -Achse einschließt. Begründen, ob $f(-1) > f(0)$ oder $f(-1) = f(0)$ oder $f(-1) < f(0)$.

d) (AFB III) $_{2-3}$) Bestimmen Sie den minimalen Grad einer Stammfunktion F von f .

$_{2-3}$) Ermitteln Sie einen möglichen Funktionsterm von f' .

16.9.10 Aufgabe 10: (Teil 1: Stochastik, Teil 2: Analysis mit LöVo)

Teil 1: Erst nach Abs 361/13.2: Eine Firma stellt Plastikgussteile her, deren Längen um den Normwert 100 mm schwanken. Messungen zeigen, dass die Länge L der Gussteile normalverteilt ist mit dem Erwartungswert 100 und der Standardabweichung 3.4 (alle Angaben in mm).

a_1) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Länge eines Gussteils weniger als 95 mm beträgt. Geben Sie ein anderes Ereignis an, welches dieselbe Wahrscheinlichkeit besitzt.

In Abb. 1052/588 ist der Graph der zu dieser Situation gehörenden Glockenkurve dargestellt.

b_1) Erläutern Sie, wie man mit Hilfe des Graphen den Erwartungswert und die Standardabweichung von L bestimmen könnte.

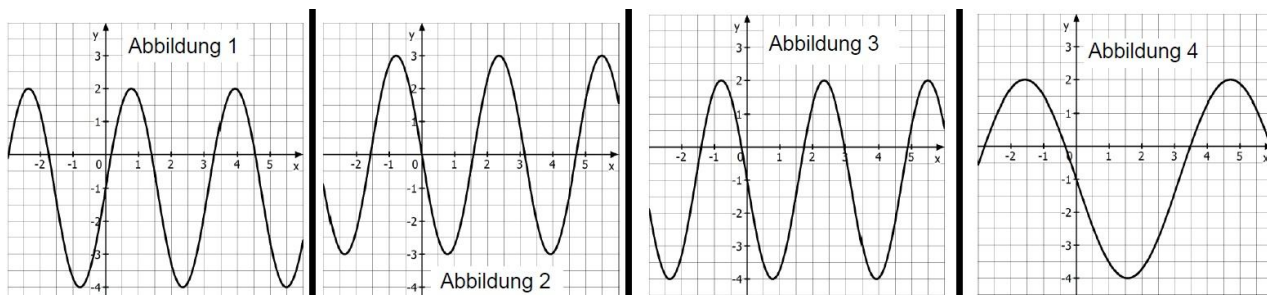
c_1) In Abb. 1052/588 ist eine Fläche grau markiert. Interpretieren Sie diese im Sachzusammenhang.

Die Gussteile werden als mangelhaft eingestuft, wenn deren Länge um mehr als 5 mm vom Normwert abweicht.

d_{1-2}) Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit für eine solche Abweichung 14 % beträgt.

e_2) Beschreiben Sie ein Zufallsexperiment im Sachzusammenhang und geben Sie dazu ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit sich mit dem folgenden Term berechnen lässt:

$$0.14^{200} + 200 \cdot 0.14^{199} \cdot 0.86 + \binom{200}{2} \cdot 0.14^{198} \cdot 0.86^2$$



Teil 2: Nach Abs 182/7.1.10:

Gegeben sind die Funktion f mit $f(x) = -3 \sin(2x) - 1$ sowie die obigen vier Graphen.

a_1) (AFB I+II) Nennen Sie charakteristische Eigenschaften des Graphen von f , die man ohne Rechnung dem Funktionsterm entnehmen kann. Ordnen Sie einen der vier Graphen der Funktion f zu. Begründen Sie Ihre Wahl. Bestimmen Sie eine Stammfunktion F von f . Untersuchen Sie die Symmetrieeigenschaften des Graphen von f' .

Zur Abbildung 2 gehört eine trigonometrische Funktion g . Bestimmen Sie einen Fktnsterm von $g(x)$.

b_2) (AFB II) Es gilt $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx = -3$. Bestimmen Sie den Wert von $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} g(x) dx$ ohne weitere Rechnung.

c) (AFB III) $_{3-}$ Erläutern Sie z.B. mit Hilfe der Symmetrie, dass die Anzahl der Schnittpunkte einer Ursprungsgerade und des Graphen von g nicht gerade (z.B. 266) sein kann. $_{2-3}$) Leiten Sie $\int_{-1}^1 f(x) dx = -2$ ausgehend von der Symmetrie der Sinuskurve her.

16.10 Aufgaben aus dem IQB-Pool

Was sollte ich aus dem IQB-Pool nach welcher Unterrichtseinheit können?

- UE 11₂** 1054/16.10.1 A5; 1056/16.10.2 A1; 1058/16.10.3 A1,A5; 1060/16.10.4 Ag I.3; 1067/16.10.6 Ag III.2 bis III.5, III.7;
UE 11₃ 1054/16.10.1 A1 + A3; 1056/16.10.2 A2,A3,A5; 1058/16.10.3 A3; 1060/16.10.4 Ag I.2, I.4, I.5; 1063/16.10.5 Ag II.1; 1067/16.10.6 Ag III.1, III.8;
UE 11₅ 1058/16.10.3 G3; 1063/16.10.5 Ag II.2, II.3; **UE 11₆** 1054/16.10.1 G1, G2, G5;
UE 12₁ 1056/16.10.2 G1-G3; 1058/16.10.3 G5; 1060/16.10.4 Ag I.9, I.10;
UE 12₄ 1060/16.10.4 Ag I.6, I.7, I.8, I.11; 1063/16.10.5 Ag II.4 bis II.7; 1067/16.10.6 Ag III.9;
UE 11₇ 1063/16.10.5 Ag II.14, II.15, II.16; **UE 11₈** 1063/16.10.5 Ag II.8 bis II.13;

Die Aufgaben mit Lösungen finden Sie auch unter IQB21.SLT.biz (oder IQB.slt.biz).

16.10.1 IQB 2021 (auch Basiskurs)

G1) (Nach Abs 262/10.2; BAg: 256/669 + 264/700d) Gegeben sind die Punkte $A(2|-3|1)$ und $B(2|3|1)$. **a₁)** (0.5 VP) Begründen Sie, dass die Gerade durch A und B parallel zur y -Achse verläuft. **b₂₋₃)** (2 VP) Der Punkt C liegt auf der y -Achse. Die Gerade durch A und C steht senkrecht zur Gerade durch B und C . Bestimmen Sie die Koordinaten aller Punkte, die die beschriebenen Eigenschaften des Punkts C haben.

G2) (Nach Abs 262/10.2, BAg 263/695, 263/696 + 264/700d) Gegeben sind die Punkte $A(0|0|0)$, $B(3|4|1)$, $C(1|7|3)$ und $D(-2|3|2)$. **a₁)** (0.5 VP) Weisen Sie nach, dass das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist. **b₃)** (2 VP) Der Punkt T liegt auf der Strecke $\overline{AC}$. Das Dreieck $\triangle ABT$ hat bei B einen rechten Winkel. Ermitteln Sie das Verhältnis der Länge der Strecke $\overline{AT}$ zur Länge der Strecke $\overline{CT}$.

G3) (Nach Abs 275/10.5, BAg 276/747) Gegeben sind der Punkt $P(-1|7|2)$ und die Ebene $E: x_1 + 3x_2 = 0$. **a₁)** (0.5 VP) Zeigen Sie, dass P nicht in E liegt. **b₂)** (2 VP) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts, der entsteht, wenn P an E gespiegelt wird.

G4) (Nur LK, nach Abs 275/10.5, BAg 275/741) Betrachtet werden die Ebene $E: x_1 - x_2 + x_3 = 0$ und für $a \in \mathbb{R}$ die Geraden $g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1+a \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

a₁₋₂) (1 VP) Bestimmen Sie denjenigen Wert von a , für den die Gerade g_a senkrecht zu E steht.

b₂) (1.5 VP) Untersuchen Sie, ob es einen Wert von a gibt, für den die Gerade g_a in E liegt.

A1) (Nach Abs 186/7.1.15; BAg 143/338 + 183/480) Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto \sin(x)$. Abb. 1055/589a zeigt den Graphen G_f von f sowie die Tangenten an G_f in den dargestellten Schnittpunkten mit der x -Achse. **a₁₋₂)** (0.5 VP) Zeigen Sie, dass diejenige der beiden Tangenten, die durch den Koordinatenursprung verläuft, die Steigung 1 hat. **b₂)** (2.5 VP) Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das von G_f und den beiden Tangenten eingeschlossen wird.

A2) (Nur LK, nach Abs 147/6.2; Kl. 10, BAg 149/357 + 159/393) Gegeben ist eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = x^4 - kx^2$, wobei k eine positive reelle Zahl ist. Abb. 1055/589b zeigt den Graphen von f . **a₁₋₂)** (0.5 VP) Zeigen Sie, dass $f'(x) = 2x \cdot (2x^2 - k)$ eine Gleichung der ersten Ableitungsfunktion von f ist. **b₂)** (2 VP) Die beiden Tiefpunkte des Graphen von f haben jeweils die y -Koordinate -1 . Ermitteln Sie den Wert von k .

A3) (Nach Abs 186/7.1.15, BAg 166/416 + 149/357 + 171/433) Die Verbreitung eines Computervirus lässt sich modellhaft mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(t) = 2t \cdot e^{-\frac{t}{100}}$ beschreiben. Dabei ist t die Zeit in Tagen, die seit der ersten Infizierung eines Computers mit dem Virus vergangen ist, und $f(t)$ die Rate der Infizierungen zum Zeitpunkt t in der Einheit 'Eintausend Computer pro Tag'.

a₁₋₂) (2 VP) Zeigen Sie, dass $f'(t) = 2(1 - \frac{t}{100}) \cdot e^{-\frac{t}{100}}$ ein Term der ersten Ableitungsfkt von f ist.

b₁₋₂) (1 VP) Geben Sie den Zeitpunkt an, zu dem die Rate der Infizierungen am größten ist.

c₂₋₃) (2 VP) Betrachtet wird der Zeitraum der zweiten Woche nach der ersten Infizierung eines Com-

puters mit dem Virus. Geben Sie einen Term an, mit dem die Anzahl der Computer berechnet werden kann, die in diesem Zeitraum infiziert werden.

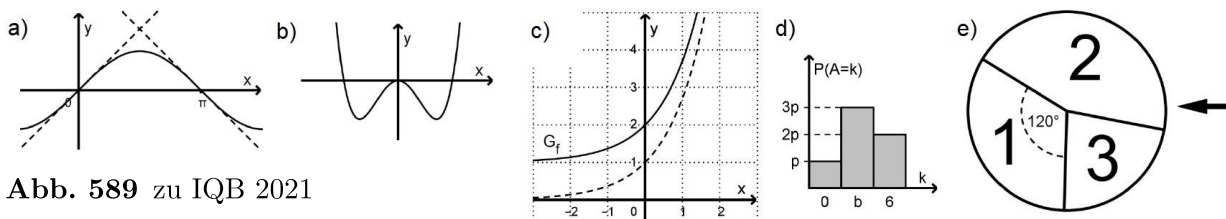


Abb. 589 zu IQB 2021

A4) (Nach Abs. 99/5.3, BAg 110/270) Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f und g . Der Graph von f ist symmetrisch bezüglich der y -Achse, der Graph von g ist symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs. Beide Graphen haben einen Hochpunkt im Punkt $(2|1)$. **a₁₋₂)** (1 VP) Geben Sie für die Graphen von f und g jeweils die Koordinaten und die Art eines weiteren Extrempunkts an. **b₃₋₄)** (1.5 VP) Untersuchen Sie die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion h mit $h(x) = f(x) \cdot (g(x))^3$ im Hinblick auf eine mögliche Symmetrie ihres Graphen.

A5) (Nach Abs. 163/6.3; BAg 143/338) Abb. 1055/589c zeigt den Graphen G_f einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f sowie den Graphen der ersten Ableitungsfunktion von f .

a₁) (0.5 VP) Geben Sie die Steigung der Tangente an G_f im Punkt $(0|f(0))$ an.

b₃) (2 VP) Betrachtet wird die Schar der Funktionen g_c mit $c \in \mathbb{R}^+$. Der Graph von g_c geht aus G_f durch Streckung mit dem Faktor c in y -Richtung hervor. Die Tangente an den Graphen von g_c im Punkt $(0|g_c(0))$ schneidet die x -Achse. Bestimmen Sie rechnerisch die x -Koordinate des Schnittpunkts.

W1) (nach Abs. 325/12.2, Kl. 9; BAg 332/821) Die Vierfeldertafel gehört zu einem Zufallsexperiment mit den Ereignissen A und B . Für die Wahrscheinlichkeit p gilt $p \neq 0$.

a₁) (3 VP) Vervollständigen Sie die Vierfeldertafel.

a₂) Zeigen Sie, dass p nicht den Wert $\frac{1}{5}$ haben kann.

b₂₋₃) (2 VP) Für einen bestimmten Wert von p sind A und B stochastisch unabhängig. Ermitteln Sie diesen Wert von p .

	B	$\bar{B}$	
A	p		$3p$
$\bar{A}$	$4p$		$1 - 3p$

W2) (Nach Abs. 336/12.3, Kl. 10; BAg 347/858) Die Zufallsgröße $\mathcal{X}$ ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 100$ und p . Der Erwartungswert von $\mathcal{X}$ ist 50. **a₁₋₂)** (3 VP) Berechnen Sie die Standardabweichung von $\mathcal{X}$. **b₂)** (2 VP) Die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 61)$ beträgt etwa 2%. Bestimmen Sie unter Verwendung dieses Werts den zugehörigen Wert für die Wahrscheinlichkeit $P(40 \leq \mathcal{X} \leq 60)$.

W3) (Nach Abs. 325/12.2, Kl. 9; BAg 327/812) Bei einem Gewinnspiel beträgt der Einsatz für die Teilnahme 3€. Die Auszahlung in € wird durch die Zufallsgröße A beschrieben. Abb. 1055/589c zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von A . **a₁₋₂)** (1 VP) Zeigen Sie, dass p den Wert $\frac{1}{6}$ hat.

b₁₋₂) (2 VP) Bei wiederholter Durchführung des Spiels ist zu erwarten, dass sich auf lange Sicht Einsätze und Auszahlungen ausgleichen. Berechnen Sie den Wert von b .

c₁₋₂) (2 VP) Beschreiben Sie, wie das Gewinnspiel unter Verwendung eines Behälters sowie roter, grüner und blauer Kugeln durchgeführt werden könnte.

W4) (Nach Abs. 317/12.1, Kl. 8; BAg 341/845) In einem Behälter befinden sich Kugeln, von denen jede dritte gelb ist. **a₁)** (1 VP) Aus dem Behälter wird zweimal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Kugeln gelb sind. **b₂₋₃)** (4 VP) Im Behälter werden zwei gelbe Kugeln durch zwei blaue Kugeln ersetzt. Anschließend wird aus dem Behälter erneut zweimal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Kugeln gelb sind, beträgt nun $\frac{1}{16}$. Ermitteln Sie, wie viele gelbe Kugeln sich nach den beschriebenen Vorgängen im Behälter befinden.

W5) (Nach Abs. 325/12.2, Kl. 9; BAg 327/812) **a₂₋₃)** Für ein Spiel wird ein Glücksrad verwendet. Abb. 1055/589e zeigt dieses Glücksrad schematisch. Die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einmaligem Drehen die Zahl 2 zu erzielen, wird mit p bezeichnet. Bei dem Spiel bezahlt jeder Spieler zunächst einen Einsatz von 1 €. Anschließend dreht er das Glücksrad zweimal. Erzielt er dabei zwei Zahlen, deren Summe mindestens 5 ist, wird ihm der Wert der Summe als Betrag in € ausgezahlt; ansonsten

erfolgt keine Auszahlung. Wird das Spiel wiederholt durchgeführt, so ist zu erwarten, dass sich auf lange Sicht die Einsätze der Spieler und die Auszahlungen ausgleichen. Leiten Sie unter Verwendung der beschriebenen Spielregeln eine Gleichung her, mit der der Wert von p berechnet werden könnte; erläutern Sie dabei Ihr Vorgehen.

16.10.2 IQB 2020

A1) (Nach Abs. 163/6.3, BAg 152/370) Abb.1056/590i zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^{-x}$ und $x \in \mathbb{R}$. Betrachtet werden die Dreiecke mit den Eckpunkten $O(0|0)$, $P(a|0)$ und $Q(a|f(a))$ mit $a \in \mathbb{R}^+$. **a₂)** (2 VP) Begründen Sie, dass der Flächeninhalt jedes dieser Dreiecke mit dem Term $\frac{1}{2}a^2e^{-a}$ bestimmt werden kann. **b₂)** (3 VP) Unter den betrachteten Dreiecken hat eines den größten Flächeninhalt. Bestimmen Sie den zugehörigen Wert von a .

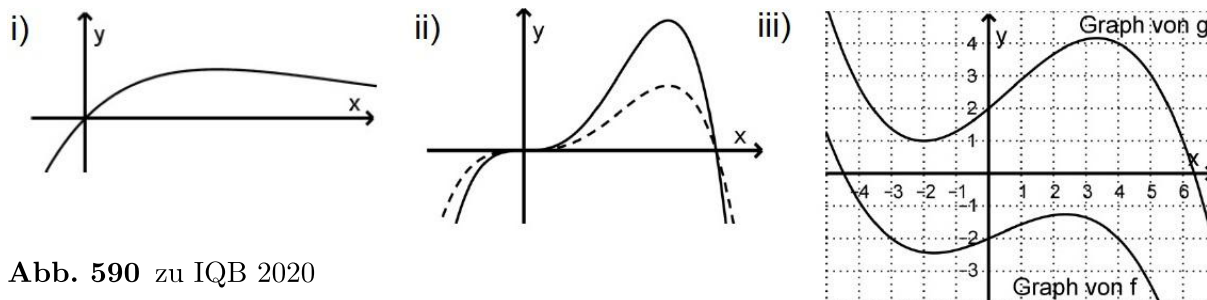


Abb. 590 zu IQB 2020

A2) (Nach Abs 186/7.1.15, BAg 143/338 + 183/480) Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f : x \mapsto \sin(x)$ und $g : x \mapsto x$. Die Graphen von f und g haben in ihrem einzigen gemeinsamen Punkt $O(0|0)$ die gleiche Steigung. **a₂₋₃)** (3 VP) Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f , der Graph von g und die Gerade mit der Gleichung $x = \pi$ einschließen. **b₂₋₃)** (2 VP) Geben Sie eine Gleichung einer Tangente an den Graphen von f an, die die beiden folgenden Eigenschaften hat:

(I) Die Tangente verläuft parallel zum Graphen von g . (II) Die Tangente enthält nicht den Punkt O .

A3) (Nur LK; nach Abs 186/7.1.15, BAg 149/357 + 183/480) Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_k : x \mapsto -k \cdot (x^4 - 4x^3)$ mit $k \in \mathbb{R}^+$. Alle Funktionen der Schar haben die Nullstellen 0 und 4. Die Abbildung 1056/590ii stellt zwei Graphen der Schar dar. **a₂)** (2 VP) Bestimmen Sie die x -Koordinate des Hochpunkts des Graphen von f_k . **b₃)** (3 VP) Zeigen Sie, dass das Flächenstück, das die Graphen von f_k und f_{k+1} einschließen, für alle Werte von k den gleichen Inhalt hat.

A4) (Nach Abs 139/6.1; Kl. 10; BAg 145/344 + 98/233) **a₂₋₃)** Die Abbildung 1056/590iii zeigt die Graphen der ganzrationalen Funktionen f und g . Betrachtet wird die Funktion h mit $h(x) = g(f(x))$. Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen von h im Punkt $(4|h(4))$.

A5) (Nur LK; nach Abs 186/7.1.15, BAg 166/413 + 103/248) Für jeden Wert von $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist eine Funktion f_a gegeben mit $f_a(x) = a \cdot (x-2)^3$ und $x \in \mathbb{R}$. **a₁₋₂)** (1 VP) Zeigen Sie, dass die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion F mit $F(x) = \frac{1}{2} \cdot (x-2)^4 + 3$ eine Stammfunktion von f_2 ist.

b₃) (nur LK) Untersuchen Sie mithilfe von Skizzen, für welche Werte von a sich unter den Stammfunktionen von f_a solche befinden, die nur negative Funktionswerte haben.

W1) (nach Abs. 336/12.3; Kl. 10, BAg: 342/849 + 346/857) Gegeben sind die binomialverteilten Zufallsgrößen $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$. $\mathcal{X}$ hat die Parameter $n = 40$ und $p_x = 0.65$. **a₁)** (1 VP) Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit $P(\mathcal{X} = 30)$ berechnet werden kann. **b₂₋₃)** (2 VP) Abb.1057/591i zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $\mathcal{X}$. Für einen Wert von k stellen die grau markierten Säulen die Wahrscheinlichkeit $P(\mathcal{X} \leq k)$ dar. Ermitteln Sie diesen Wert von k . **c₃)** (2 VP) Die Zufallsgröße $\mathcal{Y}$ hat ebenfalls den Parameter $n = 40$. Geben Sie alle Werte von p_y mit $0 < p_y < 1$ an, für die die Wahrscheinlichkeit $P(\mathcal{Y} = 10)$ größer ist als die Wahrscheinlichkeit $P(\mathcal{Y} = 30)$.

W2) (Nach Abs. 325/12.2, Kl. 9; BAg 327/812) Für ein Spiel werden ein Tetraeder und ein Würfel verwendet. Die Seiten des Tetraeders sind mit den Zahlen 1 bis 4 durchnummeriert, die des Würfels

mit den Zahlen 1 bis 6. Ebenso wie beim Werfen des Würfels werden beim Werfen des Tetraeders alle Zahlen mit gleicher Wahrscheinlichkeit erzielt. Zu Beginn des Spiels wird ein Einsatz von 5 € geleistet. Anschließend wird das Tetraeder einmal geworfen. Wird dabei die Zahl 3 erzielt, wird das Tetraeder ein weiteres Mal geworfen, andernfalls einmal der Würfel. Nur dann, wenn bei genau einem der beiden Würfe die Zahl 3 erzielt wird, erfolgt eine Auszahlung.

a₁₋₂) (2 VP) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einmaliger Durchführung des Spiels mindestens einmal die Zahl 3 zu erzielen, $\frac{3}{8}$ beträgt. **b₁₋₂**) (3 VP) Bei vielfacher Durchführung des Spiels ist zu erwarten, dass sich Einsätze und Auszahlungen mit der Zeit ausgleichen. Ermitteln Sie die Höhe der Auszahlung.

W3) (Nach Abs. 325/12.2; Kl. 9, BAg 327/812) Abb.1057/591ii zeigt das Netz eines Würfels.

a₁) (2 VP) Der Würfel wird zweimal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der beiden geworfenen Zahlen 4 ist.

b₂) (3 VP) Die Zahlen '1' und '3' werden jeweils durch eine neue Zahl ersetzt. Das Verhältnis der beiden neuen Zahlen ist ebenfalls 1:3. Betrachtet man bei einmaligem Werfen des geänderten Würfels die geworfene Zahl, so ist der zugehörige Erwartungswert 4. Ermitteln Sie die beiden neuen Zahlen.

W4) (Nach Abs. 317/12.1, Kl. 8, BAg 341/845) **a₁**) (1 VP) Eine Urne enthält einhundert Kugeln, davon sind zwanzig weiß. Zwei Kugeln werden nacheinander zufällig gezogen; dabei wird die erste gezogene Kugel nicht zurückgelegt, bevor man die zweite zieht. Geben Sie in diesem Zusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit durch den Term $\frac{20}{100} \cdot \frac{19}{99}$ angegeben wird.

b₃) (4 VP) Eine andere Urne enthält ebenfalls einhundert Kugeln; für die Anzahl w der enthaltenen weißen Kugeln gilt $1 < w < 99$. Auch aus dieser Urne werden zwei Kugeln nacheinander zufällig gezogen. Die erste gezogene Kugel ist weiß. Betrachtet werden zwei Fälle: 1. Fall: Die erste gezogene Kugel wird nicht zurückgelegt, bevor man die zweite zieht. 2. Fall: Die erste gezogene Kugel wird zurückgelegt, bevor man die zweite zieht. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass auch die zweite gezogene Kugel weiß ist, beträgt im 1. Fall p , im 2. Fall ist sie 2% von p größer. Berechnen Sie den Wert von w .

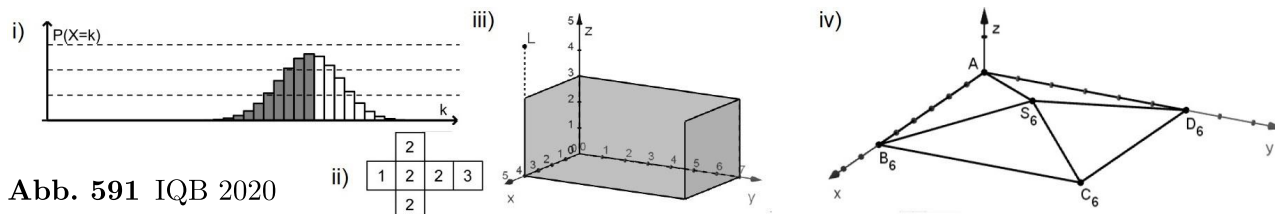


Abb. 591 IQB 2020

W5) (nach Abs. 336/12.3; Kl. 10, BAbs 348/12.3.11) Eine Gärtnerei, die Tulpen in den Farben Gelb, Orange und Rot züchtet, stellt Sträuße mit jeweils 15 Tulpen zusammen.

a₂) (2 VP) Einer der Sträuße soll Tulpen in zwei verschiedenen Farben enthalten. Die Anzahl der Möglichkeiten, diesen Strauß zusammenzustellen, kann mit dem Term $14 \cdot \binom{3}{2}$ berechnet werden. Beschreiben Sie für jeden der beiden Faktoren die Bedeutung im Sachzusammenhang.

b₂₋₃) (3 VP) In einem der Sträuße sollen zu jeder der drei Farben mindestens vier und höchstens sechs Tulpen enthalten sein. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, diesen Strauß zusammenzustellen.

G1) (Nach Abs 265/10.3, BAg 255/664) In einem Koordinatensystem ist ein gerader Zylinder mit dem Radius 5 und der Höhe 10 gegeben, dessen Grundfläche in der x_1x_2 -Ebene liegt. $M(8|5|10)$ ist der Mittelpunkt der Deckfläche.

a₂) (2 VP) Weisen Sie nach, dass der Punkt $P(5|1|0)$ auf dem Rand der Grundfläche des Zylinders liegt.

b₁₋₂) (3 VP) Unter allen Punkten auf dem Rand der Deckfläche hat der Punkt S den kleinsten Abstand von P , der Punkt T den größten. Geben Sie die Koordinaten von S an und bestimmen Sie die Koordinaten von T .

G2) (Nach Abs 265/10.3, BAg 268/714) **a₃**) Die Abbildung 1057/591iii zeigt in einem Koordinatensystem modellhaft eine 7m breite Theaterkulissee. Die linke Seitenwand liegt im Modell in der xz -Ebene, die rechte Seitenwand ist dazu parallel. Ein auf der Bühne stehender Gegenstand wird von einer Lampe beleuchtet. Die Lampe wird im Modell durch den Punkt $L(4|0|5)$ dargestellt, die Spitze des Gegenstands durch den Punkt $S(1|6|2)$. Untersuchen Sie rechnerisch, ob der Schatten der Spitze auf der rechten Seitenwand liegt.

G3) (Nach Abs 265/10.3, BAg 271/726) In einem Koordinatensystem werden die geraden Pyramiden $AB_tC_tD_tS_t$ mit $A(0|0|0)$, $B_t(t|0|0)$, $C_t(t|t|0)$ und $D_t(0|t|0)$ und $t \in \mathbb{R}^+$ betrachtet; die Punkte S_t haben jeweils die z -Koordinate $\frac{t}{8}$. Abb.1057/591iv zeigt die Pyramide für $t = 6$. Die Ebene $E : 3y + 4z = 24$ enthält den Punkt S_t für $t = 12$. **a₁₋₂)** (1 VP) Begründen Sie, dass E parallel zur x -Achse verläuft. **b₃)** (Nur LK; 4 VP) Untersuchen Sie, für welche Werte von t die Pyramide und die Ebene E gemeinsame Punkte haben.

16.10.3 IQB 2019 + früher

A1) (Nur LK; nach Abs. 163/6.3, BAg 167/420) Abb. 1058/592i zeigt den Graphen G_g einer in $\mathbb{R}$ definierten, differenzierbaren Funktion g . Betrachtet wird eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f , für deren erste Ableitungsfunktion $f'(x) = e^{g(x)}$ gilt. **a₃)** (2 VP) Untersuchen Sie, ob der Graph von f einen Extrempunkt hat. **b₃)** (3 VP) Untersuchen Sie, ob der Graph von f einen Wendepunkt hat.

A2) (Nur LK; nach Abs. 139/6.1; Kl. 10, BAg 143/338, 2 VP) Abb. 1058/592ii zeigt den Graphen G_f der in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierten Funktion $f : x \rightarrow \frac{4}{x^2}$. G_f ist symmetrisch bezüglich der y -Achse. **a₂₋₃)** (2 VP) Die Gerade, die parallel zur x -Achse durch den Punkt $P(0|p)$ verläuft, schneidet G_f in zwei Punkten. Der Abstand dieser beiden Schnittpunkte ist 1. Berechnen Sie den Wert von p . **b₂₋₃)** (3 VP) Die Koordinatenachsen schließen mit der Tangente an G_f in einem Punkt $Q(u|f(u))$ mit $u > 0$ ein gleichschenkliges Dreieck ein. Berechnen Sie die Koordinaten von Q .

A3) (Nach Abs. 186/7.1.15, BAg 183/480) **a₂₋₃)** Das Rechteck $ABCD$ mit $A(1|0)$, $B(4|0)$, $C(4|2)$ und $D(1|2)$ wird durch den Graphen der in $\mathbb{R}^+$ definierten Funktion f mit $f(x) = 2 - \frac{8}{x^2}$ in zwei Teilflächen zerlegt. Ermitteln Sie das Verhältnis der Inhalte der beiden Teilflächen.

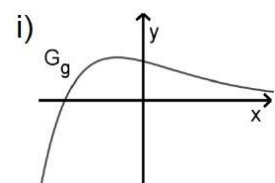
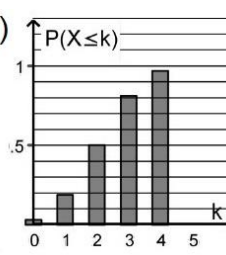
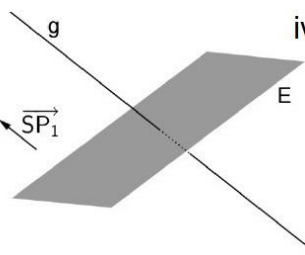
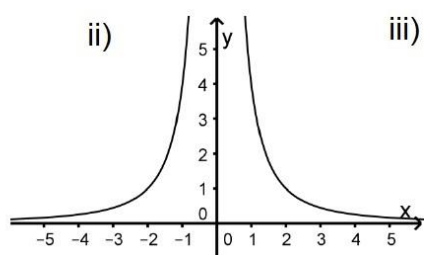


Abb. 592 IQB '19



A4) (Nur LK; nach Abs. 163/6.3; BAg 102/245c, 164/407e, 143/338) Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \ln(e^2 - x)$ mit maximalem Definitionsbereich $\mathbb{D}$. **a₂)** (1 VP) Geben Sie $\mathbb{D}$ an. **b₂)** (1 VP) Bestimmen Sie die Nullstelle von f . **c₂)** (3 VP) Weisen Sie rechnerisch nach, dass $y = \frac{-1}{e^2} \cdot x + 2$ eine Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(0|f(0))$ ist.

G1) (Nach Abs. 275/10.5, BAg 276/747) Gegeben sind die Ebene $E : 2x_1 + x_2 - x_3 - 4 = 0$ sowie der Punkt $P(-3|0|2)$. **a₁)** (1 VP) Zeigen Sie, dass der Punkt P nicht in der Ebene E liegt. **b₂)** (4 VP) Spiegelt man den Punkt P an der Ebene E , so erhält man den Punkt P' . Ermitteln Sie die Koordinaten von P' .

G2) (Nach Abs. 275/10.5, BAg 273/734) Das Dreieck ABC mit den Punkten $A(3|3|3)$, $B(6|7|3)$ und $C(2|10|3)$ ist im Punkt B rechtwinklig und liegt in der Ebene mit der Gleichung $z = 3$.

a₁) (2 VP) Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC den Flächeninhalt 252 besitzt. **b₂)** (3 VP) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punkts D so, dass das Volumen der Pyramide $ABCD$ gleich 25 ist.

G3) (Nach Abs. 280/10.6, BAg 285/771) Untersucht werden die Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen.

a₂) (2 VP) Bestimmen Sie die Lösungsmenge Gleichungssystems LGS 1.

$$\begin{aligned} \text{LGS 1:} \quad 3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 &= 13 \\ x_2 + 2 \cdot x_3 &= 5 \\ x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{LGS 2:} \quad 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 &= 4 \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 &= 5 \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + p \cdot x_3 &= 4 \end{aligned}$$

b₃) (Nur LK; 3 VP) Betrachtet wird das Gleichungssystem LGS 2 mit einem Parameter $p \in \mathbb{R}$: Geben Sie einen Wert von p an, für den das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat. Zeigen Sie, dass es keinen Wert von p gibt, für den das Gleichungssystem genau eine Lösung hat.

G4) (Nach Abs. 265/10.3, BAg 275/739) Gegeben sind die Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ mit } r \in \mathbb{R} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ mit } s \in \mathbb{R}.$$

a₁) (2 VP) Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von g und h an. Zeigen Sie, dass g und h senkrecht zueinander verlaufen. **b₂)** (3 VP) Die Ebene E enthält die Geraden g und h . Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

G5) (Nach Abs 265/10.3, BAg 268/714) Die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ und die Ebene

$E: x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2$ schneiden sich im Punkt S . **a₁₋₂)** (3 VP) Berechnen Sie die Koordinaten von S .

b₁₋₂) (2 VP) Der Punkt P liegt auf g , aber nicht in E . Abb. 1058/592iii zeigt die Ebene E , die Gerade g sowie einen Repräsentanten des Vektors $\overrightarrow{SP_1}$. Für den Punkt P_2 gilt $\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OP_1} - 4 \cdot \overrightarrow{SP_1}$, wobei O den Koordinatenursprung bezeichnet. Zeichnen Sie die Punkte S , P_1 und P_2 in Abb. 1058/592iii ein.

W1) (Nach Abs. 336/12.3; Kl. 10; BAg 342/849; 2 VP)

a₂) Abb. 1058/592iv zeigt kumulierte Werte der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße $\mathcal{X}$ mit dem Parameter $n = 5$. Zeichnen Sie in Abb. 1058/592iv den zu $k = 5$ gehörenden Wert ein und ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $\mathcal{X}$ den Wert 2 annimmt.

b₃) (3 VP) Betrachtet wird eine binomialverteilte Zufallsgröße $\mathcal{Y}$ mit den Parametern $n = 5$ und $p > 0$. Es gilt $P(\mathcal{Y} = 4) = 10 \cdot P(\mathcal{Y} = 5)$. Berechnen Sie den Wert von p .

W2) (Nach Abs. 317/12.1, Kl. 8; BAg 341/845) Ein Glücksrad besteht aus fünf gleich großen Sektoren. Einer der Sektoren ist mit '0' beschriftet, einer mit '1' und einer mit '2', die beiden anderen Sektoren sind mit '9' beschriftet. **a₁₋₂)** (2 VP) Das Glücksrad wird viermal gedreht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zahlen 2, 0, 1 und 9 in der angegebenen Reihenfolge erzielt werden.

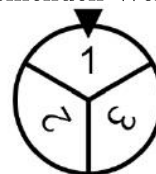
b₂) (3 VP) Das Glücksrad wird zweimal gedreht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der erzielten Zahlen mindestens 11 beträgt.

W3) (Nach Abs. 317/12.1, Kl. 8; BAg 341/845) Eine Urne A ist mit fünf roten und fünf blauen Kugeln gefüllt, eine Urne B mit n roten und $3n$ blauen, wobei $n > 0$ gilt. Aus der Urne A wird eine Kugel zufällig entnommen und in die Urne B gelegt. Danach wird aus der Urne B eine Kugel zufällig entnommen und in die Urne A gelegt. Nun befindet sich in der Urne A eine unbekannte Anzahl roter Kugeln. **a₁₋₂)** (1 VP) Geben Sie alle Möglichkeiten für diese unbekannte Anzahl an.

a₂₋₃) (4 VP) Für einen bestimmten Wert von n beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die unbekannte Anzahl roter Kugeln in der Urne A fünf ist, $\frac{15}{29}$. Bestimmen Sie diesen Wert von n .

