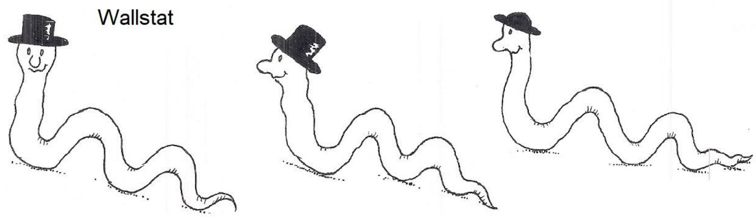
15 Lösungsvorschläge

zu den Aufgaben (Version V 7.4 September 2023)

Im Abschnitt 1.3.3 kommt unser Würmchen Wallstat das erste Mal vor. Der Name ist ein Kunstwort aus Wallschmid aus Abschnitt 14.1.14 und Waldorf und Statler, dies sind die beiden Senioren aus der Muppetsshow, die immer mit mehr oder weniger schlauen meist etwas abschätzigen Bemerkungen aufwarten.



Die Lösungen erstrecken sich über die Seiten 442-948. 978-2-01-520102-3

15.1 Inhaltsverzeichnis: Lösungsvorschläge zu den Kapiteln

15.2 LöVo zu Kapitel 2: Die Algebra der Mittelstufe

15.2.1 LöVo zu Einheit 2.2.1 (Terme: UE 8_1) Seite 442-497

Aufg. 19/1: Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl $\neq 1$, die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist.

a) $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$; b) $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$; c) $32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$; d) $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$; e) $1000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$;

f) $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$; g) $15a^2 = 3 \cdot 5 \cdot a \cdot a$; h) $80a^2b = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot a \cdot a \cdot b$;

i) Bei den Teilermengen der Zahl n: T_n hat jeder Teiler t einen zugeordneten Teiler z mit $t \cdot z = n$. Diese Teiler stehen in den Teilermengen immer zusammen. Zahlen mit Teilern ohne zugeordneten Teiler sind Quadratzahlen.

$T_{24} = \{1{,}24;2{,}12;3{,}8;4{,}6\}$; $T_{36} = \{1{,}36;2{,}18;3{,}12;\ 4{,}9;\ 6\}$; $T_{32} = \{1{,}32;2{,}16;4{,}8\}$;

$T_{30} = \{1{,}30;2{,}15;3{,}10;\ 5,\ 6\}$; $T_{1000} = \{1{,}1000;2{,}500;\ 4{,}250;\ 5;\ 200;\ 8,\ 125;\ 10,\ 100;\ 20,\ 50\}$;

$T_{1001} = \{1{,}1001;7{,}143;11{,}91;\ 13{,}77;\}$;

Aufg. 19/2: a) $3a + 6 = 3(a + 2)$; b) $12 + 4a = 4(3 + a)$; c) $4a + 4b = 4(a + b)$;

d) $12a - 6b = 6(2a - b)$; e) $8a^2 - 16ab = 8a(a - 2b)$; f) $30ab - 45a^2 = 15a(2b - 3a)$;

g) $15ab - 20ac = 3 \cdot 5 \cdot a \cdot b - 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot a \cdot c = 5a(3b - 4c)$; h) $39a^2b^2 - 13ab^2 = 13ab^2(3a - 1)$;

i) $24a^2b - 18ab^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot b - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot a \cdot b \cdot b = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot b(2 \cdot 2a - 3b) = 6ab(4a - 3b)$;

j) $48a^3b^2 - 54a^2b = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot b = 6a^2b(8ab - 9)$;

k) $60ab^2c - 100a^2b = 20ab(3bc - 5a)$; l) $36a^2b^2c - 54a^2bc = 18a^2bc(2b - 3)$;

m) $72a^4b^3c^2 - 32a^2b^3c^4 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot a^4b^3c^2 - 2^5 \cdot a^2b^3c^4 = 8a^2b^3c^2(9a^2 - 4c^2)$;

n) $48a^3b^2 - 96a^4b^2 = 48a^3b^2(1 - 2a)$; o) $600a^2b^2c^2 - 300abc = 300abc(2abc - 1)$;

p) $144a^4bc^2 - 48abc^2 = 48abc^2(3a^3 - 1)$; q) $42a^4b^5c^3 - 63a^3b^4c^3 = 21a^3b^4c^3(2ab - 3)$;

r) $4a + 4 = 2 \cdot 2 \cdot a + 2 \cdot 2 = 4(a + 1)$; **s)** $13 + 13ab = 13 + 13 \cdot a \cdot b = 13(1 + ab)$;
t) $12a + 6 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a + 2 \cdot 3 = 6(2a + 1)$; **u)** $30a + 15a = 45a$;
v) $2a + 6a^2 = 2 \cdot a + 2 \cdot 3 \cdot a \cdot a = 2a(1 + 3a)$;
w) $100a^3 - 25a^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot a \cdot a \cdot a - 5 \cdot 5 \cdot a \cdot a = 25a^2(4a - 1)$;
x) $60a^2b - 180a^3b^3 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a \cdot a \cdot b - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = 60a^2b(1 - 3ab^2)$;
y) $54a^2b^3c - 27a^2b^3 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot c - 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = 27a^2b^3(2c - 1)$;
z) $128a^2b^3c^2 - 256a^2b^3c^4 = 128a^2b^3c^2(1 - 2c^2)$;

Aufg. 19/3: Tipp: Fläche. $(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd.$

a) $(a + c)(b + d) = ab + ad + bc + cd$; b) $(a - b)(c + d) = ac + ad - bc - bd$;

c) $(2a + 3)(3a + 2) = 6a^2 + 4a + 9a + 6 = 6a^2 + 13a + 6$;

d) $(3a + 1)(a + 3) = 3a^2 + a + 9a + 3 = 3a^2 + 10a + 3$;

e) $(2x - y)(y - 3x) = 2xy - 6x^2 - y^2 + 3xy = -6x^2 + 5xy - y^2$;

f) $(3x - 2y)(3y - 2x) = 9xy - 6x^2 - 6y^2 + 4xy = -6x^2 + 13xy - 6y^2$;

g) $(4x - 3y)(5x - 4y) = 20x^2 - 16xy - 15xy + 12y^2 = 20x^2 - 31xy + 12y^2$;

h) $(-8x - 5y)(-3x - 5y) = 24x^2 + 40xy + 15xy + 25y^2 = 24x^2 + 55xy + 25y^2$;

i) Es gilt: $b = a + 1$; $c = a + 2$; $d = a + 3 \Rightarrow (a + 1) \cdot (a + 2) = a^2 + 3a + 2$ ist um 2 größer als $a \cdot (a + 3) = a^2 + 3a$.

j) $(x + 3) \cdot (y + 2) = xy + 2x + 3y + 6$; $(x - 5) \cdot (y - 1) = xy - 5x - y + 5$;

$(4 - x) \cdot (y + 3) = -xy - 3x + 4y + 12$; $(x + 2) \cdot (x + 3) = x^2 + 5x + 6.$

Aufg. 20/4: $(a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (erste binomische Formel)

a) $(a + 3)^2 = a^2 + 6a + 9$; b) $(a + 5)^2 = a^2 + 10a + 25$; c) $(a + 2)^2 = a^2 + 4a + 4$;

d) $(x + 2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$;

e) + f): Thx Trs. f) i) $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$ (1. binomische Formel),
ii) $(3 + x)^2 = x^2 + 6x + 9$ (hier gilt das Kommutativgesetz $a + b = b + a$),
iii) $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$ (2. binomische Formel),
iv) $(3 - x)^2 = x^2 - 6x + 9$ tatsächlich ist $(a - b)^2 = (b - a)^2$, das Minuszeichen $(a - b = -(b - a))$ fällt durch das quadrieren weg.
v) $(-x - 3)^2 = x^2 + 6x + 9$ tatsächlich ist $(-a - b)^2 = (a + b)^2$, wieder fällt das Minuszeichen $-a - b = -(a + b)$ durch das quadrieren weg.
vi) $-(x + 3)^2 = -x^2 - 6x - 9$ (Potenz, hier $(.)^2$ vor Produkt, hier $-(.)$)

g) i) $3(x - 2)^2 = 3(x^2 - 4x + 4) = 3x^2 - 12x + 12$,
ii) $3(2x - 4)^2 = 3(4x^2 - 16x + 16) = 12x^2 - 48x + 48$,
iii) $3(3x - 6)^2 = 3(9x^2 - 36x + 36) = 27x^2 - 108x + 108$,
iv) $3(4x - 8)^2 = 3(16x^2 - 64x + 64) = 48x^2 - 192x + 192$,
v) $3(5x - 10)^2 = 3(25x^2 - 100x + 100) = 75x^2 - 300x + 300$;

verallgemeinert $3(ax - 2a)^2 = 3(a^2x^2 - 4a^2x + 4a^2) = 3a^2x^2 - 12a^2x + 12a^2$;

h) i) $3(4x + 5)^2 = 3(15x^2 + 40x + 25) = 45x^2 + 120x + 75$,
ii) $3(5x + 4)^2 = 3(25x^2 + 40x + 16) = 75x^2 + 120x + 45$,
iii) $4(3x + 5)^2 = 4(9x^2 + 30x + 25) = 36x^2 + 120x + 100$,

iv) $4(5x+3)^2 = 4(25x^2+30x+9) = 100x^2+120x+36$,
v) $5(3x+4)^2 = 5(9x^2+24x+16) = 45x^2+120x+80$,
vi) $5(4x+3)^2 = 5(16x^2+24x+9) = 80x^2+120x+45$;

Alle Aufgaben sind von der Form $a(bx-c)^2)$, wobei a, b und c beliebig angeodnet werden. Alle Ergebnisse haben den Summanden $-120x$ (oder $2abcx$).

vii) $3(4x-5)^2 = 3(15x^2-40x+25) = 45x^2-120x+75$,
viii) $3(-4x+5)^2 = 3(15x^2-40x+25) = 45x^2-120x+75$,
ix) $3(-4x-5)^2 = 3(15x^2+40x+25) = 45x^2+120x+75$,
x) $-3(4x+5)^2 = -3(15x^2+40x+25) = -45x^2-120x-75$,
xi) $-3(4x-5)^2 = -3(15x^2-40x+25) = -45x^2+120x-75$,
xii) $-3(-4x-5)^2 = -3(15x^2+40x+25) = -45x^2-120x-75$,

Es fehlt $-3(-4x+5)^2$ aus Platzgründen, Die $45x^2$ hat immer das gleiche Vorzeichen, wie die 75.

g) i) $4(x+3)^2 = 4(x^2+6x+9) = 4x^2+24x+36)$ (Potenz vor Produkt),
ii) $-4(x+3)^2 = -4(x^2+6x+9) = -4x^2-24x-36$,
iii) $-4(x-3)^2 = -4(x^2-6x+9) = -4x^2+24x-36$,
iv) $(4x+12)^2 = 16x^2+96x+144$ (im Vergleich zu Teil a: Wieder Potenz vor Produkt)
v) $(4x-12)^2 = 16x^2-96x+144$, vi) $(4x-12)\cdot 2 = 8x-24$ hier keine binomische Formel anwenden.

i) $(3x+2y)^2 = 9x^2+12xy+4y^2$;

j) $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$; k) $(3a-2b)^2 = 9a^2-12ab+4b^2$; L) $(6a-3b)^2 = 36a^2-36ab+9b^2$;

m) $(x^2-1)^2 = x^4-2x^2+1$; n) $(y^2-4)^2 = y^4-8y^2+16$; o) $(y^2-x)^2 = y^4-2xy^2+x^2$;

p) $(2x^2-3)^2 = 4x^4-12x^2+9$; q) $(2x^2y-3x)^2 = 4x^4y^2-12x^3y+9x^2$;

r) $(3x^3y^2-2x^2y)^2 = 9x^6y^4-12x^5y^3+4x^4y^2$; s) $(abc-bc)^2 = a^2b^2c^2-2ab^2c^2+b^2c^2$;

t) $(0.5a^2bc^2-bc^2)^2 = 0.25a^4b^2c^4-a^2b^2c^4+b^2c^4$;

u) $x^2-4x+4-(x^2+4x+4) = x^2-4x+4-x^2-4x-4 = -8x$;

v) $(2x-3)^2-(3x-2)^2 = 4x^2-12x+9-(9x^2-12x+4) = 4x^2-12x+9-9x^2+12x-4 = -5x^2+5$;

w) $2(3x-4)^2-4.5(2x-4)^2+(x-6)^2-(x+6)^2$
$= 2(9x^2-24x+16)-4.5(4x^2-16x+16)+(x^2-12x+36)-(x^2+12x+36)$
$= 18x^2-48x+32-18x^2+72x-72+x^2-12x+36-x^2-12x-36 \quad = -40$;

x) $4(x-2y)^2(2x-y) = 4(x^2-4xy+4y^2)(2x-y) = 4(2x^3-8x^2y+8xy^2-x^2y+4xy^2-4y^3) = 8x^3-32x^2y+32xy^2-4x^2y+16xy^2-16y^3 = 8x^3-36x^2y+48xy^2-16y^3$;

y) $4(y-2z)(y-2z)(y+2z)-2(2y-4z)^2(5y+z)+(y+4z)^2(-3y+6z)$
$= 4(y-2z)(y^2-4z^2)-2(4y^2-16yz+16z^2)(5y+z)-3(y^2+8yz+16z^2)(y-2z)$
$= 4(y^3-4yz^2-2y^2z+8z^3)-2(20y^3-80y^2z+80yz^2+4y^2z-16yz^2+16z^3)-3(y^3+8y^2z+16yz^2-2y^2z-16yz^2-32z^3$
$= 4y^3-16yz^2-8y^2z+32z^3-40y^3+160y^2z-160yz^2-8y^2z+32yz^2-32z^3-3y^3-24y^2z-48yz^2+6y^2z+48yz^2+96z^3$
$= 4y^3-40y^3-3y^3+160y^2z-24y^2z-8y^2z+6y^2z-8y^2z-160yz^2+32yz^2-48yz^2+48yz^2-16yz^2-32z^3+96z^3+32z^3 \quad = -39y^3+126y^2z-144yz^2+96z^3$;

z) 1. binomische Formel:	$(a+b)^2$	$= \underline{a^2+2ab+b^2}$
2. binomische Formel:	$(a-b)^2$	$= \underline{a^2-2ab+b^2} = (b-a)^2$
3. binomische Formel:	$(a+b)\cdot(a-b)$	$= \underline{a^2-ab+ba+b^2 \quad = a^2-b^2}$

Aufg. 20/5: a) $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$; i) $(a+b+2)^2 = a^2+b^2+4+2ab+4b+4a$;

ii) $(2a+3b+4)^2 = 4a^2+9b^2+16+16a+24b+12ab$; b+c)$(a+b)^3 = \underline{1}a^3+\underline{3}a^2b+\underline{3}ab^2+\underline{1}b^3$.

1 3 3 1 (und auch 1 2 1) sind Zahlenreihen aus dem Pascalschen Dreieck (siehe Abschnitt 2.7.5).

$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$; $(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$;
$(a+2)^3 = a^3+3\cdot 2a^2+3\cdot 2^2a+2^3 = a^3+6a^2+12a+8$, $(a-4)^3 = a^3-12a^2+48a-64$,

$(2a+3)^3 = 8a^3+36a^2+54a+27$, $(a-1)^4 = a^4-4a^3+6a^2-4a+1$.