W4) (nach Abs. 325/12.2, Kl. 9; BAg 327/812) Ein Glücksrad mit drei gleich großen Sektoren ist wie abgebildet beschriftet. Das Glücksrad wird zweimal gedreht. **a)** (2 VP) Die Zufallsgröße $\mathcal{X}$ gibt die Summe der beiden erzielten Zahlen an. Ergänzen Sie in der folgenden Tabelle die fehlenden Werte.

k	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{3}$		



a) Betrachtet werden die Ereignisse A und B : A : 'Es wird (1;3), (2;2) oder (3;1) erzielt.' B : 'Beim ersten Drehen wird eine 2 erzielt.' Untersuchen Sie, ob A und B stochastisch unabhängig sind.

W5) (nach Abs. 325/12.2, Kl. 9; BAg 327/812) Die Flächen zweier Würfel sind mit jeweils einem Buchstaben beschriftet: Würfel 1: B, B, C, C, C, C Würfel 2: A, A, A, B, B, C **a₁₋₂)** (2 VP) Würfel 1 wird zweimal geworfen. Eine Zufallsgröße beschreibt, wie oft dabei eine Fläche mit dem Buchstaben B gewürfelt wird. Berechnen Sie den Erwartungswert dieser Zufallsgröße. **b₂)** (3 VP) Einer der beiden Würfel wird zufällig ausgewählt und einmal geworfen; es wird eine Fläche mit dem Buchstaben C gewürfelt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei der Würfel 2 geworfen wurde.

16.10.4 Pflichtteilaufgaben

Aufgabe I.1) Erst nach Abs. 149/6.2.4 aus Kl. 10 oder 11 bearbeiten.

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x$ und $x \in \mathbb{R}$. Abb. 1060/593b zeigt ihren Graphen G_f , der bei $x = 1$ den Wendepunkt W hat.

a₁) (BAG: 143/335) Zeigen Sie, dass die Tangente an G_f im Punkt W die Steigung 1 hat.

b₃) (BAG: 33/60) Betrachtet werden die Geraden mit positiver Steigung m , die durch W verlaufen. Geben Sie die Anzahl der Schnittpunkte dieser Geraden mit G_f in Abhängigkeit von m an.

Aufgabe I.2) (Nach Abs. 186/7.1.15) Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = e^x + 0.5x$.

a₃) (BAG: 164/407) Begründen Sie, dass der Graph von f und der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g mit $g(x) = 0.5x - 1$ keinen gemeinsamen Punkt besitzen.

b₃) (Nur LK; BAG: 183/479c) Für ein $c \in \mathbb{R}^+$ wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion g_c mit $g(x) = 0.5x - c$ betrachtet. Abb. 1060/593c zeigt die Graphen von f und g_c . Die beiden Graphen schließen mit der y -Achse und der Gerade mit der Gleichung $x = 1$ eine Fläche mit dem Inhalt 3 ein. Berechnen Sie c .

Aufgabe I.3) Erst nach Abs. 170/6.3.9 aus Kl. 11 bearbeiten

Eine Funktion f ist durch $f(x) = 2 \cdot e^{0.5x} - 1$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

a₂) (BAG: 164/407) Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion f .

b₃) (BAG: 143/335) Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $S(0|1)$ begrenzt mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck. Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck gleichschenkelig ist.

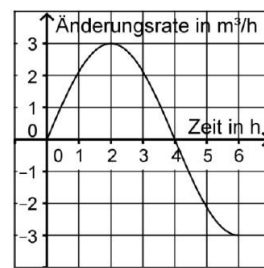
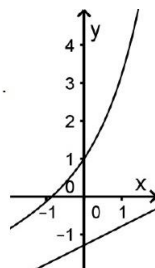
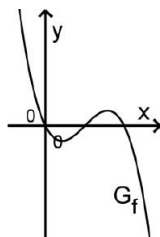
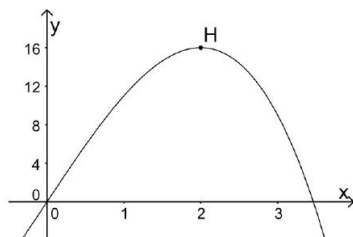


Abb. 593 a) zu Aufgabe I.4; b) zu Aufgabe I.1; c) zu Aufgabe I.2; d) zu Aufgabe I.5;

Aufgabe I.4) (Nach Abs. 186/7.1.15) (BAG 183/480) Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 12x$. Abb. 1060/593a zeigt den Graphen von f sowie dessen Hochpunkt $H(2|16)$.

a₂) Der Graph von f , die x -Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 2$ schließen für $0 \leq x \leq 2$ eine Fläche ein. Zeigen Sie, dass diese Fläche den Inhalt 20 besitzt.

b₃) (Nur LK) Die Gerade g verläuft durch den Punkt H und besitzt eine negative Steigung. Der Graph von f , die y -Achse und die Gerade g schließen für $0 \leq x \leq 2$ eine Fläche mit dem Inhalt 20 ein. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts der Geraden g mit der y -Achse.

Aufgabe I.5) Erst nach Abs. 186/7.1.15 aus Kl. 11 bearbeiten

Abb. 1060/593d stellt für einen Wassertank die Zufluss- bzw. Abflussrate (in $\frac{m^3}{h}$) von Wasser für einen Beobachtungszeitraum von sechs Stunden dar. Zu Beginn der Beobachtung enthält der Tank $2m^3$ Wasser.

a₂) (BAG 180/464) Bestimmen Sie das Volumen des Wassers, das sich zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn im Tank befindet.

b₃) (BAG: 157/388) Skizzieren Sie in der Abb. 1061/594a den Graphen, der die Entwicklung des Volumens des Wassers im Tank in Abhängigkeit von der Zeit darstellt.

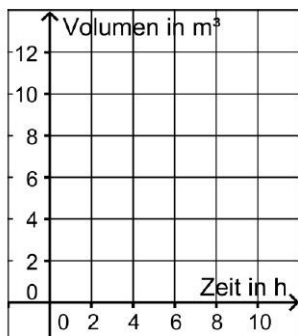
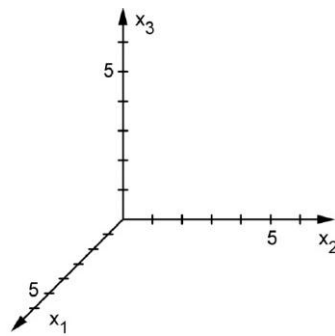
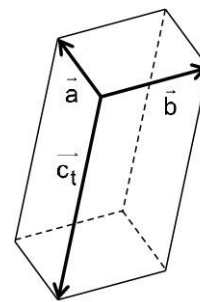


Abb. 594 a) zu Aufgabe I.5;



b) zu Aufgabe I.8;



c) zu Aufgabe I.10;

Aufgabe I.6) Erst nach Abs. 275/10.5 aus Kl. 12 bearbeiten

Gegeben sind die Ebene $E : x_2 - 3x_3 = -19$ sowie die Punkte $P(1|2|2)$, $Q(1|-1|11)$ und $S(-2|-4|5)$.

a₁) (BAG 266/706) Zeigen Sie, dass S in der Ebene E liegt.

b₂) (BAG 275/741d,e) Weisen Sie nach, dass die Gerade durch P und Q senkrecht zu E steht.

c₂₋₃) (Partnerabschnitt 276/10.5.4) Die Punkte P und Q haben den gleichen Abstand von der Ebene E . Die Punkte S und P legen die Gerade g fest. Spiegelt man g an E , so erhält man die Gerade h . Geben Sie eine Gleichung von h an.

Aufgabe I.7) Erst nach Abs. 262/10.2 aus Kl. 11 oder 12 bearbeiten

Der Punkt $P(0|1|5)$ ist Eckpunkt eines Quadrats. Orthogonal zu der Ebene, in der dieses Quadrat liegt, verläuft die Gerade $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

a₁) (Partnerabschnitt 266/10.3.2) Begründen Sie, dass das Quadrat in der x_2x_3 -Ebene liegt.

b₂₋₃) Der Schnittpunkt der beiden Diagonalen des Quadrats liegt auf der Geraden g , der Punkt $Q(0|8|4)$ in der x_2x_3 -Ebene. Zeigen Sie, dass Q einer der beiden Eckpunkte des Quadrats ist, die dem Eckpunkt P benachbart sind.

Aufgabe I.8) Erst nach Abs. 265/10.3 aus Kl. 12 bearbeiten

Gegeben sind die Ebene $E: x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$ und die Gerade $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

a₁₋₂) (BAG 269/718) Zeichnen Sie in Abb. 1061/594b die Schnittgerade von E mit der x_2x_3 -Ebene ein.

b₂) (BAG 268/714) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von E und g .

Aufgabe I.9) Erst nach Abs. 265/10.3 aus Kl. 12 bearbeiten

Gegeben ist die Ebene $E : 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -18$.

a₁₋₂) (BAG: 268/714 + 272/730) Der Schnittpunkt von E mit der x_1 -Achse, der Schnittpunkt von E mit der x_2 -Achse und der Koordinatenursprung sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

b₂₋₃) (BAG 266/707) Ermitteln Sie die Koordinaten des Vektors, der sowohl ein Normalenvektor von E als auch der Ortsvektor eines Punkts der Ebene E ist.

Aufgabe I.10) Nur LK, nach Abs. 265/10.3 BAG 263/694) Die Vektoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ -5t \end{pmatrix}$ spannen für jeden Wert von $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ einen Körper [Spat] auf. Abb. 1061/594c zeigt den Sachverhalt beispielhaft für einen Wert von t .

a₂) Zeigen Sie, dass die aufgespannten Körper Quader sind.

b₂) Bestimmen Sie diejenigen Werte von t , für die der zugehörige Quader das Volumen 15 besitzt.

Aufgabe I.11) Nur LK, erst nach Abs. 275/10.5 aus Kl. 12 bearbeiten

(BAg 263/694) ₃) Der Punkt $A(-2|3|\sqrt{12})$ ist bezüglich des Koordinatenursprungs symmetrisch zum Punkt B . Die Punkte $C_r(3r|2r|0)$ mit $r \in \mathbb{R}$ bilden eine Gerade g , die im Koordinatenursprung senkrecht zur Geraden durch A und B steht. Bestimmen Sie alle Werte von r , für die A, B und C_r Eckpunkte eines Dreiecks mit dem Flächeninhalt 65 sind.

Aufgabe I.12) (nach Abs. 326/12.2.2 (Kl. 9); BAg 327/812)

Die Zufallsgrößen $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ können jeweils die Werte 3, 4 und 5 annehmen.

a₂) Für die Zufallsgröße $\mathcal{X}$ gilt: $P(\mathcal{X} = 3) = \frac{1}{3}$ und $P(\mathcal{X} = 4) = \frac{1}{4}$. Bestimmen Sie den Erwartungswert von $\mathcal{X}$.

b₄) Für die Zufallsgröße $\mathcal{Y}$ gilt: $P(\mathcal{Y} = 3) = \frac{1}{3}$, $P(\mathcal{Y} = 4) \geq \frac{1}{6}$ und $P(\mathcal{Y} = 5) \geq \frac{1}{6}$. Bestimmen Sie alle Werte, die für den Erwartungswert von $\mathcal{Y}$ infrage kommen.

Aufgabe I.13) (Nach Abs. 341/12.3.5 (Kl. 10); BAg 348/862;) Ein Glücksrad hat drei Sektoren, einen blauen, einen gelben und einen roten. Diese sind unterschiedlich groß. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim einmaligen Drehen der blaue Sektor getroffen wird, beträgt p .

a₁₋₂) (Partnerabschnitt 333/12.2.6) Interpretieren Sie den Term $(1 - p)^7$ im Sachzusammenhang.

b₁) (BAg 344/854) Das Glücksrad wird zehnmal gedreht. Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden kann, dass der blaue Sektor genau zweimal getroffen wird.

c₃) (Partnerabschnitte (BAg 331/12.2.5) + (BAg 353/13.1.1)) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim einmaligen Drehen der gelbe Sektor getroffen wird, beträgt 50 %. Felix hat 100 Drehungen des Glücksrads beobachtet und festgestellt, dass bei diesen der Anteil der Drehungen, bei denen der gelbe Sektor getroffen wurde, deutlich geringer als 50 % war. Er folgert: 'Der Anteil der Drehungen, bei denen der gelbe Sektor getroffen wird, muss also bei den nächsten 100 Drehungen deutlich größer als 50 % sein.' Beurteilen Sie die Aussage von Felix.

Aufgabe I.14) Nach Abs. 341/12.3.5 (Kl. 10);)

Jedes Überraschungsei eines Herstellers enthält entweder eine Figur oder keine Figur, wobei der Anteil der Überraschungseier mit einer Figur 25 % beträgt.

a₁) (Partnerabschnitt: 341/12.3.5) Zehn Überraschungseier werden nacheinander zufällig ausgewählt. Geben Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit dafür an, dass nur in den letzten beiden Überraschungseiern jeweils eine Figur enthalten ist.

b₂₋₃) (BAg 346/857) Sechs Überraschungseier werden zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße $\mathcal{X}$ gibt an, wie viele dieser Überraschungseier eine Figur enthalten. Eine der Abbildungen aus 1062/595 stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallsgröße $\mathcal{X}$ dar: Geben Sie an, welche Abbildung dies ist. Begründen Sie, dass die beiden anderen Abbildungen dies nicht sind.

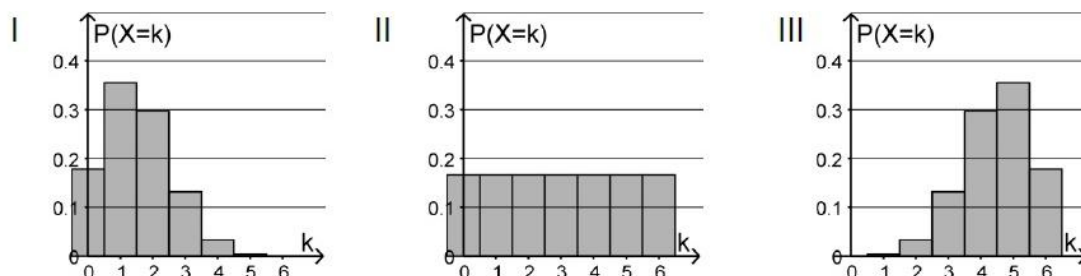


Abb. 595 mögliche Zufallsgrößen aus Aufgabe I.14;

Aufgabe I.15) Nach Abs. 341/12.3.5 (Kl. 10); BAg 327/812)

Schwarze und weiße Kugeln sind wie folgt auf drei Urnen verteilt:

a₂) Aus Urne A wird zunächst eine Kugel zufällig entnommen und in Urne B gelegt. Anschließend wird aus Urne B eine Kugel zufällig entnommen und in Urne C gelegt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich danach in Urne C zwei weiße Kugeln und eine schwarze Kugel befinden.



Abb. 596 Urne aus Aufgabe I.15;

b₂) Die drei Urnen mit den in der Abbildung dargestellten Inhalten bilden den Ausgangspunkt für folgendes Spiel: Es wird zunächst ein Einsatz von 1 € eingezahlt. Anschließend wird eine der drei Urnen zufällig ausgewählt und danach aus dieser Urne eine Kugel zufällig gezogen. Nur dann, wenn diese Kugel schwarz ist, wird ein bestimmter Geldbetrag ausgezahlt. Ermitteln Sie, wie groß dieser Geldbetrag sein muss, damit bei diesem Spiel auf lange Sicht Einsätze und Auszahlungen ausgeglichen sind.

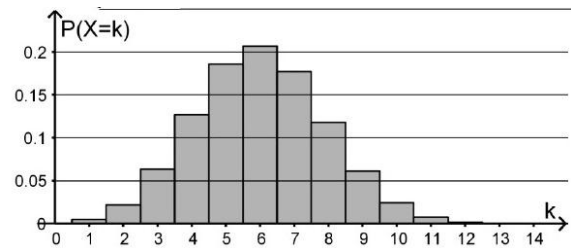
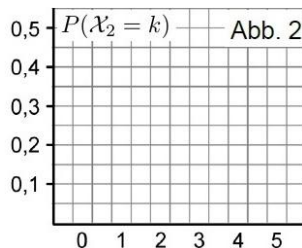
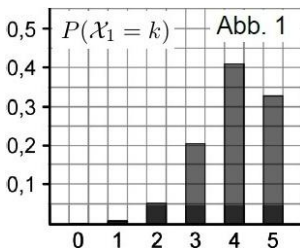


Abb. 597 Wkvert aus Aufgabe I.16;

Wkvert aus Aufgabe I.17;

Aufgabe I.16 (Nach Abs. 341/12.3.5 (Kl. 10);)

Die binomialverteilten Zufallsgrößen $\mathcal{X}_1$ und $\mathcal{X}_2$ geben für Trefferwahrscheinlichkeiten von $p_1 = 0.8$ bzw. $p_2 = 0.2$ jeweils die Anzahl der Treffer bei fünf Versuchen an.

a₁₋₂) (BAG 344/854) Betrachtet wird die Zufallsgröße $\mathcal{X}_1$. Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit für genau einen Treffer berechnet werden kann.

b₂) (Partneraufgabe 348/862) Geben Sie für eine der beiden Zufallsgrößen ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit durch den Term $1 - \left(\binom{5}{3} \cdot 0.8^3 \cdot 0.2^2 + \binom{5}{4} \cdot 0.8^4 \cdot 0.2 + \binom{5}{5} \cdot 0.8^5\right)$ angegeben wird.

c₂) (Partneraufgabe 345/855) Abbildung 1 (aus Abb. 1063/597) zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $\mathcal{X}_1$. Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $\mathcal{X}_2$ in Abbildung 2 dar.

Aufgabe I.17 (Nach Abs. 341/12.3.5 (Kl. 10); (BAG 346/857) Abb. 1063/597.3 zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße $\mathcal{X}$ mit den Parametern n und p .

a₁) Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung die Wahrscheinlichkeit $P(5 \leq \mathcal{X} \leq 7)$. b₂₋₃) $\mathcal{X}$ hat den Erwartungswert 6 und die Standardabweichung $\sqrt{3.6}$. Ermitteln Sie die zugehörigen Werte von n und p .

16.10.5 Aufgaben mit 'neuen' inhaltlichen Anforderungen, ab hier nur LK-Aufgaben

BK-Stoff sind noch Ag II.9a-c, II.10, II.12 und II.14a.

Aufgabe II.1 Kann erst nach Abs. 186/7.1.15 aus Kl. 11 bearbeitet werden.

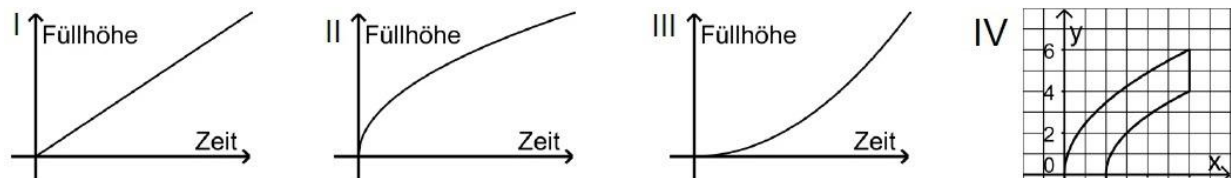


Abb. 598 Rotationskörper

(Basisabschnitt 185/7.1.14) Betrachtet wird eine große rotationssymmetrische Schale, die aus einem Steinblock gefertigt wurde. Ein Kubikmeter des Steins hat eine Masse von 2700kg. In einem Koordinatensystem kann ein Querschnitt der Schale mithilfe der Graphen der Funktionen p und q mit

$$p(x) = \sqrt{6x}, \quad 0 \leq x \leq 6 \quad \text{und} \quad q(x) = \sqrt{4x - 8}, \quad 2 \leq x \leq 6.$$

modellhaft dargestellt werden. Dabei beschreibt die x -Achse die Rotationsachse der Schale; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht $1dm$ (vgl. Abbildung 1063/598 IV).

a₂) Interpretieren Sie den Term $p(6) - q(6)$ im Sachzusammenhang.

b₂₋₃) In die aufrecht stehende Schale wird mit konstanter Zuflussrate Wasser gefüllt. Entscheiden Sie, welcher der abgebildeten Graphen I, II und III aus Abb. 1063/598 für diesen Vorgang die Füllhöhe in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

c₃₋₄) Weisen Sie nach, dass sich bei dem beschriebenen Füllvorgang der Flächeninhalt A der Wasseroberfläche (in dm^2) in Abhängigkeit von der Füllhöhe h (in dm) mithilfe der Gleichung $A(h) = 4\pi h$ berechnen lässt.

d₃₋₄) Interpretieren Sie im Sachzusammenhang die Funktion s mit $s(x) = \pi \int_2^{2+x} (q^2(t))dt$ und geben Sie den größten Definitionsbereich von s an, der im Sachzusammenhang sinnvoll ist.

e₃₋₄) Berechnen Sie die Masse der Schale.

Aufgabe II.2) Nach Abs. 280/10.6 aus Kl. 11

(⊕) (Partnerag. 285/771) ₂₋₃) Bestimmen Sie für $r \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & -2x_2 & +x_3 & = & 6 \\ 4x_1 & +x_2 & -3x_3 & = & 4r \\ 2x_1 & +3x_2 & -3x_3 & = & 8r \end{array}$$

Aufgabe II.3) Kann erst nach Abs. 280/10.6 aus Kl. 11 bearbeitet werden. (BAg 258/675)

₂₋₃) Zwei Schüler lösen dasselbe lineare Gleichungssystem. Sie erhalten die Lösungsmengen

$$L_1 = \{(2+r; 1+r; 3-r) | r \in \mathbb{R}\} \quad \text{bzw.} \quad L_2 = \{(1+s; -s; 4+s) | s \in \mathbb{R}\}.$$

Untersuchen Sie, ob diese Lösungsmengen identisch sind.

Aufgabe II.4) Kann erst nach Abs. 262/10.2 aus Kl. 11 bearbeitet werden.

(Partnerabschnitt 264/10.2.4) ₃) Beweisen Sie: Wenn in einem gleichschenkligen Dreieck $\Delta(A, B, C)$ der Punkt M_c der Mittelpunkt der Basis $\overline{AB}$ ist, dann ist die Strecke $\overline{CM_c}$ orthogonal zu $\overline{AB}$.

Aufgabe II.5) Kann erst nach Abs. 262/10.2 aus Kl. 11 bearbeitet werden.

(Partnerabschnitt 264/10.2.4) ₃) Beweisen Sie: Die Seitenmitten eines Vierecks $ABCD$ bilden die Eckpunkte eines Parallelogramms (Satz von Varignon).

Aufgabe II.6) kann erst nach Abs. 275/10.5 aus Kl. 12 bearbeitet werden.

(BAg 275/741) Gegeben sind eine Ebenenschar $E_k : 3x_1 + kx_2 - kx_3 = 6, (k \in \mathbb{R})$ sowie die Gerade g durch die Punkte $P(4|7|7)$ und $Q(1|2|9)$.

a₂) Untersuchen Sie die Ebenen E_k der Schar auf Parallelität zur Geraden g und Orthogonalität zur Geraden g .

b) i₂) Bestimmen Sie k so, dass E_k orthogonal zu E_1 ist.

ii₃) Untersuchen Sie, ob es eine Ebene E_k gibt, die zu keiner anderen Ebene der Schar orthogonal ist.

c) (BAg 276/749) i₃) Es gibt genau einen Wert von k , für den der Abstand des Punktes P von der Ebene E_k maximal wird. Untersuchen Sie, welche besondere Lage die zugehörige Ebene hat.

ii₃₋₄) Die Kugel K besitzt den Mittelpunkt P und hat den Radius 1. Bestimmen Sie Werte für k so, dass die Ebene E_k keinen gemeinsamen Punkt mit der Kugel K hat.

d) (BAg: 277/750 ab e) i₃) Zeigen Sie, dass es eine Gerade h gibt, die in allen Ebenen E_k liegt.

ii₃₋₄) Ermitteln Sie die Gleichung einer Ebene F , die h enthält, aber nicht zur Ebenenschar E_k gehört.

e₄) (BAg: 277/750 ab e) Untersuchen Sie, welche Punkte der x_2x_3 -Ebene in keiner Ebene E_k liegen.

Aufgabe II.7) Kann erst nach Abs. 275/10.5 aus Kl. 12 bearbeitet werden.

(BAG: 257/670 + 259/680) Gegeben sind die Punkte $P(2|-1|0)$ und $Q(1|2|-11)$, die Geradenschar $g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2-a \\ 3a-1 \\ -11a \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ($a, t \in \mathbb{R}$) und die Ebene $E: x_1 + 4x_2 + x_3 = -2$.

a) (BAG: 277/752) **i₁)** Zeigen Sie, dass der Pkt P auf der Geraden g_0 liegt. **ii₂)** Ermitteln Sie die Koordinaten der Pkte auf g_0 , die von P den Abstand 12 haben. **iii₁₋₂)** Bestimmen Sie, auf welcher Geraden g_a der Pkt Q liegt. **b)** **i₁₋₂)** Begründen Sie, dass die Geraden g_0 und die x_1 -Achse zueinander windschief sind. **ii₂₋₃)** Bestimmen Sie den Abstand der Geraden g_0 von der x_1 -Achse.

c₃) (BAG 268/714) Untersuchen Sie, welche gegenseitige Lage die Geraden g_{a_1} und g_{a_2} ($a_1 \neq a_2$) haben. Zeigen Sie, dass durch die Geradenschar g_a und die Ebene E dieselbe Punktmenge beschrieben wird.

d₃₋₄) (BAG 279/756) Der Punkt T liegt auf keiner Geraden der Schar. Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem diejenige Gerade der Schar ermittelt werden kann, die den kleinsten Abstand von T hat.

Aufgabe II.8) Erst nach Abs. 361/13.2 (nur SemQ oder LK) aus Kl. 11 oder 12 bearbeiten.

(BAG 364/904) Die Zufallsgröße $\mathcal{X}$ beschreibt die Körpergröße von Neugeborenen in mm . Sie wird als normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 522$ und der Standardabweichung $\sigma = 19$ angenommen. Ein Neugeborenes wird zufällig ausgewählt.

a₁) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass seine Körpergröße kleiner als 500 mm ist.

b₁₋₂) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass seine Körpergröße um höchstens 20 mm vom Erwartungswert von $\mathcal{X}$ abweicht.

c₃) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass seine Körpergröße um höchstens a mm vom Erwartungswert von $\mathcal{X}$ abweicht, beträgt mindestens 80%. Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl a , für die diese Aussage zutrifft.

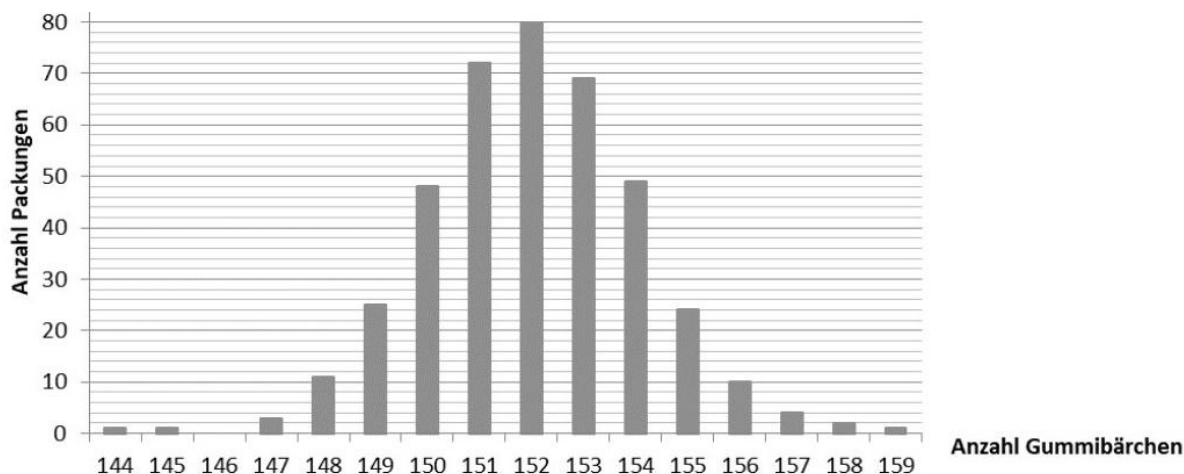


Abb. 599 Säulendiagramm aus Aufgabe II.9;

Aufgabe II.9) Erst nach Abs. 361/13.2 aus Kl. 11 oder 12 bearbeiten; Teile a-c auch BK.

(Basisabschnitt: 346/12.3.8) Es wurden stichprobenartig 400 Standardpackungen Gummibärchen untersucht und das Ergebnis in einem Säulendiagramm (Abb. 1065/599) festgehalten.

a₁) Ermitteln Sie auf der Basis der Stichprobe die Wahrscheinlichkeit, dass eine Standardpackung mindestens 150 und höchstens 152 Gummibärchen enthält.

Die Anzahl der Gummibärchen in einer Standardpackung aus der laufenden Produktion soll durch eine normalverteilte Zufallsgröße $\mathcal{X}$ mit den Parametern μ und σ modelliert werden.

b₁) Beschreiben Sie, wie man mit Hilfe des Säulendiagramms einen Näherungswert für μ bestimmen kann.

(BAg:365/907 + 365/906) Aus den Daten des Diagramms erhält man etwa $\mu = 152$ und $\sigma = 2$.

c₁) (BAg 364/904) Berechnen Sie mit Hilfe der Normalverteilung die Wahrscheinlichkeit, dass eine Standardpackung mindestens 150 und höchstens 152 Gummibärchen enthält.

d₄) Der laufenden Produktion werden 100 Standardpackungen zufällig entnommen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich darunter höchstens vier Standardpackungen mit weniger als 149 Gummibärchen befinden.

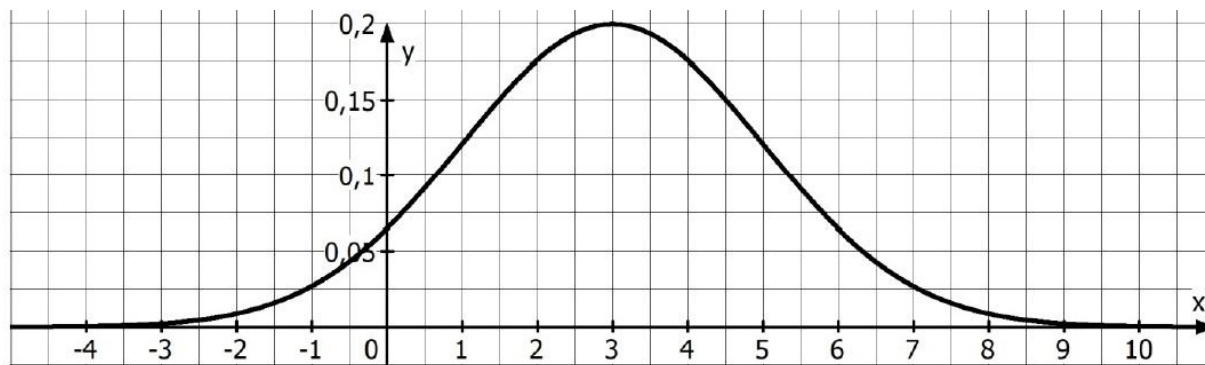


Abb. 600 Dichte der Normalverteilung aus Aufgabe II.10;

Aufgabe II.10) Erst nach Abs. 361/13.2 aus Kl. 11 oder 12 bearbeiten, auch BK.

(BAg 365/906) Von einer normalverteilten Zufallsgröße $\mathcal{X}$ ist der Graph der zugehörigen Dichtefunktion gegeben (siehe Abbildung 1066/600).

a₁) Ermitteln Sie näherungsweise den zugehörigen Erwartungswert und die zugehörige Standardabweichung und berechnen Sie $P(\mathcal{X} \geq 1)$.

b₁) Veranschaulichen Sie $P(\mathcal{X} \geq 1)$ in der Abbildung.

Aufgabe II.11) Erst nach Abs. 361/13.2 aus Kl. 11 oder 12 bearbeiten.

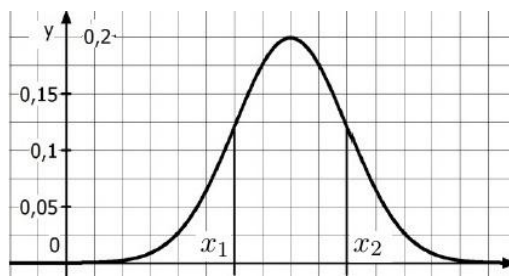
(BAg 365/906) ₂) $\mathcal{X}$ sei eine normalverteilte Zufallsgröße, für welche gilt:

(I) $P(X \leq -4) = 0.151$ und (II) $P(X \geq 9) = 0.151$

Berechnen Sie den Erwartungswert und bestimmen Sie die Standardabweichung auf eine Dezimale gerundet.

Aufgabe II.12) Erst nach Abs. 361/13.2 aus Kl. 11 oder 12 bearbeiten (auch BK). (BAg 365/906)

₂₋₃) Die Abbildung zeigt den Graphen der Dichtefunktion $\varphi_{\mu;\sigma}$ einer normalverteilten Zufallsvariable $\mathcal{X}$. Die Stellen x_1 und x_2 sind die Wendestellen des Graphen. Bestimmen Sie mit Hilfe der Abbildung je einen Näherungswert für σ und μ jeweils auf eine Dezimale.



Aufgabe II.13) Erst nach Abs. 361/13.2 (nur SemQ oder LK) aus Kl. 11 oder 12 bearbeiten.

a₂) (BAg: 363/900j) Die Funktion g ist eine Dichtefunktion über dem Intervall $[-1; 1]$. Geben Sie zwei Eigenschaften an, die g besitzt.

b₂₋₃) (BAg 363/901) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist eine Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = \frac{1}{8}(ax^4 - ax^2)$. Untersuchen Sie, ob es einen Wert für a gibt, so dass f_a eine Dichtefunktion über dem Intervall $[-1; 1]$ ist.

Aufgabe II.14) Erst nach Abs. 353/13.1 aus Kl. 11 oder 12 bearbeiten (nur LK).

Eine Lotteriegesellschaft bietet im großen Stil Rubbellose an. Auf einem Lotterielos sind vier Felder, die jeweils entweder ein Fragezeichen oder ein Ausrufezeichen enthalten. Die Lotteriegesellschaft erklärt in ihrem Gewinnplan, dass alle möglichen Kombinationen gleichwahrscheinlich sind. Bei vier Ausrufezeichen erhält man einen Gewinn.

a₁) (auch BK=GK) Weisen Sie nach, dass nach den Angaben der Lotteriegesellschaft die Wahrscheinlichkeit für den Gewinn $\frac{1}{16}$ beträgt.

(BAg 357/884) Eine Spielervereinigung befürchtet, dass die Wahrscheinlichkeit für den Gewinn kleiner ist als von der Lotterie angegeben. Um dies zu untermauern, soll ein Signifikanztest durchgeführt werden.

b₃) (BAg 354/876) Formulieren Sie die Nullhypothese und die Alternativhypothese so, dass der Test der Zielsetzung der Spielervereinigung entspricht. Erläutern Sie Ihre Wahl. Der Test wird mit einem Stichprobenumfang von 200 Losen und einem Signifikanzniveau von 5 % durchgeführt. Bestimmen Sie die Entscheidungsregel.

c₄) Die Spielervereinigung wollte ursprünglich die Nullhypothese 'Die Wahrscheinlichkeit für den Gewinn beträgt mindestens $\frac{1}{16}$ ' bei einem Stichprobenumfang von 40 Losen auf einem Signifikanzniveau von 5 % testen. Untersuchen Sie, ob der so konzipierte Test eine brauchbare Information geliefert hätte.

Aufgabe II.15) Erst nach Abs. 353/13.1 aus Kl. 11 oder 12 bearbeiten (nur LK).