Aufg. 20/6: a) $x^2+2xy+y^2 = (x+y)^2$; b) $x^2+2x+1 = (x+1)^2$; c) $x^2-6x+9 = (x-3)^2$;

d) $x^2+4xy+4y^2 = x\cdot x+2\cdot x\cdot 2y+2y\cdot 2y = (x+2y)^2$; e) $4x^2-4x+1 = (2x-1)^2$;

f) $x^2-6xy+9y^2 = (x-3y)^2$; g) $49x^2-42xy+9y^2 = 7x\cdot 7x-2\cdot 7x\cdot 3y+3y\cdot 3y = (7x-3y)^2$;

h) $64v^2+144uv+81u^2 = (8v+9u)^2$; i) $r^2-s^2 = (r+s)\cdot(r-s)$; j) $x^2-9y^2 = (x+3y)\cdot(x-3y)$;

k) $25x^4-4 = (5x^2-2)\cdot(5x^2+2)$; l) $144v^4-169u^2 = (12v^2-13u)\cdot(12v^2+13u)$;

m) $16a^2b^4c^6-9b^2 = (4ab^2c^3-3b)\cdot(4ab^2c^3+3b)$; n) $121a^6b^4-1 = (11a^3b^2-1)\cdot(11a^3b^2+1)$;

o) $16a^6b^4-8a^3b^2+1 = (4a^3b^2-1)^2$; p) $\frac{a^2b^4}{4}-ab^2+1 = (\frac{ab^2}{2}-1)^2$;

Aufg. 20/7: Kein Summand ist eine Quadratzahl; $2a^2-8a+8 = 2(a^2-4a+4) = 2(a-2)^2$;

b) $5a^2+10a+5 = 5(a+1)^2$; c) $5x^2-45 = 5(x-3)\cdot(x+3)$; d) $ab^2+4ab+4a = a(b+2)^2$;

e) $3x^2+18x+27 = 3(x+3)^2$; f) $4y^3-64y = 4y(y-4)\cdot(y+4)$;

g) $125x^3y-5xy = 5xy(5x-1)\cdot(5x+1)$; h) $32xy-8x^3y^5 = 8xy(2-xy^2)\cdot(2+xy^2)$;

Aufg. 20/8:

a) i) $\square = (4/2)^2 = 4, a^2+4a+4 = (a+2)^2$; ii) $\square = (8/2)^2 = 16, a^2+8a+16 = (a+4)^2$;
iii) $\square = (12/2)^2 = 36, a^2+12a+36 = (a+6)^2$; iv) $\square = (16/2)^2 = 64, a^2+16a+64 = (a+8)^2$;
verallgemeinert: $a^2+4na+4n^2 = (a+2n)^2$;

b) i) $\square = (4c/2)^2 = 4c^2$, $a^2-4ac+4c^2 = (a-2c)^2$;
ii) $\square = (6d/2)^2 = 9d^2$, $a^2-6ad+9d^2 = (a-3d)^2$;
iii) $\square = (8e/2)^2 = 16e^2$, $a^2-8ae+16e^2 = (a-4e)^2$;
iv) $\square = (10f/2)^2 = 25f^2$, $a^2-10af+25f^2 = (a-5f)^2$;
verallgemeinert: $a^2+2nax+n^2x2 = (a+nx)^2$

c) i) $4a^2+8a+4 = 4(a^2+2a+1) = 4(a+1)^2; \square = 4$;
ii) $4a^2+16a+16 = 4(a^2+4a+4) = 4(a+2)^2; \square = 16$;
iii) $4a^2+24a+36 = 4(a^2+6a+9) = 4(a+3)^2; \square = 36$;
iv) $4a^2+32a+64 = 4(a^2+8a+16) = 4(a+4)^2; \square = 64$
verallgemeinert: $4a^2+8na+4n^2 = 4(a+n)^2$

Alte Aufgabe:

d) $e+z+\square \rightarrow e+z+\frac{z^2}{4e}$; $\underline{\square = \frac{z^2}{4e}}$

e) $a^2+6ac+\square \quad \Leftrightarrow \square = \frac{(6ac)^2}{4\cdot a^2} = \frac{36a^2c^2}{4\cdot a^2} = 9c^2 \quad \rightarrow a^2+6ac+9c^2 \quad = (a+3c)^2$;
f) $4a^2+4a+\square \quad \Leftrightarrow \square = \frac{(4a)^2}{4\cdot 4a^2} = 1 \quad \rightarrow 4a^2+4a+1 \quad = (2a+1)^2$;
g) $9a^2+24a+\square \quad \Leftrightarrow \square = \frac{(24a)^2}{4\cdot 9a^2} = 16 \quad \rightarrow 9a^2+24a+16 \quad = (3a+4)^2$;
h) $25a^2+100a+\square, \quad \Leftrightarrow \square = \frac{(100a)^2}{4\cdot 25a^2} = 100 \quad \rightarrow 25a^2+100a+100 \quad = (5a+10)^2$,
i) $16a^2+16ac+\square \quad \Leftrightarrow \square = \frac{(16ac)^2}{4\cdot 16a^2} = 4c^2 \quad \rightarrow 16a^2+16ac+4c^2 \quad = (4a+2c)^2$;
j) $a^2+ac+\square, \quad \Leftrightarrow \square = \frac{(ac)^2}{4\cdot a^2} = \frac{c^2}{4} \quad \rightarrow a^2+ac+\frac{c^2}{4} \quad = (a+\frac{c}{2})^2$;
k) $1+3a+\square, \quad \Leftrightarrow \square = \frac{(3a)^2}{4\cdot 1} = \frac{9a^2}{4} \quad \rightarrow 1+3a+\frac{9a^2}{4} \quad = (1+\frac{3a}{2})^2$;

L)	$\frac{a^4}{9}+4a^3+\square$,	$\Leftrightarrow \square=\frac{(4a^3)^2}{4\cdot\frac{a^4}{9}}=\frac{9\cdot 16a^6}{4a^4}=36a^2$	$\to \frac{a^4}{9}+4a^3+36a^2$	$=(\frac{a^2}{3}+6a)^2$;
m)	$a^2+1+\square$,	$\Leftrightarrow \square=\frac{1^2}{4\cdot a^2}=\frac{1}{4a^2}$	$\to a^2+1+\frac{1}{4a^2}$	$=(a+\frac{1}{2a})^2$;
n)	$a^2+2c+\square$,	$\Leftrightarrow \square=\frac{(2c)^2}{4\cdot a^2}=\frac{c^2}{a^2}$	$\to a^2+2c+\frac{c^2}{a^2}$	$=(a+\frac{c}{a})^2$;
o)	$\frac{1}{a^2}+a+\square$	$\Leftrightarrow \square=\frac{a^2}{4\cdot\frac{1}{a^2}}=\frac{a^4}{4}$	$\to \frac{1}{a^2}+a+\frac{a^4}{4}$	$=(\frac{1}{a}+\frac{a^2}{2})^2$;
p)	$\frac{c^2}{a^2}+2c+\square$	$\Leftrightarrow \square=\frac{(2c)^2}{4\cdot\frac{c^2}{a^2}}=a^2$	$\to \frac{c^2}{a^2}+2c+a^2$	$=(\frac{c}{a}+a)^2$;
q)	$\frac{c^2}{4a^2}+\frac{c^2}{a}+\square$	$\Leftrightarrow \square=\frac{(\frac{c^2}{a})^2}{4\cdot\frac{c^2}{4a^2}}=\frac{\frac{c^4}{a^2}}{\frac{c^2}{a^2}}=c^2$	$\to \frac{c^2}{4a^2}+\frac{c^2}{a}+c^2$	$=(\frac{c}{2a}+c)^2$;

Aufg. 21/9: a) $R(a+c;b+d)$.
b) Tipp: Umschließendes Rechteck (Abb. 246). Die Fläche errechnet sich aus dem umschließenden Rechteck mit den Seitenlängen $a+c$ bzw. $b+d$ minus zwei Rechtecke minus 4 Dreiecke.

$A=(a+c)\cdot(b+d)-2bc-2\cdot\frac{ab}{2}-2\cdot\frac{cd}{2}$
$=ab+ad+bc+cd-2bc-ab-cd.$

$$=ad-bc=\det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d\end{pmatrix} \text{ (Determinante).}$$

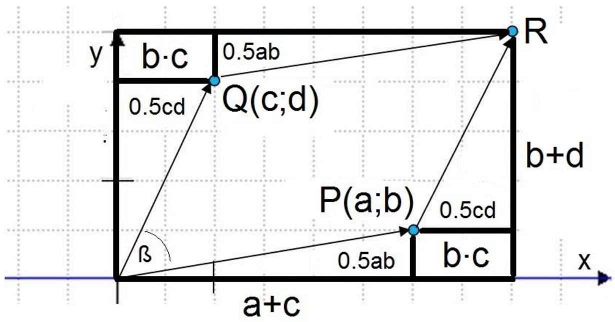


Abb. 246 Fläche eines Parallelogramms

c) Das Indiz ist das Minus-Zeichen. Damit kann die Fläche auch negativ werden. Deshalb ist $ad-bc$ ein sogenannter 'orientierter' Flächeninhalt. $ad-bc<0$, falls der Winkel $\beta<0$ ist.

Aufg. 21/10: a) $3x+2=14 \xrightarrow{-2} 3x=12 \xrightarrow{:3} x=4.$

b) Eine Äquivalenzumformung ist eine Umformung einer Gleichung die deren Lösungsmenge unverändert lässt. Dies sind

Addition eines beliebigen Termes auf beiden Seiten der Gleichung

Multiplikation eines beliebigen Termes $\neq 0$ auf beiden Seiten der Gleichung

Division durch 0 (bzw. durch x) sind verboten

Aufg. 21/11: a) $3x-2=4x+2 \Leftrightarrow x=-4$, b) $6x-4+3x=4x+2 \Leftrightarrow 5x=6 \Leftrightarrow x=1.2$,

c) $(x+2)^2=(x+1)^2 \Leftrightarrow x^2+4x+4=x^2+2x+1 \Leftrightarrow 2x=-3 \Leftrightarrow x=-1.5$,

d) $(x+4)^2-(x+2)^2=0 \Leftrightarrow x^2+8x+16-(x^2+4x+4)=0 \Leftrightarrow 8x+16-4x-4=0 \Leftrightarrow x=-3$,

e) $(3x+2)^2+(4x+2)^2=(5x)^2 \Leftrightarrow 9x^2+12x+4+9x^2+12x+4=25x^2 \Leftrightarrow 24x=-8 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$.

f) $(x+4)(x+8)=(x+2)(x+6) \Leftrightarrow x^2+4x+8x+32=x^2+2x+6x+12$
$\xLeftrightarrow{-x^2-8x-32} 4x=-20 \xLeftrightarrow{:4} x=-5$;

g) $(x+1)(x+3)=(x-3)(x+5) \Leftrightarrow x^2+3x+x+3=x^2+5x-3x-15 \xLeftrightarrow{-x^2-2x-3} 2x=-28 \xLeftrightarrow{:2}$
$x=-14$;

h) $(x-5)^2=(x+5)^2 \Leftrightarrow x^2-x+25=x^2+x+25 \xLeftrightarrow{-x^2-x-25} -2x=0 \xLeftrightarrow{:(-2)} x=0$;

i) $(2x+4)^2+(2x-6)^2=8x^2 \Leftrightarrow 4x^2+16x+16+4x^2-24x+36=8x^2 \xLeftrightarrow{-8x^2-52} -8x=-52 \xLeftrightarrow{:(-8)}$
$x=-6.5$,

j) $(x-2)(x-3)-(4x-5)(6x-7)=10x^2-11x(3x-4)+7$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 2x + 6 - [24x^2 - 28x - 30x + 35] = 10x^2 - 33x^2 + 44x + 7$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 - 24x^2 + 58x - 35 = -23x^2 + 44x + 7 \xleftrightarrow{+23x^2-44x+29} 9x = 36 \overset{:9}{\Leftrightarrow} x = 4;$

k) $(4x-2)^2 - (x-4)(x+4) + 3(x-2)^2 + (3x-1)(2x-4) - (4x+3)^2 - 8(x-4)^2 = -1$
$\Leftrightarrow 16x^2 - 16x + 4 - [x^2 - 16] + 3[x^2 - 4x + 4] + [6x^2 - 12x - 2x + 4] - [16x^2 + 24x + 9] - 8[x^2 - 8x + 16] = -1$
$\Leftrightarrow 16x^2 - 16x + 4 - x^2 + 16 + 3x^2 - 12x + 12 + 6x^2 - 14x + 4 - 16x^2 - 24x - 9 - 8x^2 + 64x - 128 = -1$
$\Leftrightarrow -2x - 101 = -1 \xleftrightarrow{+101} -2x = 100 \xleftrightarrow{:(-2)} x = -50;$

L) $2x[3x - 2(4x+3) + 7] - 2x[5(x+9) - 6x + 1] - 4(3-x)(3-2x)\cdot(-1) - 3(5-8x) = 20(1-5x)$
$\Leftrightarrow 2x[3x - 8x - 6 + 7] - 2x[5x + 45 - 6x + 1] + 4[9 - 6x - 3x + 2x^2] - 15 + 24x = 20 - 100x$
$\Leftrightarrow 2x[-5x+1] - 2x[-x+46] + 4[9 - 9x + 2x^2] - 15 + 24x = 20 - 100x$
$\Leftrightarrow -10x^2 + 2x + 2x^2 + (-92x) + 36 - 36x + 8x^2 - 15 + 24x = 20 - 100x$
$\Leftrightarrow 21 - 102x = 20 - 100x \xleftrightarrow{+100x-21} -2x = -1 \xleftrightarrow{:(-2)} x = 0.5;$

m) $(x-1)^3 - (x+1)^3 = -6(x-2)^2 - 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = -6(x^2 - 4x + 4) - 2 \Leftrightarrow$
$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = -6x^2 + 24x - 26 \xleftrightarrow{+6x^2+2} -24x = -24 \xleftrightarrow{:(-1)} x = 1;$

n) $(x-2)^3 - (x-3)^3 - 3(x-2)^2 = 1 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - [x^3 - 9x^2 + 27x - 27] - 3[x^2 - 4x + 4] = 1$
$\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - x^3 + 9x^2 - 27x + 27 - +3x^2 + 12x - 12 = 1 \Leftrightarrow 7 - 3x = 1 \xleftrightarrow{+7\cdot(-1)} 3x = 6$
$\overset{:3}{\Leftrightarrow} x = 2;$

o) i) $\frac{x}{8} = \frac{3}{8} \overset{\cdot 8}{\Leftrightarrow} x = 3,$

ii) $\frac{x}{4} = \frac{3}{8} \overset{\cdot 8}{\Leftrightarrow} \frac{8x}{4} = 3 \Leftrightarrow 2x = 3 \overset{:2}{\Leftrightarrow} x = 1.5,$

iii) $\frac{x}{3} = \frac{3}{4} \overset{\cdot 12}{\Leftrightarrow} 4x = 9 \overset{:4}{\Leftrightarrow} x = 2.25,$

iv) $\frac{3}{5} = \frac{3}{x} \xleftrightarrow{\cdot 5x} \frac{3\cdot 5x}{5} = \frac{3\cdot 5x}{x} \Leftrightarrow 3x = 15 \overset{:3}{\Leftrightarrow} x = 5,$

v) $\frac{3}{x} = \frac{5}{2} \xleftrightarrow{\cdot 2x} \frac{3\cdot 2x}{x} = \frac{5\cdot 2x}{2} \Leftrightarrow 6 = 5x \overset{:5}{\Leftrightarrow} x = 1.2,$

vi) $\frac{4}{x} = \frac{8}{3} \xleftrightarrow{\cdot 3x} \frac{4\cdot 3x}{x} = \frac{8\cdot 3x}{3} \Leftrightarrow 12 = 8x \overset{:8}{\Leftrightarrow} x = 1.5,$

vii) $\frac{7}{x} = 2 \overset{\cdot x}{\Leftrightarrow} 7 = 2x \overset{:2}{\Leftrightarrow} x = 3.5,$

viii) $\frac{3}{x} = 6 \overset{\cdot x}{\Leftrightarrow} 3 = 6x \overset{:6}{\Leftrightarrow} x = 0.5,$

ix) $\frac{3}{x-1} = 6 \xleftrightarrow{\cdot(x-1)} 3 = 6(x-1) \xleftrightarrow{:2+1} x = 1.5,$

x) $\frac{4}{x-2} = 5 \xleftrightarrow{\cdot(x-2)} 4 = 5(x-2) \xleftrightarrow{:5+2} x = 2.8,$

xi) $\frac{4}{x+1} = \frac{8}{3} \xleftrightarrow{\cdot 3(x+1)} \frac{4\cdot 3(x+1)}{x+1} = \frac{8\cdot 3(x+1)}{3} \Leftrightarrow 12 = 8(x+1) \xleftrightarrow{:8-1} x = 0.5,$

xii) $\frac{3}{x+2} = \frac{5}{4} \xleftrightarrow{\cdot 4(x+2)} \frac{3\cdot 4(x+2)}{x+2} = \frac{5\cdot 4(x+2)}{4} \Leftrightarrow 12 = 5(x+2) \xleftrightarrow{:5-2} 12 = 5(x+2) \Leftrightarrow x = 0.4;$