Es gibt zwei Güteklassen Fliesen. Bei Premiumfliesen beträgt die Wahrscheinlichkeit für Verfärbungen maximal 1%. Bei Standardfliesen ist die Wahrscheinlichkeit für verfärbte Fliesen höher. Ein Händler erhält eine große Lieferung, bei der die Information, ob es sich um Premiumfliesen handelt, verloren gegangen ist. Anhand einer Stichprobe von 100 zufällig entnommenen Fliesen will der Händler entscheiden, welche Güteklasse die gelieferten Fliesen haben. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Lieferung aufgrund des Tests fälschlicherweise der Güteklasse Standard zugeordnet wird, soll höchstens 2 % betragen. Der Händler wählt als Nullhypothese: 'Es handelt sich um eine Lieferung Premiumfliesen.'

a₃) (BAg: 354/876 + 357/884 + 359/889e) Begründen Sie, dass diese Wahl der Nullhypothese der vom Händler gegebenen Zielsetzung entspricht. Bestimmen Sie den zugehörigen Ablehnungsbereich und geben Sie die maximale Irrtumswahrscheinlichkeit an. Beurteilen Sie folgende Aussage: 'Liegt bei der Durchführung des Tests die Anzahl der verfärbten Fliesen außerhalb des Ablehnungsbereichs, dann trifft die Nullhypothese mit hoher Wahrscheinlichkeit zu.'

b₃) (BAg 360/893) Der Händler erhält von der Herstellerfirma die Information, dass bei den Standardfliesen die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Verfärbungen bei 7.5% liegt. Beschreiben Sie den Fehler 2. Art im Sachzusammenhang. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art.

Aufgabe II.16) Erst nach Abs. 353/13.1 aus Kl. 11 oder 12 bearbeiten (nur LK).

Ein Würfel soll darauf hin untersucht werden, ob er 'gezinkt' ist. Man einigt sich darauf, ihn in einem Test mehrmals zu werfen und die Anzahl der dabei gewürfelten 'Sechser' zu zählen.

a₂) (Partnerabschnitt 358/13.1.4) Ein Vorschlag hierzu lautet: Der Würfel wird als 'gezinkt' angesehen, wenn bei 150 Würfeln weniger als 20-mal oder mehr als 30-mal ein 'Sechser' gewürfelt wird. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Würfel als 'gezinkt' angesehen wird, obwohl die Wahrscheinlichkeit für einen 'Sechser' tatsächlich $\frac{1}{6}$ ist.

b₃) (BAg 358/886) Ein anderer Vorschlag hierzu lautet: Es soll ein Signifikanztest mit einem Signifikanzniveau von 1% durchgeführt werden, bei dem der Würfel 500-mal geworfen wird. Erläutern Sie, welche Art von Signifikanztest geeignet ist, bestimmen Sie eine Entscheidungsregel und berechnen Sie die Irrtumswahrscheinlichkeit.

16.10.6 Vertieft verständnisorientierte Aufgaben (nur LK)

Aufgabe III.1₄) Erst nach Abs. 186/7.1.15 aus Kl. 11 bearbeiten (Partneraufgabe: 188/502b).

Die Funktion u ist auf $\mathbb{R}$ definiert und differenzierbar. Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = e^{u(x)}$. Bestimmen Sie damit eine Stammfunktion der Funktion g mit $g(x) = 2x^2 \cdot e^{4x^3}$.

Aufgabe III.2₃) Erst nach Abs. 170/6.3.9 aus Kl. 11 bearbeiten (Partneraufgabe: 68/175).

Für jedes $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist die Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = \sin(a \cdot x)$.

a) Bilden Sie die erste, dritte und fünfte Ableitung der Funktion f_a .

b) Bestimmen Sie die 51. Ableitung der Funktion f_a .

Aufgabe III.3₃) Erst nach Abs. 170/6.3.9 aus Kl. 11 bearbeiten (übernommen: 168/423d).

Die Funktion g ist auf $\mathbb{R}$ definiert und differenzierbar. Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = (x - x_0)^2 \cdot g(x)$. Zeigen Sie, dass der Graph von f im Punkt $P(x_0 | f(x_0))$ die x -Achse als Tangente besitzt.

Aufgabe III.4₃) Erst nach Abs. 170/6.3.9 aus Kl. 11 bearbeiten (übernommen: 168/423e).

Die auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion f ist zweimal differenzierbar. Es gilt $f'(5) = 0$ und $f''(5) = 2$. Zeigen Sie, dass die Funktion g mit $g(x) = e^{-f(x)}$ an der Stelle $x = 5$ ein lokales Maximum besitzt.

Aufgabe III.5₄) Erst nach Abs. 170/6.3.9 aus Kl. 11 bearbeiten (übernommen: 168/423f).

Die Funktion g ist auf $\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Es gilt $g(4) = 2$, $g'(4) = 0,5$ und $g''(x) < 0$ im Intervall $[0; 6]$. Untersuchen Sie, ob g im Intervall $[0; 6]$ eine Nullstelle besitzt.

Aufgabe III.6₃) Schon zu Beginn Klasse 11 lösbar (übernommen 147/349d).

Gegeben ist die auf $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion f durch $f(x) = b - \frac{a^2}{x^2}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$. Untersuchen Sie, welche Beziehung zwischen a und b bestehen muss, damit der Graph von f den Graphen der Funktion g mit $g(x) = x^2$ berührt.

Aufgabe III.7₃₋₄) Erst nach Abs. 170/6.3.9 aus Kl. 11 bearbeiten (Basisaufgabe (= BAG): 147/349e).

Gegeben sind die auf $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = e^{ax}$, ($a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$). Die zugehörigen Graphen werden mit K_a bezeichnet. Untersuchen Sie, welche Beziehung zwischen a_1 und a_2 bestehen muss, damit sich K_{a_1} und K_{a_2} senkrecht schneiden.

Aufgabe III.8₄) Erst nach Abs. 186/7.1.15 aus Kl. 11 bearbeiten.

Gegeben sind die Punkte $P_a(0 | a | 4 - a^2)$ und $Q_a(6 | a | 4 - a^2)$ für $a \in [-2; 2]$. Die Strecken $\overline{P_a Q_a}$ bilden mit einem Teil der $x_1 x_2$ -Ebene den Mantel eines Körpers. Bestimmen Sie das Volumen dieses Körpers.

Aufgabe III.9) Erst nach Abs. 262/10.2 aus Kl. 11 bearbeiten (Basisaufgabe (= BAG): 263/697).

Gegeben sind zwei nicht kollineare Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sowie eine reelle Zahl r mit $0 \leq r \leq 1$, für die gilt: $(\vec{a} - r \cdot \vec{b}) \perp \vec{b}$.

a₃) Stellen Sie die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $r \cdot \vec{b}$ und $\vec{a} - r \cdot \vec{b}$ in einer beschrifteten Skizze dar.

b₂) Bestimmen Sie r für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe III.10) Erst nach Abs. 275/10.5 aus Kl. 12 bearbeiten.

Gegeben sind die Ebenen $E : ax_1 + bx_2 + x_3 = d$ und $F : ax_1 + bx_2 + x_3 = d + 2$ und

a₃) (BAG: 275/743+277/750) Zeigen Sie, dass der Abstand der beiden Ebenen kleiner oder gleich 2 ist.

b₄) Untersuchen Sie, welche besondere Lage die Ebene E hat, wenn ihr Abstand zu F genau 2 ist.

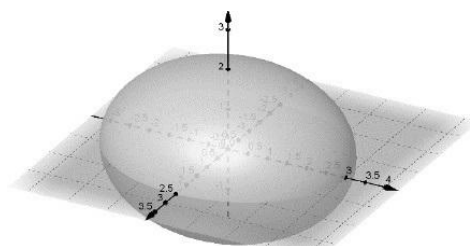
Aufgabe III.11) Schon zu Beginn Klasse 11 lösbar.

Alle Punkte $P(x_1 | x_2 | x_3)$, für die

$$144x_1^2 + 100x_2^2 + 225x_3^2 = 900 \text{ gilt, bilden ein}$$

sogenanntes Ellipsoid (siehe Abbildung).

a₂) Entscheiden Sie, welche der Koordinatenachsen die x_2 -Achse ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung.



b₃) Die Gerade g enthält $Q(2|0|0)$ und verläuft parallel zur x_3 -Achse. Sie schneidet das Ellipsoid in zwei Punkten. Berechnen Sie den Abstand dieser beiden Punkte.

Aufgabe III.12) Kann mit dem Stoff Klasse 10 (incl. Abs. 347/12.3.9) bearbeitet werden

Eine Binomialverteilung hat die Parameter $n_1 = 100$ und $p_1 = 0.8$.

a₂₋₃) 347/858a Ermitteln Sie die Parameter einer anderen Binomialverteilung, die den gleichen Erwartungswert und die doppelte Standardabweichung hat.

b₃) (BAg: 346/857i) Beschreiben Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Histogramme dieser beiden Binomialverteilungen.

Aufgabe III.13) Kann mit dem Stoff Klasse 10 bearbeitet werden (Partnerabschnitt: 350/12.4.1 b).

Die sechs Seiten eines Würfels tragen die Zahlen 0 - 0 - 0 - 2 - 2 - 5.

a₃) Der Würfel wird zehnmal geworfen. Betrachtet wird das Ereignis A : 'Es wird insgesamt fünfmal die 0, dreimal die 2 und zweimal die 5 geworfen.' Begründen Sie, dass

$$P(A) = \binom{10}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \text{ gilt.}$$

b₃) Der Würfel wird zwanzigmal geworfen. Betrachtet wird das Ereignis B : 'Es wird insgesamt zwölfmal die 0, fünfmal die 2 und dreimal die 5 geworfen.' Geben Sie einen Term für $P(B)$ an.

16.10.7 Funktionen aus dem Analysisteil des Leistungskurses

Jahr	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Ag I.1	$\frac{x^3+2x^2}{3(x-1)}$	$\frac{2}{(1+2x)^2}$	$0.5x + 2 - 3\frac{ x }{x^2-4}$	$\frac{tx^2+t}{(x+1)^2}$	$\frac{ax^2-6x}{x^2-2x-3}$	$\frac{2x+1}{x^2+x+a}$
Ag I.2	$\frac{3t}{t+e^x}$	$4e^{tx} - e^{2tx}$	$\sqrt{x} \cdot e^{-0.5x}$	$e^{2x} - 2se^x - 3s^2$	$(\ln(x) - t)^2$	$\frac{a}{e^{2x+a}}$
Ag I.3	$\frac{18x}{x^2+18^2} + 18$	$\ln\left(\frac{1+x}{t-x}\right)$	$\frac{\ln(ax)}{x^2}$	$0.5x \cdot \sqrt{4-x^2}$	$\frac{a \cdot e^x}{a+e^x}$	$2\frac{\ln(x)+t}{x}$

Jahr	1999	2000	2001	(2001)	2002	2003
Ag I.1	$\frac{16(x-t)}{(1+x)^2}$	$\frac{(x-2)^2}{x \cdot (x-4)}$	$\frac{6x^2}{1+x^2}$		$\frac{x^2+x+t}{4(x+1)}$	$\frac{6}{2x-3}$
Ag I.2	$2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)$	$x \cdot (\ln(x))^2$	$\frac{2}{1+e^x}$	$\frac{2}{1+e^{t-x}}$	$\frac{a \cdot e^x}{(1+e^x)^2}$	$20e^{-x} \sin(x)$
Ag I.3	$\frac{5e^x-4}{e^x+1}$	$0.5(x+3) \cdot e^{-x}$	$\frac{1}{128}x^4 + \frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{8}$	$1 + \ln\left(\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}\right)$	$\frac{4(\ln(x))^2}{x}$	$x^2(t - \ln(x))$

16.10.8 Aufgaben aus dem Mathe Känguru ohne WTR

10. Für wie viele der Funktionen

$$y = x^2; \quad y = \sqrt{x}; \quad y = \sqrt{-x}; \quad y = -\sqrt{x}; \quad y = -\sqrt{-x};$$

$$y = \sqrt{|x|}; \quad y = \sqrt{-|x|}; \quad y = -\sqrt{|x|}$$

ist der Graph in der folgenden Figur enthalten?

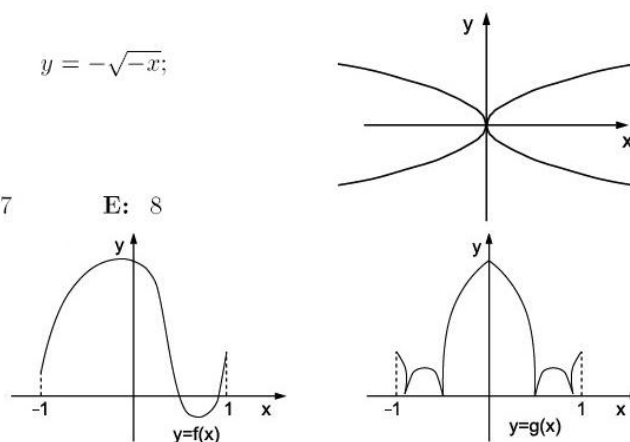
A: 4 B: 5 C: 6 D: 7 E: 8

16. Die Abbildung stellt die Graphen der Funktionen f und g auf dem Intervall $[-1, 1]$ dar.

Welche der folgenden Relationen

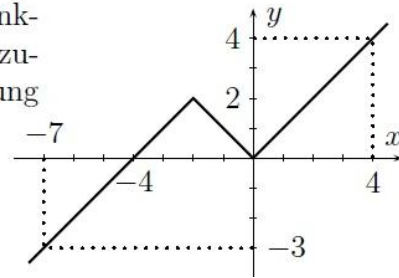
gilt im Intervall $[-1, 1]$?

A: $g(x) = f(|x|)$ B: $g(x) = |f(|x|)|$ C: $g(x) = |f(x)|$ D: $g(x) = f^2(x)$ E: keine der aufgeführten

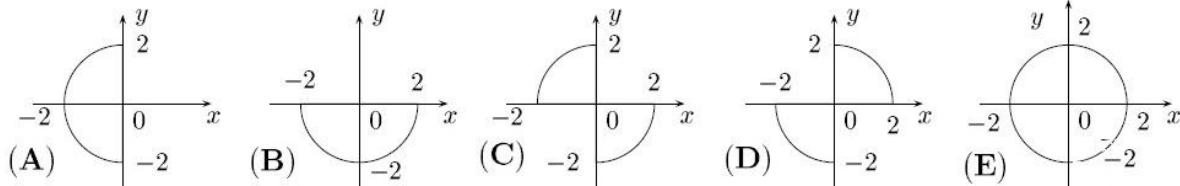


20. Der Graph der für alle reellen Zahlen definierten Funktion f setzt sich aus 2 Halbgeraden und einer Strecke zusammen (s. Abb.). Dann ist die Lösungsmenge der Gleichung $f(f(f(x))) = 0$

- (A) $\{-4; 0\}$ (B) $\{-8; -4; 0\}$ (C) $\emptyset$
 (D) $\{-12; -8; -4; 0\}$ (E) $\{-16; -12; -8; -4; 0\}$

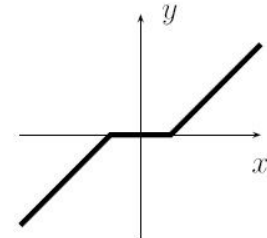


12. Welches ist die graphische Darstellung der Menge aller Punkte (x, y) der Ebene, für die $x^2 + y^2 = 4$ und $x \cdot y \leq 0$ gilt?



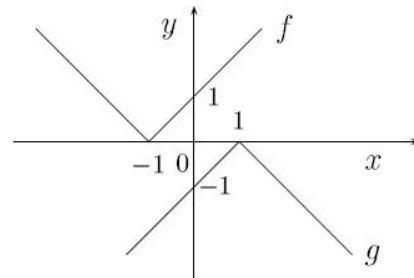
19. Zu welcher Funktion gehört der abgebildete Graph?

- (A) $y = \frac{1}{2}|x - 1| - \frac{1}{2}|x + 1|$ (B) $y = |x|$
 (C) $y = x + 1$ (D) $y = \frac{1}{2}|x - 1| + \frac{1}{2}|x + 1|$
 (E) $y = \frac{1}{2}|x - 1| - \frac{1}{2}|x + 1| + x$

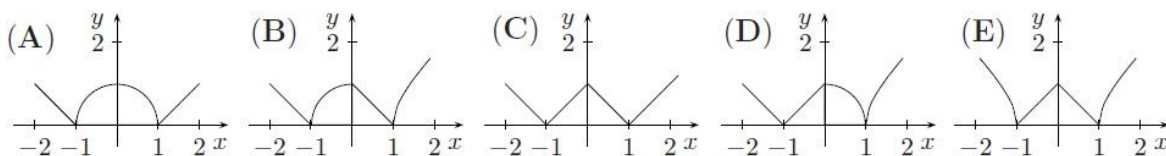


26. Die nebenstehende Zeichnung zeigt die Graphen der Funktionen f und g , die für alle reellen Zahlen definiert sind. Welche der folgenden Gleichungen ist dann für jede reelle Zahl x erfüllt?

- (A) $f(x) = -g(x) + 2$ (B) $f(x) = -g(x) - 2$
 (C) $f(x) = -g(x + 2)$ (D) $f(x + 2) = -g(x)$
 (E) $f(x + 1) = -g(x - 1)$

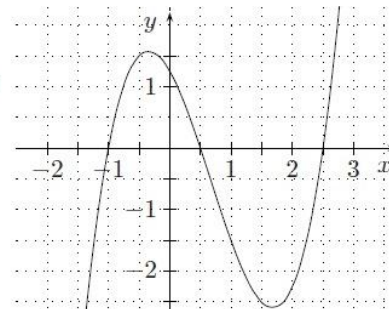


20. Welcher Graph gehört zur Funktion $y = \sqrt{|(1+x)(1-|x|)|}$?



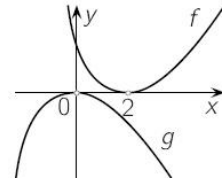
25. Die Figur zeigt einen Ausschnitt des Graphen zur Funktion $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$. Dann gilt: $b \approx$

- (A) -4 (B) -2 (C) 0 (D) 0,5 (E) 2,5

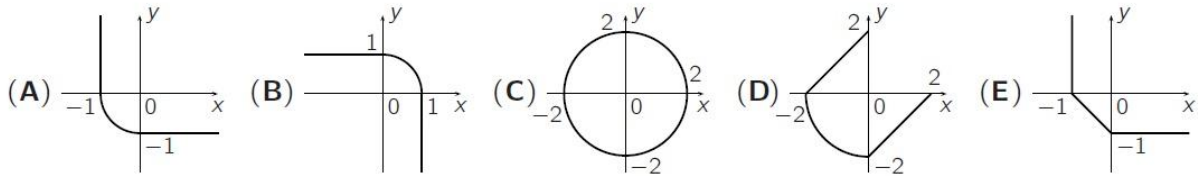


18. Die Abbildung rechts zeigt die Graphen der reellen Funktionen f und g . Welche der folgenden Relationen könnte zwischen den beiden Funktionen bestehen?

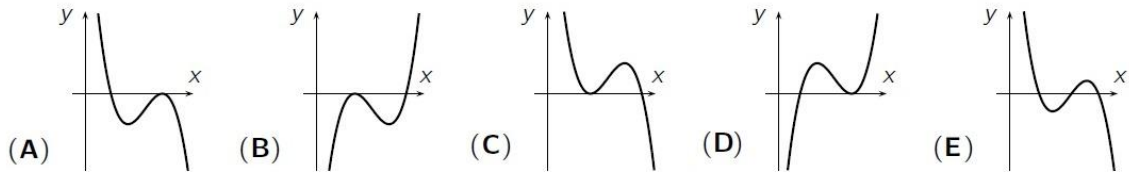
- (A) $g(x-2) = -f(x)$ (B) $g(x) = f(x+2)$ (C) $g(x) = -f(-x+2)$
 (D) $g(-x) = f(-x+2)$ (E) $g(2-x) = -f(x)$



29. Welcher der Graphen gehört zur Lösungsmenge der Gleichung $(x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 = 4$?

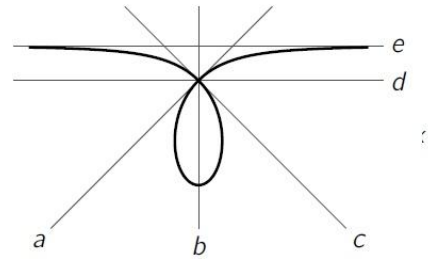


C2 Es sei $a < b$. Welcher der folgenden Graphen gehört zur Funktion $W(x) = (a-x)(b-x)^2$?

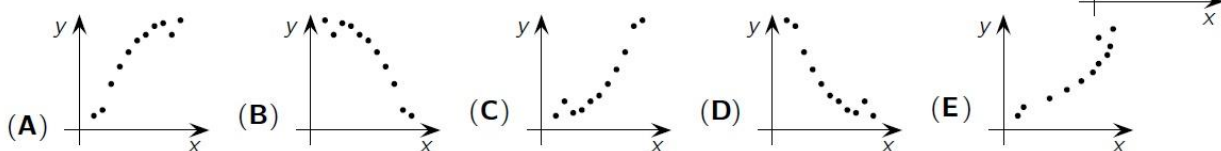


C7 Die Abbildung zeigt fünf Geraden und eine sogenannte *algebraische Kurve*, die aus genau denjenigen Punkten (x, y) besteht, welche die Gleichung $x^3 + y^3 = 2xy$ erfüllen. Eine der fünf Geraden ist die x -Achse des Koordinatensystems. Welche?

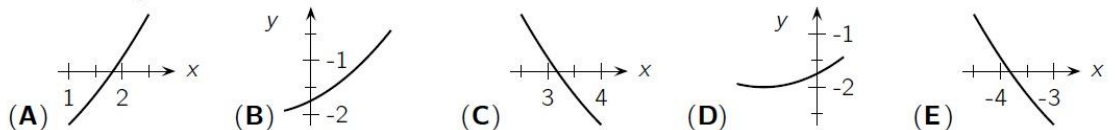
- (A) a (B) b (C) c (D) d (E) e



A6 Felix hat die Ergebnisse eines Experiments in ein Diagramm eingetragen, aber dabei versehentlich die Werte für die Messgrößen x und y vertauscht (s. Abb. rechts). Wie müsste das Diagramm richtig aussehen?



A10 Vier der folgenden fünf Bilder zeigen einen Ausschnitt des Graphen derselben quadratischen Funktion. Welches Bild gehört zum Graphen einer anderen Funktion?



12. Die Funktion f genügt für alle $x \neq 0$ der Gleichung $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2 + 1}{x}$. Dann ergibt sich für $f(\sqrt{x}) \cdot f(-\sqrt{x})$ bei $x > 0$ der Wert

- A: $-\frac{(x+1)^2}{x}$ B: $\sqrt{\frac{x}{x+1}}$ C: $\frac{x}{x^2+1}$ D: $-\frac{x^2+1}{x}$ E: $\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x}$

20. Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine nichtnegative Funktion, die die zwei Bedingungen

$$f(1) = 2, \quad f(x+y) = f(x)f(y).$$

erfüllt. Welchen Wert hat f an der Stelle $\frac{1}{2}$?

- (A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (D) 1 (E) $\sqrt{2}$

22. Es gilt: $f(x) = \frac{2x}{3x+4}$. Wenn $f(g(x)) = x$ gelten soll, dann ist $g(x)$ gleich

- (A) $\frac{4x}{2-3x}$ (B) $\frac{3x}{2x+4}$ (C) $\frac{2x+4}{4x}$ (D) $\frac{3x+4}{2x}$ (E) $\frac{3x}{2x-4}$

B7 Für eine der folgenden Funktionen gilt: Wird $\frac{1}{x}$ anstelle von x in die Funktion $f(x)$ eingesetzt, dann erhält man $\frac{1}{f(x)}$. Für welche?

- (A) $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ (B) $f(x) = \frac{1}{x}$ (C) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ (D) $f(x) = \frac{2}{x}$ (E) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

Aufgabe (Nr): 10 16 19 20 12 26 20 25 18 29 C2 C7 A6 A10 12 20 22 B7
Buchstabe: D B E D C C D B A A A C C A E A B

AgNr 1-10 oder A = leicht; AgNr 11-20 oder B = mittel; AgNr 21-30 oder C = schwer.

Die Seiten allen Unterrichtsmaterials sind (Alice):

19-44, 51-54, 56-73, 89-126, 139-175, 177-189, 202-209, 228-252, 252-287, 317-381

16.11 Alte Abiture vor 2023 Seite 1072-1103

16.11.1 Pflichtteil Abitur 2022, Aufgabensätze 1+2 (jede Aufgabe ergibt 2.5 VP)

Was sollte ich vom Abitur 2022 nach welcher Unterrichtseinheit können?

Kl. 10: P1.3, P1.4, P1.7, P1.8, P2.3, P2.4, P2.7, P2.8, A1.1\{c\}; A1.2; C1a; C2a+b

UE 11₂: P 2.1;

UE 11₃: P1.2, P2.2, A1.1c, A2.1; **UE 11₄:** A 2.2;

UE 12₄: P1.5, P1.6, P2.5, P2.6, B1, B2;

UE 11₇: C 2.1c, C2.2;

UE 11₈: C1

Aufgabe P 1.1: Nach Abs. 186/7.1.15 (Kl. 11) Filme: <http://Abi22.slt.biz>.

Abb. 1073/601a zeigt die Graphen der Funktionen f mit $f(x) = 4 - \frac{4}{x^2}$ und g mit $g(x) = 15 - 3x^2$, $x > 0$, sowie die Gerade mit der Gleichung $x = 1$, (BAG 183/481).

a₁) Zeigen Sie, dass sich die Graphen von f und g an der Stelle $x_0 = 2$ schneiden. (0.5 VP)

b₂) Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche. (2 VP)

Aufgabe P 1.2: Nach Abs. 186/7.1.15 (Kl. 11). Betrachtet werden die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f und F , wobei F eine Stammfunktion von f ist. Abb. 1073/601c) zeigt den Graphen G_F von F , BAG: 184/482.

a₁₋₂) Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\int_1^7 f(x)dx$. (1 VP)

b₁₋₂) Bestimmen Sie den Funktionswert von f an der Stelle $x_0 = 1$. Veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen in Abb. 1073/601c). (1.5 VP)

Aufgabe P 1.3: Kann mit Stoff Klasse 10 (nach Abs. 147/6.2) gelöst werden. Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktionen f_k mit $f_k(x) = x^4 + (2-k) \cdot x^3 - k \cdot x^2$ mit $k \in \mathbb{R}$.

- a₁) Begründen Sie, dass der Graph von f_2 symmetrisch bezüglich der y -Achse ist. (0.5 VP), (BAG 110/270).
- b₂) Es gibt einen Wert von k , für den $x_w = 1$ eine Wendestelle von f_k ist. Berechnen Sie diesen Wert von k . (2 VP), (BAG 150/363).

Aufgabe P 1.4: Lösbar nach Klasse 10, Abs. 147/6.2₂₋₃). Ermitteln Sie eine Gleichung derjenigen quadratischen Funktion g , die die beiden folgenden Eigenschaften hat:

- (I) Der Graph von g schneidet die Gerade mit der Gleichung $y = -x + 1$ im Punkt $P(0|1)$ unter einem rechten Winkel.
- (II) Die x - und die y -Koordinate des Extrempunkts des Graphen von g stimmen überein. (2.5 VP), (BAG 158/390).

Aufgabe P 1.5: Nach Abs. 276/10.5.5. Gegeben sind die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$, und die Ebene $E : 3x_1 - x_3 = -2$.

- a₁) Begründen Sie, dass g orthogonal zu E ist. (0.5 VP), (BAG 275/741).

- b₃₋₄) Die Gerade $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$, hat mit E keinen gemeinsamen Punkt (BAG 275/743).

Es gibt Geraden, die in E liegen und parallel zu h verlaufen. Bestimmen Sie eine Gleichung derjenigen dieser Geraden, die von h den kleinsten Abstand hat. (2 VP)

Aufgabe P 1.6: Nach Abs. 276/10.5.5. Wird der Punkt $P(1|2|3)$ an der Ebene E gespiegelt, so ergibt sich der Punkt $Q(7|2|11)$.

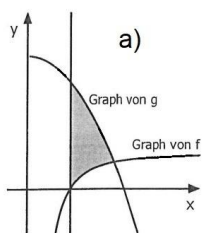
- a₂₋₃) Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. (1.5 VP), (BAG 279/756b).

- b₃) Auf der Gerade durch P und Q liegen die Punkte R und S symmetrisch bezüglich E ; dabei liegt R bezüglich E auf der gleichen Seite wie P . Der Abstand von R und S ist doppelt so groß wie der Abstand von P und Q . Bestimmen Sie die Koordinaten von R . (1 VP), (BAG 257/670).

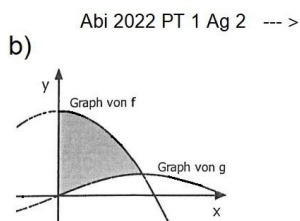
Aufgabe P 1.7: Lösbar nach Klasse 10, Abs. 347/12.3.9. Die Zufallsgröße $\mathcal{X}$ ist binomialverteilt mit den Parametern n und $p = 0.5$. Sie hat den Erwartungswert $\mu = 18$, (BAG 346/856).

- a₁₋₂) Bestimmen Sie den Wert von n und die Standardabweichung von $\mathcal{X}$. (1.5 VP), (BAG 347/858).
- b₂) Entscheiden Sie, ob $P(\mathcal{X} = 14) < P(\mathcal{X} = 22)$ ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung. (1 VP), (BAG 343/853).

Aufgabe P 1.8: ₄) Lösbar nach Klasse 10 (eigentlich Kl. 9), Abs. 147/6.2 (bzw. 326/12.2.2). Für ein Spiel wird ein Behälter mit 100 Kugeln gefüllt. Dafür stehen rote und blaue Kugeln zur Verfügung. Vor jedem Spiel legt der Spieler die Anzahl der blauen Kugeln im Behälter fest. Anschließend wird dem Behälter eine Kugel zufällig entnommen. Ist diese Kugel rot, so wird dem Spieler die festgelegte Anzahl blauer Kugeln in Cent ausgezahlt; ist die Kugel blau, so beträgt die Auszahlung 10 Cent. Ermitteln Sie, wie der Spieler die Anzahl blauer Kugeln für ein Spiel festlegen muss, damit der Erwartungswert der Auszahlung möglichst groß ist. (2.5 VP), (BAG 326/809).



Abi 2022 PT 1 Ag 1



Abi 2022 PT 2 Ag 2

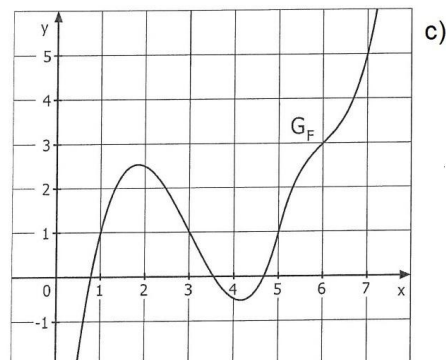


Abb. 601 Aufgaben PT 1.1, PT 2.2, PT 1.2

Aufgabe P 2.1: ₁₋₂) Nach Abs. 163/6.3 (Kl. 11). Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{0.5x^2}$. Bestimmen Sie den Wert der zweiten Ableitung von f an der Stelle $x_0 = 0$. (2.5 VP), (BAG 167/417).

Aufgabe P 2.2: Nach Abs. 186/7.1.15 (Kl. 11). Abgebildet sind die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = 4 - 3x^2$ und $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, BAG: 183/481.

a₁) Zeigen Sie, dass sich die beiden Graphen an der Stelle $x_0 = 1$ schneiden. (0.5 VP)

b₂) Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche. (2 VP)

Aufgabe P 2.3: ₃) Lösbar nach Klasse 10, Abs. 147/6.2. Der Graph G_f der Funktion f besitzt den Tiefpunkt $T(1|-2)$. Der Graph der Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{9}x^3 - 3x$ entsteht, indem G_f um a Einheiten nach rechts und um b Einheiten nach unten verschoben wird. Bestimmen Sie die Werte von a und b . (2.5 VP), (BAG 103/248 und 149/360g).

Aufgabe P 2.4: ₃) Lösbar nach Klasse 10, Abs. 147/6.2. Die Graphen einer Schar ganzrationaler Funktionen dritten Grades berühren die x -Achse im Punkt $(0|0)$. Jeder Graph der Schar besitzt die Extremstelle $x_0 = -2$. Untersuchen Sie, ob alle Graphen der Schar den Punkt $P(-3|0)$ gemeinsam haben. (2.5 VP), (BAG 101/242 und 158/390).

Aufgabe P 2.5: Nach Abs. 265/10.3. Gegeben sind die Ebene $E : 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12$ und für jedes $a \in \mathbb{R}$ eine Gerade $g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$.

a₁₋₂) Bestimmen Sie den Wert von a , für den die Gerade g_a parallel zu E ist. (1 VP), (BAG 275/741e).

b₂) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist P_a der Schnittpunkt von g_a mit der x_1x_3 -Ebene. Bestimmen Sie den Wert von a , für den P_a in E liegt. (1.5 VP), (BAG 259/678, 266/706e).

Aufgabe P 2.6: Nach Abs. 275/10.5. Gegeben sind die parallelen Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \text{ und } h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

a₂) Der Punkt $A(4|-3|0)$ liegt auf g . Weisen Sie nach, dass A derjenige Punkt auf g ist, der vom Punkt $B(0|-1|4)$ den kleinsten Abstand hat. (1 VP), (BAG 276/745b).

b₂₋₃) Die Gerade h ist die Bildgerade von g bei einer Spiegelung an der Ebene E . Ermitteln Sie eine Gleichung von E . (1.5 VP), (BAG 279/756b).

Aufgabe P 2.7: Lösbar nach Klasse 10, Abs. 347/12.3.9. Ein Glücksrad besteht aus einem gelben, einem blauen und einem roten Sektor. Wird das Glücksrad einmal gedreht, erscheint der gelbe Sektor mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ und der rote Sektor mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$.

a₁) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei zweimaligem Drehen der blaue Sektor zweimal erscheint. (1 VP), (BAG 341/845).

b₁₋₂) Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment und ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit sich mit dem Term $\left(\frac{1}{3}\right)^5 + 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \frac{2}{3}$ berechnen lässt (1.5 VP), (BAG 343/852 + 344/854c).

Aufgabe P 2.8: Lösbar nach Klasse 10, Abs. 347/12.3.9. Gegeben sind die im Folgenden beschriebenen Zufallsgrößen $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$:

($\mathcal{X}$) Ein Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert sind, wird zweimal geworfen. $\mathcal{X}$ gibt die Summe der dabei gewürfelten Zahlen an.

($\mathcal{Y}$) Aus einem Behälter mit 60 schwarzen und 40 weißen Kugeln wird zwölfmal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. $\mathcal{Y}$ gibt die Anzahl der entnommenen schwarzen Kugeln an.

a₁₋₂) Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit $P(\mathcal{X} = 4)$ mit der Wahrscheinlichkeit $P(\mathcal{X} = 10)$ übereinstimmt. (1 VP), (BAG 341/846).

b₂₋₃) Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ werden jeweils durch eines der folgenden Diagramme I, II und III dargestellt (Abb. 1075/602). Ordnen Sie $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ jeweils dem passenden Diagramm zu und begründen Sie Ihre Zuordnung. (1.5 VP), (BAG 346/857).

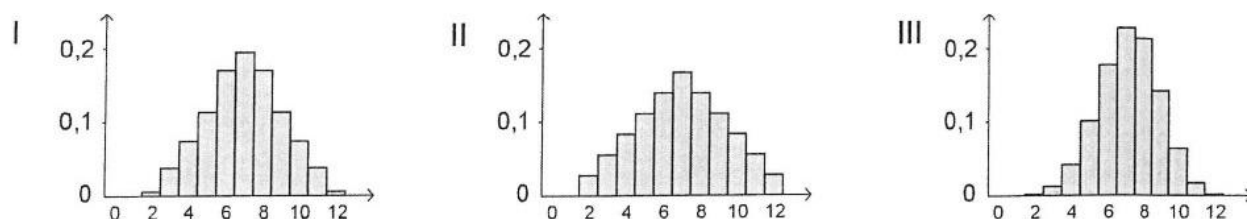


Abb. 602 Abbildung zur Aufgabe PT 2.8

16.11.2 Wahlteil Abitur 2022 Filme: <http://Abi22.slt.biz>

Aufgabe A 1.1: Ohne den Teil c ist die Aufgabe nach Klasse 10, Abs. 147/6.2 lösbar.

Abb. 1076/603 a) zeigt den Graphen G_f der Funktion f mit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$.

a₁₋₂) Berechnen Sie die Nullstellen von f . (1.5 VP), (BAG 33/61 bzw. 105/254).

Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes W von G_f . (1.5 VP), (BAG 151/364 ab e).