Aufg. 22/12: a) x : Anzahl der verbrauchten KWh, y : Stromrechnung in €; $y = 0.4x + 120$; $y = 0.4 \cdot 250 + 120 = 220$. Die Rechnung im April waren 220 €.

$240 = 0.4x + 120 \xleftrightarrow{-120} 0.4x = 120 \xleftrightarrow{:0.4} x = 300$. Der Stromverbrauch im Mai waren 300 KWh.

b) x : Zeit in Stunden, y : Länge der Kerze nach x Minuten in cm; $y = -0.9x + 18$;

i) $-0.9 \cdot 8 + 18 = 10.8$. Nach 8 Stunden ist sie 10.8 cm lang.

ii) $13.5 = -0.9x + 18 \xleftrightarrow{-18} -4.5 = -0.9x \xleftrightarrow{:0.9} x = 5$. Nach 5 Stunden ist sie 13.5 cm lang.

iii) $0 = -0.9x + 18 \xleftrightarrow{+0.9x} 0.9x = 18 \xleftrightarrow{:0.9} x = 20$. Nach 20 Stunden ist sie 0 cm lang, also vollständig abgebrannt.

c) x : Anzahl der gefahrenen Kilometer, y : Preis der Taxifahrt in €;

$y = 0.8x + 4$; $10.40 = 0.8x + 4 \overset{-4}{\Longleftrightarrow} 6.3 = 0.8x \overset{:0.8}{\Longleftrightarrow} x = 8$. Herr Maier ist 8 km gefahren.

Aufg. 22/13: Die Luft des Zimmers und von draußen werden gemischt. Weil die Luftmenge draußen normalerweise viel größer ist, sind auf lange Sicht im Zimmer etwa 9° zu erwarten. Tatsächlich macht auch die Luft im Zimmer die Luft draußen ein ganz klein wenig wärmer.

a) Nektar	Wasser	Gemisch
3	2	5
0.5	0	$\mid x$
1.5	0	1.5

$5 \cdot x = 1.5 \Leftrightarrow x = 0.3$,

b) Säure	Wasser	Gemisch
2	5	7
0.7	0	$\mid x$
1.4	0	1.4

$7 \cdot x = 1.4 \Leftrightarrow x = 0.2$,

c) Säure 1	Säure 2	Gemisch
4	6	10
0.3	0.1	$\mid x$
1.2	0.6	1.8

$10 \cdot x = 1.8 \Leftrightarrow x = 0.18$,

c) + Richtung von links nach rechts; Mal Richtung von oben nach unten. Die Tabelle hat einen Doppelstrich, weil in Zeile 3 das '+' nicht funktioniert. Es wäre auch falsch, Konzentrationen zu addieren.

Aufg. 22/14:

a) i) 70% Säure	30% Säure	Gemisch
11	9	20
0.7	0.3	$\mid x$
7.7	2.7	10.4

$20 \cdot x = 10.4 \Leftrightarrow x = \frac{10.4}{20} = 0.52$ (52 %)

a) ii) 50% Säure	10% Säure	Gemisch
17	8	25
0.5	0.1	$\mid x$
8.5	0.8	9.3

$25 \cdot x = 9.3 \Leftrightarrow x = \frac{9.3}{25} = 0.372$ (37.2 %)

a) iii) 40% Säure	90% Säure	Gemisch
14	11	25
0.4	0.9	$\mid x$
5.6	9.9	15.5

$25 \cdot x = 15.5 \Leftrightarrow x = \frac{15.5}{25} = 0.62$ (62 %)

a) iv) 20% Säure	70% Säure	Gemisch
16	9	25
0.2	0.7	$\mid x$
3.2	6.3	9.5

$25 \cdot x = 9.5 \Leftrightarrow x = \frac{9.5}{25} = 0.38$ (38 %)

10% Säure	30% Säure	25% Säure
1	x	$x+1$
0.1	0.3	$\mid 0.25$
0.1	$0.3 \cdot x$	$0.25 \cdot (x+1)$

b) i)

$$\begin{aligned} 0.1 + 0.3x = 0.25(x+1) \quad &\Leftrightarrow \quad 0.1 + 0.3x = 0.25x + 0.25 \\ &\Leftrightarrow \quad 0.05x = 0.15 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \tfrac{0.15}{0.05} = 3. \end{aligned}$$

Man muss 3 Liter zugeben; man hat dann 4 Liter 25 prozentiger Säure.

40% Säure	10% Säure	30% Säure
8	x	$x+8$
0.4	0.1	$\mid 0.3$
3.2	$0.1 \cdot x$	$0.3 \cdot (x+8)$

b) ii)

$$\begin{aligned} 3.2 + 0.1x = 0.3(x+8) \quad &\Leftrightarrow \quad 3.2 + 0.1x = 0.3x + 2.4 \\ &\Leftrightarrow \quad 0.2x = 0.8 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \tfrac{0.8}{0.2} = 4. \end{aligned}$$

Man muss 4 Liter zugeben; man hat dann 12 Liter 30 prozentiger Säure.

20% Säure	50% Säure	40% Säure
1	x	$x+1$
0.2	0.5	$\mid 0.4$
0.2	$0.5 \cdot x$	$0.4 \cdot (x+1)$

b) iii)

$$\begin{aligned} 0.2 + 0.5x = 0.4(x+1) \quad &\Leftrightarrow \quad 0.2 + 0.5x = 0.4x + 0.4 \\ &\Leftrightarrow \quad 0.1x = 0.2 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \tfrac{0.2}{0.1} = 2. \end{aligned}$$

Man muss 2 Liter zugeben; man hat dann 3 Liter 40 prozentiger Säure.

30% Säure	50% Säure	43% Säure
7	x	$x+7$
0.3	0.5	$\mid 0.43$
2.1	$0.5 \cdot x$	$0.43 \cdot (x+7)$

b) iv)

$$\begin{aligned} 2.1 + 0.5x = 0.43(x+7) \quad &\Leftrightarrow \quad 2.1 + 0.5x = 0.43x + 3.01 \\ &\Leftrightarrow \quad 0.07x = 0.91 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \tfrac{0.91}{0.07} = 13 \end{aligned}$$

Man muss 13 Liter zugeben; man hat dann 20 Liter 43 prozentiger Säure.

20% Säure	40% Säure	24% Säure
x	$5-x$	5
0.2	0.4	$\vert$ 0.24
$0.2 \cdot x$	$0.4 \cdot (5-x)$	1.2

c) i)

$$\begin{aligned} 0.2x + 0.4(5-x) = 1.2 &\Leftrightarrow 0.2x + 2 - 0.4x = 1.2 \\ &\Leftrightarrow 0.2x = 0.8 \\ &\Leftrightarrow x = \tfrac{0.8}{0.2} = 4 \end{aligned}$$

Man braucht 4 Liter 20% Säure und 1 Liter 40% Säure um 5 Liter 24 prozentiger Säure zu mischen.

30% Säure	40% Säure	33% Säure
x	$10-x$	10
0.3	0.4	$\vert$ 0.33
$0.3 \cdot x$	$0.4 \cdot (10-x)$	3.3

c ii)

$$\begin{aligned} 0.3x + 0.4(10-x) = 3.3 &\Leftrightarrow 0.3x + 4 - 0.4x = 3.3 \\ &\Leftrightarrow 0.1x = 0.7 \\ &\Leftrightarrow x = \tfrac{0.7}{0.1} = 7 \end{aligned}$$

Man braucht 7 Liter 30% Säure und 3 Liter 40% Säure um 10 Liter 33 prozentiger Säure zu mischen.

20% Säure	60% Säure	36% Säure
x	$5-x$	5
0.2	0.6	$\vert$ 0.36
$0.2 \cdot x$	$0.6 \cdot (5-x)$	1.8

c) iii)

$$\begin{aligned} 0.2x + 0.6(5-x) = 1.8 &\Leftrightarrow 0.2x + 3 - 0.6x = 1.8 \\ &\Leftrightarrow 0.4x = 1.2 \\ &\Leftrightarrow x = \tfrac{1.2}{0.4} = 3 \end{aligned}$$

Man braucht 3 Liter 20% Säure und 2 Liter 60% Säure um 5 Liter 36 prozentiger Säure zu mischen.

50% Säure	30% Säure	43% Säure
x	$20-x$	20
0.5	0.3	$\vert$ 0.43
$0.5 \cdot x$	$0.3 \cdot (20-x)$	8.6

c) iv)

$$\begin{aligned} 0.5x + 0.3(20-x) = .68 &\Leftrightarrow 0.5x + 6 - 0.3x = 8.6 \\ &\Leftrightarrow 0.5x = 2.6 \\ &\Leftrightarrow x = \tfrac{2.6}{0.5} = 13 \end{aligned}$$

Man braucht 13 Liter 50% Säure und 7 Liter 30% Säure um 20 Liter 43 prozentiger Säure zu mischen.

Aufg. 22/15:

a) x	-2	-1	0	1	2	3	4
$x \cdot (x-2)$	8	3	0	-1	0	3	8

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$(x+1) \cdot (x-3)$	5	0	-3	-4	-3	0	5

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$(x+2) \cdot (2x-6) \cdot (1-x)$	140	48	0	-16	-12	0	8	0	-36

b) Satz vom Nullprodukt: Ein Produkt $a \cdot b = 0$, wenn ein Faktor $\underline{=0}$ ist F14.

c) $(x-3) \cdot (x+1) = 0 \Leftrightarrow (x-3) = 0$ oder $(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ oder $x = -1$;

d) $x \cdot (x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = 2$;

e) $3(x+4) \cdot (x+2) = 0 \Leftrightarrow (x+4) = 0$ oder $(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = -4$ oder $x = -2$;

f) $(2x+4) \cdot (3x+3) = 0 \Leftrightarrow (2x+4) = 0$ oder $(3x+3) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ oder $x = -1$;

g) $(2x+1.5) \cdot (3x-1.5) = 0 \Leftrightarrow (2x+1.5) = 0$ oder $(3x-1.5) = 0 \Leftrightarrow x = -0.75$ oder $x = 0.5$;

h) $3(x+1) \cdot (2x-4) \cdot (x-3) = 0 \Leftrightarrow (x+1) = 0$ oder $(2x-4) = 0$ oder $(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ oder $x = 2$ oder $x = 3$;

i) $3(x-1)^2 \cdot (5x-3) \cdot (2x-5) = 0 \Leftrightarrow (x-1) = 0$ (eigentlich zwei mal) oder $(5x-3) = 0$ oder $(2x-5) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ oder $x = 0.6$ oder $x = 2.5$;

j) $-(2x+8)^2 \cdot (4x-6) \cdot (x-7) = 0 \Leftrightarrow (2x+8) = 0$ oder $(4x-6) = 0$ oder $(x-7) = 0 \Leftrightarrow x = -4$ oder $x = 1.5$ oder $x = 7$;

Aufg. 22/16: a) $3x + 7 + 4x = 3 + 7x + 2 \Leftrightarrow 7 = 5$. Diese Gleichung kann <u>nicht</u> gelöst werden, weil sich die <u>Unbekannte x</u> auf beiden Seiten der Gleichung <u>weghebt</u>. Damit ist $\mathbb{L} = \underline{\emptyset}$.

b) i) $3x + 7 + 4x = 4 + 7x + 2 \Leftrightarrow 7 = 6$ ↯ $\Rightarrow \mathbb{L} = \{\}$;

ii) $3x + 7 + 4x = 5 + 7x + 2 \Leftrightarrow 7 = 7 \Rightarrow \mathbb{L} = \mathbb{Q}$; und iii) $3x + 7 + 4x = -7x + 7 \Leftrightarrow 14x = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

iv) $2(x-3) = 5(x-3) \Leftrightarrow 2x - 6 = 5x - 15 \overset{-5x+6}{\Longleftrightarrow} -3x = -9 \overset{:(-3)}{\Longleftrightarrow} x = 3$, Eine Division durch $x-3$ ist verboten - dividiere nie durch x.

v) $(x+4)(x-3) = (x-2)(x+3) \Leftrightarrow x^2+x-12 = x^2+x-6 \xLeftrightarrow{-x^2-x+6} -6 = 0 \;\lightning \Rightarrow \mathbb{L} = \{\}$.

Aufg. 22/17: Siehe Abb. 247

a) $a = 1: \frac{6}{x-1} = 1 \xLeftrightarrow{\cdot(x-1)} x - 1 = 6 \xLeftrightarrow{+1} x = 7;$

$a = 2: \frac{6}{x-1} = 2 \xLeftrightarrow{\cdot(x-1)} 2\cdot(x-1) = 6 \xLeftrightarrow{:2} x - 1 = 3 \xLeftrightarrow{+1} x = 4;$

$a = 3: \frac{6}{x-1} = 3 \xLeftrightarrow{\cdot(x-1)} 3\cdot(x-1) = 6 \xLeftrightarrow{:3} x - 1 = 2 \xLeftrightarrow{+1} x = 3;$

$a = 4: \frac{6}{x-1} = 4 \xLeftrightarrow{\cdot(x-1)} 4\cdot(x-1) = 6 \xLeftrightarrow{:4} x - 1 = 1.5 \xLeftrightarrow{+1} x = 2.5;$

b) $\frac{6}{x-1} = a \xLeftrightarrow{\cdot(x-1)} a\cdot(x-1) = 6 \xLeftrightarrow{:a} \frac{6}{a} = x - 1 \xLeftrightarrow{+1} \frac{6}{a} + 1 = x;$

Damit darf a nicht 0 sein, also 'Sei $a \neq \underline{0}$'.

c) Die Lösung wird immer kleiner: $a = 5$: $x = 2.2$, $a = 6$: $x = 2$, $a = 7$: $x = 1 + \frac{6}{7}$, $a = 8$: $x = 1 + \frac{6}{8}$, $a = 9$: $x = 1 + \frac{6}{9}$, für sehr große a geht x gegen 1.

d) $a = 0$: geht nicht, $a = -1$: $x = 1 + \frac{6}{-1} = -5$, $a = -2$: $x = 1 + \frac{6}{-2} = -2$,
$a = -3$: $x = 1 + \frac{6}{-3} = -1$, $a = -4$: $x = 1 + \frac{6}{-4} = -0.5$, $a = -5$: $x = 1 + \frac{6}{-5} = -0.2$,
$a = -6$: $x = 1 + \frac{6}{-6} = 0$, $a = -7$: $x = 1 + \frac{6}{-7}$, für sehr keine a geht x (wieder) gegen 1.

Aber da war doch der große Wert für $a = 1$! $a = 0.5$: $x = 1 + \frac{6}{0.5} = 13$, $a = 0.1$: $x = 1 + \frac{6}{0.1} = 61$, $a = 0.01$: $x = 1 + \frac{6}{0.01} = 601$, für a gegen 0 geht x gegen unendlich. Die Aufgabe heißt also finde die kleinste Zahl > 0 und die gibt es nicht :)

e) $x = 3: \frac{6}{a} + 1 = 3 \xLeftrightarrow{-1} \frac{6}{a} = 2 \xLeftrightarrow{\cdot a} 2a = 6 \xLeftrightarrow{:2} a = 3$ - siehe auch Teil a);

$x = 2: \frac{6}{a} + 1 = 2 \xLeftrightarrow{-1} \frac{6}{a} = 1 \xLeftrightarrow{\cdot a} a = 6$ siehe wieder Teil a);

$x = 1: \frac{6}{a} + 1 = 1 \xLeftrightarrow{-1} \frac{6}{a} = 0 \xLeftrightarrow{\cdot a} 6 = 0 \;\lightning;$

$x = 0: \frac{6}{a} + 1 = 0 \xLeftrightarrow{-1} \frac{6}{a} = -1 \xLeftrightarrow{\cdot a} 6 = -a \xLeftrightarrow{:(-1)} a = -6;$ - siehe auch Teil d);

f) Im Teil d) erkennen wir, dass für a zwischen -6 und 0 das x negativ ist (genauer $-6 < a < 0$).

Abb. 247 LöVo zur Ag 22/17; leider ist die Originallösung verloren gegangen

Aufg. 23/18: a) $x + 2a = 6 \xLeftrightarrow{-2a} x = 6 - 2a;$
b) $2x + 4a = 8 \xLeftrightarrow{-4a} 2x = 8 - 4a \xLeftrightarrow{:2} x = \frac{8-4a}{2} = 4 - 2a;$
c) $3x - 12a + 5 = 2 \xLeftrightarrow{-5+12a} 3x = 12a - 3 \xLeftrightarrow{:3} x = \frac{12a-3}{3} = 4a - 1;$
d) $14x - 6a + 3 = 12x + 4a + 3 \xLeftrightarrow{+6a-3-12x} 2x = 10a \xLeftrightarrow{:2} x = 5a;$
e) $2x + 2a + 3b = 6x + 4a - 3b \xLeftrightarrow{-6x-2a-3b} -4x = 2a - 6b \xLeftrightarrow{:(-4)} x = \frac{2a-6b}{-4} = -0.5a + 1.5b;$
f) $4x - 3a - 2b = 3b - 2a - x \xLeftrightarrow{+3a+2b+x} 5x = a + 5b \xLeftrightarrow{:5} x = 0.2a + b;$

g) i) $x = \frac{1}{a}$; ii) $x = \frac{2}{a}$; iii) $x = \frac{3}{a}$; Verallgemeinert $ax = b$ wird von $x = \frac{b}{a}$; gelöst.

iv) $x = \frac{a-1}{a}$; v) $x = \frac{a}{a} = 1$; Außer im Teil v kann kein Bruch gekürzt werden.

h) i) $x = \frac{1}{a+1}$; ii) $x = \frac{2}{a+2}$; iii) $x = \frac{3}{a+3}$; verallgemeinert $(b > 0)$: $ax + bx = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a+b}$;

i) i) $ax + 1 = 3 - 2x \xLeftrightarrow{+2x-1} ax + 2x = 3 - 1 \Leftrightarrow (a+2)x = 2 \xLeftrightarrow{:(a+2)} x = \frac{2}{a+2};$
ii) $x = \frac{2}{a+3}$; iii) $x = \frac{2}{a+4}$; Verallgemeinert: $ax + b = b + 2 - (b+1)x \Leftrightarrow x = \frac{2}{a+b+1}$.

j) $ax + 4a = 2a \xLeftrightarrow{-4a} ax = -2a \xLeftrightarrow{:a(\neq 0)} x = -2;$

k) $a(x+2) = 2a(x-4) \Leftrightarrow ax + 2a = 2ax - 4a \xLeftrightarrow{-2ax-2a} -ax = -6a \xLeftrightarrow{:(-a)(\neq 0)} x = 6;$

l) $(x+2)(a+4)=(x-4)(2a+4) \Leftrightarrow ax+4x+2a+8=2ax+4x-8a-16 \overset{-2ax-4x-2a-8}{\Longleftrightarrow} -ax = -10a-24 \overset{:(-a)(\neq 0)}{\Longleftrightarrow} x=\frac{10a+24}{a}$;

m) $(2x-6)(a+5)=(2x-3)(2a+5) \Leftrightarrow 2ax+10x-6a-30=4ax+10x-6a-15 \overset{-4ax-10x+6a+30}{\Longleftrightarrow} -2ax=15 \overset{:(-2a)(\neq 0)}{\Longleftrightarrow} x=\frac{-15}{2a}$;

n) $(x+a)^2=(x-a)^2 \overset{\text{BinF}}{\Longleftrightarrow} x^2+2ax+a^2=x^2-2ax+a^2 \overset{-x^2-a^2+2ax}{\Longleftrightarrow} 4ax=0 \overset{:4a(\neq 0)}{\Longleftrightarrow} x=0$;

o) $(x+a)^2=x(x+a) \overset{\text{BinF}}{\Longleftrightarrow} x^2+2ax+a^2=x^2+ax \overset{-x^2-a^2-ax}{\Longleftrightarrow} ax=-a^2 \overset{:a(\neq 0)}{\Longleftrightarrow} x=-a$;

p) **Algorithmus:** 1) Löse alle Klammern auf.
2) Sammle alle Summanden mit x auf einer Seite und alle Summanden ohne x auf der anderen Seite der Gleichung.
3*) Klammere x aus.
4) Dividiere durch den Faktor vor dem x. Dieser Faktor darf nicht 0 sein.

Für welche a sind die folgenden Gleichungen lösbar? Geben Sie die Lösungsmenge an.

q) Für $a \neq -0.5$ ist $(-3-6a)x=3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{-3-6a}=\frac{-1}{1+2a}$,

r) $a(x-2)=4(x-3) \Leftrightarrow ax-2a=4x-12 \overset{-4x+2a}{\Longleftrightarrow} ax-4x=2a-12 \Leftrightarrow x(a-4)=2a-12 \overset{:(a-4)}{\Longleftrightarrow} \frac{2a-12}{a-4}$, für $a=4$ ist die Gleichung nicht lösbar;

s) $ax=2x \overset{-2x}{\Longleftrightarrow} ax-2x=0 \overset{-2x}{\Longleftrightarrow} (a-2)x=0 \overset{\text{SvN}}{\Longleftrightarrow} a=2$ oder $x=0$, Für $a=2$ ist $\mathbb{L}=\mathbb{Q}$, für $a\neq 2$ ist $\mathbb{L}=\{0\}$;

t) $ax+3=3x-3 \overset{-3x-3}{\Longleftrightarrow} ax-3x=-6 \Leftrightarrow (a-3)x=-6 \overset{:(a-3)}{\Longleftrightarrow} x=\frac{-6}{a-3}$, für $a=3$ ist die Gleichung nicht lösbar;

u) $ax+7=2x+5 \overset{-2x-7}{\Longleftrightarrow} ax-2x=-2 \Leftrightarrow (a-2)x=-2 \overset{:(a-2)}{\Longleftrightarrow} x=\frac{-2}{a-2}$, für $a=2$ ist die Gleichung nicht lösbar;

v) $ax-4a=3x-12 \overset{-3x+4a}{\Longleftrightarrow} ax-3x=4a-12 \Leftrightarrow x(a-3)=4(a-3) \overset{:(a-3)}{\Longleftrightarrow} x=-4$; für $a\neq 3$ ist $x=4$ für $a=3$ ist $\mathbb{L}=\mathbb{Q}$;

w) $(x+a)\cdot(x-5)=(x-a)\cdot(x+5) \Leftrightarrow x^2-5x+ax-5a=x^2+5x-ax-5a \overset{-x^2+ax-5x+5a}{\Longleftrightarrow} 2ax-10x=0 \Leftrightarrow 2x(a-5)=0 \overset{\text{SvN}}{\Longleftrightarrow} x=0$ oder $a=5$, für $a\neq 5$ ist $x=0$ für $a=5$ ist $\mathbb{L}=\mathbb{Q}$;

x) $(2x+2a)^2=4\cdot(x-a)\cdot(x+a) \Leftrightarrow 4x^2+8ax+4a^2=4x^2-4a^2 \overset{-4x^2-4a^2}{\Longleftrightarrow} 8ax=-8a^2 \overset{:(8a)}{\Longleftrightarrow} x=-a$,

Aufg. 23/19: a) $A=a\cdot b \Leftrightarrow a=\frac{A}{b} \Leftrightarrow b=\frac{A}{a}$ (Rechtecksfläche);
b) $W=P\cdot t \Leftrightarrow t=\frac{W}{P} \Leftrightarrow P=\frac{W}{t}$ (Arbeit / Leistung);
c) $P=U\cdot I \Leftrightarrow U=\frac{P}{I} \Leftrightarrow I=\frac{P}{U}$ (elektrische Leistung);
d) $R=\frac{U}{I} \Leftrightarrow R\cdot I=U \Leftrightarrow I=\frac{U}{R}$ (Ohm'sches Gesetz);
e) $v=\frac{s}{t} \Leftrightarrow v\cdot t=s \Leftrightarrow t=\frac{s}{v}$ (mittlere Geschw.);

f) Formel der Gewichtskraft: $F=m\cdot g \overset{:g}{\Longleftrightarrow} m=\frac{F}{g} \Leftrightarrow g=\frac{F}{m}$,

g) Formel der Dichte: $\rho=\frac{m}{V} \overset{\cdot V}{\Longleftrightarrow} m=\rho\cdot V \overset{:\rho}{\Longleftrightarrow} V=\frac{m}{\rho}$,

h) Formel der Hangabtriebskraft:
$F_H=\frac{F_G\cdot h}{l} \overset{\cdot l}{\Longleftrightarrow} F_H\cdot l=F_G\cdot h \overset{:h}{\Longleftrightarrow} F_G=\frac{F_H\cdot l}{h} \Leftrightarrow l=\frac{F_G\cdot h}{F_H} \Leftrightarrow h=\frac{F_H\cdot l}{F_G}$,

i) $U=2a+2b \Leftrightarrow \frac{U}{2}=a+b \Leftrightarrow \frac{U}{2}-a=b \Leftrightarrow \frac{U}{2}-b=a$ (Umfang Rechteck);

j) Formel der Normalkraft: $F_N=\frac{F_G\cdot b}{l} \overset{\cdot l}{\Longleftrightarrow} F_N\cdot l=F_G\cdot b \overset{:b}{\Longleftrightarrow} F_G=\frac{F_N\cdot l}{b} \Leftrightarrow l=\frac{F_G\cdot b}{F_N} \Leftrightarrow b=\frac{F_N\cdot l}{F_G}$,

k) Das Hebelgesetz: $F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2 \overset{:l_1}{\Longleftrightarrow} F_1 = \frac{F_2 \cdot l_2}{l_1} \Leftrightarrow F_2 = \frac{F_1 \cdot l_1}{l_2} \Leftrightarrow l_1 = \frac{F_2 \cdot l_2}{F_1} \Leftrightarrow l_2 = \frac{F_1 \cdot l_1}{F_2}$,

L) ZPF: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \overset{\cdot(x_2-x_1)}{\Longleftrightarrow} m(x_2 - x_1) = y_2 - y_1 \Leftrightarrow mx_2 - mx_1 = y_2 - y_1 \overset{+mx_1}{\Longleftrightarrow} mx_2 = mx_1 + y_2 - y_1 \overset{:m}{\Longleftrightarrow} x_2 = \frac{mx_1 + y_2 - y_1}{m} \Leftrightarrow x_1 = \frac{mx_2 + y_1 - y_2}{m} \Leftrightarrow y_2 = mx_2 - mx_1 + y_1 \Leftrightarrow y_1 = mx_1 - mx_2 + y_2$

15.2.2 LöVo zu Einheit 2.2.3 (LGS UE 8_2)

Die LGS werden alle nach einem festen Algorithmus gelöst; manchmal geht es auch einfacher, was aber auf die Lösungsmenge keinen Einfluss hat.

Aufg. 23/20:

a+b) x	-1	0	1	2	3	4
$y = 2x - 1$	-3	-1	1	3	5	7
$y = -\frac{1}{2}x + 4$	4.5	4	3.5	3	2.5	2

Tipp: Setzen Sie beim Teil c) die Geradengleichungen gleich.
c) Die Geradengleichungen werden gleichgesetzt: $(y =)2x - 1 = -\frac{1}{2}x + 4 \Leftrightarrow 2.5x - 1 = 4 \Leftrightarrow 2.5x = 5 \Leftrightarrow x = 2$; $y-$Wert: $y = 2x - 1$ (mit $x = 2$): $y = 2 \cdot 2 - 1 = 3$,
$y = -\frac{1}{2}x + 4$ (mit $x = 2$): $y = -1/2 \cdot 2 - 1 = 3$

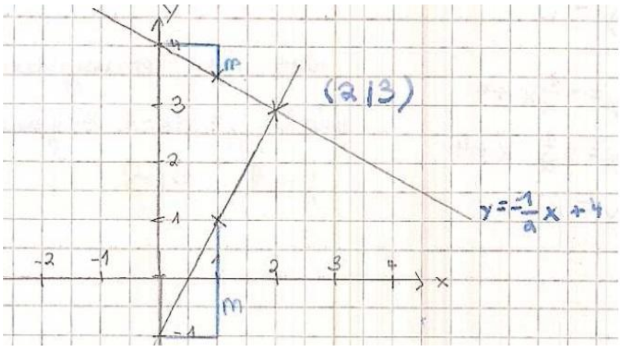


Abb. 248 Geraden

(gleicher y-Wert) $\Rightarrow S(2;3)$ (Abb. 248).