Die Gerade t_1 ist die Tangente an G_f in W . Zeigen Sie, dass $y = -4x + 8$ eine Gleichung von t_1 ist. (1 VP), (BAG 151/365).

b₁₋₂) Die Gerade t_2 ist die Tangente an G_f im Ursprung 0. Die Geraden t_1 und t_2 schneiden sich im Punkt Q . Ber. Sie für das Dreieck OWQ die Weite des Innenwinkels bei Q . (2 VP), (BAG 143/338)

Für ein $u > 0$ ist die Tangente an G_f im Punkt $B(u|f(u))$ parallel zu t_2 . Bestimmen Sie den Wert von u . (1.5 VP), (BAG 143/336).

c₂) Erst nach Abs. 183/7.1.12 bearbeiten.

Die Funktion I_0 mit $I_0(x) = \int_0^x f(t)dt$ besitzt im Intervall $[0; 4]$ ihren maximalen Wert an der Stelle x_0 . Geben Sie x_0 an und begründen Sie Ihre Angabe. (1.5 VP), (BAG 157/388).

d₂₋₃) Für die Funktion h mit $h(x) = x^3 - 4x$ gilt $f(x) = h(x - 2)$. Erläutern Sie, welche Symmetrieeigenschaft daraus für G_f folgt. (1.5 VP), (BAG 103/248 + 110/269).

e₄) Der Graph G_{f^*} entsteht durch Spiegelung des Graphen G_f an der Geraden mit der Gleichung $x = a$. Die Tangente an G_{f^*} im Wendepunkt von G_{f^*} schneidet die y -Achse im Punkt $S(0|16)$. Bestimmen Sie den Wert von a . (2.5 VP), (BAG 104/250).

Aufgabe A 1.2: Nach Klasse 10, Abs. 147/6.2 lösbar. Für jedes $a > 0$ ist die Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = a \cdot \sin(a\pi x)$. Die zugehörigen Graphen werden mit G_a bezeichnet. Der Punkt $H_a(\frac{1}{2a}|a)$ ist ein Hochpunkt von G_a .

a₁₋₂) Geben Sie die Periode von f_a an. (0.5 VP), (BAG 114/284). Der Punkt H_a bildet mit den beiden von H_a am wenigsten weit entfernten Tiefpunkten von G_a ein Dreieck. Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt dieses Dreiecks unabhängig von a ist. (2 VP), (BAG 94/219 + 152/367).

b₂) Ermitteln Sie den Wert von a , für den H_a vom Ursprung den Abstand 1 hat. (2 VP), (BAG 239/593).

c₂) Bestimmen Sie eine Gleichung der Kurve K , auf der alle Punkte H_a liegen. (1 VP), (BAG 159/395). Auf K gibt es einen Punkt H_a , in dem die Tangente an K parallel zur Geraden mit der Gleichung $y = -2x$ ist. Bestimmen Sie den Wert von a . (1.5 VP), (BAG 143/336).

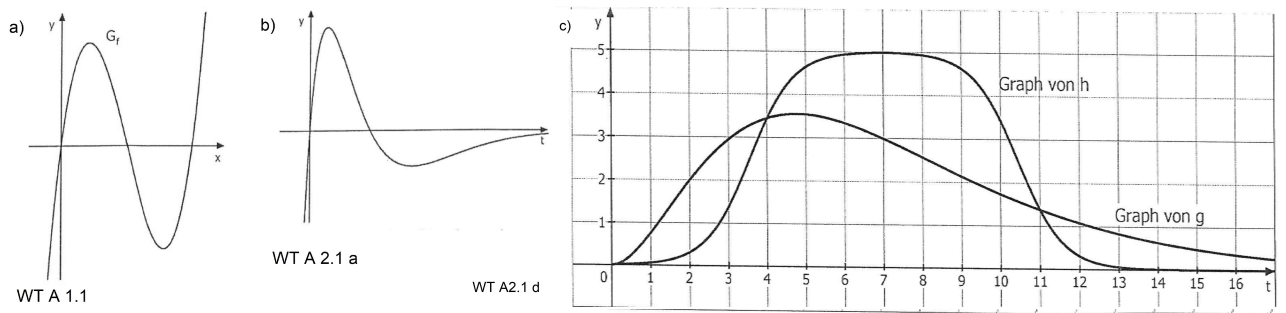


Abb. 603 Abbildung zum Wahlteil Analysis 2022 Aufgabe A 1.1 und A 2.1

Aufgabe A 2.1: Erst nach Abs. 183/7.1.12 bearbeiten. Abb. 1076/603b zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(t) = (2t - t^2) \cdot e^{-t}$, die für $0 < t \leq 10$ die momentane Änderungsrate des Wasservolumens in einem Becken beschreibt (t in Stunden nach Beobachtungsbeginn, $f(t)$ in $\frac{m^3}{h}$) (BAg 171/433).

a₁₋₂) Geben Sie die momentane Änderungsrate des Wasservolumens eine Stunde nach Beobachtungsbeginn an. (0.5 VP)

Begründen Sie, dass das Wasservolumen in den ersten beiden Stunden nach Beobachtungsbeginn niemals abnimmt. (1.5 VP), (BAg 167/418e).

Die momentane Änderungsrate des Wasservolumens besitzt ein Minimum. Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem dieses Minimum angenommen wird. (2.5 VP), (BAg 167/418), (Teilerg. $t_{\min} = 2 + \sqrt{2}$).

b₂₋₃) Die Funktion F mit $F(t) = t^2 \cdot e^{-t}$ ist eine Stammfunktion von f . Zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn enthält das Becken $6 m^3$ Wasser. Ermitteln Sie das Wasservolumen, das sich zu Beobachtungsbeginn im Becken befand. (1.5 VP), (BAg 181/469).

Es gibt einen 45-Minuten-Zeitraum, in welchem das Wasservolumen um genau $1 m^3$ zunimmt. Geben Sie eine Gleichung an, deren Lösung den Beginn dieses Zeitraums darstellt. (1 VP), (BAg 187/494).

c₄) Über eine Schaltuhr kann ein Zeitpunkt t_0 gewählt werden, so dass die momentane Änderungsrate des Wasservolumens nur bis t_0 durch die Funktion f beschrieben wird und danach konstant auf dem Wert $f(t_0)$ bleibt. Zeigen Sie, dass t_0 nicht so gewählt werden kann, dass das Becken sieben Stunden nach Beobachtungsbeginn leer ist. (2 VP)

d₂) Für ein anderes Becken beschreiben die Funktion g die momentane Zuflussrate und die Funktion h die momentane Abflussrate des Wassers in Abhängigkeit von der Zeit t ($0 < t < 17$, t in Stunden nach Beobachtungsbeginn, $g(t)$ und $h(t)$ in Kubikmeter pro Stunde). Abb. 1076/603c zeigt die Graphen der beiden Funktionen g und h . (BAg 125/316).

Geben Sie den Zeitraum an, in dem das Wasservolumen in diesem Becken abnimmt. (0.5 VP)

Das abfließende Wasser wird in einem quaderförmigen Tank mit der Grundfläche $12m^2$ gesammelt. Dieser ist zu Beginn leer. Untersuchen Sie, ob das Wasser im Tank höher als $5 m$ steigt. (2 VP)

Entscheiden Sie, ob das Becken zu Beginn leer war, und begründen Sie Ihre Entscheidung. (1.5 VP)

Aufgabe A 2.2: Nach Abs. 121/5.5. Für jede reelle Zahl $a \neq 0$ ist eine Funktion k_a gegeben durch $k_a(x) = \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2}$. G_a ist der Graph von k_a , (BAg 125/314).

a₂) Geben Sie Gleichungen der Asymptoten des Graphen G_a an. (1 VP), (BAg 122/303 + 304)

Weisen Sie nach, dass für die Ableitung k'_a von k_a gilt: $k'_a(x) = \frac{2a-x}{x^3}$. (1.5 VP), (BAg 168/425).

Zeigen Sie, dass jeder Graph G_a genau einen Extrempunkt besitzt, und untersuchen Sie, für welche Werte von a ein Hochpunkt vorliegt. (2.5 VP), (BAg 160/398).

b₂) Jeder Graph G_a besitzt einen Punkt P_a mit der folgenden Eigenschaft: Die Tangente im Punkt P_a an G_a verläuft durch den Ursprung. Bestimmen Sie die x -Koordinate von P_a . (2 VP), (BAg 144/340).

Aufgabe B 1: Nach Abs. 275/10.5. Für $k \in \mathbb{R}$ mit $0 < k \leq 6$ werden die Pyramiden $ABCD_k$ mit $A(0|0|0)$, $B(4|0|0)$, $C(0|4|0)$ und $D_k(0|0|k)$ betrachtet (vgl. Abb. 1077/604 1). a₁) Begründen Sie, dass das Dreieck BCD_k gleichschenkelig ist. (1 VP), (BAg 263/695).

Der Mittelpunkt der Strecke BC ist $M(2|2|0)$. $\overrightarrow{MD_k} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ k \end{pmatrix}$ ist die Länge einer Höhe des Dreiecks BCD_k . Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks BCD_k . (1VP), (BAG 272/730).

Für jeden Wert von k liegt die Seitenfläche BCD_k in der Ebene $L_k : kx_1 + kx_2 + 4x_3 = 4k$.

b₂) Ermitteln Sie denjenigen Wert von k , für den die Größe des Winkels, unter dem die x_3 -Achse die Ebene L_k schneidet, 30° beträgt. (2.5 VP), (BAG 275/741).

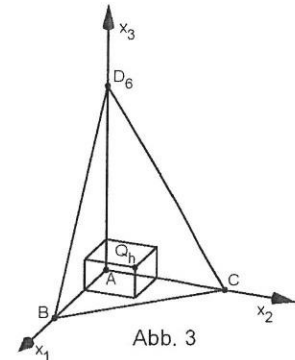
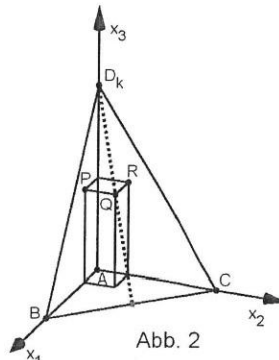
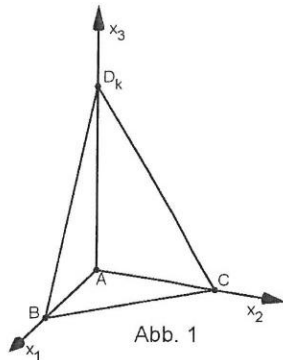


Abb. 604 Abbildung zum Wahlteil Geometrie 2022 Aufgabe B1

c) ₁₋₂) Zusätzlich zu den Pyramiden wird der in der Abb. 1077/604 2 gezeigte Quader betrachtet. Die Punkte A und $Q(1|1|3)$ sind Eckpunkte des Quaders, die Seitenflächen des Quaders sind parallel zu den Koordinatenebenen. Für $k = 6$ enthält die Seitenfläche BCD_k der Pyramide den Eckpunkt Q des Quaders. Für kleinere Werte von k schneidet die Seitenfläche BCD_k den Quader in einem Vieleck. Für einen Wert von k verläuft die Seitenfläche BCD_k durch die Eckpunkte P und R des Quaders. Bestimmen Sie diesen Wert von k . Teilergebnis: $k = 4$, (1.5 VP), (BAG 266/706).

s) Geben Sie in Abhängigkeit von k die Anzahl der Eckpunkte des Vielecks an, in dem die Seitenfläche BCD_k den Quader schneidet. (2 VP)

d₃) Nun wird die Pyramide $ABCD_6$, d.h. diejenige für $k = 6$, betrachtet. Dieser Pyramide werden Quader einbeschrieben (vgl. Abb. 1077/604 3). Die Grundflächen der Quader liegen in der x_1x_2 -Ebene, haben den Eckpunkt A gemeinsam und sind quadratisch. Die Höhe h der Quader durchläuft alle reellen Werte mit $0 < h < 6$. Für jeden Wert von h liegt der Eckpunkt Q_h in der Seitenfläche BCD_6 der Pyramide. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punkts Q_h . (2 VP)

Aufgabe B 2: Nach Abs. 275/10.5. Gegeben sind die Geradenschar

$$g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} \text{ und die Gerade } h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}.$$

a₁₋₂) Beschreiben Sie die besondere Lage der Gerade h im Koordinatensystem. (0.5 VP), (BAG 269/718). Zeigen Sie, dass die Gerade h zur Schar g_a gehört. (1 VP), (BAG 259/677).

Alle Geraden der Schar g_a liegen in einer Ebene E . Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E . (2 VP), (BAG 277/750 d), (Teilergebnis: $E : x_2 + 3x_3 = -6$).

b₂₋₃) Bestimmen Sie denjenigen Wert von a , für den g_a die x_2 -Achse schneidet. (1.5 VP), (BAG 269/718). Es gibt zwei Geraden der Schar g_a , die die Gerade h im Winkel 45° schneiden. Ermitteln Sie die zugehörigen Werte von a . (2.5 VP), (BAG 275/739).

c₃₋₄) Bestimmen Sie eine Gleichung einer Gerade, die von allen Geraden der Schar g_a den Abstand $\sqrt{40}$ besitzt und zu allen Geraden der Schar g_a windschief verläuft. (2.5 VP), (BAG 260/684+278/754)

Aufgabe C 1: Nach Abs. 361/13.2. Ein Onlineshop bietet Patronen mit schwarzer Tinte und Patronen mit farbiger Tinte an.

a₁) (Schon mit Stoff Klasse 10 lösbar). Erfahrungsgemäß beträgt der Verkaufsanteil der Patronen mit schwarzer Tinte 65 %. Betrachtet wird eine zufällige Auswahl von 100 verkauften Patronen. Es wird

davon ausgegangen, dass dabei die Anzahl der Patronen mit schwarzer Tinte binomialverteilt ist. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: 'Genau 66 der verkauften Patronen sind mit schwarzer Tinte gefüllt.' (0.5 VP), (BAG 343/852).

B: 'Die Anzahl der verkauften Patronen mit schwarzer Tinte weicht um mehr als 10 % vom Erwartungswert dieser Anzahl ab.' (1.5 VP), (BAG 346/856).

b₂) Im Folgenden werden nur Patronen betrachtet, die mit schwarzer Tinte gefüllt sind. Die Füllmenge einer solchen Patrone wird als normalverteilt mit dem Erwartungswert 8 ml und der Standardabweichung 0.04 ml angenommen. Eines der beiden Schaubilder aus Abb. 1078/605 zeigt den Graphen der zugehörigen Dichtefunktion.

Geben Sie die Abbildung an, die den Graphen der zugehörigen Dichtefunktion nicht zeigt, und begründen Sie Ihre Angabe. (1 VP), (BAG 365/906).

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Patrone weniger als 7.95 ml Tinte enthält. (0.5 VP), (BAG 366/908).

Betrachtet wird das Ereignis, das eine zufällig ausgewählte Patrone zwischen 7.98 ml und 8.04 ml Tinte enthält. Geben Sie ein anderes Ereignis im Sachzusammenhang an, welches exakt dieselbe Wahrscheinlichkeit hat. (1 VP), (BAG 366/908)

₂₋₃) Bestimmen Sie das kleinste Intervall $[a; b]$, so dass die Füllmenge einer zufällig ausgewählten Patrone mit einer Wahrscheinlichkeit von 92% in $[a; b]$ liegt. (2 VP), (BAG 364/905).

_{c₂₋₃}) Betrachtet wird die für $x \geq 0$ definierte Funktion f mit $f(x) = 0.25 \cdot e^{-0.25x}$. Weisen Sie nach, dass f eine Dichtefunktion über ihrem Definitionsbereich ist. (2 VP), (BAG 363/900j + 902d).

Die Zeitdauer in Stunden zwischen dem Eingang einer Bestellung im Onlineshop und dem Versand der Ware kann modellhaft durch eine stetige Zufallsgröße mit der Dichtefunktion f beschrieben werden. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 85% wird eine Ware innerhalb von t Stunden nach Eingang der Bestellung versandt. Bestimmen Sie den Wert von t . (1.5 VP), (BAG 363/900).

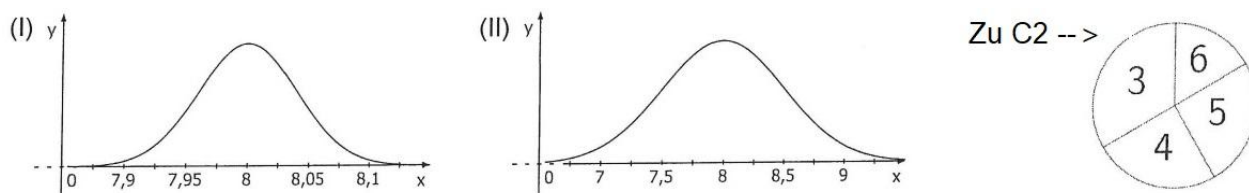


Abb. 605 Abbildung zu den Aufgaben C1 und C2

Aufgabe C 2: Teile a+b lösbar nach Kl. 10. Beim einmaligen Drehen des abgebildeten Glücksrads erhält man eine von vier möglichen Punktzahlen. Die Tabelle gibt für jede Pktzahl die zugehörige Wahrscheinlichkeit an.

Punktzahl	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

_{a₁₋₂}) Zehn Personen drehen das Glücksrad jeweils einmal. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: 'Genau zwei Personen erzielen jeweils die Punktzahl 4.' (0.5 VP), (BAG 343/852).

B: 'Mindestens drei Personen erzielen jeweils eine Punktzahl, die kleiner als 5 ist.' (1.5 VP), (BAG 343/853).

C: 'Die Summe der erzielten Punktzahlen aller zehn Personen ist höchstens 31.' (2 VP), (BAG 343/852).

b) Mehrere Spieler verwenden das Glücksrad bei einem Spiel mit folgenden Regeln:

(I) Jeder Spieler dreht das Glücksrad einmal.

(II) Der Spieler mit der größten erzielten Punktzahl gewinnt.

(III) Erzielen mehrere Spieler diese größte Punktzahl, so gewinnt derjenige von ihnen, der als letzter gedreht hat.

₁₋₂) Achim ist der erste Spieler und erzielt die Punktzahl 5. Beschreiben Sie, bei welchem weiteren Spielverlauf Achim gewinnt. (1 VP)

2_{-3}) Die Wahrscheinlichkeit, dass Achim das Spiel gewinnt, ist kleiner als 2%. Bestimmen Sie die Mindestanzahl der Spieler. (2 VP), (BAg 334/825).

c_{2-3}) Nach Abs 353/13.1: Ein Spieler vermutet, dass die Wahrscheinlichkeit für die Punktzahl 3 bei dem vorliegenden Glücksrad nicht $\frac{1}{3}$ ist. Daher soll ein einseitiger Hypothesentest mit einer Stichprobe von 100 Drehungen auf einem Signifikanzniveau von 5% durchgeführt werden. Dabei soll möglichst vermieden werden, dass irrtümlich von einer zu hohen Wahrscheinlichkeit für die Punktzahl 3 ausgegangen wird. Der Spieler entscheidet sich für die folgende Nullhypothese: 'Die Wahrscheinlichkeit für die Punktzahl 3 beträgt höchstens $\frac{1}{3}$.' Beurteilen Sie, ob dieser Test der genannten Zielsetzung entspricht. (1 VP), (BAg 355/877).

Formulieren Sie den Fehler zweiter Art im Sachzusammenhang (1 VP), (BAg 358/887). Beim durchgeführten Test ergibt sich der Ablehnungsbereich $A = \{42, \dots, 100\}$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art unter der Annahme, dass die Wahrscheinlichkeit für die Punktzahl 3 tatsächlich 40% beträgt. (1 VP), (BAg 358/888).

16.11.3 Wahlteilverbereitung; Seite 1079-1085, 390

- 1) Lesen Sie den Abschnitt 390/14.1.3.
- 2) Stellen Sie sich vor, Sie müssten einen Wahlteil für sich im Abitur auswählen. Sie erhalten von mir zwei Wahlteile (bzw Pflichtteile) eines Abiturs, dass Sie evtl nicht kennen. Zur deren Begutachtung haben Sie 2 mal 5 Minuten Zeit.
- 3) Unterstreichen Sie im Wahlteil alle relevanten Fachausdrücke.
- 4) Markieren Sie bei jedem Teil, ob Sie diesen gut '+' oder so mittel '0' oder eher weniger '-' können.
- 5) Wählen Sie einen Teil (mit Begründung). 6) Erklären Sie, wie Sie diesen Teil gelöst hätten.

16.11.4 Pflichtteil Abitur 2021, Aufgabensätze 1+2 (jede Aufgabe ergibt 2.5 VP)

Was sollte ich vom Abitur 2022 nach welcher Unterrichtseinheit können?

Kl. 10: P1.7, P1.8, P2.1, P2.3, P2.7, P2.8, A1.1a-c, A1.2, A2.2\{ a_2 \}, C1.2d+e, C2.1;

UE 11₂: P1.1, A2.1\{ b_2 \}; **UE 11₃:** P1.2, P1.4, P2.2, P2.4, A2.1 b_2 , A2.2 a_2 ; **UE 11₄:** P1.3;

UE 12₄: P1.5, P1.6, P2.5, P2.6, B1, B2; **UE 11₇:** C2.1c, C2.2; **UE 11₈:** C1.1a-c;

Aufgabe 1.1: Erst nach Abs. 170/6.3.9 aus Kl. 11 bearbeiten. (Basisaufgabe: (BAg:) 143/335)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{-2x+1} + 1$. Abbildung 1079/606b zeigt den Graphen G_f sowie die Tangente an G_f an der Stelle $x = \frac{1}{2}$.

a₁) (1 VP) Weisen Sie nach, dass diese Tangente an G_f die Steigung -2 hat.

b₂) (1.5 VP) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das diese Tangente mit den Koordinatenachsen einschließt.

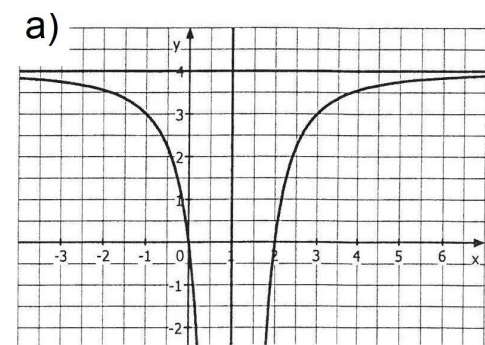
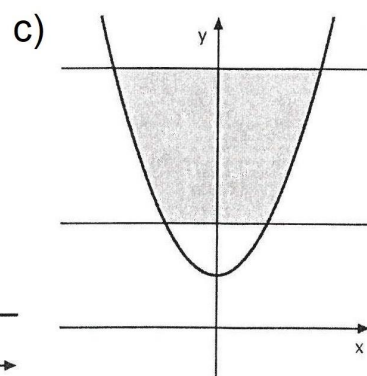
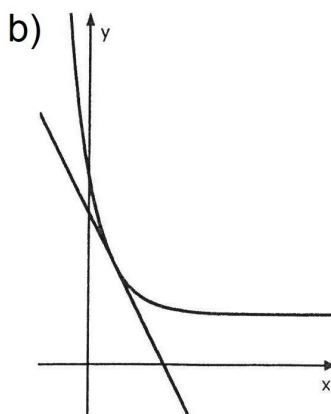


Abb. 606 Pflichtteil 1 Abi 2021



Aufgabe 1.2:) Erst nach Abs. 186/7.1.15 aus Kl. 11 bearbeiten. (BAg: 183/481)

Abb. 1079/606c zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 1 + x^2$ sowie die Geraden $g : y = 2$ und $h : y = 5$. Bestimmen Sie den Inhalt der markierten Fläche.

Aufgabe 1.3: Erst nach Abs. 121/5.5 aus Kl. 11 bearbeiten. (BAg: 124/309; nur LK)

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = a + \frac{b}{x^2+c}$ und $g(x) = a + \frac{b}{(x+c)^2}$. Abb. 1079/606a zeigt die Graphen einer der beiden Funktionen sowie seiner Asymptoten.

a₂) (1 VP) Begründen Sie, dass es sich bei dem abgebildeten Graphen nicht um den Graphen von f handeln kann. b₂) (1.5 VP) Bestimmen Sie für die Funktion g die Werte a, b und c .

Aufgabe 1.4: Erst nach Abs. 186/7.1.15 aus Kl. 11 bearbeiten. (BAg: 184/482)

Abb. 1080/607b zeigt den Graphen der Funktion f . Die Funktion g ist gegeben durch $g(x) = f(x) + 5x$. Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

(1₂) (1 VP) Jede Stammfunktion von f besitzt im Intervall $[0.5; 4]$ genau ein lokales Minimum.

(2₄) (1.5 VP) Die Funktion g ist im Intervall $[1; 6]$ streng monoton wachsend.

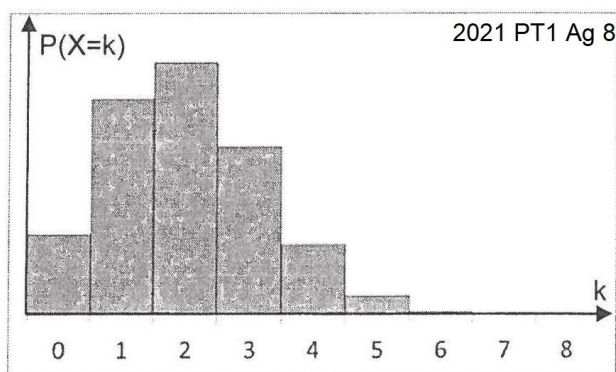
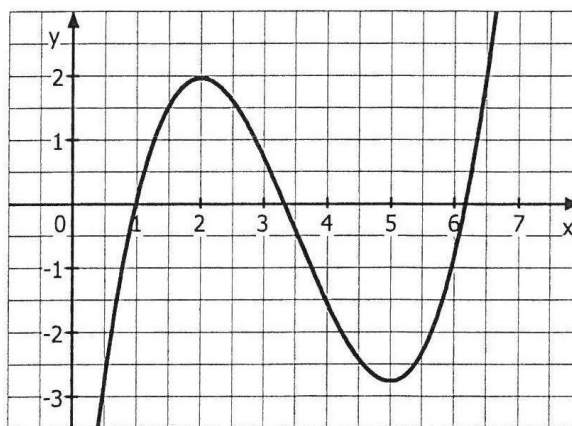


Abb. 607 Abitur 2021:

2021 PT1 Ag 4



Aufgabe 1.5: Erst nach Abs. 265/10.3 aus Kl. 12 bearbeiten. (BAg: 269/718, 270/723, 284/770)

Gegeben sind die Ebenen E und F sowie die Ebenenschar G_r ($r \in \mathbb{R}$):

$$\begin{array}{ll} E: & x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 6 \\ F: & 2x_1 - x_2 - x_3 = 6 \\ G_r: & 9x_2 + 3x_3 = r + 11 \end{array} \quad \begin{array}{l} a_1) \text{ (1 VP) Stellen Sie } G_7 \text{ in einem Koordinatensystem dar.} \\ b_3) \text{ (1.5 VP; nur LK) Für einen Wert von } r \text{ besitzen} \\ \quad E, F \text{ und } G_r \text{ eine gemeinsame Schnittgerade?} \end{array}$$

Aufgabe 1.6: Erst nach Abs. 275/10.5 aus Kl. 12 bearbeiten. (BAg: 255/664, 276/745)

Gegeben sind der Punkt $P(-1|1|-1)$ und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$. Der Punkt

$Q(3|3|3)$ liegt auf der Geraden g .

a₂) (1 VP) Zeigen Sie, dass Q derjenige Punkt auf g ist, der zu P den kleinsten Abstand hat.

b₃) (1.5 VP) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes R auf der Geraden g , für den das Dreieck PQR den Flächeninhalt 27 hat.

Aufgabe 1.7: kann mit Stoff Klasse 8 (nach Abs. 317/12.1) gelöst werden. (BAg: 323/799)

) In einer Urne befinden sich vier schwarze und eine unbekannte Anzahl weißer Kugeln. Aus der Urne werden nacheinander zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Die Wahrscheinlichkeit, dabei zwei schwarze Kugeln zu ziehen, ist doppelt so groß wie die Wahrscheinlichkeit, zwei Kugeln unterschiedlicher Farbe zu ziehen. Bestimmen Sie die Gesamtzahl der Kugeln in der Urne.

Aufgabe 1.8: kann mit Stoff Klasse 10 (nach Abs. 341/12.3.5) gelöst werden. (BAg: 342/849)

a₂) Abbildung 1080/607a stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße $\mathcal{X}$ dar. Begründen Sie, dass $P(\mathcal{X} = 2) < 0.5$ gilt. b₃) Für eine binomialverteilte Zufallsgröße $\mathcal{Y}$ mit den Parametern $n = 8$ und $0 < p < 1$ gilt $P(\mathcal{Y} = 1) = 2 \cdot P(\mathcal{Y} = 0)$. Berechnen Sie den Wert von p .

Aufgabe 2.1: kann mit Stoff Klasse 10 gelöst werden. (BAg: 143/335)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4x - x^2$. Abb. 1081/608a zeigt ihren Graphen G_f sowie die Tangenten an G_f in den Schnittpunkten mit der x -Achse.

a₁) Weisen Sie nach: Die Tangente an G_f an der Stelle $x = 0$ hat die Steigung 4.

b₂) Die beiden Tangenten schneiden sich in einem Punkt S . Berechnen Sie den Abstand des Punkts S vom Ursprung.

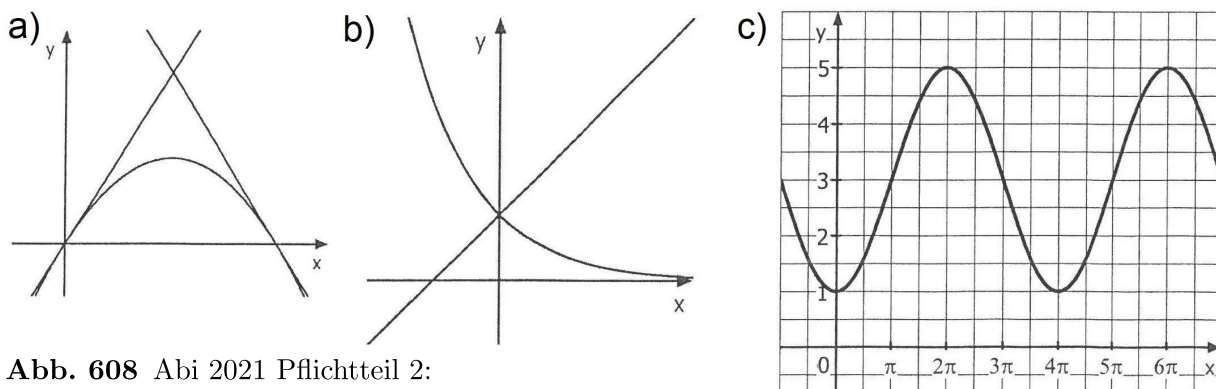


Abb. 608 Abi 2021 Pflichtteil 2:

Aufgabe 2.2: Erst nach Abs. 186/7.1.15 aus Kl. 11 bearbeiten. (BAg: 181/467 c; nur LK)

a₂) Die Abbildung 1081/608b zeigt die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = e^{-x}$ und $g(x) = x + 1$, deren Schnittpunkt auf der y -Achse liegt. Die Graphen begrenzen mit der x -Achse und der Geraden $x = u$ ($u > 0$) eine Fläche. Diese Fläche wird von der y -Achse in zwei inhaltsgleiche Teilflächen geteilt. Berechnen Sie den Wert von u .

Aufgabe 2.3: kann mit Stoff Klasse 10 gelöst werden. (BAg: 115/286)

a₁) Abb. 1081/608c zeigt den Graphen einer trigonometrischen Fktn. Best. Sie einen möglichen Fkt-term.

Aufgabe 2.4: Erst nach Abs. 186/7.1.15 aus Kl. 11 bearbeiten. (BAg: 184/482; nur LK)

Die Abbildung 1082/609b zeigt den Graph der Funktion f .

a₂) Begründen Sie, dass die Ableitungsfunktion f' im Intervall $[5; 8]$ nicht monoton ist. b₄) Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen der Integralfunktion $J_2(x)$ mit $J_2(x) = \int_2^x f(t)dt$ für $2 \leq x \leq 9$.

Aufgabe 2.5: Erst nach Abs. 265/10.3 aus Kl. 12 bearbeiten. (BAg: 268/714)

Gegeben sind die Punkte $A(6|4|-1)$ und $B(0|-5|2)$ sowie die Ebene $E: 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 6$.

a₁) Die Gerade durch A und B schneidet E im Punkt S . Bestimmen Sie die Koordinaten von S .

b₂) Untersuchen Sie, ob der Punkt S auf der Strecke AB liegt. (mit Order 66 Niveau 1)

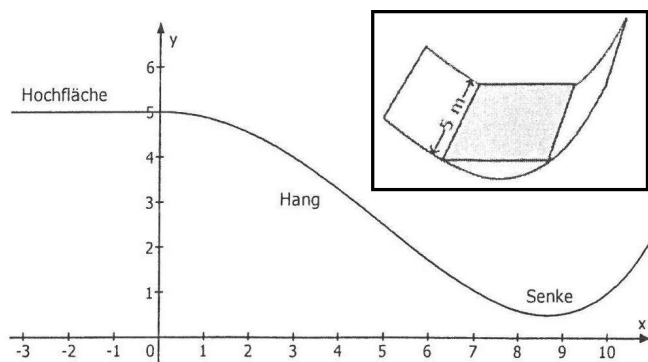
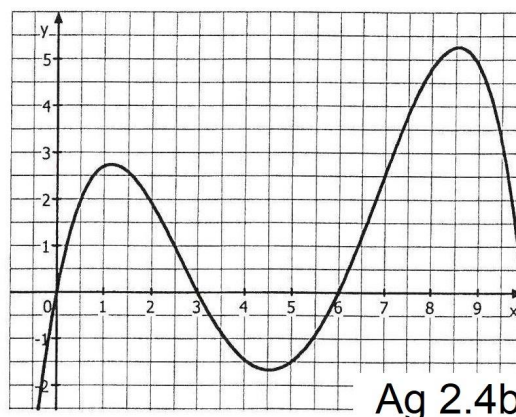


Abb. 609 Abitur 2021 WT + PT 2.4



Ag 2.4b

Aufgabe 2.6: Erst nach Abs. 275/10.5 aus Kl. 12 bearbeiten. (BAg: 269/718, 276/745)

Gegeben ist die Ebene $E : 3x_2 - 4x_3 = 2$.

a₂) Beschreiben Sie die besondere Lage von E im Koordinatensystem (**Formel 92**) !

b₃) (Nur LK) Die Ebene F ist orthogonal zu E und hat zur x_1 -Achse den Abstand 2. Bestimmen Sie eine mögliche Koordinatengleichung von F .

Aufgabe 2.7: kann mit Stoff Klasse 8 (nach Abs. 317/12.1) gelöst werden. (BAg: 323/799)

Ein Verein erhält eine Lieferung gebrauchter Computer und Bildschirme. Von den 10 Computern und 15 Bildschirmen funktionieren jeweils drei Geräte nicht. Jemand wählt zufällig einen Computer und einen Bildschirm aus.

a₁) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide ausgewählten Geräte funktionieren.

b₂) Nach Inbetriebnahme der zwei ausgewählten Geräte stellt sich heraus, dass beide Geräte funktionieren. Anschließend wählt jemand aus den übrigen Geräten der Lieferung zwei Computer aus. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens einer der beiden zuletzt ausgewählten Computer funktioniert.

Aufgabe 2.8: kann mit Stoff Klasse 10 (nach Abs. 341/12.3.5) gelöst werden. (BAg: 342/849)

Ein idealer Würfel wird 20-mal geworfen. Betrachtet wird die Anzahl der gewürfelten Sechsen. Gegeben sind drei Terme: I: $\left(\frac{1}{6}\right)^{11} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9$; II: $\binom{20}{11} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{11} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9$; III: $1 - \binom{20}{9} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{11}$.

a₁) Geben Sie an, mit welchem der drei Terme die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses 'Es wird genau 11-mal eine Sechs gewürfelt.' berechnet werden kann.

b₂) Formulieren Sie für jeden der beiden verbleibenden Terme ein Ereignis im Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem jeweiligen Term berechnet werden kann.

16.11.5 Wahlteil Abitur 2021 Filme: <http://Abi21.slt.biz>

Aufgabe A 1.1: Die Teile a-c können mit Stoff Klasse 10 (BAg: 149/360 e, 151/365 + 152/369 b), der Teil d kann erst nach Abs. 186/7.1.15 (BAg: 183/480) gelöst werden.