Aufg. 23/21: a) $x + 3 = 2x + 2 \Leftrightarrow x + 2 = 3 \Leftrightarrow x = 1, y = 1 + 3 = 4 \Rightarrow \mathbb{L} = \{(1;4)\}$;
b) $3x - 1 = x + 5 \Leftrightarrow 2x - 1 = 5 \Leftrightarrow x = 3, y = 3 \cdot 3 - 1 = 8 \Rightarrow \mathbb{L} = \{(3;8)\}$;
c) $5x - 2 = 2x + 4 \Leftrightarrow 3x - 2 = 4 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2, y = 5 \cdot 2 - 2 = 8 \Rightarrow \mathbb{L} = \{(2;8)\}$;
d) $2y + 3 = 6y - 1 \Leftrightarrow -4y = -4 \Leftrightarrow y = 1, x = 2 \cdot 1 + 3 = 5 \Rightarrow \mathbb{L} = \{(5;1)\}$;
e) $x + y = 3 \Leftrightarrow y = -x + 3$, $2x - 6 = -x + 3 \Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3, y = 2 \cdot 3 - 6 = 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \{(3;0)\}$;
f) $2x - y = 5 \Leftrightarrow y = 2x - 5$, $2x - 5 = 3x + 3 \Leftrightarrow -5 = x + 3 \Leftrightarrow x = -8, y = 3 \cdot (-8) + 3 = -21 \Rightarrow \mathbb{L} = \{(-8;-21)\}$;
g) $3x - 2y = 1 \Leftrightarrow 2y = 3x - 1$, $5x - 2y = 3 \Leftrightarrow 2y = 5x - 3$,
$3x - 1 = 5x - 3 \Leftrightarrow 2 = 2x \Leftrightarrow x = 1, 2y = 3 \cdot 1 - 1 \Leftrightarrow 2y = 2 \Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow \mathbb{L} = \{(1;1)\}$;

Die in Teil g) verwendete Technik ist für manche evtl. kein Gleichsetzungsverfahren; für mich schon.

Aufg. 23/22: Gesucht ist die Lösungsmenge eines LGS mit dem Gleichsetzungsverfahren:
1) Löse beide Gleichungen nach der gleichen Variablen auf.
2) Beide Gleichungen gleichsetzen, dass heißt es entsteht eine Gleichung mit der anderen Variablen.
3) Löse diese Gleichung nach der anderen Variablen auf.
4) Setze die Lösung aus Schritt 3) in die beiden Gleichungen aus Schritt 1) ein.
5) Beide Resultate müssen gleich sein. Deshalb reicht auch das Einsetzen in eine Gleichung.

Aufg. 23/23: Tipp: Setzen Sie die zweite Gleichung in die erste Gleichung ein.
Die zweite Gleichung kann in die erste Gleichung eingesetzt werden:
$y = (x + 1)$ in $3x + y = 5$ eingesetzt: $3x + (x + 1) = 5 \Leftrightarrow 3x + x = 4 \Leftrightarrow x = 1$;
$y = x + 1 = 2 \Rightarrow \mathbb{L}\{(1;2)\}$.

Aufg. 24/24: a) $x + (2x - 5) = 1 \Leftrightarrow 3x - 5 = 1 \Leftrightarrow x = 2, y = 2 \cdot 2 - 5 = -1 \Rightarrow \mathbb{L} = \{(2;-1)\}$;
b) $3x + 2(x - 1) = 1 \Leftrightarrow 5x - 2 = 8 \Leftrightarrow x = 2, y = 2 - 1 = 1 \Rightarrow \mathbb{L} = \{(2;1)\}$;
c) $4x + 3(2x - 1) = 1 \Leftrightarrow 10x - 3 = 7 \Leftrightarrow x = 1, y = 2 \cdot 1 - 1 = 1 \Rightarrow \mathbb{L} = \{(1;1)\}$;

d) $3(2y+4)+2y=1 \Leftrightarrow 6y+12-2y=8 \Leftrightarrow 4y=-4 \Leftrightarrow y=-1, x=2\cdot$(-1)$+4=2 \Rightarrow \mathbb{L}=\{$(2;-1)$\}$;
e) $4(4y-1)-4y=8 \Leftrightarrow 16y-4-4y=8 \Leftrightarrow 12y=12 \Leftrightarrow y=1, x=4\cdot 1-1=3 \Rightarrow \mathbb{L}=\{(3;1)\}$;
f) $5x+(2x-4)=3 \Leftrightarrow 7x-4=3 \Leftrightarrow x=1 \Leftrightarrow 2y=2\cdot 1-4 \Leftrightarrow y=-1 \Rightarrow \mathbb{L}=\{(1;-1)\}$;

g) $4x+y=7 \Leftrightarrow y=-4x+7$ in $3x+4y=2$ eingesetzt:
$3x+4(-4x+7)=2 \Leftrightarrow 3x-16x+28=2 \Leftrightarrow -13x=-26 \Leftrightarrow x=2$,
$x=2$ in $y=-4x+7$ eingesetzt: $y=-4\cdot 2+7=-1 \Rightarrow \mathbb{L}=\{(2;-1)\}$;

h) $3x-2y=5 \Leftrightarrow 2y=3x-5 \Leftrightarrow y=\frac{3x-5}{2}$ in $5x-4y=7$ eingesetzt:
$5x-4\cdot(\frac{3x-5}{2})=7 \Leftrightarrow 5x-2\cdot(3x-5)=7 \Leftrightarrow 5x-6x+10=7 \Leftrightarrow -x=-3 \Leftrightarrow x=3$,
$x=3$ in $y=\frac{3x-5}{2}$ eingesetzt: $y=\frac{3\cdot 3-5}{2}=2 \Rightarrow \mathbb{L}=\{(3;2)\}$;

i) $3x-5y=0 \Leftrightarrow 5y=3x \Leftrightarrow y=\frac{3}{5}x$ in $7x-9y=8$ eingesetzt:
$7x-9(\frac{3}{5}x)=8 \Leftrightarrow 7x-5.4x=8 \Leftrightarrow 7x-\frac{27}{5}x=8 \Leftrightarrow 1.6x=8 \Leftrightarrow x=5$,
$x=5$ in $y=\frac{3}{5}x$ eingesetzt: $y=\frac{3}{5}\cdot 5=3 \Rightarrow \mathbb{L}=\{(5;3)\}$;

j) $7x-8y=0 \Leftrightarrow 8y=7x \Leftrightarrow y=\frac{7x}{8}$ in $8x-9y=1$ eingesetzt:
$8x-9\cdot(\frac{7x}{8})=1 \Leftrightarrow 8x-\frac{63x}{8}=1 \Leftrightarrow 64x-63x=8 \Leftrightarrow x=8$,
$x=8$ in $y=\frac{7x}{8}$ eingesetzt: $y=\frac{7\cdot 8}{8}=7 \Rightarrow \mathbb{L}=\{(8;7)\}$;

Aufg. 24/25: Gesucht ist die Lösungsmenge eines (L)GS 2 Gln. 2 Ubek. mit dem Einsetzungsverfahren:
1) Lösen Sie die einfachere Gleichung nach einer Variablen auf.
2) Setzen Sie diese Gleichung mit Klammern in die andere Gleichung ein,
dass heißt es entsteht eine Gleichung mit der anderen Variablen.
3) Lösen Sie diese Gleichung nach der anderen Variablen auf.
4) Setzen Sie die Lösung aus Schritt 3) in die Gleichung aus Schritt 1) ein.

Aufg. 24/26: a) Waage 1: $2x+2=y+1$, Waage2 : $y=x$, Waage 3: $2x+2+y=y+1+x$.
Waage 1 und Waage 2 wurden zu Waage 3 'zusammengeschüttet' = addiert; alle Waagen sind im Gleichgewicht. Waage 3 umgeformt ergibt:
$2x+2+y=y+1+x \Leftrightarrow x+2=1 \Leftrightarrow x=-1$ und mit Waage 2 $x=y=-1 \Rightarrow \mathbb{L}\{(-1;-1)\}$.

b) Beim Additionsverfahren werden Gleichungen addiert. Die resultierende Gleichung kann dem LGS hinzugefügt werden, ohne dass sich dessen Lösungsmenge ändert. Optimalerweise sollte eine Variable durch die Addition wegfallen.

d) **Das Additionsverfahren**
i) Damit ein LGS mit dem Additionsverfahren gelöst werden kann, muss dieses zuerst auf Matrixform gebracht werden: $\begin{pmatrix} ax & +cy & =e \\ bx & +dy & =f \end{pmatrix}$.
ii) Multiplizieren Sie die obere Zeile mit b und die untere Zeile mit (-a).
iii) Addieren Sie beide Zeilen. Die Variable x fällt weg.

Aufg. 24/27: **a)**
$$\begin{array}{rrl} x & +y & =3 \\ -x & +2y & =0 \\ \hline & 3y & =3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad y=1$$
eingesetzt: $x+1=3 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow \mathbb{L}=\{(2;1)\}$.

b)
$$\begin{array}{rrl} 2x & +3y & =8 \\ -2x & +y & =0 \\ \hline & 4y & =8 \end{array} \quad \Rightarrow \quad y=2$$
eingesetzt: $2x+3\cdot 2=8 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow \mathbb{L}=\{(1;2)\}$.

c)
$$\begin{array}{rrcr} 3x & -2y & = & 5 \\ 3x & +y & = & 11 \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 1} \\ \xrightarrow{\cdot(-1)} \end{array} \quad \begin{array}{rrcr} 3x & -2y & = & 5 \\ \underline{-3x} & \underline{-y} & = & \underline{-11} \\ & -3y & = & -6 \end{array} \Rightarrow y=2$$
$$\begin{array}{rrcrcr} 3x & -2\cdot 2 & = & 5 & \Leftrightarrow & 3x=9 \\ 3x & +2 & = & 11 & \Leftrightarrow & 3x=9 \\ & & & & & \Rightarrow x=3 \end{array}$$
$\Rightarrow \mathbb{L}=\{(3;2)\}$;

d) $\begin{array}{rrcr} 4x & -3y & = & 1 \\ 4x & +2y & = & 6 \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 1} \\ \xrightarrow{\cdot(-1)} \end{array} \begin{array}{rrcrl} 4x & -3y & = & 1 & \\ \underline{-4x} & \underline{-2y} & = & \underline{-6} & \\ & -5y & = & -5 & \Rightarrow y = 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rrcrcr} 4x & -3 & = & 1 & \Leftrightarrow & 4x = 4 \\ 4x & +2 & = & 6 & \Leftrightarrow & 4x = 4 \\ & & & & & \Rightarrow x = 1 \end{array}$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{(1;1)\}$;

e) $\begin{array}{rrcr} 2x & +3y & = & 0 \\ x & +2y & = & -1 \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 1} \\ \xrightarrow{\cdot(-2)} \end{array} \begin{array}{rrcrl} 2x & +3y & = & 0 & \\ \underline{-2x} & \underline{-4y} & = & \underline{2} & \\ & -y & = & 2 & \Rightarrow y = -2 \end{array} \qquad \begin{array}{rrcrcr} 2x & +3\cdot(-2) & = & 0 & \Leftrightarrow & 2x = 6 \\ x & +2\cdot(-2) & = & -1 & \Leftrightarrow & x = 3 \\ & & & & & \Rightarrow x = 3 \end{array}$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{(3;-2)\}$; f) $\mathbb{L}\{(2;1)\}$; siehe unten:

f) $\begin{array}{rrcr} 5x & -3y & = & 7 \\ 6x & +2y & = & 14 \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 6} \\ \xrightarrow{\cdot(-5)} \end{array} \begin{array}{rrcrl} 30x & -18y & = & 42 & \\ -30x & -10y & = & -70 & \\ \hline 0x & -28y & = & -28 & \mid :(-28) \quad y = 1 \end{array}$ EINSETZEN $\begin{array}{l} 5x - 3\cdot 1 = 7 \\ 5x - 3 = 7 \quad \mid +3 \\ 5x = 10 \quad \mid :5 \qquad x = 2 \qquad \mathbb{L}\{(2;1)\} \end{array}$ Thx Ann Zel

g) $\begin{array}{rrcr} 2x & -y & = & 3 \\ 3x & -2y & = & 3 \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 3} \\ \xrightarrow{\cdot(-2)} \end{array} \begin{array}{rrcrl} 6x & -3y & = & 9 & \\ \underline{-6x} & \underline{+4y} & = & \underline{-6} & \\ & y & = & 3 & \Rightarrow y = 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rrcrcr} 2x & -3 & = & 3 & \Leftrightarrow & 2x = 6 \\ 3x & -2\cdot 3 & = & 3 & \Leftrightarrow & 3x = 9 \\ & & & & & \Rightarrow x = 3 \end{array}$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{(3;3)\}$;

h) $\begin{array}{rrcr} 4x & -3y & = & 7 \\ 5x & +2y & = & 3 \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 5} \\ \xrightarrow{\cdot(-4)} \end{array} \begin{array}{rrcrl} 20x & -15y & = & 35 & \\ \underline{-20x} & \underline{-8y} & = & \underline{-12} & \\ & -23y & = & 23 & \Rightarrow y = -1 \end{array} \qquad \begin{array}{rrcrcr} 4x & -3\cdot(-1) & = & 7 & \Leftrightarrow & 4x = 4 \\ 5x & +2\cdot(-1) & = & 3 & \Leftrightarrow & 5x = 5 \\ & & & & & \Rightarrow x = 1 \end{array}$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{(1;-1)\}$;

i) $\begin{array}{rrcr} -2x & +3y & = & 2 \\ 3x & -2y & = & 7 \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 3} \\ \xrightarrow{\cdot 2} \end{array} \begin{array}{rrcrl} -6x & +9y & = & 6 & \\ \underline{6x} & \underline{-4y} & = & \underline{14} & \\ & 5y & = & 20 & \Rightarrow y = 4 \end{array} \qquad \begin{array}{rrcrcr} -2x & +3\cdot 4 & = & 2 & \Leftrightarrow & -2x = -10 \\ 3x & -2\cdot 4 & = & 7 & \Leftrightarrow & 3x = 15 \\ & & & & & \Rightarrow x = 5 \end{array}$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{(5;4)\}$;

j) $\begin{array}{rrcr} -6x & -4y & = & 2 \\ 7x & +9y & = & 2 \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 7} \\ \xrightarrow{\cdot 6} \end{array} \begin{array}{rrcrl} -42x & -28y & = & 14 & \\ \underline{42x} & \underline{+54y} & = & \underline{12} & \\ & 26y & = & 26 & \Rightarrow y = 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rrcrcr} -6x & -4 & = & 2 & \Leftrightarrow & -6x = 6 \\ 7x & +9 & = & 2 & \Leftrightarrow & 7x = -7 \\ & & & & & \Rightarrow x = -1 \end{array}$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{(-1;1)\}$;

k) $\begin{array}{rrcr} 3x & -7y & = & 1 \\ 2x & -5y & = & 1 \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 2} \\ \xrightarrow{\cdot(-3)} \end{array} \begin{array}{rrcrl} 6x & -14y & = & 2 & \\ \underline{-6x} & \underline{+15y} & = & \underline{-3} & \\ & y & = & -1 & \Rightarrow y = -1 \end{array} \qquad \begin{array}{rrcrcr} 3x & -7\cdot(-1) & = & 1 & \Leftrightarrow & 3x = -6 \\ 2x & -5\cdot(-1) & = & 1 & \Leftrightarrow & 2x = -4 \\ & & & & & \Rightarrow x = -2 \end{array}$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{(-2;-1)\}$;

L) $\begin{array}{rrcr} 8x & -3y & = & 2 \\ 5x & -3y & = & 8 \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 5} \\ \xrightarrow{\cdot(-8)} \end{array} \begin{array}{rrcrl} 40x & -15y & = & 10 & \\ \underline{-40x} & \underline{+24y} & = & \underline{-64} & \\ & 9y & = & -54 & \Rightarrow y = -6 \end{array} \qquad \begin{array}{rrcrcr} 8x & -3\cdot(-6) & = & 2 & \Leftrightarrow & 8x = -16 \\ 5x & -3\cdot(-6) & = & 8 & \Leftrightarrow & 5x = -10 \\ & & & & & \Rightarrow x = -2 \end{array}$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{(-2;-6)\}$;

m) $x = 2$, $y = 1$; n) $x = 4$, $y = 3$; o) $x = -2$, $y = 4$; p) $x = 0.5$, $y = 2$.