Das Gelände eines Abenteuerspielplatzes besteht aus einer Hochfläche, an der sich ein Hang mit einer Senke anschließt. Die Profillinie des Geländes wird für $-3 \leq x \leq 0$ durch die Gerade mit der Gleichung $y = 5$ und für $0 \leq x \leq 11$ durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 0.0008x^4 - 0.12x^2 + 5$ beschrieben. Abb. 1082/609a zeigt diese Profillinie (1 LE entspricht 1m).

a₂) Berechnen Sie die Koordinaten des tiefsten Punkts der Profillinie (2 VP). Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Hang zwischen Hochfläche und Senke an der Stelle $x = 5$ am steilsten abfällt und dort ein Gefälle von 80% hat (2 VP). Zeigen Sie, dass die Profillinie beim Übergang von der Hochfläche zum Hang knickfrei ist (1 VP). (Teilergebnis: Der tiefste Punkt hat die y -Koordinate 0.5).

$b_3)_{LK}$ Zwischen zwei Befestigungspunkten, die im Modell durch $P(5|f(5))$ und $Q(10|f(10))$ dargestellt werden, wird ein Seil straff gespannt. Ber. Sie die Länge des Seils (2 VP). Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man die maximale vertikale Höhe des Seils über dem Gelände berechnen kann (1.5 VP).

$c_3)_{LK}$ Auf der Hochfläche, einen Meter vom Übergang zum Hang entfernt, steht ein vertikaler Lichtmast, von dem aus das gesamte Gelände ausgeleuchtet werden kann. Berechnen Sie die Mindestlänge dieses Lichtmasts (2.5 VP).

$d_{2-3})$ Bei einem Umbau soll die Senke auf 5m Länge so mit Sand aufgefüllt werden, dass eine horizontale rechteckige Fläche entsteht, die 0.5m oberhalb des tiefsten Punkts der Senke liegt. Berechnen Sie das Volumen des dafür benötigten Sandes (3.5 VP).

Aufgabe A 1.2_{LK}: (Nach Klasse 10; BAg 98/233) In Abb. 1083/610a sind die Graphen G_u und G_v zweier Fktn u und v abgebildet. Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = v(u(x))$. ₂₎ Bestimmen Sie $f(-1)$. (1 VP) ₃₎ Ermitteln Sie die Anzahl der Nullstellen von f im abgebildeten Bereich (1.5 VP).

Aufgabe A 1.3_{LK}: ₃₎ (Nach Abs.163/6.3; BAg: 168/423 + 167/420b) Die Funktion w ist auf $\mathbb{R}$ definiert und zweimal differenzierbar. Für die Funktion g gilt $g(x) = e^{w(x)} - 2$. Zeigen Sie: Wenn x_0 eine Wendestelle von w und von g ist, dann hat der Graph von w bei x_0 eine waagrechte Tangente (3 VP).

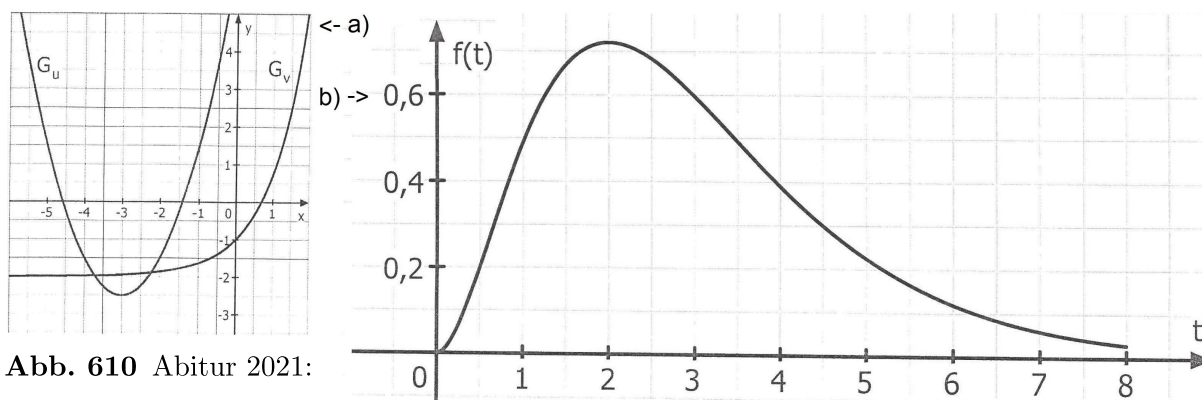


Abb. 610 Abitur 2021:

Aufgabe A 2.1: (Nach Abs.163/6.3; BAbs: 171/6.3.10) Die Funktion f beschreibt für $0 \leq t \leq 8$ modellhaft die Wachstumsgeschwindigkeit eines Apfelbaums, der zu Beobachtungsbeginn 0.8m hoch ist (t in Jahren nach Beobachtungsbeginn, $f(t)$ in Meter pro Jahr). **a_i 1)** Abb. 1083/610b (Anlage) zeigt den Graphen G_f von f . Bestimmen Sie die Länge des Zeitraums, in dem die Wachstumsgeschwindigkeit des Apfelbaums größer als 0.5 Meter pro Jahr ist (1 VP). **a_{ii} 2)** (Nach Abs.186/7.1.15; BAbs 181/7.1.9) Bestimmen Sie die Höhe des Apfelbaums zwei Jahre nach Beobachtungsbeginn (2 VP).

Die Wachstumsgeschwindigkeit eines Birnbaums, der zu Beobachtungsbeginn 1.2 m hoch ist, wird für $0 \leq t \leq 8$ modellhaft beschrieben durch die Funktion g mit $g(t) = t^2 \cdot e^{-t}$; (t in Jahren nach Beobachtungsbeginn, $g(t)$ in Meter pro Jahr). Für die Ableitungen der Funktion g gilt:

$$g'(t) = 2t \cdot e^{-t} - t^2 \cdot e^{-t}; g''(t) = 2 \cdot e^{-t} - 4t \cdot e^{-t} + t^2 \cdot e^{-t}.$$

b_i 2) (BAg: 167/418d+e) Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Wachstumsgeschwindigkeit des Birnbaums am größten ist, und geben Sie diese Wachstumsgeschwindigkeit an (2 VP). Begründen Sie, dass der Birnbaum ab diesem Zeitpunkt weiterhin wächst, die Wachstumsgeschwindigkeit jedoch ständig abnimmt (2 VP). **b_{ii} 3)** (Nur LK, nach Abs.186/7.1.15; BAbs: 186/7.1.15) Formulieren Sie eine Frage im Sachzusammenhang, die auf die Gleichung $\frac{1}{5} \cdot \int_x^{x+5} g(t) dt = 0.3$ führt (1.5 VP).

c₃)_{LK} (BAg: 171/433d) Zeigen Sie, dass für $0 \leq t \leq 8$ die Funktion h mit $h(t) = (-t^2 - 2t - 2) \cdot e^{-t} + 3.2$ die Höhe des Birnbaums beschreibt (t in Jahren nach Beobachtungsbeginn, $h(t)$ in Meter) (2 VP).

d₃)_{LK} (BAg 164/407e) Durch die Zugabe eines Düngers wird das Wachstum von Birnbäumen beeinflusst. Die Höhe eines gedüngten Birnbaums wird durch die Funktion k beschrieben mit $k(t) = -2.3 \cdot e^{-t} + 3.5$ ($t \geq 0$ in Jahren nach Beobachtungsbeginn, $k(t)$ in Meter). Die Höhe eines ungedüngten Birnbaums wird weiterhin durch die Funktion h beschrieben. Beide Birnbäume haben

zu Beobachtungsbeginn dieselbe Höhe. Berechnen Sie den Zeitpunkt, bis zu dem die Wachstumsgeschwindigkeit des gedüngten Birnbaums größer ist als die des ungedüngten Birnbaums. Untersuchen Sie rechnerisch, welcher der beiden Bäume zuerst eine Höhe von 3.1 m erreicht (1.5 VP).

Aufgabe A 2.2_{LK}: (außer Teil **a_{ii}** Stoff Klasse 10) Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = -4x^3 + 12tx^2$. **a_{i 2}**) (BAG 147/349f) Bestimmen Sie die Nullstellen von f_t (1 VP). **a_{ii 3}**) (Nach Abs.186/7.1.15; BAG 183/478) Der Graph von f_t schließt mit der x -Achse eine Fläche mit dem Inhalt A_t ein. Ermitteln Sie denjenigen Wert von t , für den $A_t = \frac{16}{3}$ gilt (2.5 VP). **b₃**) (BAG 144/340) Für $t = \frac{2}{3}$ gibt es Tangenten an den Graphen von f_t , die den Punkt $S(3|0)$ enthalten. Berechnen Sie die x -Koordinaten der zugehörigen Berührungspunkte (2.5 VP).

Aufgabe B 1: (Erst nach Abs. 275/10.5) Gegeben ist eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Die Eckpunkte der Grundfläche sind $A(-3|-3|0)$, $B(3|-3|0)$, $C(3|3|0)$ und D , die Spitze ist $S(0|0|6)$. Die Ebene E enthält die Punkte A , B und S . (Teilergebnis: $E: -2x_2 + x_3 = 6$).

a_{i 1}) (BAG 252/651) Stellen Sie die Pyramide in einem geeigneten Koordinatensystem dar (1 VP).

a_{ii 1-2}) (BAG 267/712) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E (2 VP).

a_{iii 2-3}) (Nur LK, BAG 272/730c,d) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt der Pyramide (2 VP).

b₃) (BAG 277/750) Innerhalb der Pyramide gibt es einen Punkt P , dessen Abstand von der Grundfläche der Pyramide $\sqrt{5}$ -mal so groß ist wie sein Abstand zu den Seitenflächen. Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes (2.5 VP).

c₃)_{LK} (BAG 263/695) Betrachtet wird für jedes $a > 0$ die gerade Pyramide mit folgenden Eigenschaften:

(I) $A(-a|-a|0)$, $B(a|-a|0)$, $C(a|a|0)$ und D sind die Eckpunkte der quadratischen Grundfläche.

(II) Die x_3 -Koordinate der Spitze S ist positiv.

(III) Die Höhe der Pyramide stimmt mit der Kantenlänge der Grundfläche überein.

M_1 ist die Kantenmitte von AB , M_2 die Kantenmitte von DS .

Zeigen Sie: Die Strecke M_1M_2 ist orthogonal zur Kante DS (2.5 VP).

Aufgabe B 2: (Erst nach Abs. 275/10.5) Eine Firma stellt Gewächshäuser her. Die Ecken der Grundfläche dieser Gewächshäuser können modellhaft durch die Punkte $A(8|0|0)$, $B(8|7|0)$, $C(0|7|0)$ und $D(0|0|0)$ beschrieben werden. In diesen Ecken stehen senkrecht zur Grundfläche Pfosten, die das Dach des Gewächshauses tragen (alle Koordinatenangaben in Meter).

a) Bei einem dieser Gewächshäuser können die Ecken der Dachfläche durch die Punkte $E(8|0|4)$, $F(8|7|5)$, $G(0|7|5)$ und $H(0|0|4)$ beschrieben werden. **a_{i 1}**) (BAG 252/651) Stellen Sie dieses Gewächshaus in einem geeigneten Koordinatensystem dar (1 VP). **a_{ii 1}**) (BAG 248/640) Berechnen Sie den Rauminhalt dieses Gewächshauses (1.5 VP). **a_{iii 1-2}**) (BAG 267/712) Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, die die Lage der Dachfläche beschreibt (2 VP).

b_{LK}) Die Firma bietet die Gewächshäuser mit unterschiedlichen Neigungen der Dachfläche an. Sei $a \geq 0$; die Lage jeder dieser Dachflächen kann durch eine Ebene beschrieben werden, die zur Schar $E_a: ax_2 - 7x_3 = 7a - 35$ gehört. **b_{i 3}**) (BAG 275/740) Berechnen Sie den Wert von a , für den die Neigung der Dachfläche 30° beträgt (2 VP). **b_{ii 3}**) (BAG 270/724) Es gibt eine Gerade g , die in allen Ebenen der Ebenenschar liegt. Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Geraden g (1.5 VP).

b_{iii 3}) (BAG 271/726c) Untersuchen Sie, für welche Werte von a im gesamten Gewächshaus eine Mindesthöhe von $2m$ gegeben ist (2 VP).

Aufgabe C 1: (Erster Teil: Nach Abs. 363/13.2.2; BAG 364/905) Ein Unternehmen füllt Honig in Gläser mit der Aufschrift 250g ab. Die Füllmenge $\mathcal{X}$ eines Glases wird als normalverteilt angenommen mit dem Erwartungswert $\mu = 252$ und der Standardabweichung $\sigma = 2$ (alle Angaben in g).

a Ein Glas wird zufällig ausgewählt. **a_{i 1}**) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass weniger als 250g Honig in diesem Glas sind (0.5 VP). **a_{ii 2}**) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Füllmenge dieses Glases um höchstens 2% von 250g abweicht (1.5 VP). **b₃**)_{LK} Gesucht ist ein Wert $a \neq 245$ mit $P(a \leq \mathcal{X} \leq a + 5) = P(245 \leq \mathcal{X} \leq 250)$. Begründen Sie, dass es solch einen Wert von a gibt und geben Sie diesen Wert an (1.5 VP). **c₄**)_{LK} Bei einer neuen Abfüllanlage beträgt die Standardabweichung der Füllmenge 1g. Bei ihr kann man durch einen Regler den Erwartungswert der Füllmenge mit einer Genauigkeit von 0.1g einstellen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig

ausgewähltes Glas weniger als 250g enthält, soll höchstens 15% betragen. Ermitteln Sie, auf welchen Wert der Erwartungswert der Füllmenge mindestens eingestellt werden muss (1.5 VP).

(Zweiter Teil: Niveau Klasse 10) Bei einer Sonderaktion wird jedes fünfte Glas auf der Deckelinnenseite mit einem, von außen nicht sichtbaren Gutschein versehen.

d) (BAG 349/863) Lena kauft während der Sonderaktion sechs Gläser und stellt sie in einer Reihe auf. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

- 1) A: 'Genau drei dieser Gläser enthalten jeweils einen Gutschein' (0.5 VP).
- 2) B: 'Die beiden ersten Gläser enthalten jeweils einen Gutschein' (1 VP).
- 3) C: 'In genau zwei Gläsern befindet sich jeweils ein Gutschein und diese Gläser stehen nicht unmittelbar nebeneinander' (1.5 VP).

e₄) (BAG 347/860) Die Gläser werden in Kartons abgepackt und an Lebensmittelgeschäfte ausgeliefert. Jeder Karton enthält 30 Gläser. Ein Kunde nimmt 3 Gläser aus dem Karton und hofft, mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50% mindestens einen Gutschein zu erhalten. Ermitteln Sie die Anzahl der Gläser mit Gutschein, die sich dafür mindestens in dem Karton befinden müssen (2 VP).

Aufgabe C 2.1: a) + b) sind Niveau Klasse 10: Bei einem Glücksrad gibt es drei farbige Sektoren. Beim einmaligen Drehen beträgt die Wahrscheinlichkeit für rot 60%, für blau 30% und für grün 10%.

- a) (BAG 349/863) Das Glücksrad wird 20-mal gedreht. Bestimmen Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:
- 1) A: (0.5 VP) 'Genau 15-mal erscheint rot.'
 - 3) B: (2 VP) 'Bei den ersten zehn Drehungen erscheint genau zweimal blau, insgesamt erscheint höchstens fünfmal blau'.

b₃) (2.5 VP; BAG 327/812) Bei einem Glücksspiel darf man für einen Einsatz von 6 € das Glücksrad zweimal drehen. Wenn dabei genau einmal rot erscheint, dann erhält man einen bestimmten Auszahlungsbetrag. Wenn zweimal rot erscheint, dann erhält man das Siebenfache dieses Auszahlungsbetrags. Andernfalls erfolgt keine Auszahlung. Das Spiel ist fair. Bestimmen Sie den Auszahlungsbetrag für den Fall, dass genau einmal rot erscheint.

c₄)_{LK} (Nach Abs 353/13.1; BAG 355/877) Jemand vermutet, dass die Wk für rot tatsächlich geringer als 60% ist. Deshalb soll ein Hypothesentest durchgeführt werden. Dabei soll möglichst vermieden werden, dass irrtümlich von einer zu hohen Wahrscheinlichkeit für rot ausgegangen wird. Formulieren Sie eine Nullhypothese H_0 , die dieser Zielsetzung entspricht, und begründen Sie Ihre Wahl (1.5 VP).

Aufgabe C 2.2: (Nur LK, nach Abs. 353/13.1; BAG 360/893) 3) Bei einem Spielautomaten wird vermutet, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit p größer als 10% ist. Die Vermutung wird mit Hilfe eines Hypothesentests mit dem Stichprobenumfang von $n = 200$ und einem Signifikanzniveau von 5% getestet. Als Nullhypothese wird $H_0 : p \geq 0.1$ gewählt. Formulieren Sie die Entscheidungsregel. (2.5 VP) Tatsächlich gilt $p = 0.08$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art. (1 VP)

Musteraufgaben Abitur 2019/2020

Was sollte ich von den Musteraufgaben nach welcher Unterrichtseinheit können?

K1 10: 1089/16.11.13 P8, 1092/16.11.18 Ca+b;

UE 11₂: 1085/16.11.6 P1, 1086/16.11.8 P3, 1086/16.11.9 P4, 1087/16.11.10 P5i-iv\ii b;

UE 11₃: 1086/16.11.7 P2, 1087/16.11.10 P5; **UE 11₄:** 1087/16.11.10 P5 v); **UE 11₇:** 1092/16.11.18 C1;

UE 12₁: 1088/16.11.11 P6, 1091/16.11.17 B1; **UE 12₄:** 1089/16.11.12 P7;

16.11.6 Pflichtteil Aufgabe 1: 'Ableitung' nach Abschnitt 170/6.3.9

- 1-2) (BAG 167/417) Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x)$ gleich **i_{LK}**) $(2 - \cos(x))^3$;
ii) $(x^2 - 3) \cdot \sin(3x)$; **iii_{LK}**) $(3 - e^{-2x})^3$; **iv**) $x^4 \cdot (e^{2x} + 1)$; **v**) $e^{2x} + 2\sqrt{x}$;
vi) $e^{2x}(x^2 + 1)$; Vereinfachen Sie vi) so weit wie möglich.

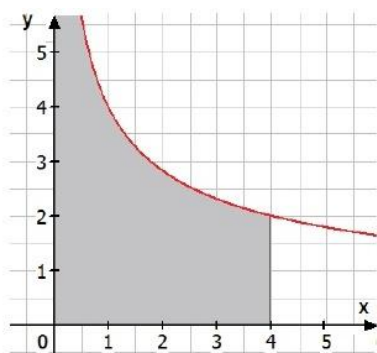
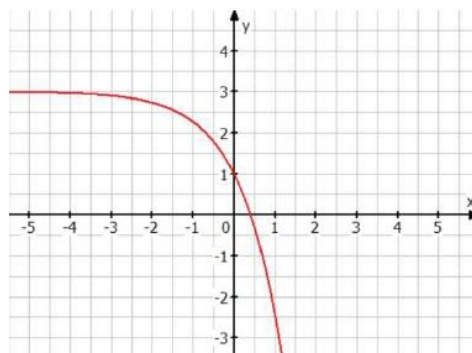


Abb. 611 Musterabitur 2019/20: a) Ag 2 vi

b) Ag 4 iv (Graph der Funktion $f(x) = a \cdot e^x + b$)

16.11.7 Pflichtteil Aufgabe 2: 'Integrale' nach Abschnitt 186/7.1.15

i₂)_{LK} (BAG 182/474) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 3e^{-2x} + \frac{1}{2x}$. Bestimmen Sie eine Stammfunktion F von f .

ii₂) (BAG 180/463) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x^2} + x$. Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von f , deren Schaubild den Punkt $(1|0)$ enthält.

iii₂)_{LK} (BAG 181/470f + 472a) Zeigen Sie, dass $F(x) = \ln(1 + x^2)$ eine Stammfkt von $f(x) = 2 \cdot \frac{x}{1+x^2}$ ist.

(BAG 182/475) Berechnen Sie das Integral $\text{iv}_2\text{)}_{LK} \int_1^e \left(\frac{3}{x} - 1\right) dx$; $\text{v}_2\text{)} \int_0^{\pi/4} (\sin(2x) + 1) dx$.

vi₃)_{LK} (BAG: 183/481 + 185/486) Die Funktion f mit $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$ schließt mit der x -Achse, der Geraden $x = 4$ und der y -Achse eine nach oben offene Fläche ein (siehe Abb 1086/611a). Untersuchen Sie, ob diese Fläche einen endlichen Flächeninhalt hat und bestimmen Sie diesen gegebenenfalls.

16.11.8 Pflichtteil Aufgabe 3: 'Gleichungen' nach Abschnitt 170/6.3.9 (Niveau 2)

(BAG 42/114+164/407) Lösen Sie die Gleichung i) $x^5 + 2x^3 - 3x = 0$; ii) $(2x^2 - 50) \cdot (e^{2x} - 7) = 0$;
 iii) $e^x + 3 - 10e^{-x} = 0$; iv) $(e^{-x} + 3)^2 = 4$; v) $(\sin(x))^2 - 2\sin(x) = 3$ (für $0 \leq x \leq 2\pi$);
 vi) $\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = 1$; vii) $1 - \frac{5}{e^x} + \frac{4}{e^{2x}} = 0$; viii) $\cos(x) \cdot (e^{-2x+1} + 1) = 0$ (für $0 \leq x \leq 2\pi$);

16.11.9 Pflichtteil Aufgabe 4: 'Elemente der Kurvendiskussion' nach Abschnitt 170/6.3.9

i₂) (BAG 174/440) Bestimmen Sie die Extrempunkte der Funktion f mit $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$.

ii₂) (BAG 167/418) Bestimmen Sie den Wendepunkt der Funktion f mit $f(x) = (x - 1) \cdot e^x$.

iii₂) (BAG 143/338) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2e^{-x}$.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Normalen von f im Punkt $P(-1|2e)$.

b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Normalen mit der x -Achse.

iv₂) Die Funktion f hat das Schaubild aus Abb 1086/611 und die Funktionsgleichung

$f(x) = a \cdot e^x + b$, ($a, b \in \mathbb{R}$).

a) Bestimmen Sie die Werte von a und b .

b) (BAG 143/336) Berechnen Sie, an welcher Stelle die Funktion f die Steigung -1 besitzt.

v₂)_{LK} (Nach Abs 121/5.5) Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = \frac{1}{1-x} + 3$ und $g(x) = -\frac{1}{1+x}$.

a) (BAG 122/304) Geben Sie die waagrechte Asymptote der Funktion f an.

b) (BAG 144/342) Bestimmen Sie die Stelle, an der f und g die gleiche Steigung haben.

vi₂) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{-x-1} + 1$.

a) Skizzieren Sie das Schaubild von f .

b) (BAG 143/335) Berechnen Sie die Gleichung der Tangenten an den Graph von f an der Stelle -1 und zeichnen Sie die Tangente ein.

vii₂) (BAG: 143/335 + 143/336) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2 \cdot \sqrt{2x + 1}$.

a) Berechnen Sie die Steigung von f an der Stelle 1.5 .

b) Berechnen Sie die Stelle, an der die

Funktion f die Steigung 6 hat. c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangenten an der Stelle 0 .

- viii) (BAg: 115/285 + 143/335) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\sin x + 1$. a₂) Skizzieren Sie das Schaubild von f für $0 \leq x \leq 2\pi$. b₂) Bestimmen Sie die Steigung von f an der Stelle $x = \pi$. c₃) (BAg 103/248) Bestimmen Sie c so, dass der Ursprung auf dem Schaubild von $g(x) = f(x + c)$ liegt.

16.11.10 Pflichtteil Aufgabe 5: 'Funktionskompetenz'

Kompletter Abschnitt: nach Abs. 170/6.3.9; Basisaufgaben: 157/388 + 184/482

i) Die Abbildung 1087/612 i) zeigt das Schaubild der Ableitung f' einer Funktion f . Begründen Sie, ob folgende Aussagen über die Funktion f wahr, falsch oder unentscheidbar sind.

- a₁) An der Stelle 0 hat das Schaubild von f einen Hochpunkt. b₂) Für $0 \leq x \leq 2$ ist $f(x) \leq 0$.
c₃) Das Schaubild von f ist punktsymmetrisch zum Ursprung für $-1 < x < 1$.
d₂) An der Stelle 2 hat das Schaubild von f einen Wendepunkt.

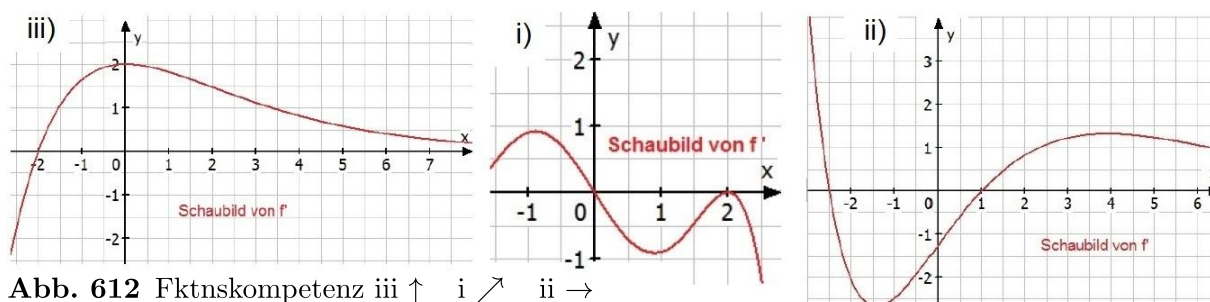


Abb. 612 Fktnskompetenz iii $\uparrow$ i $\nearrow$ ii $\rightarrow$

ii₂) Abb. 1087/612 ii) zeigt das Schaubild der Ableitung f' einer Funktion f . a) Begründen Sie, welche Aussagen man in dem dargestellten Bereich hinsichtlich Anzahl der Extremstellen, Wendestellen, und Nullstellen von f man treffen kann. b) (Nach Abs. 186/7.1.15) Begründen Sie, dass $\int_{-2}^3 f'(x) dx < 0$ gilt.

iii₂) Abb. 1087/612 iii) zeigt das Schaubild der Ableitung f' einer Funktion f . Begründen Sie, ob folgende Aussagen über die Funktion f wahr, falsch oder unentscheidbar sind. a) Bei $x = 0$ besitzt das Schaubild von f einen Extrempunkt. b) Bei $x = -2$ besitzt das Schaubild von f eine waagrechte Tangente.

c) Das Schaubild der Funktion f besitzt keine Wendepunkte.

d) $f(x) > 0$ für $x > -2$.

Niveau 2

iv) Gegeben sind die Schaubilder zweier Funktionen f und g .

Eine der beiden Funktionen ist die Ableitungsfunktion der anderen Funktion.

a) Begründen Sie, dass die Funktion f die Ableitung der Funktion g ist.

b) Die Funktion g hat die Funktionsgleichung

$$g(x) = e^{ax} + b.$$

Bestimmen Sie a und b .

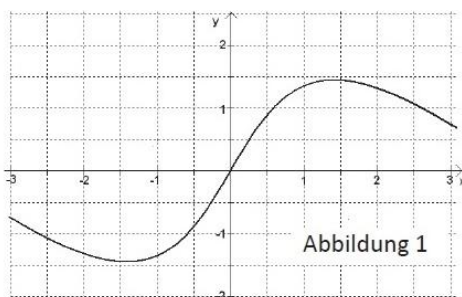
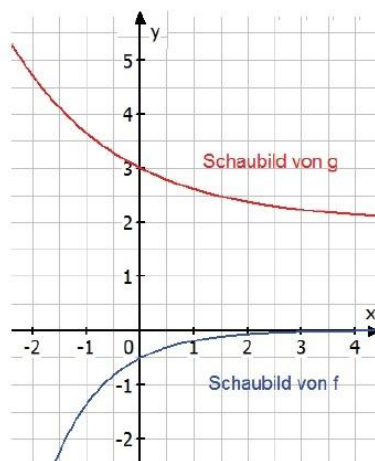


Abbildung 1

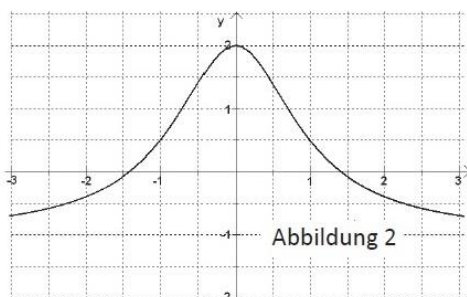


Abbildung 2

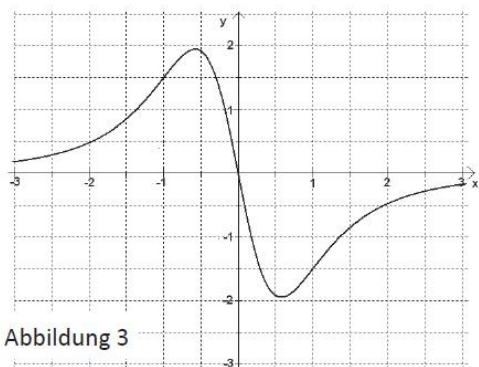


Abbildung 3

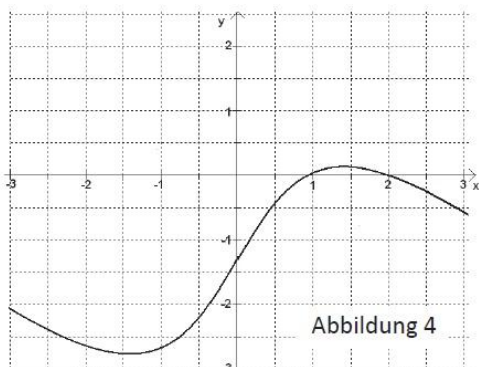


Abbildung 4

Abb. 613 Musterabitur 2019/20: Ag 5 v. Die vier Abbildungen

v) (Nach Abs 121/5.5) Die 4 Abbildungen aus Abb 1088/613 zeigen die Schaubilder von Funktionen. Eines dieser Schaubilder gehört zu der Funktion f mit $f(x) = \frac{a}{1+x^2} - 1$.

a₂) Begründen Sie, dass Abbildung 2 zur Funktion f gehört. Bestimmen Sie den Wert von a .

b₃)_{LK} (Nach Abs. 186/7.1.15) Von den anderen drei Abbildungen gehört eine zur Ableitungsfunktion f' und eine zur Integralfunktion I mit $I(x) = \int_2^x f(t)dt$. Ordnen Sie diesen beiden Funktionen die zugehörigen Abbildungen zu und begründen Sie jeweils Ihre Zuordnung.

16.11.11 Pflichtteil Aufgabe 6: 'LGS + Inzidenz' nach Abschnitt 265/10.3

i₂) (BAg 282/765)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$x_1 + x_2 + 7x_3 = 2$$

$$2x_1 - x_2 - 3x_3 = -5$$

$$4x_1 - x_2 + 4x_3 = -7.$$

ii₂) (BAg 256/667 + 282/765) Stellen Sie den

Vektor $\begin{pmatrix} 14 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ dar.

iii_{LK}) (BAg 269/718 + 269/721) Gegeben sind die Ebenen $E_1: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ und $E_2: x_3 = 2$.

a₁) Stellen Sie die Ebenen E_1 und E_2 in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar. **b₂)** Zeichnen Sie die Schnittgerade g von E_1 und E_2 ein und bestimmen Sie die Gleichung der Schnittgerade.

iv₂) (BAg 269/718 + 269/721) Gegeben sind die Ebenen $E: x_1 + 2x_2 = 4$ und $F: 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$.

a) Stellen Sie die Ebenen E und F in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar.

b_{LK}) Zeichnen Sie die Schnittgerade von E und F ein und bestimmen Sie die Gleichung der Schnittgerade.

v₂) a) (BAg 269/718) Geben Sie die Gleichung der Ebene E an, welche die Spurpunkte $(0|0|4)$ und $(0|-3|0)$ und keinen Schnittpunkt mit der x_1 -Achse hat.

b) (BAg 269/721 + 275/741) Geben Sie die Gleichung der Ebene F an, welche den Punkt $A(3|-3|-1)$ enthält und parallel zur Ebene $E: x_1 = 2$ ist.

c_{LK}) (BAg 275/741) Geben Sie die Gleichung der Geraden g an, welche durch den Punkt $P(5|1|-4)$ geht und senkrecht zur Ebene $E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ steht.

vi₂) Gegeben sind die Geraden g und h mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -15 \end{pmatrix}$
 $s, t \in \mathbb{R}$. **a)** (BAg 259/679) Zeigen Sie, dass g und h parallel, aber nicht identisch sind.

b) (BAg 267/712) Geben Sie eine Gleichung der Ebene E an, in der Geraden g und h liegen.

16.11.12 Pflichtteil Aufgabe 7: 'Metrische Geometrie' nach Abschnitt 275/10.5

i₂) Gegeben sind die beiden Ebenen E und F mit $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $s, t \in \mathbb{R}$ und $F: x_1 - x_2 + x_3 - 1 = 0$.

a) (BAG 269/721) Weisen Sie nach, dass E und F parallel zueinander liegen.

b) (BAG 277/750) Bestimmen Sie den Abstand von E und F .

ii₁₋₂) (BAG 267/712) Gegeben sind die Punkte $A(3|0|1)$, $B(6|2|2)$ und $C(0|3|5)$. Die Ebene E enthält die Punkte A, B und C . Bestimmen Sie deren Koordinatenform.

iii) Gegeben sind die Geraden g, h mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s, t \in \mathbb{R}$.

a₁) (BAG 275/741) Zeigen Sie, dass die Geraden g und h orthogonal zueinander liegen.

b₁₋₂) (BAG 257/672) Untersuchen Sie, ob sich g und h auch schneiden.

iv₁) (BAG 263/695) Gegeben sind die Punkte $A(12|0|0)$, $B(4|10|5)$, $C(2|8|4)$.

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC .

v₂)_{LK} (BAG 272/730) Gegeben sind die Punkte $A(1|3|0)$, $B(3|7|-4)$ und $C(2|8|1)$. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC .

vi) (BAG 263/695) Gegeben sind die Punkte $A(-7|0|1)$, $B(-5|3|1)$ und $C(-4|0|-1)$.

a₁₋₂) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenkelig ist.

b₁₋₂) Das Dreieck ABC lässt sich so durch einen Punkt P ergänzen, dass eine Raute entsteht. Bestimmen Sie die Koordinaten von P .

c₂) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC .

16.11.13 Pflichtteil Aufgabe 8: 'Stochastik' kann mit Stoff Klasse 10 gelöst werden

i₁₋₂) (BAG 327/811) Ein Auto hat einen Wert von 30000€ und soll von einer Versicherung jährlich gegen Schäden versichert werden. Die Autoversicherung erwartet, dass bei 10000 versicherten Autos des gleichen Typs pro Jahr folgende Schadensfälle passieren:

- 10 Versicherungsfälle mit einem Totalschaden
- 50 Versicherungsfälle mit einem durchschnittlichen Schaden von 10000€.
- 250 kleinere Schäden mit einem durchschnittlichen Schaden von 2000€.

Berechnen Sie, welchen Versicherungsbeitrag die Versicherung jährlich anbieten sollte, wenn Sie pro Kunden einen Gewinn von 100€ (ohne Verwaltungskosten) erwirtschaften möchte.

ii) Ein Biathlet trifft erfahrungsgemäß bei 80% seiner Schüsse die Scheibe.

a₁) Basisabschnitt: 343/12.3.6 Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit er bei drei Schüssen (1) nur den mit dem ersten Schuss, (2) mindestens einen Schuss trifft.

b₂) (BAG 348/862) Für ein Ereignis A gilt: $P(A) = \binom{10}{a} \cdot b^7 \cdot 0.2^c$. Geben Sie geeignete Werte für a, b und c an. Beschreiben Sie das Ereignis A in Worten.

iii₁₋₂) (BAG 327/812) Ein Chuck-your-luck ist ein Würfelspiel aus Amerika. Der Spieler setzt einen Dollar und würfelt dann dreimal. Für jede Sechs erhält er von der Bank einen Dollar.

a) Die Zufallsvariable $\mathcal{X}$ soll den Gewinn des Spielers angeben. Geben Sie die möglichen Werte von $\mathcal{X}$ und ihre jeweilige Wahrscheinlichkeit an.