Aufg. 24/28: a) i) $\mathbb{L} = \{1;2\}$; ii) $\mathbb{L} = \{1;2\}$ Tauschen der Zeilen ändert die Lösungsmenge nicht; iii) $\mathbb{L} = \{2;1\}$ Tauschen der Variablen tauscht auch die Variablen in der Lösungsmenge; iv) $\mathbb{L} = \{1.6;0.6\}$ Tauschen der Absolutglieder ändert die Lösungsmenge ohne sichtbare Struktur;

b) Hier darf a auch Null sein. i) $\mathbb{L} = \{1;1\}$, ii) $\mathbb{L} = \{3;0\}$, iii) $\mathbb{L} = \{5;-1\}$, iv) $\mathbb{L} = \{2a-9;6-a\}$;

c) Hier darf a auch Null sein. i) $\mathbb{L} = \{2;-2.5\}$, ii) $\mathbb{L} = \{4;-5\}$, iii) $\mathbb{L} = \{6;-7.5\}$, iv) $\mathbb{L} = \{2a;-2.5a\}$;

d) Hier darf a auch Null sein. i) $\mathbb{L} = \{7; -4\}$, ii) $\mathbb{L} = \{14; -8\}$, iii) $\mathbb{L} = \{21; -12\}$, iv) $\mathbb{L} = \{7a; -4a\}$;

e) Hier muss $a \neq 0$ sein. i) $\mathbb{L} = \{6; 3\}$, ii) $\mathbb{L} = \{3; 1.5\}$, iii) $\mathbb{L} = \{2; 1\}$, iv) $\mathbb{L} = \{6/a; 3/a\}$;

f) Hier darf a auch Null sein. $\mathbb{L} = \{2; -1\}$; Die zweite Gleichung des LGS ii) (=II') entsteht aus der zweiten Gleichung des LGS i durch Addition mit der ersten Gleichung. Verallgemeinert entsteht die untere Gleichung durch Addition der a-fache ersten Gleichung zur zweiten Gleichung.
(II')=(II)+ $a\cdot$ (I). Die Lösungsmenge ändert sich (durch Addition des beliebigen Vielfachen der ersten Zeile zur zweiten Zeile) nicht.

g) Hier dürfen a und b nicht Null sein. i) $\mathbb{L} = \{4; -6\}$, ii) $\mathbb{L} = \{4; -3\}$, iii) $\mathbb{L} = \{4; -2\}$, iv) $\mathbb{L} = \{4; \frac{-6}{a}\}$; v) $\mathbb{L} = \{2; -6\}$, vi) $\mathbb{L} = \{\frac{4}{3}; -6\}$, vii) $\mathbb{L} = \{\frac{4}{b}; -6\}$, viii $\mathbb{L} = \{\frac{4}{b}; \frac{-6}{a}\}$,

h) Hier darf a nicht Null sein. i) $\mathbb{L} = \{-1; 2\}$, ii) $\mathbb{L} = \{1/2; 1\}$, iii) $\mathbb{L} = \{1; 0\}$, iv) $\mathbb{L} = \{2 - \frac{3}{a}; 3 - a\}$; f) $\mathbb{L} = \{2; -1\}$;

i)

i)
$$\begin{array}{rcl} 3(14-5x)-2y &=& y+3 \Leftrightarrow 42-15x-3y = 3 \Leftrightarrow 15x+3y = 39 \\ 2(9-2x)-y &=& y+4 \Leftrightarrow 18-4x-2y = 4 \Leftrightarrow 4x+2y = 14 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} 15x & +3y &=& 39 \xrightarrow{\cdot 4} \quad 60x \quad +12y = 156 \\ 4x & +2y &=& 14 \xrightarrow{\cdot(-15)} \underline{-60x} \quad \underline{-30y} = \underline{-210} \\ & & & \qquad\qquad -18y = -54 \Rightarrow y = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcll} 15x & +3\cdot 3 &=& 39 & \Leftrightarrow 15x = 30 \\ 4x & +2\cdot 3 &=& 14 & \Leftrightarrow 4x = 8 \\ & & & & \Rightarrow x = 2 \end{array}$$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{(2; 3)\}$;

j)
$$\begin{array}{rcl} (x+5)(y+2) &=& xy+150 \Leftrightarrow xy+2x+5y+10 = xy+150 \Leftrightarrow 2x+5y = 140 \\ (x+3)(y-2) &=& xy+14 \Leftrightarrow xy-2x+3y-6 = xy+14 \Leftrightarrow -2x+3y = 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} 2x & +5y &=& 140 \\ \underline{-2x} & \underline{+3y} &=& \underline{20} \\ & 8y &=& 160 \Rightarrow y = 20 \end{array} \qquad \begin{array}{rrcll} 2x & +5\cdot 20 &=& 140 & \Leftrightarrow 2x = 40 \\ -2x & +3\cdot 20 &=& 20 & \Leftrightarrow -2x = -40 \\ & & & & \Rightarrow x = 20 \end{array}$$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{(20; 20)\}$;

k)
$$\begin{array}{r} \frac{x-9}{9} = y \\ \Leftrightarrow x-9 = 9y \\ \Leftrightarrow -x+9y = -9 \end{array} \qquad \begin{array}{rrcl} x & +y &=& 169 \\ \underline{-x} & \underline{+9y} &=& \underline{-9} \\ & 10y &=& 160 \Rightarrow y = 16, x = 153 \Rightarrow \mathbb{L} = \{(153; 16)\}; \end{array}$$

L)
$$\begin{array}{rcl} (2x-1)(3y-5) &=& (2x-3)(3y-1) \Leftrightarrow 6xy-10x-3y+5 = 6xy-2x-9y+3 \\ & & \Leftrightarrow -8x+6y = -2 \\ 3(5x-2) &=& 2(5y-4)+2 \Leftrightarrow 15x-6 = 10y-8+2 \\ & & \Leftrightarrow 15x-10y = 0 \Leftrightarrow 3x-2y = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} -8x & +6y &=& -2 \xrightarrow{\cdot 3} -24x \quad +18y = -6 \\ 3x & -2y &=& 0 \xrightarrow{\cdot 8} \quad \underline{24x} \quad \underline{-16y} = \underline{0} \\ & & & \qquad\qquad 2y = -6 \Rightarrow y = -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcll} -8x & +6\cdot(-3) &=& -2 & \Leftrightarrow -8x = 16 \\ 3x & -2\cdot(-3) &=& 0 & \Leftrightarrow 3x = -6 \\ & & & & \Rightarrow x = -2 \end{array}$$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{(-2; -3)\}$;

m)
$$\begin{array}{rcl} (x+3)(y-4)+3 &=& x(y-2) \Leftrightarrow xy-4x+3y-12+3 = xy-2x \\ & & \Leftrightarrow -2x+3y = 9 \\ (2x+5)(y-1)+10 &=& 2y(x+3)-6 \Leftrightarrow 2xy-2x+5y-5+10 = 2xy+6y-6 \\ & & \Leftrightarrow -2x-y = -11 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} -2x & +3y &=& 9 \xrightarrow{\cdot(-1)} 2x \quad -3y = -9 \\ -2x & -y &=& -11 \xrightarrow{\cdot 1} -2x \quad -y = -11 \\ & & & \qquad\qquad -4y = -20 \Rightarrow y = 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcll} -2x & +3\cdot 5 &=& 9 & \Leftrightarrow -2x = -6 \\ -2x & -5 &=& -11 & \Leftrightarrow -2x = -6 \\ & & & & \Rightarrow x = 3 \end{array}$$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{(3; 5)\}$;

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{n)} & (3y-1)^2-3xy & = & (5+3y)(3y-x)-15 \\ \Leftrightarrow & 9y^2-6y+1-3xy & = & 15y-5x+9y^2-3xy-15 \\ \Leftrightarrow & 5x-21y & = & -16 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcrcl} (2x+3)^2+2xy & = & 2x(2x+y)+7(x+2y) & \Leftrightarrow & 4x^2+12x+9+2xy & = & 4x^2+2xy+7x+14y \\ & & & \Leftrightarrow & 5x-14y & = & -9 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcrcrrcr} 5x & -21y & = & -16 & \xrightarrow{\cdot(-1)} & -5x & +21y & = & 16 \\ 5x & -14y & = & -9 & \xrightarrow{\cdot 1} & \underline{5x} & \underline{-14y} & = & \underline{-9} \\ & & & & & & 7y & = & 7 \Rightarrow y=1 \end{array} \qquad \begin{array}{rrcrcl} 5x & -21 & = & -16 & \Leftrightarrow & 5x=5 \\ 5x & -14 & = & -9 & \Leftrightarrow & 5x=5 \\ & & & & \Rightarrow & x=1 \end{array}$$

$\Rightarrow \mathbb{L}=\{(1;1)\}$;

$$\begin{array}{lrclcrcl} \textbf{o)} & \frac{x+4}{y+1} & = & \frac{x+8}{y+3} & \Leftrightarrow & (x+4)(y+3) & = & (x+8)(y+1) \\ \Leftrightarrow & xy+3x+4y+12 & = & xy+x+8y+8 & \Leftrightarrow & 2x-4y & = & -4 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrclcrcl} & \frac{x-3}{y+2} & = & \frac{x-6}{y+5} & \Leftrightarrow & (x-3)(y+5) & = & (x-6)(y+2) \\ \Leftrightarrow & xy+5x-3y-15 & = & xy+2x-6y-12 & \Leftrightarrow & 3x+3y & = & 3 \Leftrightarrow \boxed{x+y=1} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcrcrrcr} 2x & -4y & = & -4 & \xrightarrow{\cdot 1} & 2x & -4y & = & -4 \\ x & +y & = & 1 & \xrightarrow{\cdot(-1)} & \underline{-2x} & \underline{-2y} & = & \underline{-2} \\ & & & & & & -6y & = & -6 \Rightarrow y=1 \end{array} \qquad \begin{array}{rrcrcl} 2x & -4 & = & -4 & \Leftrightarrow & 2x=0 \\ x & +1 & = & 1 & \Leftrightarrow & x=0 \\ & & & & \Rightarrow & \mathbb{L}=\{(0;1)\}; \end{array}$$

Aufg. 25/29: a) Sei s die Anzahl der Schweine und h die Anzahl der Hennen. Die Anzahl der Tiere ergibt die Gleichung: $s+h=14$, die Anzahl der Beine ergibt: $4s+2h=38$;

$$\begin{array}{rrcrcrrcr} 4s & +2h & = & 38 & \xrightarrow{\cdot 1} & 4s & +2h & = & 38 \\ s & +h & = & 14 & \xrightarrow{\cdot(-4)} & \underline{-4s} & \underline{-4h} & = & \underline{-56} \\ & & & & & & -2h & = & -18 \Rightarrow h=9 \end{array} \qquad s+9=14 \Rightarrow s=5$$

Es sind 5 Schweine und 9 Hühner im Stall.

b) Gesucht ist 'Romeo und Julia' (von Shakespeare) die aus den Sippen Capulet bzw. Montague stammen.

Sei c die Anzahl der Capulets und m die Anzahl der Montague. Wir betrachten die gegessenen Hähnchen: 2c + m =26; das Bier: 3c+4m=39;

$$\begin{array}{rrcrcrrcr} 3c & +4m & = & 39 & \xrightarrow{\cdot 2} & 6c & +8m & = & 78 \\ 2c & +m & = & 16 & \xrightarrow{\cdot(-3)} & \underline{-6c} & \underline{-3m} & = & \underline{-48} \\ & & & & & & 5m & = & 30 \Rightarrow m=6 \end{array} \qquad 2c+6=26 \Rightarrow c=5$$

Am Gelage nehmen 5 Capulets und 6 Montagues teil.

c) Milliways ist das Restaurant am Ende des Universums aus dem Roman 'Per Anhalter ins All'. Es befindet sich auf dem Planeten Magrathea. In diesem Buch wird u.a. erklärt, wie man sich diese Preise ohne weiteres leisten kann: 'Aus sechs Unmöglichkeiten mach sieben: Run Milliways; Endstation des Universums kennen und lieben' (Werbeslogan aus Bastablon).

Sei t der Preis einer Tasse Kaffee und k der Preis eines Stückes Kuchen.

$$\begin{array}{rrcrcrrcr} 2t & +k & = & 800 & \xrightarrow{\cdot 3} & 6t & +3k & = & 2400 \\ 3t & +4k & = & 2000 & \xrightarrow{\cdot(-2)} & \underline{-6t} & \underline{-8k} & = & \underline{-4000} \\ & & & & & & -5k & = & -16 \Rightarrow k=320 \end{array} \qquad 2t+320=800 \Leftrightarrow 2t=480 \Rightarrow t=240$$

Ein Tasse Kaffee kostet 240 € und ein Stück Kuchen 320 €.

d) Die Winnetou-Romane spielen unter anderem am Bärenfluß und am Silbersee; Winny 2 = Winnetou; 2 (engl)=two; Argentum (lat.) = Silber.

Sei b die Geschwindigkeit des Bootes und f die Geschwindigkeit des Beerenflußes.

$$\begin{array}{rrll} b & +f & = 31 & 28.5 + f = 31 \Leftrightarrow f = 2.5 \\ \underline{b} & \underline{-f} & = \underline{26} & \nwarrow \\ 2b & & = 57 & \Rightarrow b = 28.5 \end{array}$$

Die Fließgeschwindigkeit ist 2.5 km/h, das Boot wäre 28.5 km schnell.

e) Sei a die Anzahl der Arbeitstage und f die Anzahl der freien Tage. Es sind insgesamt 30 Tage, also gilt $a + f = 30$; an Verdienst ergibt sich $7a - 5f = 0$ (jeder freie Tag kostet 5 Pf).

$$\begin{array}{rrlcrrcrl} 7a & -5f & = 0 & \xrightarrow{\cdot 1} & 7a & -5f & = & 0 & \qquad a + 17.5 = 30 \Rightarrow a = 12.5 \\ a & +f & = 30 & \xrightarrow{\cdot(-7)} & \underline{-7a} & \underline{-7f} & = & \underline{-210} & \\ & & & & & -12f & = & -210 & \Rightarrow f = 17.5 \end{array}$$

Es sind 12.5 Arbeitstage und 17.5 freie Tage.

f) Seien a und b die Seitenlängen des Rechtecks. Eine Seite ist 7 cm länger damit ist $a + 7 = b \Leftrightarrow -a + b = 7$. Der Umfang ist 30 cm, damit ist $2a + 3b = 30$.

$$\begin{array}{rrlcrrcrl} -a & +b & = 7 & \xrightarrow{\cdot 2} & -2a & +2b & = & 14 & \qquad a + 7 = 11 \Rightarrow a = 4 \\ 2a & +2b & = 30 & \xrightarrow{\cdot 1} & \underline{2a} & \underline{+2b} & = & \underline{30} & \\ & & & & & 4b & = & 44 & \Rightarrow b = 11 \end{array}$$

Die Seitenlängen sind 4 cm und 11 cm.

g) Seien t die Kosten des Wagens pro Tag und k die Kosten des Wagens pro km. R1: 3t+40k=45; R2: 7t+110k=115.

$$\begin{array}{rrlcrrcrl} 3t & +40k & = 45 & \xrightarrow{\cdot 7} & 21t & +280k & = & 315 & \qquad 3t + 40 \cdot 0.6 = 45 \\ 7t & +110k & = 115 & \xrightarrow{\cdot(-3)} & \underline{-21t} & \underline{-330k} & = & \underline{-345} & \qquad \Rightarrow 3t = 21 \Rightarrow t = 7 \\ & & & & & -50k & = & -30 & \Rightarrow k = 0.6 \end{array}$$

Die laufenden Kosten sind 0.6 € pro Kilometer (und 7 € pro Tag).

h) $b + 1 = L$ in $b + L = 1.10$ eingesetzt: $b + (b + 1) = 1.10 \Leftrightarrow 2b = 0.10 \Leftrightarrow b = 0.05$ $(L = 1.05)$

Das Bonbon kostet 0.05 €.

i) Seien a und b die Seitenlängen des Rechtecks; seine Fläche ist $a \cdot b$.

eine Seite und 2 cm kürzer	andere Seite und 4 cm kürzer	Fläche um 56 cm^2 kleiner
$(a-2)$	$\cdot(b-4)$	$= a \cdot b - 56,$

$(a - 2) \cdot (b - 4) = a \cdot b - 56 \Leftrightarrow ab - 2b - 4a + 8 = ab - 56 \Leftrightarrow -2b - 4a = -64,$

eine Seite und 4 cm länger	andere Seite und 2 cm länger	Fläche um 76 cm^2 größer
$(a+4)$	$\cdot(b+2)$	$= a \cdot b + 76,$

$(a + 4) \cdot (b + 2) = a \cdot b + 76 \Leftrightarrow ab + 2a + 4b + 8 = ab + 76 \Leftrightarrow 2a + 4b = 68,$

$$\begin{array}{rrlcrrcrl} -4a & -2b & = -64 & \xrightarrow{\cdot 2} & -8a & -4b & = & -128 & \qquad 4a + 2 \cdot 12 = 64 \Rightarrow 4a = 40 \Rightarrow a = 10 \\ 2a & +4b & = 68 & \xrightarrow{\cdot 4} & \underline{8a} & \underline{+16b} & = & \underline{272} & \\ & & & & & 12b & = & 144 & \Rightarrow b = 12 \end{array}$$

Die Seitenlängen sind 10 cm und 12 cm.

j)* Gesucht ist der 'Rote Baron' Freiherr Manfred Albrecht von Richthofen (1892-1918). Er war Jagdflieger im ersten Weltkrieg. Sein Leben wurde 2008 verfilmt.

Sei f die Geschwindigkeit des Flugzeugs und w die Windgeschwindigkeit. Bei Rückenwind hat das Flugzeug also tatsächlich eine Geschwindigkeit von $f + w$, bei Gegenwind von $f - w$.

$$\begin{array}{llrlclll} s = v \cdot t, \text{ damit ist} & \text{Flug MH:} & 3.75 \cdot (f + w) & = 600 & \Leftrightarrow & f + w & = 600/3.75 & = 160, \\ & \text{Flug HM:} & 6 \cdot (f - w) & = 600 & \Leftrightarrow & f - w & = 600/6 & = 100. \end{array}$$

$$\begin{array}{rrll} f & +w & = 160 & \\ \underline{f} & \underline{-w} & \underline{= 100} & \\ 2f & & = 260 & \Rightarrow f = 130 \qquad 130 + w = 160 \Rightarrow w = 30 \end{array}$$

Die Windgeschwindigkeit ist 30 km/h (und die Flugzeuggeschwindigkeit ist 130 km/h).

k) 12 Hasen + 13 Fasane; L) 12 Vier und 6 Sechsbettzimmer; m) Kaffee 2.40€; Kuchen 4.20€; n) i) $x = y = 3$; ii) $x = 15; y = 10$; o) i) 64; ii) 67; p) Schenkel: 9, Basis 3; q) Basis 80° und Spitze 20°; r) 20 und 30 s) Vermögen: -48 Taler (Schulden); Mitgift 52 Taler

Aufg. 26/30:

a) $\mathbb{L}$ = unendlich groß. Wenn das LGS mit den Gleichungen (I) und (II) unendlich viele Lösungen hat, dann auch das LGS mit den Gleichungen (I) und $a\cdot$ (II). (Hier kann a sogar Null sein).

b) $\mathbb{L} = \{\}$. Wenn das LGS mit den Gleichungen (I) und (II) keine Lösung hat, dann auch das LGS mit den Gleichungen $a\cdot$ (I) und $b\cdot$ (II). (Hier dürfen a und b nicht Null sein).

c) $\mathbb{L} = \{0; 0\}$. Wenn das LGS immer die Absolutglieder 0 hat, dann ist auch $\{0; 0\}$ eine Lösung des LGS; es kann aber auch mehr Lösungen haben: Teil iv hat unendlich viele Lösungen.

d) $\mathbb{L}_1 = \{-1; 1\}$, $\mathbb{L}_2 = \{3; 2\}$, $\mathbb{L}_3 = \{4; -2\}$. Es soll gezeigt werden, dass wenn die Anzahl der Minuszeichen der Koeffizienten (Vorfaktoren vor x und y also nicht der Absolutglieder) ungerade ist, dann hat das LGS immer genau eine Lösung des LGS. Siehe auch Teil c iii).

a1)

$$\begin{array}{rrcrcrrcrl}
2x & -4y & = & 6 & \xrightarrow{\cdot 3} & 6x & -12y & = & 18 & \\
3x & -6y & = & 9 & \xrightarrow{\cdot(-2)} & \underline{-6x} & \underline{+12y} & = & \underline{-18} & \\
 & & & & & & 0y & = & 0 & \Rightarrow \mathbb{L} = \{(x; y)|y = 0.5x - 1.5\};
\end{array}$$

b1)

$$\begin{array}{rrcrcrrcrl}
4x & -6y & = & 2 & \xrightarrow{\cdot 6} & 24x & -36y & = & 12 & \\
6x & -9y & = & 6 & \xrightarrow{\cdot(-4)} & \underline{-24x} & \underline{+36y} & = & \underline{-24} & \\
 & & & & & & 0y & = & -12 & \lightning \quad \Rightarrow \mathbb{L} = \{\};
\end{array}$$

c1)

$$\begin{array}{rrcrcrrcrl}
6x & -9y & = & 0 & \xrightarrow{\cdot 3} & 18x & -27y & = & 0 & \\
3x & -6y & = & 0 & \xrightarrow{\cdot(-6)} & \underline{-18x} & \underline{+36y} & = & \underline{0} & \\
 & & & & & & 9y & = & 0 & \Rightarrow y = 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrcrcr}
6x & -0 & = & 0 & \Leftrightarrow & 6x = 0 \\
3x & -0 & = & 0 & \Leftrightarrow & 3x = 0 \\
 & & & & & \Rightarrow x = 0
\end{array}$$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{(0; 0)\}$ (das LGS hat genau eine und nicht unendlich viele Lösungen);

d1)

$$\begin{array}{rrcrcrrcrl}
-x & -y & = & 0 & \xrightarrow{\cdot 1} & -x & -y & = & 0 & \\
-x & +y & = & 2 & \xrightarrow{\cdot(-1)} & \underline{x} & \underline{-y} & = & \underline{-2} & \\
 & & & & & & -2y & = & -2 & \Rightarrow y = 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrcrcr}
-x & -1 & = & 0 & \Leftrightarrow & -x = 1 \\
-x & +1 & = & 2 & \Leftrightarrow & -x = 1 \\
 & & & & & \Rightarrow x = -1
\end{array}$$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{(-1; 1)\}$;

e)

$$\begin{array}{rrcrcrrcrl}
4x & -8y & = & 4 & \xrightarrow{\cdot 3} & 12x & -24y & = & 12 & \\
3x & -6y & = & 3 & \xrightarrow{\cdot(-4)} & \underline{-12x} & \underline{+24y} & = & \underline{-12} & \\
 & & & & & & 0y & = & 0 & \Rightarrow \mathbb{L} = \{(x; y)|y = 0.5x - 0.5\};
\end{array}$$

f)

$$\begin{array}{rrcrcrrcrl}
3x & -9y & = & 9 & \xrightarrow{\cdot 2} & 6x & -18y & = & 18 & \\
-2x & +6y & = & 6 & \xrightarrow{\cdot 3} & \underline{-6x} & \underline{+18y} & = & \underline{18} & \\
 & & & & & & 0y & = & 36 & \lightning \quad \Rightarrow \mathbb{L} = \{\};
\end{array}$$

g)

$$\begin{array}{rrcrcrrcrl}
8x & -2y & = & 8 & \xrightarrow{\cdot 4} & 32x & -8y & = & 32 & \\
4x & +y & = & 4 & \xrightarrow{\cdot(-8)} & \underline{-32x} & \underline{-8y} & = & \underline{-32} & \\
 & & & & & & -16y & = & 0 & \Rightarrow y = 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrcrcr}
8x & -0 & = & 8 & \Leftrightarrow & 8x = 8 \\
4x & +0 & = & 4 & \Leftrightarrow & 4x = 4 \\
 & & & & & \Rightarrow x = 1
\end{array}$$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{(1; 0)\}$;

h)

$$\begin{array}{rrcrl}
3x & +0y & = & -6 & \Rightarrow x = -2 \\
-2x & +0y & = & 4 & \Rightarrow x = -2 \quad \text{und } y \text{ beliebig} \; \Rightarrow \mathbb{L} = \{(-2; y)\} \text{ für beliebiges } y;
\end{array}$$

Aufg. 26/31: a) Es ist LGS d) ii; b) Die Matrix entsteht durch Weglassen der Variablen x und y, des Rechenzeichens '+' (und eigentlich der Umwandlung des Rechenzeichens '-' in ein Vorzeichen) und des Gleichheitszeichens. Das LGS muss vorher auf geeignete Weise sortiert sein. Das LGS entsteht aus der Matrix durch Hinzuname der Variablen x, y sowie der '+' Zeichen und '=' Zeichen. c) Man spart etwas Schreibarbeit baut aber eine (zu diesem Zeitpunkt unnötige) Codierung, weshalb ich auf die weitere Anwendung der Matrixschreibweise verzichte. Aber: Es steht aber im Curriculum + ich habe es eben unterrichtet.

Aufg. 26/32:

a)
$$\begin{array}{rrcl c rrcr}
ax & +cy & = & e & \xrightarrow{\cdot(-b)} & -ab\cdot x & -bc\cdot y & = & -be \\
bx & +dy & = & f & \xrightarrow{\cdot a} & \underline{ab\cdot x} & \underline{+ad\cdot y} & = & \underline{af} \\
 & & & & & & (ad-bc)\cdot y & = & af-be
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl c rrcr}
ax & +cy & = & e & \xrightarrow{\cdot d} & ad\cdot x & +cd\cdot y & = & ed \\
bx & +dy & = & f & \xrightarrow{\cdot(-c)} & \underline{-bc\cdot x} & \underline{-cd\cdot y} & = & \underline{-cf} \\
 & & & & & (ad-bc)\cdot y & & = & ed-cf
\end{array}$$

Also ist das LGS genau dann eindeutig lösbar, wenn $ad-bc\neq 0$ ist.
Es gilt dann $x=\frac{ed-cf}{ad-bc}$ und $y=\frac{af-be}{ad-bc}$ also $\mathbb{L}=\{(\frac{ed-bf}{ad-bc};\frac{af-ce}{ad-bc})\}$.

b) $ad-bc$ ist die Determinante aus Ag 9. Es gilt tatsächlich $x=\dfrac{\det\begin{pmatrix} e & c\\ f & d\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}}$, $\quad y=\dfrac{\det\begin{pmatrix} a & e\\ b & f\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}}$.

Aufg. 26/33: (Das Planungsvieleck) a) Svenja H. und Karolina K. waren in der 'Mädchenklasse', die ich im November 2014 übernommen habe. Beide sind in dieser Aufgabe in Hurra Mathe verewigt.
x : Anzahl der, von Benedikt gegessenen Hamburger; y : Hamburger, von Bernhard gegessen; $x\geq 0$, $y\geq 0$ (Anzahl der Hamburger kann nicht negativ sein), $x+y\leq 4 \Leftrightarrow y\leq 4-x$ (erzeugt eine Halbebene), Zeichnung (Abb. 249) nach Knapp (Abs: 2.2.7): $y=4-x$ bzw. $x=0, y=0$.

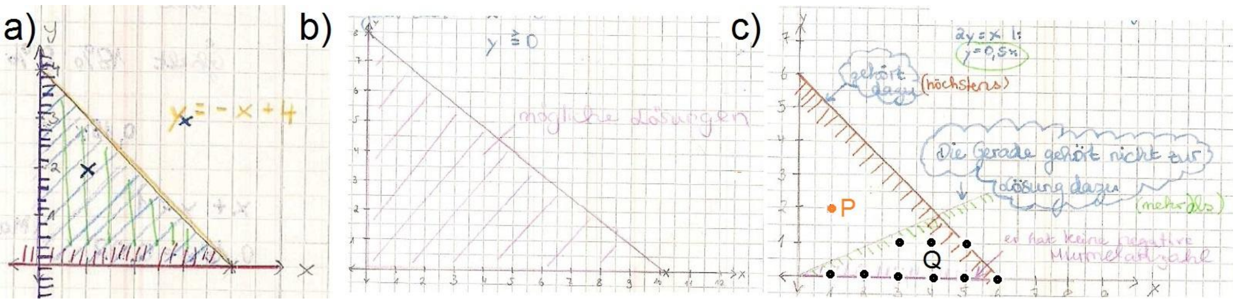


Abb. 249 Planungsvielecke

b) x : Anzahl der gekauften Pralinen, y : Anzahl der gekauften himmlischen Pralinen, $x\geq 0$, $y\geq 0$ (Anzahl der Pralinen kann nicht negativ sein), $0.4x+0.5y\leq 4 \Leftrightarrow y\leq 8-0.8x$.

c) Gesucht ist Peter Hofmann aus der Science-Fiction-Serie Commander Perkins von H. G. Francis. Er besuchte in den Teilen 1-6 den achten Planeten der Wega und in den Teilen 7+8 den Planeten Arrow.

x : Anzahl der Besuche auf Arrow und y : Anzahl der Besuche auf dem achten Planeten der Wega. Es sind zusammen höchstens 6 Besuche: $x+y\leq 6$; Er war mehr als doppelt so oft auf Arrow wie auf dem achten Planeten der Wega: $2y<x$; Grenzen: i) $y\leq 6-x$, ii) $y<\frac{x}{2}$, $x\geq 0$, $y\geq 0$; Wenn Sie nicht wissen, welcher Teil gemeint ist, so wählen Sie aus jedem Stück der Ebene einen Punkt aus (Knapp; Abs: 2.2.7); hier exemplarisch $P(1;2)$ und $Q(4;1)$. P erfüllt i) aber ii) nicht: $2\not<\frac{1}{2}$; Q erfüllt alle Ungleichungen. Mögliche Punkte sind in der Zeichnung markiert.

d) Gesucht ist hier das folgende Ringelnatz Gedicht:

Ein männlicher Briefmark erlebte Was Schönes, bevor er klebte.
Er war von einer Prinzessin beleckt. Da war die Liebe in ihm erweckt.