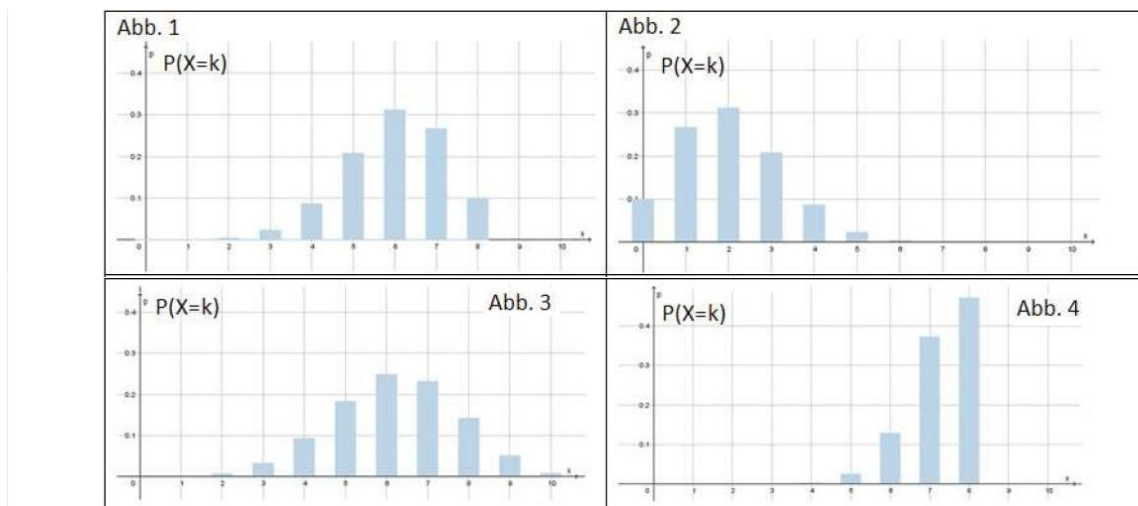
b) Untersuchen Sie, ob das Spiel fair ist.

iv₂₋₃) (BAG 327/812) Auf einem Tisch liegen verdeckt 4 Kreuz-Karten und n Herz-Karten. Es werden zwei Karten aufgedeckt. Berechnen Sie, für welche Werte von n die Wahrscheinlichkeit, dass unter den aufgedeckten Karten genau eine Herzkarte ist, gleich $\frac{8}{15}$ ist.

v) In einem Behälter befinden sich 2 weiße und 3 schwarze Kugeln. Es werden 2 Kugeln mit Zurücklegen gezogen. **a₁₋₂**) (BAG 335/829) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine der beiden Kugeln weiß ist. **b₂₋₃**) (BAG 327/812) Berechnen Sie, wie viele weiße Kugeln sich in dem Behälter befinden müssten, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine weiße Kugel zu ziehen, 0.91 betragen hätte.

vi₃) (BAG 346/857) Die Zufallsvariable $\mathcal{X}$ ist binomialverteilt mit $n = 8$ und $p = 0.75$.

a) Geben Sie an, welche der Abbildungen die Verteilung von $\mathcal{X}$ zeigt. Begründen Sie ihre Entscheidung.



b) Bestimmen Sie mit Hilfe der gewählten Abbildung näherungsweise $P(3 < \mathcal{X} < 6)$ und $P(\mathcal{X} \neq 8)$.

16.11.14 Pflichtteil Aufgabe 9: 'Beschreiben-Verstehen-Begründen' nach Abs. 275/10.5

BAG 279/756 + 263/695 **i₂₋₃**) Gegeben sind zwei zueinander parallele Ebenen E_1 und E_2 . Die Ebene F ist parallel zu E_1 und E_2 und hat von beiden Ebenen den gleichen Abstand. Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man eine Gleichung der Ebene F bestimmen kann.

ii₃) Gegeben ist eine Ebene E . Gesucht ist eine zu E parallele Ebene F im Abstand 3. Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man eine Gleichung der Ebene F bestimmen kann.

iii₄) Die vier Punkte A, B, C und D bilden ein Parallelogramm im Raum. Des Weiteren ist ein Punkt P gegeben. Beschreiben Sie ein Verfahren, um festzustellen ob der Punkt P im Parallelogramm $ABCD$ liegt.

iv₃) a) Skizzieren Sie das Schaubild einer Funktion f mit folgenden Eigenschaften: $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$ und $f''(x) < 0$. b) Begründen Sie: Ist $f''(x) < 0$, so ist das Schaubild von f rechts gekrümmt.

v₂) (BAG 348/862) Für ein Ereignis A bei der mehrmaligen Durchführung eines Bernoulli-Experimentes gilt $P(A) = 1 - \left(\binom{15}{13} \cdot 0.6^{13} \cdot 0.4^2 + 15 \cdot 0.6^{14} \cdot 0.4 + 0.6^{15} \right)$. Beschreiben Sie das Ereignis A in Worten.

16.11.15 Wahlteil A1.1: 'Analysis' nur LK, nach Abschnitt 186/7.1.15

(Nur LK, BAG: 110/270 + 174/440) Für jedes $k > 0$ ist eine Funktion f_k festgelegt durch $f_k(x) = \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2k}$; $x \in \mathbb{R}$. **a₁₋₂**) Abb. 1091/614ii zeigt die Schaubilder für $k = 0.5$, $k = 1$ und $k = 2$. Bestimmen Sie zu jedem Schaubild den entsprechenden Wert für k . Begründen Sie, dass der Graph von f_1 achsensymmetrisch zur y -Achse ist. Bestimmen Sie den Tiefpunkt des Graphen von f_1 .

b₁₋₂) (BAG 182/475) Das Schaubild von f_k schließt mit der x -Achse und den Geraden $x = 0$ und $x = \frac{1}{k}$ eine Fläche ein. Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche.

(BAG 59/140) Eine Hängebrücke in einem Klettergarten wird durch die untere Skizze dargestellt.

c₂₋₃) Das Profil der Brücke (Abb. 1091/614i) soll durch das Schaubild der Funktion $g(x) = a \cdot \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2k}$ (x und y in m) beschrieben werden. Bestimmen Sie a und k .

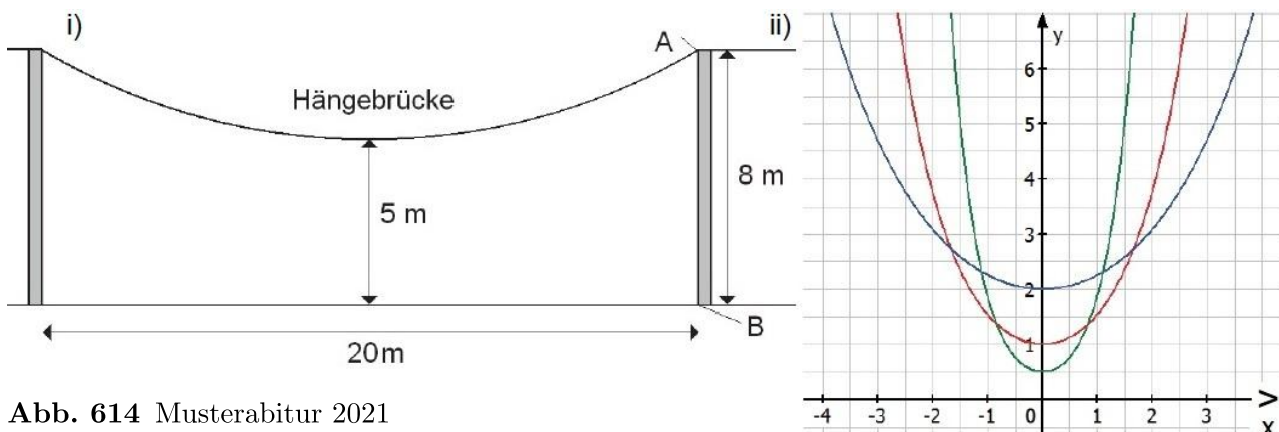


Abb. 614 Musterabitur 2021

d₂) (BAG 142/333) Bestimmen Sie, unter welchem Winkel die Brücke im Punkt A auf die waagrechte Plattform trifft.

e₃₋₄) (BAG: 144/340 + 146/348) Zur Stabilisierung der Brücke wird im Punkt B ein Halteseil am Boden befestigt und senkrecht im Punkt P an die Brücke angebracht. Begründen Sie, dass sich die x -Koordinate von P durch die Gleichung $-\frac{1}{0.2625(e^{0.105x} - e^{-0.105x})} = \frac{2.5(e^{0.105x} + e^{-0.105x})}{x-10}$ bestimmen lässt.

16.11.16 Wahlteil A1.2: (nur LK) 'Analysis' nach Abschnitt 186/7.1.15

(Nur LK) Gegeben sind die beiden Funktionenscharen f_a mit $f_a(x) = a^2 - x^2$ und g_a mit $g_a(x) = (a-x)^2$ mit $a > 0$. a₁₋₂) Skizzieren Sie die Graphen beider Funktionen für den Fall $a = 1$ in ein gemeinsames Koordinatensystem.

b₃) (BAG 183/480) Das Schaubild von f_a schließt mit der x -Achse die Fläche A_1 ein. Die Schaubilder von f_a und g_a schließen die Fläche A_2 ein. Zeigen Sie, dass unabhängig von a der Flächeninhalt der Fläche A_2 ein Viertel des Flächeninhalts von A_1 beträgt.

16.11.17 Wahlteil B1: 'Analytische Geometrie' nach Abschnitt 275/10.5

Ein rechteckiger Spiegel hat die Eckpunkte $A(2|0|0)$, $B(-2|4|0)$, $C(-2|4|4)$ und $D(2|0|4)$. Er lässt sich um die Strecke PQ durch die Punkte $P(0|2|0)$ und $Q(0|2|4)$ drehen. Weiterhin ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ eine Ebene E_t durch die Gleichung $E_t: x_1 + tx_2 = 2t$ gegeben. Für jedes t wird durch die Ebene E_t eine mögliche Lage des Spiegels dargestellt.

a₁) (BAG 269/718) Zeichnen Sie den Spiegel und die Strecke PQ in ein Koordinatensystem. Zeigen Sie, dass der Spiegel in der Ebene E_1 liegt. Zeichnen Sie die Ebene E_3 ein.

(Nur LK): Der Spiegel dreht sich nun so, dass er in der Ebene E_3 liegt. Berechnen Sie, um wie viel Grad er sich dabei gedreht hat. Beschreiben Sie, wie sich die Stellung des Spiegels in Abhängigkeit von t ändert. Bestimmen Sie, welche Stellung des Spiegels durch keine Ebene E_t dargestellt wird.

b₄)_{LK} Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte des Spiegels, wenn der Spiegel in der Ebene E_3 liegt und zeichnen Sie den Spiegel für diese Lage ein.

c₃)_{LK} (BAG 268/714) Im Punkt $L(6|8|1)$ befindet sich eine Lichtquelle, welche einen Lichtstrahl in Richtung $\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ aussendet. Zeigen Sie, dass der Lichtstrahl den Spiegel unabhängig von dessen Stellung immer im gleichen Punkt trifft.

16.11.18 Wahlteil C1: 'Stochastik' nach Abschnitt 353/13.1

Der Body-Maß-Index ist eine Maßzahl für die Bewertung des Körpergewichts eines Menschen in Relation zu seiner Körpergröße. Menschen mit einem BMI > 25 gelten laut diesem Index bereits als übergewichtig. Laut statistischem Bundesamt waren im Jahr 2018 60% der männlichen Bevölkerung und 55% der weiblichen Bevölkerung übergewichtig (BMI > 25).

a) (Basisabschnitt: 343/12.3.6) Berechnen Sie, die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

₁) A: 'Unter 10 zufällig ausgewählten Männern sind genau 6 Männer übergewichtig.'

₁) B: 'Unter 10 zufällig ausgewählten Männern sind mehr als die Hälfte übergewichtig.'

₁₋₂) C: 'Unter 10 zufällig ausgewählten Männern sind nur die ersten drei nicht übergewichtig.'

b₂) (BAG 334/825) Bestimmen Sie, wie groß eine Gruppe weiblicher Personen mindestens sein muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von über 99% mindestens eine Frau in der Gruppe übergewichtig ist.

c₂) (BAG 357/884) In der Gesamtbevölkerung Deutschlands betrug der Anteil der Übergewichtigen im Jahr 2018 laut statistischem Bundesamt 57 %. Ein Dorf hat 500 Einwohner. Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht die Anzahl der Übergewichtigen in diesem Dorf um weniger als 10 Personen vom Erwartungswert ab?

d₃) (Nur LK und BAG 360/893) Ein Sportverein in dem Dorf hat 40 Mitglieder. Der Vereinsvorsitzende behauptet, dass der Anteil der Übergewichtigen in seinem Verein geringer als in der sonstigen Bevölkerung ist. Um dies zu überprüfen, soll ein Test (H_0 : Siehe Abs. 1001/15.13.3) für die 40 Mitglieder auf dem Signifikanzniveau 10% entworfen werden und das BMI der 40 Mitglieder ermittelt. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

16.11.19 Pflichtteil Abitur 2020 Filme: <http://Abi20.slt.biz>

Was sollte ich vom Abitur 2020 nach welcher Unterrichtseinheit können?

Kl. 10: P8, A1.2, A2.1c, C1; **UE 11₂:** P1, P3, A1.1a + A2.1a;

UE 11₃: P2, P4, P5, A1.1b, A2.1b; **UE 12₁:** P6ab, B1; **UE 12₄:** P6c, P7, B2; **UE 11₇:** C1c, C2.2;

Aufgabe 1: (2 VP) Erst nach Abs. 170/6.3.9 aus Kl. 11 bearbeiten (BAG 167/417).

₁₋₂) Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^2 \cdot e^{-5x}$.

Aufgabe 2: (1.5 VP) Erst nach Abs. 186/7.1.15 aus Kl. 11 bearbeiten (BAG 182/474).

₂) Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{4x-7}$, für die $F(2) = 1$ ist.

Aufgabe 3: (1.5 VP) Erst nach Abs. 170/6.3.9 aus Kl. 11 bearbeiten (BAG 164/407)e.

₂) Lösen Sie die Gleichung $(x^2 + 8) \cdot (e^{x-1} - 1) = 0$

Aufgabe 4: (2.5 VP) Nur LK, nach Abs. 186/7.1.15 aus Kl. 11 bearbeiten (BAG 183/481).

₃) Der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{4}{x^2}$ schneidet die Gerade mit der Gleichung $y = 4$ im Punkt $P(1|4)$ und die Gerade mit der Gleichung $y = 1$ im Punkt $Q(2|1)$. Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.

Aufgabe 5: (2.5 VP) Erst nach Abs. 186/7.1.15 aus Kl. 11 bearbeiten (BAG 157/388 + 184/482).

In Abb 1093/615 ist der Graph einer Funktion F abgebildet. F ist Stammfunktion einer ganzrationalen Funktion f .

_{a₁}) Geben Sie eine Nullstelle von f im abgebildeten Bereich an. _{b₂}) Bestimmen Sie $\int_1^2 f(x)dx$.

_{c₃}) Begründen Sie, dass die Funktion f im Bereich $0.5 \leq x \leq 1.5$ streng monoton fallend ist.

Aufgabe 6: (5 VP) Erst nach Abs. 275/10.5 aus Kl. 12 bearbeiten.

Gegeben sind die Ebenen $E : 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$ und $F : 2x_2 + x_3 = 4$.

- a₁₋₂) Stellen Sie die beiden Ebenen in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar (BAG 269/718).
 b₂)_{LK} Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden der beiden Ebenen (BAG 269/721).
 c₂) Berechnen Sie den Abstand des Punktes $O(0|0|0)$ von der Ebene E (BAG 277/750).

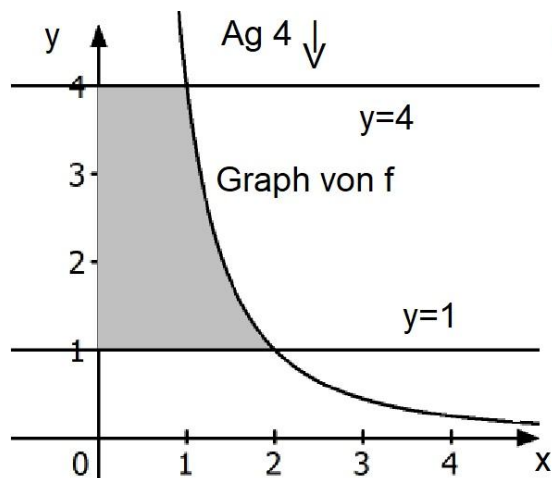
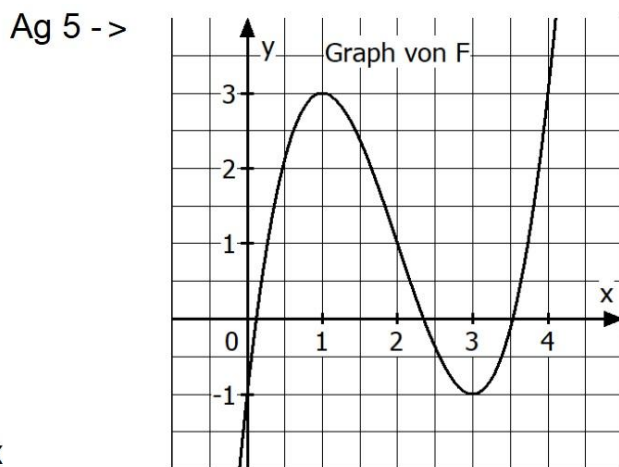


Abb. 615 Abitur 2020: a) Aufgabe 4



Aufgabe 5

Aufgabe 7_{LK}: (2.5 VP) Erst nach Abs. 275/10.5 aus Kl. 12 bearbeiten (BA 255/664 + 275/741).

- 3) Eine Gerade ist orthogonal zur Ebene $E: x_1 - x_3 = 5$ und schneidet die x_1 -Achse in einem Punkt, der vom Punkt $P(0|2|1)$ den Abstand 3 hat. Bestimmen Sie eine Gleichung einer solchen Geraden.

Aufgabe 8: (2.5 VP) Kann schon nach Klasse 8 bearbeitet werden (BAG 323/799).

Auf einem Tisch liegen verdeckt vier rote und zwei schwarze Karten, mit denen Anna und Bernd das folgende Spiel spielen: Anna deckt in der ersten Runde nacheinander zwei Karten auf und legt sie nebeneinander auf den Tisch. Ist darunter mindestens eine schwarze Karte, dann gewinnt Anna und das Spiel ist beendet. Andernfalls deckt Bernd nacheinander zwei der übrigen Karten auf. Deckt er dabei mindestens eine schwarze Karte auf, so gewinnt er, ansonsten gewinnt Anna. Bestimmen Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:

1) A: Anna gewinnt das Spiel in der ersten Runde.

2) B: Anna gewinnt das Spiel.

16.11.20 Wahlteil Analysis Abitur 2020 Filme: <http://Abi20.slt.biz>

Aufgabe A 1.1: (4+8 VP) Erst nach Abs. 170/6.3.9 (a) bzw 186/7.1.15 (b) aus Kl. 11 bearbeiten. Betrachtet wird das Wachstum einer Palme. Ihre Höhe beträgt zu Beobachtungsbeginn einen Meter, die momentane Wachstumsrate ihrer Höhe wird durch die Funktion w mit $w(t) = 4 \cdot (e^{-t} - e^{-2t})$; $t \geq 0$ (t in Jahren nach Beobachtungsbeginn, $w(t)$ in Meter pro Jahr) beschrieben. Abbildung 1093/616 zeigt den Graphen von w .

- a) 1) Geben Sie die momentane Wachstumsrate zum Zeitpunkt $t = 1$ an. 1) Begründen Sie anhand des Graphen, dass die Höhe der Palme im abgebildeten Zeitraum nie abnimmt.

Die Fkt w besitzt im abgebildeten Bereich eine Wendestelle. 2) Beschreiben Sie die Bedeutung dieser Wendestelle im Sachzusammenhang. 2) Berechnen Sie den Zeitpunkt der maximalen momentanen Wachstumsrate. (Basis 171/6.3.10)

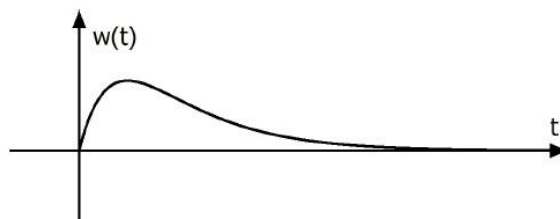


Abb. 616 Abitur 2020: Aufgabe A 1.1 a

- b) 2) Berechnen Sie die Höhenzunahme der Palme im zweiten Jahr nach Beobachtungsbeginn. 2) Bestimmen Sie einen integralfreien Funktionsterm der Funktion h , der die Höhe der Palme zum Zeitpunkt

t angibt. ₃) Ermitteln Sie rechnerisch den Zeitpunkt, an dem die Palme eine Höhe von 1.50 m hat. Untersuchen Sie, welche Höhe die Palme maximal erreichen kann. (Nur LK:) ₃) Formulieren Sie eine Fragestellung im Sachzusammenhang, die auf die Gleichung $\frac{h(t+0.5)}{h(t)} = 1.5$ führt. (Basis 181/7.1.9)

Aufgabe A 1.2: (3+2+3 VP) Nur LK, kann schon nach Klasse 10 bearbeitet werden.

Für jedes $a > 0$ ist eine Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = -\frac{x^4}{8} + a^2 \cdot x^2$.

a₂) Abgebildet sind drei Graphen. Begründen Sie, dass zwei dieser Graphen nicht zu einer Funktion f_a gehören. ₁) Der verbleibende Graph gehört zu einer Funktion f_a . Bestimmen Sie den zugehörigen Wert von a . (BAG 148/352)

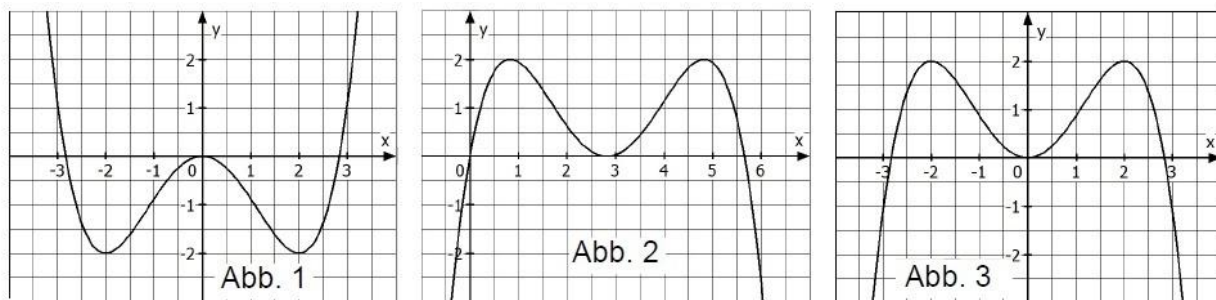


Abb. 617 Abitur 2020: Aufgabe 1.2a

b₂)_{LK} Jede Funktion f_a besitzt an der Stelle $x_1 = 2a$ ein Maximum. Ermitteln Sie eine Gleichung der Kurve, auf der die zugehörigen Hochpunkte aller Graphen von f_a liegen. (BAG 160/400)

c₃)_{LK} Der Punkt $O(0|0)$ sowie die Punkte $P(4a|-16a^4)$ und $Q(-4a|-16a^4)$ des Graphen von f_a bilden ein Dreieck. Berechnen Sie denjenigen Wert von a , für den dieses Dreieck gleichseitig ist. (BAG 153/373)

Aufgabe A 2.1: (4.5+5+2.5 VP) Erst nach Abs. 186/7.1.15 aus Kl. 11 bearbeiten.

Die nebenstehende Abbildung zeigt eine Station in einem Bikepark, die aus zwei seitlichen Wällen und einer Fahrrinne besteht. Die Abbildung in der Anlage zeigt modellhaft ihren Querschnitt. Dabei wird die Fahrrinne durch den

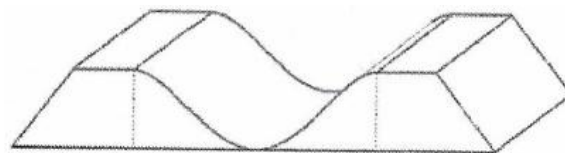


Abb. 618 Abitur 2020: Aufgabe A 2.1

Graphen einer Funktion f im Bereich $-8 \leq x \leq 8$ modelliert (Angaben in Meter).

Die Querschnitte der Wälle sind grau markiert. Der horizontale Untergrund wird im Querschnitt durch die x -Achse beschrieben. Die Station hat auf ihrer gesamten Länge den in der Abbildung gezeigten Querschnitt.

a) Bearbeiten Sie die folgenden Aufgabenstellungen anhand des Graphen in der Anlage. ₁) Bestimmen Sie die Breite der Fahrrinne in einer Höhe von 1 m über dem Untergrund. ₂) Ermitteln Sie die mittlere Steigung zwischen den im Modell mit B und C bezeichneten Punkten. ₂) Bestimmen Sie die maximale Steigung der Fahrrinne. ₃) Begründen Sie, dass f keine ganzrationale Fkt zweiten Grades sein kann.

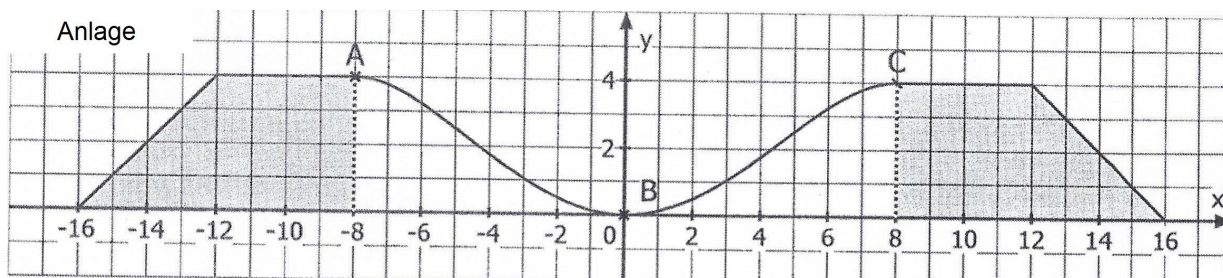


Abb. 619 Abitur 2020: Aufgabe A 2.1 a

b₂) Es ist $f(x) = -\frac{x^4}{1024} + \frac{x^2}{8}$. Berechnen Sie die Höhe, in der die Fahrrinne eine Breite von 12m hat. Das verbaute Material hat ein Gesamtvolumen von 1168 m^3 . Ermitteln Sie die Länge der Station.

c₂) (Schon mit Stoff Klasse 10 machbar) Die abgebildete Fahrrinne lässt sich auch näherungsweise durch den Graphen einer trigonometrischen Funktion g modellieren, der die Punkte A , B und C als Extrempunkte besitzt. Bestimmen Sie einen möglichen Funktionsterm von g . (BAg 118/291b)

Aufgabe A 2.2: (4+2+2 VP) Nur LK, kann mit Niveau Klasse 10 bearbeitet werden.

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = 4 - \frac{4}{x^2}$; $x \neq 0$. Ihr Graph K sowie die Gerade $g: y = 4$ sind in Abbildung 1095/620 dargestellt.

a₃) Der Punkt $P(u|v)$ mit $u > 0$ ist ein Punkt auf K . Die Punkte P , $Q(u|4)$, $R(0|4)$ und $S(0|v)$ sind die Ecken eines Rechtecks. Bei Rotation dieses Rechtecks um die y -Achse entsteht ein Zylinder. Zeigen Sie, dass das Volumen dieses Zylinders unabhängig von u ist. Berechnen Sie denjenigen Wert von u , für den der Inhalt der Mantelfläche des Zylinders 4π beträgt. Basis 152/6.2.5

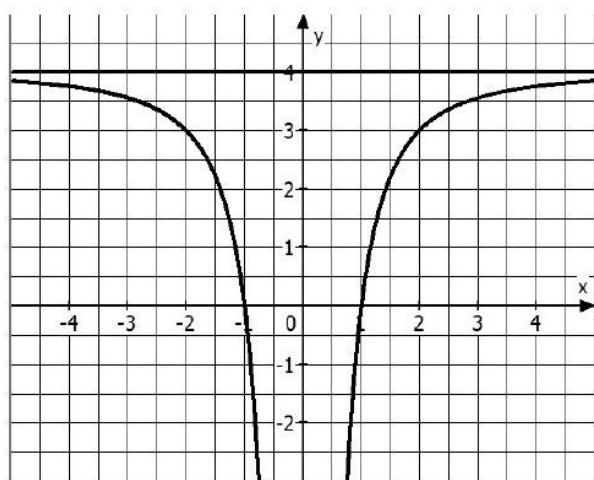
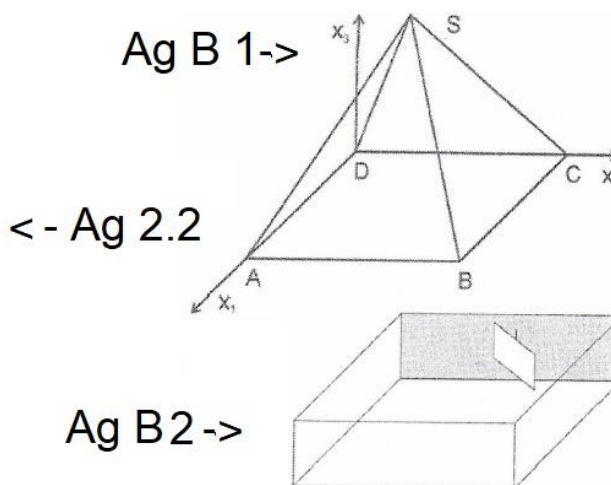


Abb. 620 Abitur 2020: Aufgabe A 2.2



Aufgabe B 1 + B 2

b₃) Für jeden Punkt auf K begrenzen die zugehörige Tangente an K , die Gerade g und die y -Achse ein Dreieck. Für einen solchen Punkt T mit positiver x -Koordinate ist dieses Dreieck gleichschenkelig. Berechnen Sie die x -Koordinate dieses Punktes T . (BAg 143/338) ↓ (BAg 115/285)

c₃) C ist der Graph der Funktion h mit $h(x) = 1 - \frac{9}{x^2}$. K geht durch eine Streckung in y -Richtung und eine Streckung in x -Richtung aus C hervor. Ermitteln Sie die beiden zugehörigen Streckfaktoren.

16.11.21 Wahlteil Geometrie Abitur 2020 Filme: <http://Abi20.slt.biz>

Aufgabe B 1: (5+2+3 VP) Erst nach Abs. 265/10.3 aus Kl. 11 bearbeiten.

Ein Ausstellungsraum hat die Form einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Die Eckpunkte des Bodens können in einem kartesischen Koordinatensystem modellhaft durch die Punkte $A(18|0|0)$, $B(18|18|0)$, $C(0|18|0)$ und $D(0|0|0)$ dargestellt werden (siehe Abb. 1095/620). Die Spitze des Raumes wird durch den Punkt $S(9|9|12)$ beschrieben, die rechte Seitenwand durch das gleichseitige Dreieck BCS (alle Koordinatenangaben in Meter).

a₁₋₂) Berechnen Sie die Größe des Winkels zwischen den beiden Kanten, die durch die Strecken BC und BS beschrieben werden. Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E , in der das Dreieck BCS liegt. Bestimmen Sie den Flächeninhalt der rechten Seitenwand (geht mit und ohne Abs. 271/10.4). (Teilergebnis.: $E: 4x_2 + 3x_3 = 72$)

Eine punktförmige Lampe befindet sich am unteren Ende einer fünf Meter langen Stange, die von der Raumspitze ausgeht und senkrecht nach unten hängt.

b₃)_{LK} Die Stange mit der Lampe kann in eine Pendelbewegung versetzt werden. Diese Pendelbewegung verläuft im Modell in einer Ebene parallel zur x_2, x_3 Ebene. Wenn die Lampe zu stark schwingt, dann trifft sie die rechte Seitenwand. Der Auftreffpunkt wird im Modell durch den Punkt P beschrieben. Berechnen Sie die Koordinaten von P .

c₂)_{LK} Im Rahmen einer Kunstaussstellung wurde ein drei Meter langer Stab senkrecht zum Boden angebracht, der im Modell durch die Strecke FG mit $F(11|15|0)$ beschrieben wird, so wirft der Stab einen Schatten, dessen Endpunkt auf der rechten Seitenwand durch G^* beschrieben wird. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes G^* . Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man die Gesamtlänge des betrachteten Schattens berechnen kann.

Aufgabe B 2: (4+2.5+1.5+2 VP) Erst nach Abs. 275/10.5 aus Kl. 12 bearbeiten.

In einem Klassenzimmer befindet sich eine rechteckige Projektionsfläche. Ihre Eckpunkte werden in einem Koordinatensystem durch die Punkte $A(0|4.4|1)$, $B(1|6.8|1)$, $C(1|6.8|2.6)$ und $D(0|4.4|2.6)$ dargestellt (alle Koordinatenangaben in Meter). Die Klassenzimmerwand hinter der Projektionsfläche liegt in einer Ebene, die durch die x_2x_3 -Ebene beschrieben wird (siehe Abb. 1095/620).

a₁₋₂) Berechnen Sie die Länge der Diagonalen der Projektionsfläche (BAg 255/664). Die Punkte A, B, C und D liegen in einer Ebene E . Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E ((BAg 267/712)). Berechnen Sie die Weite des Winkels, den die Projektionsfläche und die dahinter liegende Wand des Klassenzimmers einschließen (BAg 275/741). (Teilergebnis: $E : 12x_1 - 5x_2 = -22$)

b₃) Ein Schüler zielt mit einem Laserpointer auf die Projektionsfläche. Die Lichtquelle wird im Modell durch den Punkt $L(4|2|1)$ dargestellt, der Vektor $\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ beschreibt die Richtung des Laserstrahls. Überprüfen Sie, ob der Laserstrahl die Projektionsfläche trifft. (BAg 268/714)

_{LK} Die Projektionsfläche ist so befestigt, dass sie sich um eine vertikale Achse drehen lässt. Im Modell lassen sich mögliche Lagen durch Ebenen der Schar $E_a : 12x_1 + 5ax_2 = 28a + 6$; $a \in \mathbb{R}$ beschrieben.

c₃)_{LK} Weisen Sie nach, dass der Mittelpunkt der Strecke CD in jeder Ebene der Schar liegt. Die Drehachse wird im Modell durch eine Strecke beschrieben. Geben Sie eine Gleichung der Geraden an, die diese Strecke enthält. (BAg 270/724)

d₄)_{LK} Begründen Sie, dass die Ebene E_1 eine Lage beschreibt, in der die Projektionsfläche an der dahinterliegenden Wand anstößt. (BAg 269/721)

16.11.22 Wahlteil Wahrscheinlichkeit Abitur 2020 Filme: <http://Abi20.slt.biz>

Aufgabe C 1: (3+2+2.5+2.5 VP) Kann (außer Teil c) mit dem Stoff Klasse 10 bearbeitet werden.

Auf einer Meeresfarm werden Muscheln zur Perलगewinnung gezüchtet. Erfahrungsgemäß bringen 70% der Muscheln keine Perlen hervor. In den restlichen Muscheln befindet sich jeweils genau eine Perle, aber nur 10% der Perlen entsprechen dem geforderten Qualitätsstandard.

a₁) Bestimmen Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:

A: In 10 zufällig ausgewählten Muscheln ist keine Perle.

B: In 10 zufällig ausgewählten Muscheln sind insgesamt mindestens zwei Perlen.

C: In 100 zufällig ausgewählten Muscheln sind insgesamt mehr als drei Perlen, die dem geforderten Qualitätsstandard entsprechen. (BAg 343/853)

b₂) Ermitteln Sie die Anzahl der Muscheln, die man mindestens öffnen muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens eine Perle zu finden ist. (BAg 334/825)

c₃)_{LK} (Nach Abs 353/13.1) Ein Muschelzüchter hat eine neue Zuchtmethod entwickelt. Er behauptet, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Muschel eine Perle hervorbringt, zu erhöhen. Um diese Behauptung (H_0 : Abs. 1001/15.13.3) zu überprüfen werden 200 Muscheln auf einem Signifikanzniveau von 5% getestet. Formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel. (BAg 357/884)

d₂) Ein Goldschmied hat in einer Schale weiße und schwarze Perlen. Es sind mehr schwarze als weiße Perlen. Insgesamt sind es 21 Perlen. Der Goldschmied zieht zufällig zwei Perlen ohne Zurücklegen aus der Schale. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich die Farben der beiden Perlen unterscheiden, beträgt $\frac{8}{21}$. Bestimmen Sie die Anzahl der schwarzen Perlen, die vor dem Ziehen in der Schale waren.

Aufgabe C 2: (3+1.5+2.5+3 VP) Kann mit dem Stoff Klasse 10 bearbeitet werden.

In einer Urne befinden sich drei rote, eine weiße und sechs schwarze Kugeln.

a) Es werden nacheinander acht Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Bestimmen Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:

1) A: Genau drei dieser Kugeln sind rot.

1) B: Mehr als zwei und weniger als sechs dieser Kugeln sind rot.

2) C: Die ersten drei Kugeln haben dieselbe Farbe. (BAg 343/853) ↓ (BAg 348/862)

b₂) Geben Sie im Zusammenhang mit der oben beschriebenen Urne ein Zufallsexperiment und ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit sich mit dem folgenden Term berechnen lässt: $\binom{5}{3} \cdot 0.6^3 \cdot 0.4^2$.

c₃) Bei einem Spiel werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Ist die weiße Kugel dabei, erhält der Spieler seinen Einsatz zurück. Bei zwei Kugeln mit gleicher Farbe bekommt er vier Euro ausbezahlt. In allen anderen Fällen gibt es keine Auszahlung. Bestimmen Sie die Höhe des Einsatzes, so dass dieses Spiel fair ist. (BAg 327/812)

d₄)_{LK} In einer anderen Urne befinden sich 200 schwarze und fünf rote Kugeln. Ein Spieler zieht 15-mal nacheinander eine Kugel und legt sie jeweils direkt wieder zurück. Er gewinnt, wenn er mindestens eine rote Kugel zieht. Berechnen Sie seine Gewinnwahrscheinlichkeit. Dem Spieler wird folgendes Angebot gemacht. Er kann auf Züge verzichten, dafür werden weitere rote Kugeln in die Urne gelegt. Der Spieler muss vor dem Ziehen erklären, auf wie viele Züge er verzichtet. Für jeden weggelassenen Zug werden zwei rote Kugeln zusätzlich in die Urne gelegt. Geben Sie einen Term an, mit dem die Gewinnwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Zahl z der weggelassenen Züge berechnet werden kann. Ermitteln Sie, auf wie viele Züge er verzichten muss, damit seine Gewinnwahrscheinlichkeit am größten ist. (BAg 334/825)

16.11.23 Pflichtteil Abitur 2019

Was sollte ich vom Abitur 2019 nach welcher Unterrichtseinheit können?

Kl. 10: P2, P7, A2.2, C1; **UE 11₂:** P1, A1.1; **UE 11₃:** P3, P4, A1.2, A2.1;

UE 12₁: B2ab; **UE 12₄:** P5, P6, B1, B2; **UE 11₇:** C2;

Aufgabe 1: (2.5 VP) Erst nach Abs. 170/6.3.9 aus Kl. 11 bearbeiten.

1-2) (Basisaufgabe: (BAg:) 167/417) Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^4 \cdot \sin(3x)$.

Aufgabe 2: (2 VP) Schon am Anfang von Klasse 11 lösbar (BAg: 117/289).

3) Lösen Sie die Gleichung $(\cos(x))^2 + 2\cos(x) = 0$ für $0 \leq x \leq 2\pi$.

Aufgabe 3: (2.5 VP) Nur LK, erst nach Abs. 186/7.1.15 aus Kl. 11 bearbeiten.

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, die die Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ hat. Die Abbildung 1098/621b zeigt den Graphen von f , der symmetrisch bezüglich der y -Achse ist. Weiterhin ist die Gerade g mit der Gleichung $y = -3$ gegeben.

a₂) Zeigen Sie, dass einer der Punkte, in denen g den Graphen von f schneidet, die x -Koordinate 0.5 hat.

b₃) (BAg: 183/481) Bestimmen Sie rechnerisch den Inhalt der Fläche, die der Graph von f , die x -Achse und die Gerade g einschließen.

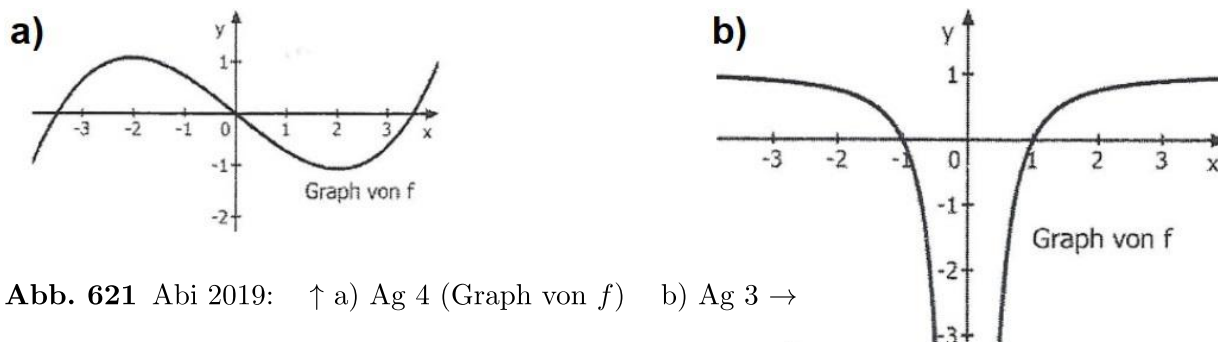


Abb. 621 Abi 2019: ↑ a) Ag 4 (Graph von f) b) Ag 3 →

Aufgabe 4: (2.5 VP) Erst nach Abs. 186/7.1.15 aus Kl. 11

bearbeiten (Partneraufgabe 184/482). Die Abbildung 1098/621a zeigt den Graphen einer Funktion f . a_3) (mit Stoff Klasse 10 lösbar; BAg: 145/344) Einer der Graphen I, II und III aus Abb. 1098/622 gehört zur ersten Ableitungsfunktion von f . Geben Sie diesen Graphen an und begründen Sie, dass die beiden anderen Graphen dafür nicht infrage kommen.

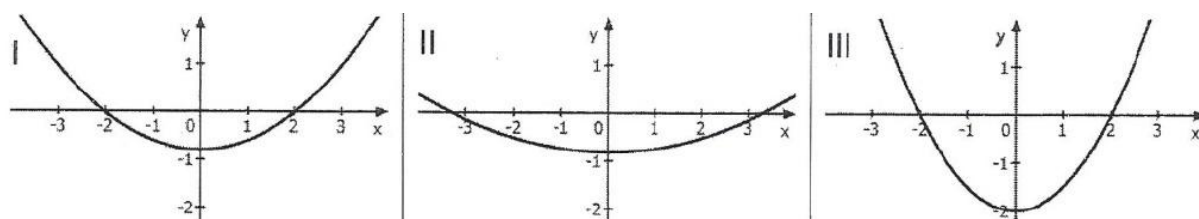


Abb. 622 Abitur 2019: a) Aufgabe 4

mögliche Ableitungsfunktionen

b_3) (BAg: 153/375) Die Funktion F ist eine Stammfunktion von f . Geben Sie das Monotonieverhalten von F im Intervall $[1; 3]$ an. Begründen Sie Ihre Angabe.

Aufgabe 5: (4 VP) Erst nach Abs. 275/10.5 aus Kl. 12 bearbeiten.

Gegeben sind die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ und die Ebene $E: 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 14$.

a_2) (BAg: 268/714) Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von g und E .

b_3) (Nur LK, Basisabschnitt 276/10.5.4) Die Gerade h entsteht durch Spiegelung der Gerade g an der Ebene E . Bestimmen Sie eine Gleichung von h .

Aufgabe 6: (4 VP) Erst nach Abs. 275/10.5 aus Kl. 12 bearbeiten.

Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$.

a_1) (BAg 268/714) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes, in dem g die x_2x_3 -Ebene schneidet.

$b_3)_{LK}$ (BAg: 276/744) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $P(-3 | -1 | 7)$ von der Geraden g .

Aufgabe 7: (3 VP) Kann mit Stoff Klasse 10 gelöst werden (Basisaufgabe (BAg): 335/829).

In einer Urne sind eine rote, eine weiße und drei schwarze Kugeln. Es wird so lange ohne Zurücklegen gezogen, bis man eine schwarze Kugel zieht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

$_1$) A: 'Man zieht genau zwei Kugeln'. $_2$) B: 'Unter den gezogenen Kugeln befindet sich die rote Kugel'.

16.11.24 Wahlteil Analysis Abitur 2019

Basisabschnitte 119/5.4.9 + 125/5.5.4 + 171/6.3.10 + 181/7.1.9

Aufgabe A 1.1 Nur LK, erst nach Abs. 149/6.2.4 aus Kl. 10 oder 11 bearbeiten.

Abb. 1099/623 zeigt den Graphen einer Funktion f , die für $0 \leq t \leq 17$ die Höhe einer Pflanze in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Wochen und $f(t)$ die Höhe in Zentimetern.

a) (4 VP) ₂₎ Geben Sie den Zeitraum an, in dem die Höhe der Pflanze von 20cm auf 40cm zunimmt. ₂₎ Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate der Pflanzenhöhe 3.5 Wochen nach Beobachtungsbeginn. ₃₎ Die Funktion f hat bei $t = 6.5$ eine Wendestelle. Beschreiben Sie die Bedeutung dieser Wendestelle im Sachzusammenhang.

b₃₎ (2.5 VP) Formulieren Sie zu der Gleichung $f(t+2) - f(t) = 5$ eine Fragestellung im Sachzusammenhang. Geben Sie eine Lösung der Gleichung an.

Aufgabe A 1.2 Erst nach Abs. 186/7.1.15 aus Kl. 11 bearbeiten.

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0.25x^3 - 3x^2 + 9x$. Abb. 1100/624a zeigt ihren Graphen.

a) (5 VP) (BAg: 150/361d,e + 183/480) ₁₎ Weisen Sie nach, dass der Punkt $T(6|0)$ Tiefpunkt des Graphen ist. ₂₎ Betrachtet wird die Strecke $\overline{OH}$ zwischen $O(0|0)$ und dem Hochpunkt $H(2|8)$ des Graphen von f . Diese Strecke und der Graph von f begrenzen eine Fläche. Berechnen Sie deren Inhalt.

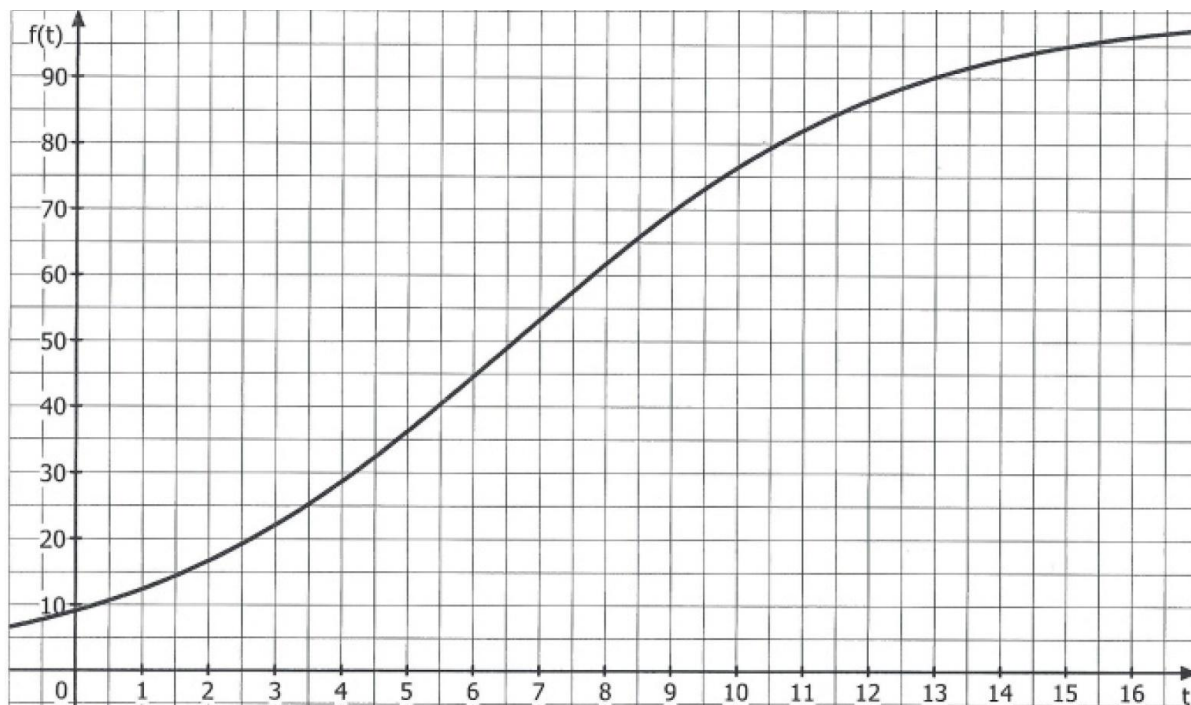


Abb. 623 Höhe einer Pflanze Aufgabe A 1.1 Abi 2019;

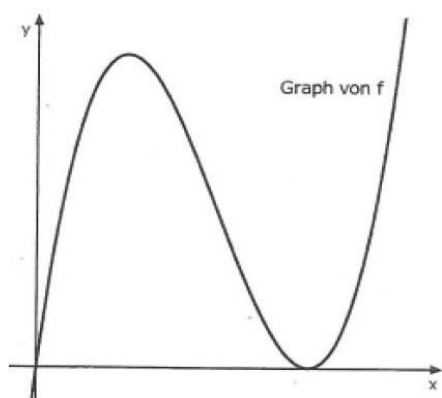
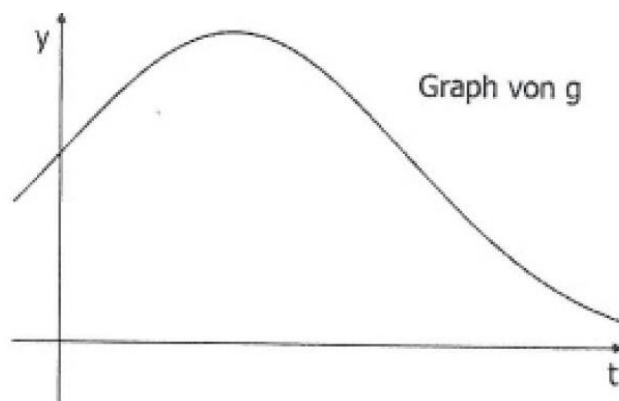
b₂₋₃)_{LK} (3 VP) (BAg: 89/5.1.1 + 115/285 + 364/905) Die Funktion g ist gegeben durch $g(x) = -3 \cdot f(x) - 6$. Beschreiben Sie, wie der Graph von g aus dem Graphen von f entsteht. Bestimmen Sie *damit* die Koordinaten des Tiefpunktes des Graphen von g .

Bemerkung: Das 'damit' wurde von einigen Abiturkorrektoren so interpretiert, dass das 'Einsetzen + Ausrechnen' verboten war und stattdessen nur über den Graph K_f und über die Abbildung $K_f \rightarrow K_g$ argumentiert werden sollte.

c₄₎ (2.5 VP) (BAg: 143/338) Ein Kreis, dessen Mittelpunkt M auf der Geraden mit der Gleichung $x = 1$ liegt, berührt den Graphen von f im Punkt $P(4|4)$. Berechnen Sie die Koordinaten von M .

d₃)_{LK} (3 VP) Für jedes k mit $k \neq 0$ ist eine Funktion f_k gegeben durch $f_k = \frac{1}{2k}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}kx$.

(BAg: 143/336) Berechnen Sie die Werte von k , für die die Tangente an den Graphen von f_k im Punkt $P(1|f_k(1))$ parallel zur Geraden mit der Gleichung $y = 8x + 3$ ist.

**Abb. 624** Abitur 2019: a) Aufgabe A 1.2

b) Aufgabe A 2.1c (Versuchsreihe 2)

Aufgabe A 2.1 Erst nach Abs. 186/7.1.15 aus Kl. 11 bearbeiten.

In einem Labor wird erforscht, wie sich Bakterien unter verschiedenen Bedingungen entwickeln. Betrachtet wird jeweils der Flächeninhalt der von den Bakterien eingenommenen Fläche.

Versuchsreihe 1: Bei ungehinderter Vermehrung wird der Flächeninhalt während der ersten 12 Std beschrieben durch die Funktion f mit $f(t) = 20 \cdot e^{0.1t}$ (t in Std nach Beobachtungsbeginn, $f(t)$ in mm^2).

a₂) (3.5 VP) Bestimmen Sie den Flächeninhalt drei Stunden nach Beobachtungsbeginn. Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem sich der Flächeninhalt im Vergleich zum Beobachtungsbeginn verdreifacht hat. Berechnen Sie die momentane Änderungsrate des Flächeninhalts zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn.

b_{3) LK} (3.5 VP) (BAG: 187/493) Berechnen Sie $\frac{1}{4} \int_5^9 f(t) dt$. Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

(Nur LK) *Versuchsreihe 2:* Wenn man einer Bakterienkultur ein Antibiotikum hinzugibt, dann wird der Flächeninhalt durch die Funktion g beschrieben mit $g(t) = 20 \cdot e^{0.1t - 0.005t^2}$ (t in Stunden nach Beobachtungsbeginn, $g(t)$ in mm^2) Abb. 1100/624b zeigt den Graphen von g .

c_{3) LK} (5 VP) (BAG: 174/441) Der Flächeninhalt nimmt zu einem bestimmten Zeitpunkt seinen größten Wert an. Berechnen Sie diesen Wert. Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem der Flächeninhalt wieder so groß ist wie zu Beobachtungsbeginn.

d_{4) LK} (2 VP) (BAG: 115/285) Betrachtet wird die Funktion h mit $h(t) = g(t + 10)$. Für jede reelle Zahl t gilt: $h(-t) = h(t)$. Erläutern Sie, welche geometrische Eigenschaft des Graphen von g damit begründet werden kann.

Aufgabe A 2.2 Nur LK, kann mit dem Stoff Klasse 10 bearbeitet werden.

Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion $f_t(x)$ gegeben durch $f_t(x) = x^4 - 2tx^2 + 8t$. Der Graph von f_t ist G_t .

a₂) (1 VP) (BAG: 101/242) Bestimmen Sie t so, dass der Punkt $P(1|4)$ auf dem Graphen G_t liegt.

b₃) (2.5 VP) (Partnerabschnitt 152/6.2.5) Jeder Graph G_t hat an der Stelle $x = \sqrt{t}$ einen Tiefpunkt. Berechnen Sie denjenigen Wert von t , für den dieser Tiefpunkt möglichst hoch liegt.

c₃) (2.5 VP) (BAG 101/241 + 101/242) Zeigen Sie, dass es genau zwei Punkte gibt, durch die sämtliche Graphen G_t verlaufen.

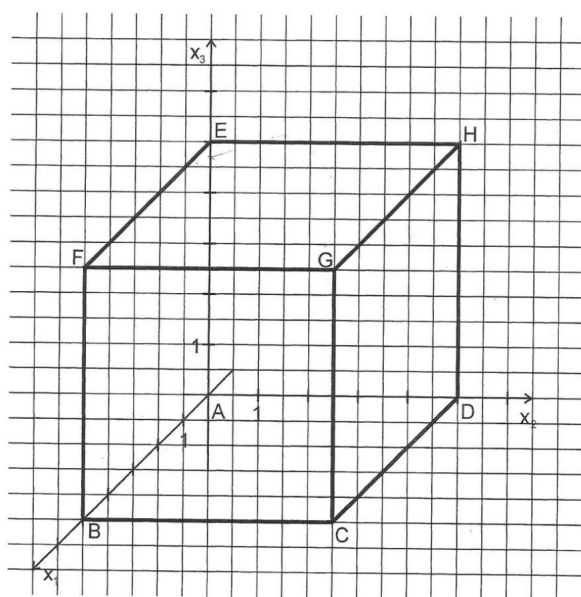
16.11.25 Wahlteil Analytische Geometrie Abitur 2019

Basisabschnitte 261/10.1.15 + 276/10.5.5 + 279/10.5.8

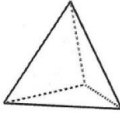
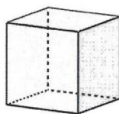
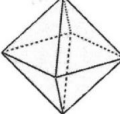
LoeVo Abs. 900/15.11.3

Aufgabe B 1: Erst nach Abs. 275/10.5 aus Kl. 12.

Die Abbildung 1101/625a zeigt den Würfel $ABCDEFGH$ mit $A(0|0|0)$ und $G(5|5|5)$ in einem kartesischen Koordinatensystem. Die Ebene T schneidet die Kanten des Würfels unter anderem in den Punkten $K(5|0|1)$, $L(2|5|0)$, $M(0|5|2)$ und $N(1|0|5)$.



Zu Abi 2019 C1

Körper	Tetraeder	Würfel	Oktaeder
			
Anzahl der Flächen	vier	sechs	acht
beschriftet mit	1, 2, 3, 4	1, 2, 3, 4, 5, 6	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

Zu Abi 2019 C2

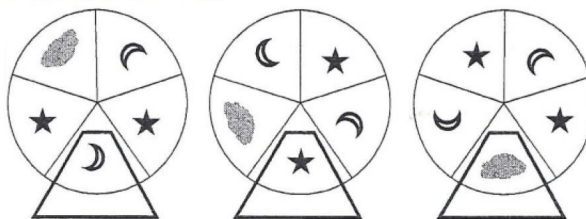


Abb. 625 a) Würfel (Aufgabe B1), (Würfel-) Körper (Aufgabe C1), Glücksräder (Aufgabe C2)
a₁₋₂) (5 VP) (BAg 259/680+267/712+268/714) Zeichnen Sie das Viereck $KLMN$ in Abb. 1101/625a ein. Zeigen Sie, dass das Viereck $KLMN$ ein Trapez ist und zwei gleich lange Seiten hat. Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene T in Koordinatenform. Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von T mit der x_1 -Achse an. (Teilergebnis: $T : 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 30$)

b₃) (2 VP) (BAg 277/750) Die Spitze einer Pyramide mit der Grundfläche $KLMN$ liegt auf der Strecke $\overline{FG}$. Untersuchen Sie, ob die Höhe dieser Pyramide $\frac{18}{\sqrt{66}}$ betragen kann.

c₃)_{LK} (3 VP) (BAg: 268/714 + 269/721) Betrachtet wird die Schar der Geraden $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 0 \\ 3.5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ 2/a \end{pmatrix}$ mit $a > 0, t \in \mathbb{R}$. Begründen Sie, dass keine Gerade der Schar in der Ebene mit der Gleichung $x_3 = 3.5$ liegt. Gegeben ist die Ebene $U : -5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 5$. Untersuchen Sie, ob die Schnittgerade von T und U zur betrachteten Schar gehört.

Aufgabe B 2: Erst nach Abs. 275/10.5 aus Kl. 12.

LoeVo Abs. 902/15.11.4

Die Punkte $A(6|6|0)$, $B(2|8|0)$ und $O(0|0|0)$ sind Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide mit der Spitze $S(4|6|10)$. Die Ebene E enthält die Punkte A , B und $C(2|3|5)$.

a₁₋₂) (3 VP) (BAg 267/712) Stellen Sie die Pyramide in einem geeigneten Koordinatensystem dar. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E . (Teilergebnis: $E : x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 18$).

b₂)_{LK}) (4 VP) (BAg 263/695 + 273/732 - ich weiß, es geht auch einfacher) Zeigen Sie, dass das Dreieck $\Delta(A, B, C)$ gleichschenkelig ist. Berechnen Sie das Volumen der Pyramide, die das Dreieck $\Delta(A, B, C)$ als Grundfläche und den Punkt S als Spitze hat.

c₄)_{LK} (3 VP) (Basisabschnitt: 279/10.5.8) In einem Koordinatensystem, bei dem die x_1x_2 -Ebene den Erdboden beschreibt, stellt die Pyramide $ABOS$ ein Kunstwerk dar (Koordinatenangaben in m). An der Stelle, die durch den Punkt $F(8|3|0)$ beschrieben wird, steht ein Mast senkrecht auf den Erdboden. Auf den Mast treffendes Sonnenlicht lässt sich durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ beschreiben. Der Schattenpunkt der Mastspitze liegt auf der Kante des Kunstwerks, die durch die Strecke $\overline{OS}$ beschrieben wird. Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man die Höhe des Masts rechnerisch bestimmen kann.

16.11.26 Wahlteil Stochastik Abitur 2019

(Basisabschnitt 348/12.3.11)

Aufgabe C 1 Kann mit dem Stoff Klasse 10 bearbeitet werden.

Betrachtet werden Körper, die auf jeder Seitenfläche mit einer Zahl beschriftet sind. Siehe Abb. 1101/625b. Beim Werfen eines Körpers gilt die Zahl als geworfen, auf der der Körper zum Liegen kommt. Dabei werden bei jedem Körper die möglichen Zahlen jeweils mit derselben Wahrscheinlichkeit geworfen.

a₁) (1.5 VP) (BAG 344/854) Ein Tetraeder wird 100-mal geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse.

A: 'Die Zahl 1 wird genau 30-mal geworfen'.

B: 'Die Zahl 1 wird mindestens 20-mal geworfen.'

b₂) (2 VP) (BAG 334/825) Ermitteln Sie, wie oft man ein Tetraeder mindestens werfen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens einmal die Zahl 1 zu werfen.

c₂) (2.5 VP) (BAG 323/799) Ein Tetraeder, ein Würfel und ein Oktaeder werden gleichzeitig geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse. C: 'Bei allen drei Körpern wird dieselbe Zahl geworfen.' D: 'Die Summe der geworfenen Zahlen beträgt 17.'

d₂) (2 VP) (BAG 327/812) Für einen Einsatz von 50 Cent darf ein Spieler ein Tetraeder und einen Würfel einmal werfen. Anschließend erhält er die Anzahl der geworfenen Einsen in Euro ausbezahlt. Bestimmen Sie den Erwartungswert für den Gewinn des Spielers.

Bemerkung: Sie Antwort $E = 1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$ genügt nicht, ist also *uv*.

e₃) (2 VP) In einem Sack befinden sich 20 Körper. Es handelt sich dabei um Tetraeder und Oktaeder, wie sie oben beschrieben sind. Einer dieser Körper wird zufällig gezogen und anschließend geworfen. Die Wk, dabei die Zahl 2 zu werfen, beträgt 15%. Ber. Sie die Anzahl der Tetraeder im Sack.

Aufgabe C 2 a + b ist Stoff Klasse 10; c (nur LK) erst nach Abs. 353/13.1

Ein Glücksspielautomat enthält drei gleiche Glücksräder, die jeweils wie in Abb. 1101/625c dargestellt in fünf gleich große Kreissektoren eingeteilt sind. Bei jedem Spiel werden die Räder in Drehung versetzt und laufen dann unabhängig voneinander aus. Schließlich bleiben sie so stehen, dass von jedem Rad genau ein Symbol im jeweiligen Rahmen angezeigt wird. Ein Spieler gewinnt nur dann, wenn alle drei Räder einen Stern zeigen.

a) (3 VP) (BAG 323/799 + 344/854) ₁) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit bei einem Spiel 6.4% beträgt. Ein Spieler spielt 20 Spiele. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse: ₁) A: 'Der Spieler gewinnt mehr als einmal.' ₂) B: 'Der Spieler gewinnt in genau zwei Spielen und diese folgen direkt aufeinander.'

b₂) (BAG 348/862; 2 VP) Eine Spielerin spielt 9 Spiele. Für ein Ereignis C gilt dabei $P(C) = 0,064^a + 9 \cdot 0,064^8 \cdot 0,936^b$. Geben Sie geeignete Werte für a und b an und beschreiben Sie das Ereignis C im Sachzusammenhang.

c₃)_{LK} (2.5 VP) (BAG 357/884 + 359/892) Es wird vermutet, dass das mittlere Rad zu selten ein Sternsymbol zeigt. Deshalb soll das mittlere Rad auf einem Signifikanzniveau von 3% und einen Stichprobenumfang von 300 Drehungen getestet werden (H_0 : Abs. 1001/15.13.3). Formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

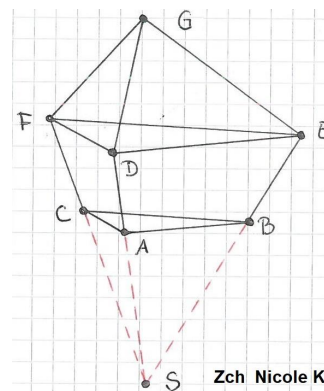
d₄) (2.5 VP) Die Glücksräder des Automaten werden durch drei neue ersetzt, die sich nicht voneinander unterscheiden. Die Glücksräder sind in mehrere gleich große Sektoren unterteilt. Jedes Glücksrad trägt in genau einem Sektor ein Sternsymbol. Man gewinnt bei 50 Spielen mit einer Wahrscheinlichkeit von

mindestens 99% höchstens einmal. Bestimmen Sie die minimale Anzahl der Sektoren pro Glücksrad.

16.11.27 Wahlteil Geometrie Abitur 2018

Die Lösungen finden Sie in den Lösungsvorschlägen von Hurra Mathe im Abschnitt 896/15.11.

Aufgabe B 1 (LoeVo Abs. 896/15.11.1): Das Gebäude eines Museums kann modellhaft durch den abgebildeten Körper $ABCDEFG$ dargestellt werden. Die obere Etage des Museums entspricht der Pyramide $DEFG$, die untere Etage dem Körper $ABCDEF$, der Teil der Pyramide $DEFS$ ist. Die Ebene, in der das Dreieck ABC liegt, beschreibt die Horizontale. Das Dreieck DEF liegt parallel zu dieser Ebene. In einem kartesischen Koordinatensystem gilt für die Lage einiger der genannten Punkte: $A(-5|5|0)$, $B(-5|25|0)$, $D(0|0|15)$, $E(0|30|15)$, $F(-25|5|15)$ und $G(-10|10|35)$. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht $1m$ in der Realität.



a₁₋₂) (Nach Abs 262/10.2; 3.5 VP; BAg 257/672 + 262/691) Weisen Sie nach, dass die Bodenfläche der oberen Etage nicht rechtwinklig ist. Die folgenden

Rechnungen zeigen ein mögliches Vorgehen zur Ermittlung der Koordinaten von S :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -15 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow r = s = 3 \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 15 \\ -30 \end{pmatrix}$$

d.h. $S(-15|15|-30)$. Erläutern Sie die Schritte des dargestellten Vorgehens.

b₂)_{LK} (Nach Abs. 271/10.4; 3 VP; BAg 272/730e + 273/732) Berechnen Sie den Inhalt der Bodenfläche der oberen Etage. Für die obere Etage wird eine Anlage zur Entfeuchtung der Luft installiert, die für jeweils $100m^3$ Rauminhalt eine elektrische Leistung von 0,8 Kilowatt benötigt. Weisen Sie nach, dass zur Entfeuchtung der Luft eine Leistung von 25 Kilowatt ausreichend ist.

c₄)_{LK} (Nach Abs. 275/10.5; 3.5 VP; BAg 277/750 + 256/669g) An einer Metallstange, deren Enden durch die Punkte G und $R(-5|5|15)$ dargestellt werden, ist ein Scheinwerfer befestigt, der sich entlang der Stange verschieben lässt. Die Größe des Scheinwerfers soll vernachlässigt werden. Der Scheinwerfer soll aus einer Entfernung von $8m$ diejenige Wand beleuchten, die im Modell durch das Dreieck EFG dargestellt wird. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes, der die Position des Scheinwerfers im Modell beschreibt.

Aufgabe B 2: (BAg 269/718)

LoeVo Abs. 898/15.11.2

Gegeben sind die Ebenen $E: 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$ und $F: 2x_1 + x_3 = 4$.

a) (Nach Abs. 265/10.3; 3 VP; BAg 269/721 + 275/740) 1) Stellen Sie die Ebene E in einem Koordinatensystem dar. 2) Zeigen Sie, dass E nicht orthogonal zu F ist. 3) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s der Ebenen E und F .

Nur LK: Die Ebenen E und F gehören zur Ebenenschar $E_a: a \cdot x_1 + (a-2) \cdot x_2 + x_3 = 4$, $a \in \mathbb{R}$.

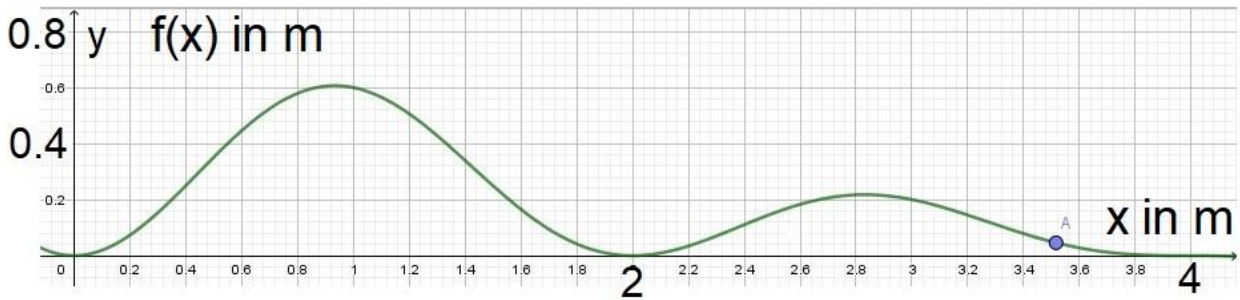
b₂)_{LK} (Nach Abs. 271/10.4; 4 VP; BAg 273/732) Geben Sie an, für welche Werte von a die zugehörige Ebene E_a alle drei Koordinatenachsen schneidet. Für diese Werte von a bilden die Spurpunkte von E_a zusammen mit dem Koordinatenursprung die Eckpunkte einer Pyramide. Bestimmen Sie einen Wert für a so, dass das Pyramidenvolumen 6 VE beträgt.

c₃₋₄)_{LK} (Nach Abs. 275/10.5; 3 VP; BAg 277/750 + 275/741) Bestimmen Sie den Wert für a so, dass der Abstand von $P(0|0|1)$ zu E_a maximal ist. Begründen Sie, dass die Schar keine [verschiedenen] zueinander parallele Ebenen enthält.

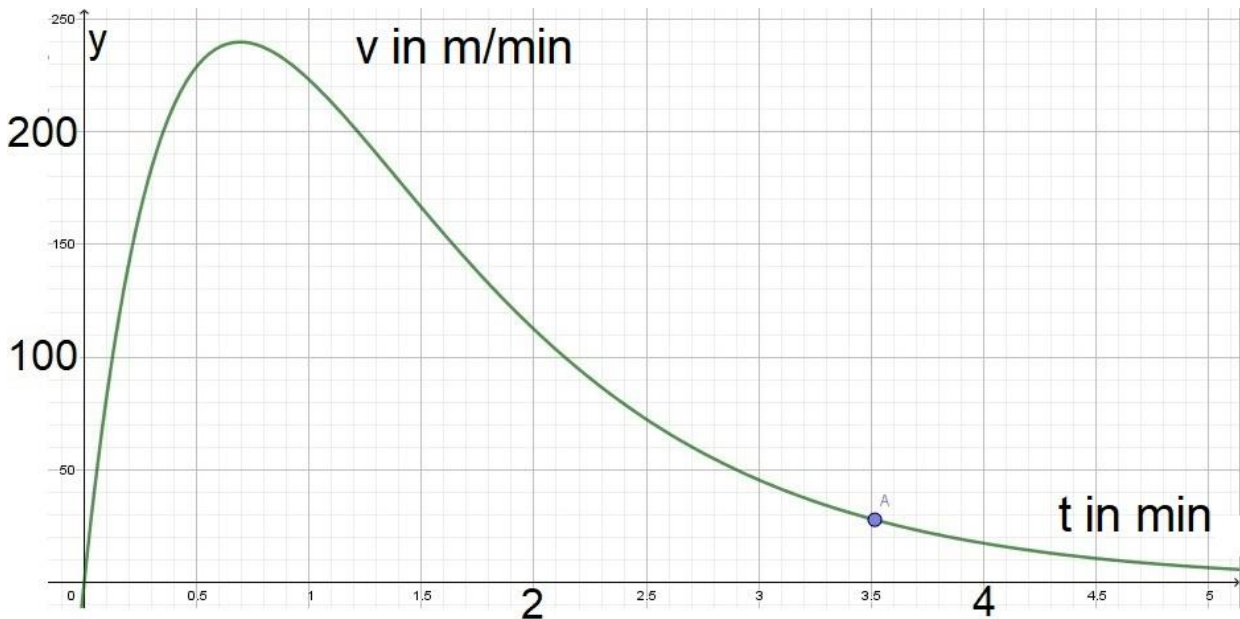
Ende der Abiture

16.11.28 Vergrößerte Graphen zu gewissen Analysis-Wahlteil-Abiaufgaben

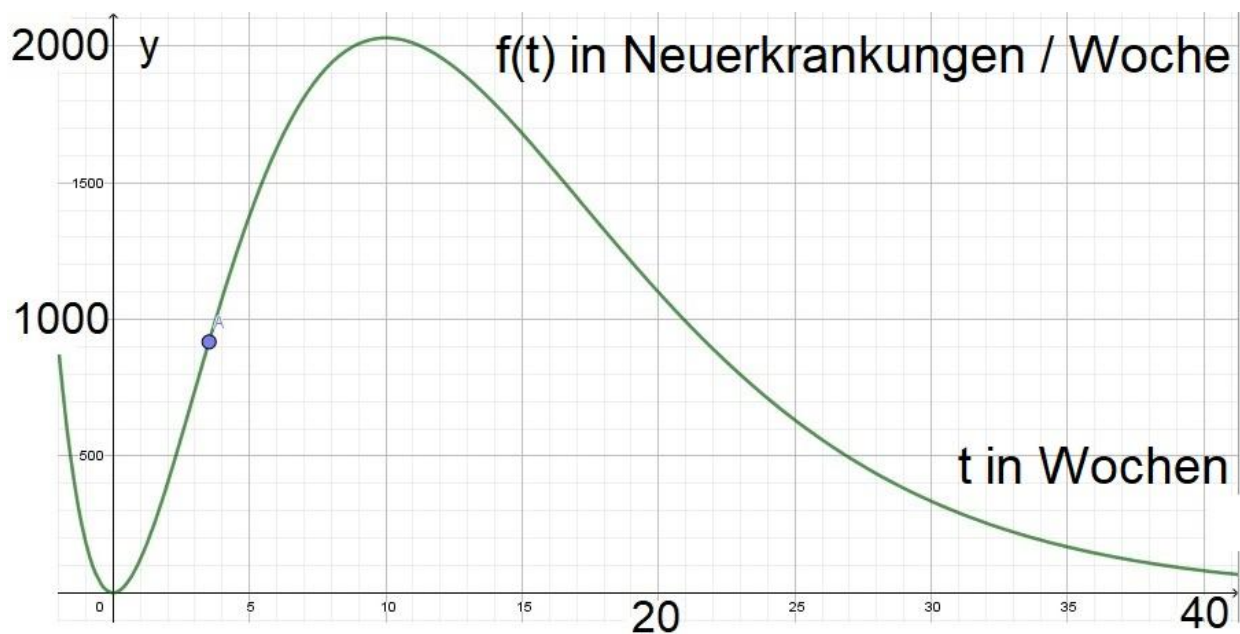
Graph zur Aufgabe 120/297, Minigolfbahn, Abschnitt 5.4.9:



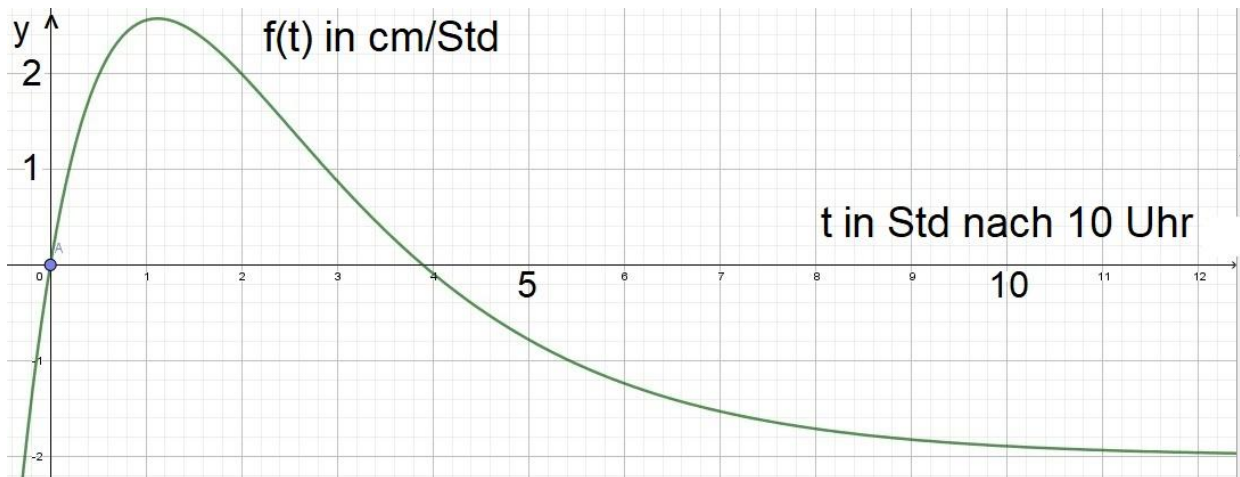
Graph zur Aufgabe 173/437, Boote, Abs 6.3.10:



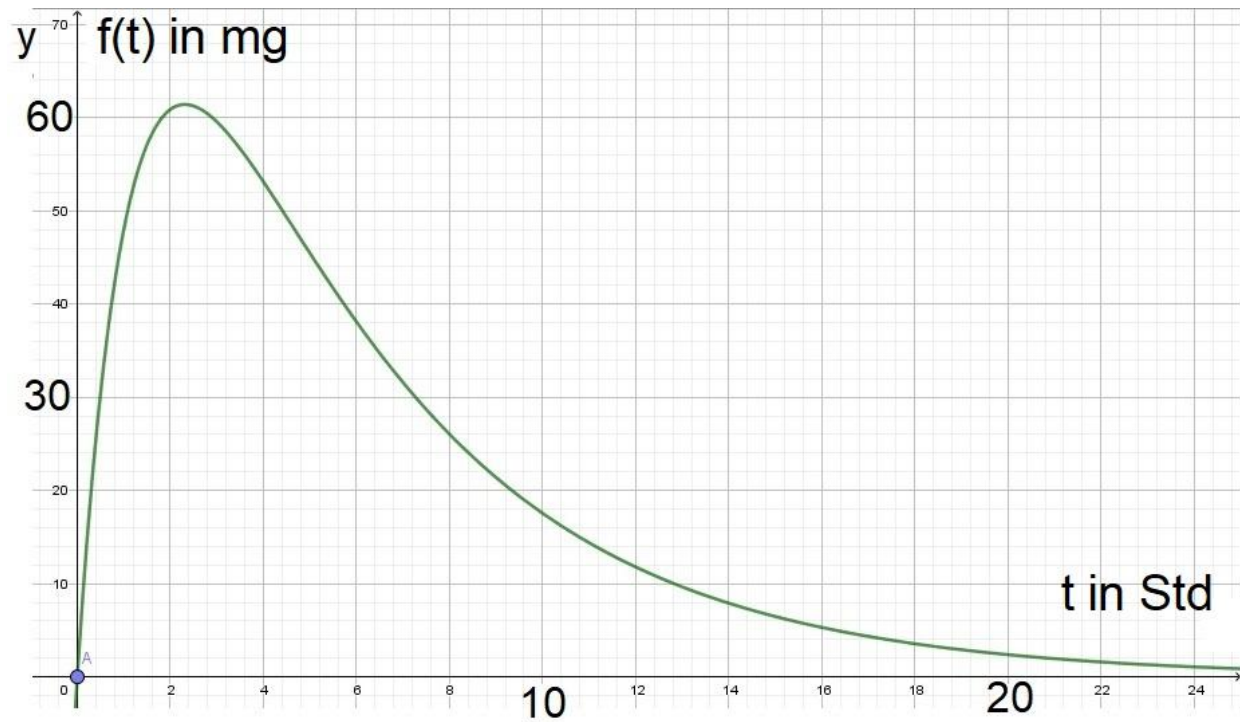
Graph zur Aufgabe 181/470, Virus, Abs 7.1.9 Integralrechnung:



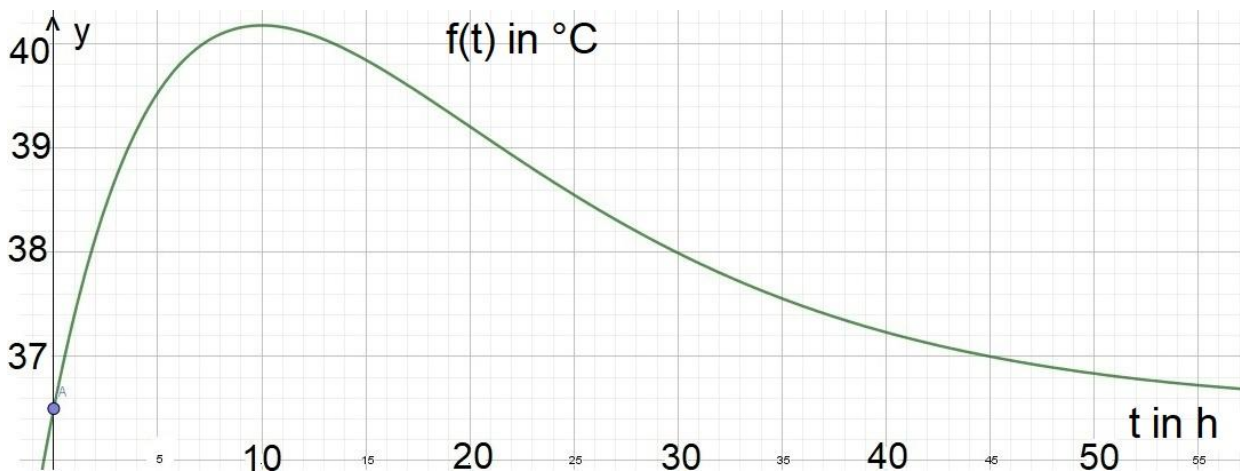
Graph zur Aufgabe 172/434, Skigebiet, Abs 6.3.10 e-Funktion:



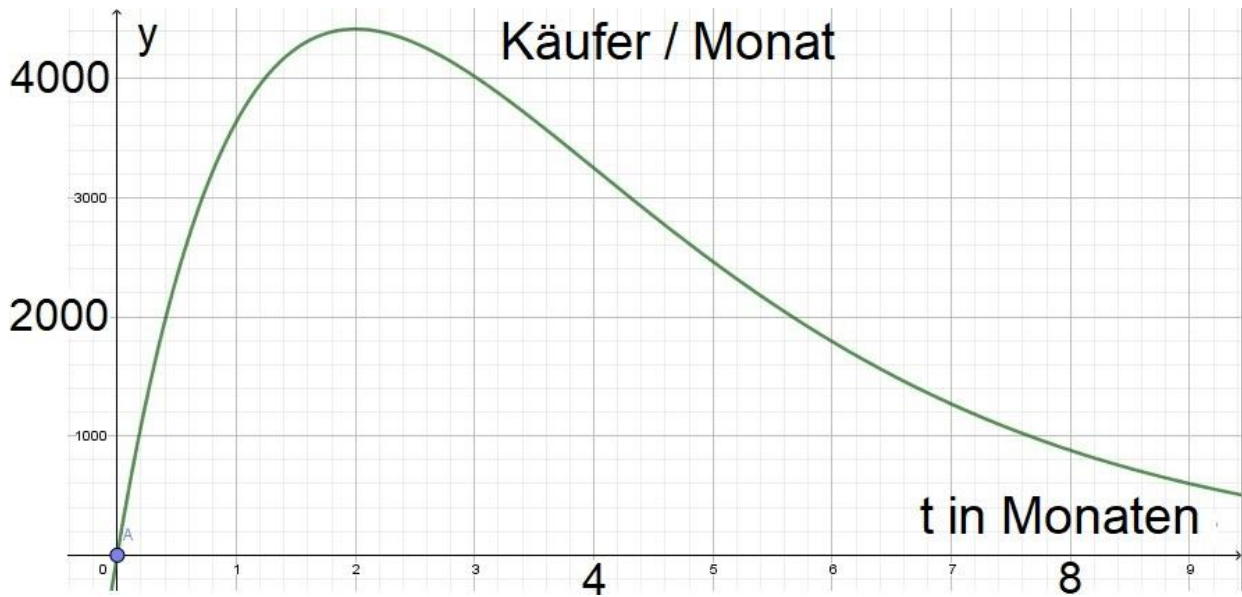
Graph zur Aufgabe 172/435, Medikament, Abs 6.3.10:



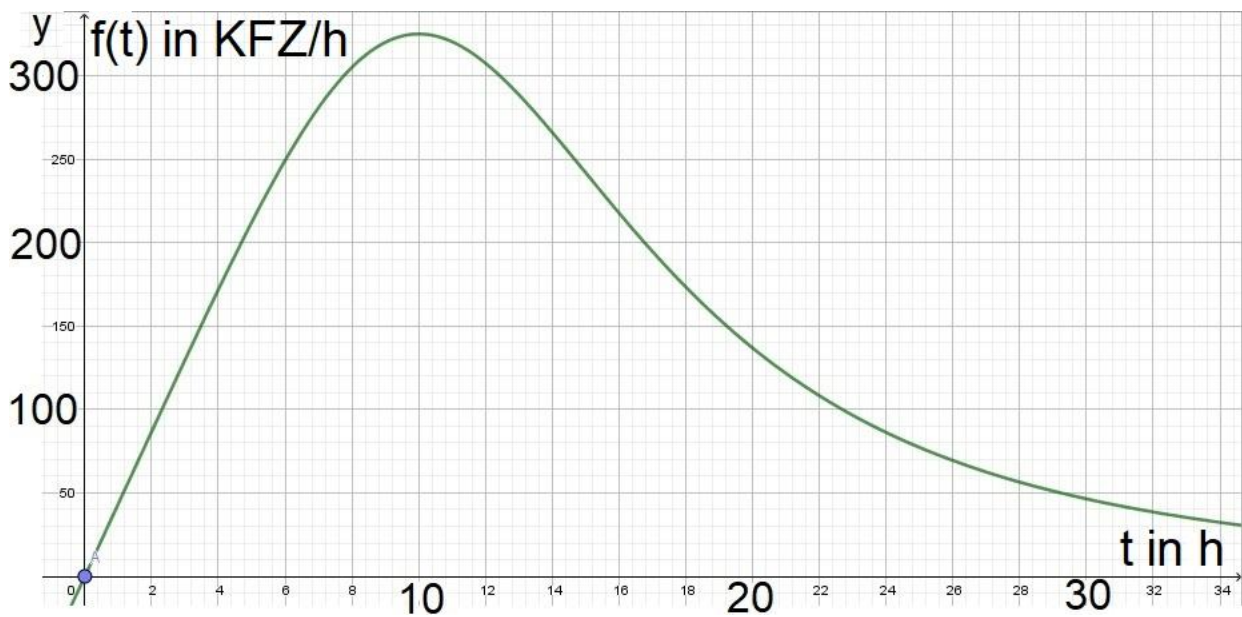
Graph zur Aufgabe 173/436, Fieberkurve, Abs 6.3.10:



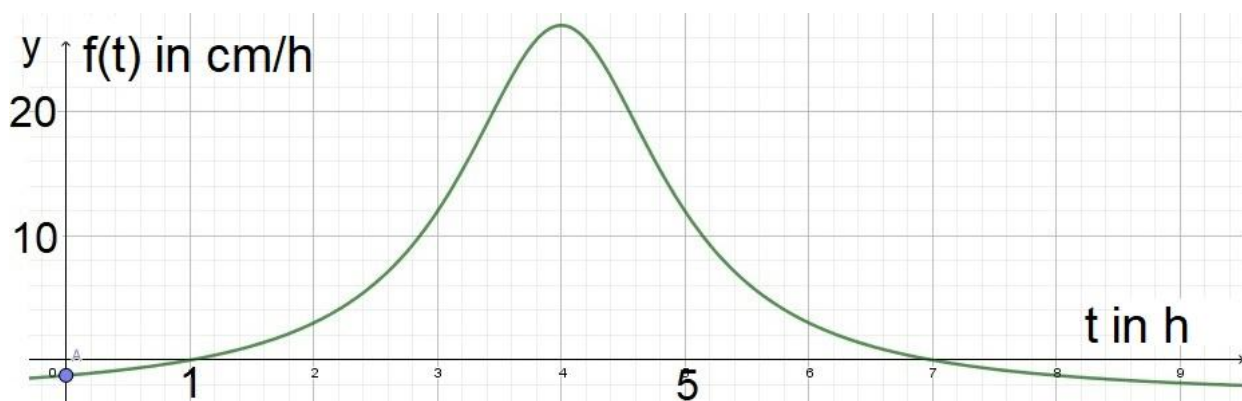
Graph zur Aufgabe 182/471, Smartphone-App, Abs 7.1.9:



Graph zur Aufgabe 125/315, Stau an der Grenze, Abs 5.5.4:



Graph zur Aufgabe 125/316, Schnee im Günter Spät-Stadion, Abs 5.5.4:



16.12 Englisch Mathe Vokabeln Danke an Frau Hambsch**16.12.1 Analysis - Vokabeln**

anti-derivative	Stammfunktion	(Ag 179/455)
area	Fläche	(Ag 179/455)
asymptote	Asymptote	(Ag 156/385)
average rate of change	durchschnittliche Änderung	(Ag 140/323)
chain rule	Kettenregel	(Abs 165/6.3.4)
concaved down / up	rechts / linksgekrümmt	(Ag 151/364)
continious	stetig	(Ag 154/378)
degree	Grad (der Funktion)	(Ag 101/243)
derivation from first principles	Ableiten mit der h-Methode	(Ag 141/326)
derivative	Ableitung	(Ag 142/333)
derived function	Ableitungsfunktion	(Ag 142/333)
differentiable	differenzierbar	(Ag 145/345)
domain	Definitionsmenge	(Ag 102/244)
end behaviour	Globalverlauf	(Abs 104/5.3.7)
equation	Gleichung	(Ag 21/10)
extreme point	Extrempunkt	(Ag 147/351)
Fundamental Theorem of Calculus	Hauptsatz der Diff.u.Integralrechnung	(Ag 178/454)
higher order derivative	höhere Ableitung	
increasing	monoton wachsend	(Ag 153/374)
inflection point	Wendepunkt	(Abs 149/6.2.4)
integral	Integral	(Ag 179/455)
leading term	dominanter Summand	(Ag 105/252)
gradient/slope	Steigung	(Ag 99/238)
graph	Schaubild	(Ag 101/243)
instantaneous rate of change	momentane Änderungsrate	(Ag 140/324)
inverse function	Umkehrfunktion	(Ag 98/234)
normal line	Normale	(Ag 143/337)
parabola	Parabel	(Ag 89/206)
perpendicular	senkrecht	(Ag 143/337)
polynomial function	ganzrationale Funktion	(Abs 99/5.3)
power rule	Potenzregel	(Abs 141/6.1.5)
product rule	Produktregel	(Abs 166/6.3.6)
quadratic formula	Mitternachtsformel	(Abs 32/2.2.6)
range	Wertemenge	(Ag 102/244)
rational function	gebr.rationale Funktion	(Abs 121/5.5)
reflection (in s.th.)	Spiegelung	(Abs 104/5.3.6)
secant line	Sekante	(Ag 236/575)
second derivative	zweite Ableitung	(Ag 149/360)
saddle point	Sattelpunkt (gemeint ist Terrassenpunkt)	(Ag 148/354)
solid of revolution	Rotationskörper	(Ag 185/487)
stationary point	Punkt mit waager. Tangente	(Ag 147/351)
strictly decreasing	streng monoton fallend	(Ag 153/374)
symmetry	Symmetrie	(Abs 111/5.3.13)
tangent line	Tangente	(Ag 142/333)
translation, shifting	Verschiebung	(Abs 103/5.3.5)
trigonometric function	trigonometr. Funktion	(Abs 112/5.4)
vertex	Scheitelpunkt	(Ag 89/206)
x-intercept, zero, root	Nullstelle	(Ag 32/55)
y-intercept	y-Achsenabschnitt	(Ag 32/55)

16.12.2 Vektorrechnung - Vokabeln

cartesian form	Koordinatenform	(Ag 267/711)
cross product	Kreuzprodukt	(Abs 266/10.3.3)
direction	Richtung	(Ag 256/669)
direction vector	Richtungsvektor	(Ag 256/669)
line of intersection	Schnittgerade	(Ag 269/721)
magnitude	Betrag des Vektors	(Ag 255/664)
normal equation	Normalenform	(Ag 266/706)
normal vector	Normalenvektor	(Ag 266/706)
opposite/negative vector	Gegenvektor	(Ag 253/652)
parallel	parallel	(Ag 258/674)
parametric form	Parameterform	(Abs 265/10.3.1)
point of intersection	Schnittpunkt	(Ag 258/673)
plane	Ebene	(Ag 265/704)
position vector	Ortsvektor	(Ag 254/657)
scalar	Skalar	(Ag 253/654)
scalar product	Skalarprodukt	(Ag 262/691)
skew	windschief	(Ag 258/675)
vector equation of a line	Parametergleichung einer Geraden	(Ag 256/669)
unit vector	Einheitsvektor	(Ag 255/664)

16.12.3 Stochastik - Vokabeln

binomial distribution	Binomialverteilung	(Ag 341/848)
binomial experiment	Bernoulli Experiment	(Ag 342/849)
experiment	Experiment	(Ag 317/779)
probability	Wahrscheinlichkeit	(Ag 320/789)
event	Ereignis	(Ag 317/779)
expected value	Erwartungswert	(Abs 326/12.2.2)
failure	Misserfolg	(Ag 342/849)
Gaussian curve	Gauss'sche Glockenkurve	(Ag 347/858)
independent	unabhängig	(Ag 331/819)
intersection	Schnittmenge	(Ag 318/782)
mean/average	Mittelwert	(Ag 326/808)
multi trial experiment	mehrstufiges Experiment	(Abs 437/14.18.5)
normal distribution	Normalverteilung	(Abs 347/12.3.9)
opposite/complementary ev.	Gegenereignis	(Ag 321/794)
outcome	Ergebnis	(Ag 317/779)
probability distribution	Wahrscheinlichkeitsverteilung	(Ag 321/792)
random variable	Zufallsvariable	(Ag 326/809)
replacement	Zurücklegen	(Ag 322/797)
rolling a die	würfeln	(Ag 317/780)
standard deviation	Standardabweichung	(Ag 329/816)
success	Erfolg	(Ag 342/849)
tree diagram	Baumdiagramm	(Ag 318/782)
trial	Durchführung	(Ag 342/849)
tossing a coin	Münze werfen	(Ag 322/796)
two-ways-table	Vierfeldertafel	(Ag 325/807)
union	Vereinigung	(Ag 318/782)
variance	Varianz	(Ag 329/816)

16.12.4 Checkliste für Abiball, Abibuch + Abischerz

Ein guter Unterricht ist das Ergebnis eines guten Zeitmanagements (Abs. 387/14.1.1), gleiches gilt auch für gute Abituraktionen. Für alle Ihre Aktivitäten haben Sie knapp zwei Jahre Zeit zur Planung. Wann haben Sie am wenigsten Zeit dazu? Und wann haben Sie keine Motivation mehr? Richtig, deshalb sollten Sie alles frühzeitig abschließen (O.K. für mich als Sanguiniker ist das eher einfach). Daher gilt: Deadline für Vorschläge und Beiträge aus dem Jahrgang ist 'direkt nach den Sommerferien' - da sind die Studienfahrten vorbei + der Abistress noch eher in weiter Ferne. Weil Sie bis dahin eher nichts bekommen, gilt die zweite (rote) Deadline ist nach den Herbstferien. Sie haben dann bis zu den Weihnachtsferien Zeit auf die Nachzügler Druck zu machen und in den Weihnachtsferien einen groben Projektplan zu erstellen und ggf zu publizieren. In den Faschingsferien können Sie dann alle Nachzügler einbauen. Dann ist alles fertig. Für einen gelungenen Abiball (auch Abistreich) brauchen Sie drei Dinge: Programm, Programm, Programm.

Abiball = G8 Gipfel



Abiball: Das Wichtigste ist (wie schon erwähnt) Programm. Dieses sollte möglichst viele kurze Programmpunkte beinhalten (statt viele lange) und optimalerweise Lehrer einbinden: Steht Lieschen Müller auf der Bühne finden das iA deren Eltern und deren Freunde (beachte Mathematiker haben nur Feinde + Todfeinde) toll. Steht hingegen Frau Mustermann auf der Bühne, so wollen diese iA 28 Familien ihrer Abiturienten, sowie auch einige Familien von Ex-Schülern sehen.

Beispiele (von Jans Abiball)): Diashow mit Bildern aus der Schulzeit; Kahoot zB mit Lehrerkinderbildern (max 15 Stück); Quiz oder Spiele (z.B. Bierpong) Lehrer-Lehrer oder Schüler. Dazu braucht man optimalerweise eine hohe Bühne oder eine Leinwand.

Lehrertisch: Überlegen Sie, ob Sie einen Lehrer (zB mich) den ganzen Abend bespaßen wollen; und selbst wenn Sie sich den ganzen Abend nur um mich kümmern wollen, so sollten Lehrer (für andere Schüler + Eltern) leicht auffindbar (und auch erreichbar) sein $\Rightarrow$ Bitte machen Sie einen eigenen Lehrertisch in exponierter Lage. Exponiert bedeutet nicht unbedingt zentral, sondern vorne am Rand um eine hohe Fluktuationsrate zu ermöglichen und den Zugang zur Bühne zu erleichtern. Bitte stellen Sie auch mehr Tische auf, als Sie brauchen. Oftmals suchen später ankommende Verbände nach einem Platz.

Ich sehe das Kommen zum Abiball schon als Dienstverpflichtung an, nicht aber, dafür 58 € (Abiball 2019) zu bezahlen. Weil das Annehmen von Geschenken nicht ganz unproblematisch ist, sollten Sie optimalerweise die Karten um ε (epsilon) verteuern und gleichzeitig Lehrern **freien** Eintritt ermöglichen.

Abischerz: Als Vorbild kann hier der Jahrgang 2017 dienen, Hier wurde der Rektor entführt und die Lehrer mussten durch Spiele Lehrer gegen Schüler versuchen, ihn zu befreien (was dann sogar gelang). Sind Sie respektvoll; wir Lehrer müssen nach dem Abischerz wieder an die Schule kommen; Sie nicht. Meiden Sie Wasser, denn nach dem Scherz sollte noch Unterricht stattfinden können. Wenn Sie ins Hainbuchstadion gehen (ein guter Ort) sollten Sie verbieten, das 'Grün' zu betreten. 2024 gab es eine Menschentraube um die Attraktion(en): So sahen etwa 50 Leute etwas und 2500 sahen nichts.

Abibuch: In meinen Kursen benenne ich iA einen Reporter, der einen Kursbericht verfasst (Lieber Reporter, bitte seien Sie gnädig). Dies sollten Sie in allen Kursen anregen, denn diese Berichte werden bevorzugt gelesen (Lob an das Abibuch 2019). Bitten Sie ruhig (aber nicht zu fordernd) die Kollegen, etwas für das Abibuch zu schreiben. Auch ich bin dazu bereit, allerdings nur, wenn Sie mir vor dem Druck die Möglichkeit geben, den Artikel zu kontrollieren (im Jahr 2018 wurden meine Artikel + $M \cup M \in M$ 'vergessen' und für solch einen Artikel brauche ich etwa einen Arbeitstag). **Wichtig:** Sortieren Sie bitte die Schülersteckbriefe alphabetisch und nicht nach Tutorkursen; woher soll ich wissen, wer der Tutor ist (wenn ich es nicht selber bin).

Bitte verzichten Sie bei Lehrerzitaten auf Namen. Beispiel: Aus dem Sd Zitat: 'Dr. Engel hat immer dasselbe an' sollte: 'Der (Deutsch-) Kollege ... hat immer dasselbe an' werden. Außerdem sollten (müssen) jedem Kollegen individuell seine eigenen Sprüche zur Kontrolle vorlegen. Das ist Zensur; leider, denn wie schon erwähnt wollen wir nach Erscheinen der Abizeitung hier weiterarbeiten.

Und lassen Sie sich ein Vorabexemplar zur Kontrolle (und viele Augen sehen mehr als zwei) schicken.

16.12.5 Ein kleines Axiomensystem für Abibücher

Nachdem man mich bat, für das Abibuch 2014 (A14) einen Artikel zu schreiben und sich die Proteste über mein pädagogisches Handbuch aus Hurra Mathe 6.5 in Grenzen hielten (ok, ich werde diesen Text diesmal **vorher** korrekturlesen lassen), möchte ich heute wieder einen Artikel für das künftige Abibuch schreiben. An dieser Stelle möchte ich allen danken, die in Abibüchern etwas Nettes über mich geschrieben haben und die bei einer Abstimmung für mich gestimmt haben.

Ein Abibuch wird in der Regel von zwei Gruppen gekauft: **Abiturienten** im Jahre 2014 waren dies: Anzahl Steckbriefe $\cdot$ Quote aus (A14 S.246) $= (198 - 8 + 1) \cdot \frac{162}{162+6} \approx 184$ (Kaufquote 96 %) und **Lehrer** (Potential am FSG ca. 200) gekaufte Exemplare $= 200 - 184 \approx 16$ (Kaufquote knapp 8 %). Was ist zu tun, um diese Kaufquote zu erhöhen? Heute haben mehrere Kollegen meine Abizeitung angeschaut und sich dann entschlossen keine Abizeitung zu kaufen, weil sie sie langweilig fanden. Aber würden Sie ein Buch kaufen, wenn in diesem etwa ein Satz (A14 S.203-204) über Sie steht, den Sie in einem schwachen unbedachten Augenblick gemurmelt haben?

Als Mathematiker definiere ich Ihnen jetzt das folgende Axiomensystem (siehe HM S. 30) für ein oft gekauftes Abibuch. Noch fehlende Grundsätze werden mit dem Gödelschen Unvollständigkeitssatz (siehe HM S. 30) ('Jedes endliche Axiomensystem ist unvollständig') begründet.

Axiom 0: (Prolog) Es gilt der Grundsatz: Kleine Änderung, große Wirkung. Verschlimmbessern Sie nicht, denn im Großen und Ganzen sind Ihre Abibücher richtig gut.

Axiom 1: (Vollständigkeitsaxiom) Jeder potentielle Käufer sollte mehrmals im Abibuch vorkommen.

Axiom 2: (Minimalitätsprinzip) Platz = Geld = Preis (und der sollte eben minimal sein): Viele Schülersteckbriefe passen auf $\frac{1}{2}$ Seite - nicht jeder ist Lea oder Nico (Nico, Sie haben ein gutes Motto ¹ - haben Sie das von mir?) (A14 S.113 und 192). Geben Sie jedem Schüler nur $\frac{1}{2}$ Seite und im Leafall noch $\frac{1}{2}$ Seite dazu. Verzichten Sie auf Leerseiten und fassen Sie kleine Seiten zusammen (A14 S. 199 bis 202). Um Geld zu sparen besorgen Sie sich Sponsoren (die finden Sie in alten Abibüchern oder in der Schülerzeitung) - 2012 war ein Abibuch mit 816 Seiten für 11 Euro zu haben (A12 S. 816). Bitte platzieren Sie die Sponsoren verstreut mitten im Buch (ungerade Seite); nicht geballt am Ende (A 25).

Axiom 3: (Reichhaltigkeitsaxiom) Lehrer und Schüler-Rankings sollten massiv erhöht werden, bis näherungsweise der Zustand von Axiom 1 erreicht ist - beachten Sie aber auch Axiom 2. Analog zu den Studienfahrten kann es Berichte aus vielen Kursen geben - diese werden vom Kurssprecher erstellt oder koordiniert. Tipps für weitere Inhalte wird Ihnen auch die Schülerzeitung geben. Gerne gesehen sind viele 'Bilder aus der Schulzeit' und auch 'Memes' (A 25).

Axiom 4: (Nettikette) Alles was gesagt wird sollte freundlich gesagt werden. Verzichten Sie auf unklare (Kraft-) Ausdrücke auch wenn diese dem Eingeweihten klar sind (A14 S.25, Abimotto). (Implizite) Kritik ist nicht ausgeschlossen und soll natürlich bei der künftigen Unterrichtsplanung helfen.

Axiom 5: (Rechtzeitigkeitsbedingung) Es gilt Murphys Gesetz: Alles, was schiefgehen kann, geht schief. Und schief gehen kostet Zeit (+ Geld). Versuchen Sie einen Großteil des Buches schon in 12/1 fertig zu stellen. Ein Manager sollte auch Sanguiniker (siehe Temperamente oder HM 14) sein, der vor allem einen schnellen Beginn garantiert. Erscheinungsdatum sollte spätestens die Parkplatzparty sein. Das späte Abibuch wird weniger gekauft. Halten Sie sich nicht zu sehr an Douglas Adams: 'I love deadlines. I like the whooshing sound they make as they fly by.'

Gestern + morgen
kannst Du nichts tun ...



Epilog: Die resultierenden Sätze sind Ihnen zur Übung selbst überlassen. Ich würde mich freuen, wenn ich Ihnen ein paar Tipps geben konnte.

Wolfgang Schmid

¹Liebe vergeht, Hektar besteht

Literatur: zum Abschnitt Axiomensystem für Abibücher

A14	Abijahrgang 2014:	Sch .. auf Schule - Hauptsache gutABIZeps	www.abibuch.de	2014
A12	Abijahrgang 2012:	Doppelkorn 2012	KDD GmbH	2012
A 25	Abijahrgang 45 ² :	Abikini knapp aber passt schon		2025
HM:	Wolfgang Schmid:	Hurra Mathematik 6.5	Eigenverlag	2014

16.12.6 Vorwort für Eltern

Wolfgang Schmid

FSG Marbach

Liebe Eltern,

sd@slt.biz

ich freue mich ihr Kind in diesem Schuljahr im Fach Mathematik unterrichten zu dürfen und möchte Ihnen im Folgenden ein paar Informationen zu meinem Unterricht geben. Mathematik ist ein Kernfach und in hohem Maße versetzungsrelevant. Um in Mathematik eine gute Note zu bekommen, sollte ihr Kind sehr viel üben und Üben bedeutet nicht das Nachvollziehen einer vorhandenen Musterlösung. Zu jeder Mathestunde in der Schule sollte Ihr Kind 45 Minuten zu Hause Aufgaben rechnen; dies darf auch in Kleingruppen (oder unter Ihrer Aufsicht) geschehen. Zu diesem Zweck bekommt Ihr Kind am Anfang des Schuljahres einen Auszug meines Buches *Hurra Mathematik* mit vielen Übungsaufgaben und zugehörigen Ergebnissen / Lösungsvorschlägen. Bei wenig motivierten Schülern empfiehlt sich ein bis zwei regelmäßige Termine; dies darf auch unter Ihrer Aufsicht geschehen.

Meine Stoffverteilungspläne und mein Unterrichtsbuch finden Sie im Internet auf sd.slt.biz Auf dieser Seite finden Sie auch alte Manuskripte zum Nachlernen, Klassenarbeitstermine und andere nützliche Informationen. Der Username ist Schueler, das Passwort wird im Unterricht bekanntgegeben.

Im Unterricht wird der Unterrichtsstoff normalerweise anhand von zielführenden Fragestellungen erarbeitet (entdeckendes Lernen). *Hurra Mathematik* stellt (in den Überschriften) einen Bezug zu den eingeführten Lehrwerken her. Hausaufgabe sind grundsätzlich alle Aufgaben (aus *Hurra Mathematik*), die im Unterricht ausgelassen wurden. Die meisten Hausaufgaben sind verfilmt. Bei allen Übungsaufgaben (Türmchenaufgaben) gilt folgende Faustregel: Wer auf Note '1' steht, macht eine, wer auf Note '2' steht macht zwei usw. Der Schwierigkeitsgrad der Übungsaufgaben ist ansteigend, so wird Binnendifferenzierung gewährleistet. Grundsätzlich werden die Hausaufgaben im Unterricht nur auf Anfrage besprochen; die umrahmten Hausaufgaben werden (maximal) ein Mal pro Woche kontrolliert. Mein Unterrichtskonzept finden Sie auf den Seiten 2 bis 4 der ausgeteilten Formelsammlung.

Damit sich Ihr Kind regelmäßig mit Mathematik beschäftigt, schreibe ich jedes Halbjahr etwa 2 Klassenarbeiten und 1 bis 3 Tests (in der Regel angesagt). Bei schlechter Arbeitshaltung der Klasse behalte ich mir jedoch vor, die Tests nicht mehr anzusetzen. Jede Klassenarbeit zählt wie zwei Tests.

Hinzu kommt eine mündliche Note, die ich ebenfalls jeweils wie einen Test werte. Die mündliche Note kann durch Sonderleistungen (in der Regel Vorträge) aufgewertet werden. Sollte sich Ihr Kind dafür entscheiden, bei mir eine GFS zu machen, dann muss es bei mir eine Schulstunde zu einem noch nicht behandelten mathematischen Thema durchführen. Wenn die Zeugnisnote 'ausreichend' angestrebt wird, ohne dass eine Klassenarbeit mit 'ausreichend' oder besser erreicht wurde, gehört zur GFS auch eine mündliche Prüfung, die zu 50% in die Gesamtnote einfließt. Informationen zur GFS finden Sie auf meiner Internetseite oder in der Formelsammlung ab Seite 387.

Nach diesen vielen Informationen freue ich mich auf eine fruchtbare Zusammenarbeit, denn Mathematik macht Spaß.

Freundliche Grüße,

W. Schmid