Er wollte sie wieder küssen, Da hat er verreisen müssen.
So liebte er sie vergebens. Das ist die Tragik des Lebens!

d) x : Anzahl der männlichen Marken; y : die Anzahl der weiblichen Marken; Zwischen 2 und 6 männliche Marken: $2 \leq x \leq 6$; zwischen 3 und 8 weibliche Marken: $3 \leq y \leq 8$; es sind mindestens 7 Marken: $x + y \geq 7$; es sind höchstens 10 Marken: $x + y \leq 10$ (Abb. 250).

e) Im Jahre 1963 kam der James Bond Film **'Liebesgrüße aus Moskau'** in die Kinos. Dabei schreibt Tatjana Romanova einen Liebesbrief an James Bond, der nach dem Ornithologen 'James Bond' aus Philadelphia benannt.

(Noch ohne Abbildung:) x : Anzahl der 50 Kopeken Marken; y : Anzahl der 1 Rubel Marken; Höchstens 5 Rubel: $0.5x + y \leq 5$; mindestens doppelt so viele 50 Kopeken Marken: $2y < x$; mindestens eine 1 Rubel Marke: $y \geq 1$; mindestens drei 50 Kopeken Marken: $x \geq 3$; Ecken der gesuchten Fläche: (3; 1) (8; 1) (5; 2,5) (3; 1,5).

Aufg. 27/34: a) Das Eckenkriterium: Darstellung: $(x; y|\text{Koordinatensumme})$;
Ecken des Vielecks: $(0; 0|0)$, (Minimum) $(4.5; 0|4.5)$, $(3; 3|6)$, Maximum $(0; 4|4)$;
Maximum und Minimum liegen (meist) auf einer Ecke des Planungsvielecks.

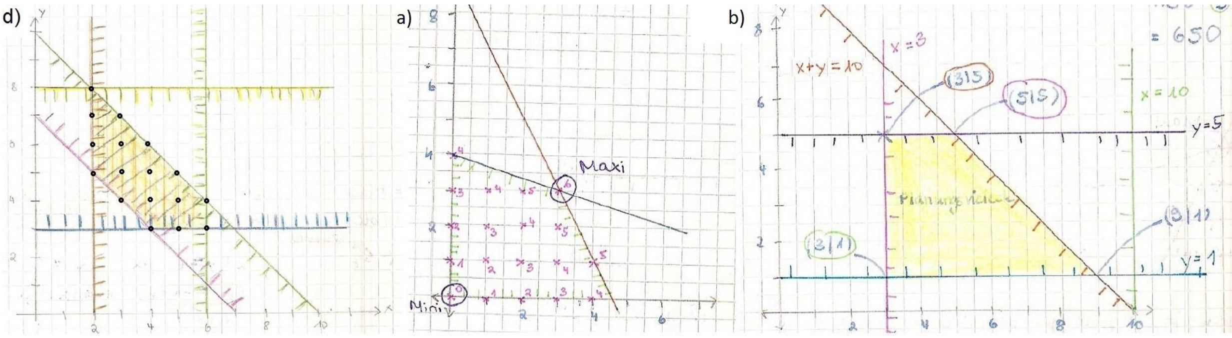


Abb. 250 Planungsvielecke 2. Teil

b) Gesucht ist das Spiel des Jahres 'Auf Achse' (Verlag F.X. Schmid - auch andere) aus dem Jahre 1987. Sein Erfinder ist Wolfgang Kramer und es geht um Brummis, Frachten und Moneten.

Sei x die Anzahl der Orangensaftpaletten, y die Anzahl der Apfelsaftpaletten.
Passen höchstens 10 Paletten: $x + y \leq 10$; mindestens drei Paletten Orangensaft: $x \geq 3$;
mindestens eine Palette Apfelsaft: $y \geq 1$; zehn Paletten Orangensaft im Lager: $x \leq 10$;
fünf Paletten Apfelsaft im Lager: $y \leq 5$; Geld$= 200 \cdot x + 150 \cdot y$;
Eckpunkte: $(5; 5|1750)$ Maximum, $(3; 5|1450)(3; 1|650)(9; 1|1550)$ (Abb. 250).

c) Gesucht ist die Feuerzangenbowle. In dieser Erzählung spielt Hans Pfeiffer seinen Lehrern Bömmel, Schnauz und dem Rektor Knauer Streiche. Der 'echte' Johannes Pfeiffer ist Schriftsteller; Hans Pfeiffers schlechtestes Fach ist deshalb natürlich Deutsch.

Sei x die Anzahl der Tage Mathelernen, y die Anzahl der Tage Deutschlernen.
Benötigt in Mathematik mindestens 3 Tage: $x \geq 3$;
in Deutsch mindestens 2 Tage: $y \geq 2$;
An einem Tag kann er in Mathematik 5 Seiten Stoff und in Deutsch 10 Seiten Stoff pro Tag lernen.
Insgesamt muss er in beiden Fächern zusammen mindestens 50 Seiten Stoff lernen: $5x + 10y \geq 50$;
höchstens doppelt so viel Deutsch wie Mathe: $2x > y$;
in den Sommerferien hat er maximal 12 Tage Zeit: $x + y \leq 12$;
Eckpunkte: $(3; 3.5|6.5)(6; 2|8)(10; 2|12)(4; 8|12)(3; 6|9)$ (Abb. 251)

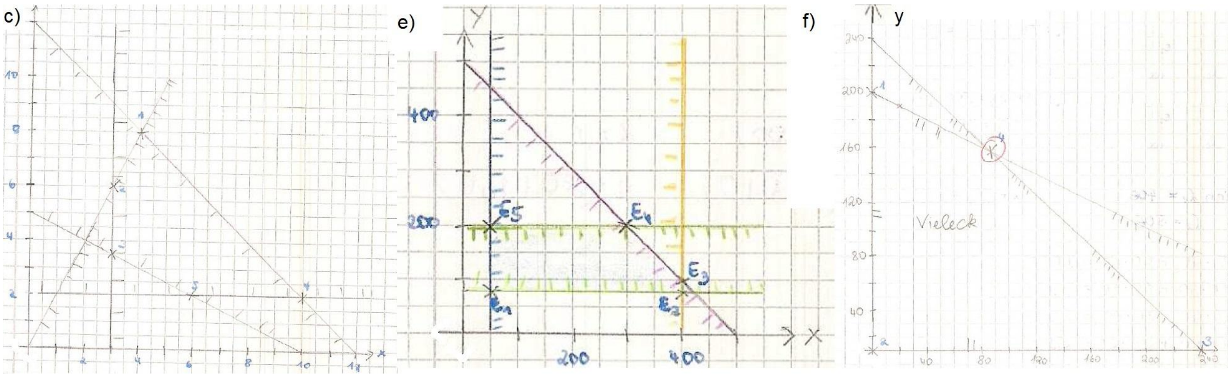


Abb. 251 Planungsvielecke 3. Teil

d) Gesucht ist Jules Vernes Novelle 'In 80 Tagen um die Welt'. Hier reisen Phileas Fogg (Fog (engl.) = Nebel) und sein Diener Passpartout, in 80 Tagen um die Welt und gewinnen eine Wette.

(Noch ohne Abbildung:) x Anzahl km Bus, y Anzahl km Bahn, Strecke von mind. 100 km: $x+y \geq 100$;
Der Fahrpreis soll 10 € nicht überschreiten. Der Kilometerfahrpreis beträgt der Verkehrsmittel beträgt: Bus: 5 Cent, Eisenbahn 10 Cent: $0.05 \cdot x + 0.1 \cdot y \leq 10$;
es sollen mindestens so viele Bahn wie Buskilometer dabei sein $y \geq x$;
um zum Bahnhof zu kommen, muss sie 20 km mit dem Bus fahren: $x \geq 20$;
Die Reisegeschwindigkeiten betragen: Bus: 40 km/h, Eisenbahn: 80 km/h: Reisezeit $= \frac{x}{40} + \frac{y}{80}$;

Eckpunkte: $(50; 50|1.875), (65; 65|2.4375), (20; 90|1.625), (20; 80|1.5)$ Minimum.

e) Sei x Anzahl der Äpfel und y Anzahl der Birnen.
Pro Tag kann er maximal 500 Stück verkaufen: $x + y \leq 500$; mindestens 50 Äpfel: $x \geq 50$;
mindestens 80 Birnen: $y \geq 80$; maximal 400 Äpfel: $x \leq 400$;
maximal 200 Birnen: $y \leq 200$; Gewinn$=x \cdot 0.4 + y \cdot 0.5$:

Eckpunkte: $E_1(50; 80|60) min, E_2(50; 400|200), E_3(400; 100|210), E_4(300; 200|220) max, E_5(50; 200|120)$.

Der Gewinn ist bei 300 Äpfeln und 200 Birnen am größten: 220 €.

f) Sei x die Anzahl der Arbeitstage Typ A und y die Anzahl der Arbeitstage Typ B.
Je Arbeitstag können entweder 15 Fernseher Typ A oder 30 Fernseher Typ B gebaut werden. Man Rechnet mit maximal 6000 verkauften Fernsehern: $15x + 30y \leq 6000$;
im Laufe eines Jahres (240 Arbeitstage): $x + y \leq 240$
Gewinn $= 300 \cdot 15 \cdot x + 200 \cdot 30 \cdot y$.

Eckpunkte: $E_1(0; 200|1.2), E_2(0; 0|0) min, E_3(240; 0|1.08), E_4(80; 160|1.32) max$ (in Millionen €).

Der Gewinn ist bei 80 AT Typ A und bei 160 AT Typ B am größten: 1.32 Millionen €.

15.2.3 LöVo zu Einheit 2.2.5 (Wurzelrechnen UE 8_5)

Aufg. 27/35: a) Hier soll ein Problembewusstsein dafür geschaffen werden, dass man für diese Aufgabe nicht einfach eine Lösung findet. b) $x^2 = 12$; c) $x < 3.5$, weil $12 < 12.25 = 3.5^2$;
d) $3.3^2 = 10.89 < 12$, $3.4^2 = 11.56 < 12$, und $3.5^2 = 12.25 > 12$;
e) $3.45 < x < 3.5$, denn $3.45^2 = 11.9025 < 12 < 3.5^2 = 12.25$;
f) $3.46 < x < 3.47$, denn $3.45^2 = 11.9716 < 12 < 3.47^2 = 12.0409$;
g) $3.464 < x < 3.465$, denn $3.464^2 = 11.999296 < 12 < 3.465^2 = 12.006225$;
h) $x_5 = 2.236$, $x_7 = 2.646$, $x_{20.25} = 4.5$.

Aufg. 28/36: a) Gesucht ist eine (Annäherung an die) Zahl x, die quadriert $= z$ ergibt.

Algorithmus: $x^2 = z$ **Rechnung:** $x^2 = 6$

1)	Wähle einen Startwert $a = 1$;	$a = \underline{1}$;
2)	Solange $\underline{a^2 < z}$ gilt, addiere $\underline{1}$ zu $\underline{a}$	$a + 1 = 2 : 2^2 = 4 < 6 \Rightarrow a := 2$;
		$a + 1 = 3 : 3^3 = 9 > 6 \Rightarrow a$ bleibt 2;
3)	$b = \underline{a+1}$, damit gilt $a \underline{\leq x <} b$	$\underline{b = a + 1 = 3} \underline{\Rightarrow 2 \leq x < 3}$
4)	Solange $\underline{a^2 < z}$ gilt, addiere 0.1 zu $\underline{a}$	$a + 0.1 = 2.4 : 2.4^2 = 5.76 < 6 \Rightarrow a := 2.4$;
5)	$b = \underline{a + 0.1}$, damit gilt $a \underline{\leq x <} b$	$\underline{b = 2.5}$ damit gilt $\underline{2.4 < x < 2.5}$
6)	Wiederhole die Schritte $\underline{\text{4 und 5}}$ mit Schrittweite $\underline{0.01, 0.001,}$ usw.	

b)

$a = 2.41$	$a + 0.01 = 1.42 :$	$\underline{2.42}^2 = 5.8564 \leq \underline{6}$	$\Rightarrow a = \underline{2.42}$;
$a = 2.42$	$a + 0.01 = 2.43 :$	$2.43^2 = 5.9049 \leq 6$	$\Rightarrow a = 2.43$;
$a = 2.43$	$a + 0.01 = 2.44 :$	$2.44^2 = 5.9536 \leq 6$	$\Rightarrow a = 2.44$;
$a = 2.44$	$a + 0.01 = 2.45 :$	$2.45^2 = 6.0025 > 6$	$\Rightarrow a$ bleibt 2.44; $2.44 \leq x < 2.45$;

c)

$z = 2$;	$a = 1$	$a + 1 = 2 :$	$2^2 = 4 > 2$	$\Rightarrow a$ bleibt 1;	$1 \leq x < 2$
	$a = 1.0$	$a + 0.1 = 1.1 :$	$1.1^2 = 1.21 \leq 2$	$\Rightarrow a = 1.1$;	
	$a = 1.1$	$a + 0.1 = 1.2 :$	$1.2^2 = 1.44 \leq 2$	$\Rightarrow a = 1.2$;	
	$a = 1.2$	$a + 0.1 = 1.3 :$	$1.3^2 = 1.69 \leq 2$	$\Rightarrow a = 1.3$;	
	$a = 1.3$	$a + 0.1 = 1.4 :$	$1.4^2 = 1.96 \leq 2$	$\Rightarrow a = 1.4$;	
	$a = 1.4$	$a + 0.1 = 1.5 :$	$1.5^2 = 2.25 > 2$	$\Rightarrow a$ bleibt 1.4;	$1.4 \leq x < 1.5$
	$a = 1.40$	$a + 0.01 = 1.41 :$	$1.41^2 = 1.9881 \leq 2$	$\Rightarrow a = 1.41$;	
	$a = 1.41$	$a + 0.01 = 1.42 :$	$1.42^2 = 2.0164 > 2$	$\Rightarrow a$ bleibt 1.41;	$1.41 \leq x < 1.42$

$z = 3$;	$a = 1$	$a + 1 = 2 :$	$2^2 = 4 > 3$	$\Rightarrow a$ bleibt 1;	$1 \leq x < 2$
	$a = 1.0$	$a + 0.1 = 1.1 :$	$1.1^2 = 1.21 \leq 3$	$\Rightarrow a = 1.1$;	
	...	Zwischenschritte selber durchführen			
	$a = 1.6$	$a + 0.1 = 1.7 :$	$1.7^2 = 2.89 \leq 3$	$\Rightarrow a = 1.7$;	
	$a = 1.7$	$a + 0.1 = 1.8 :$	$1.8^2 = 3.24 > 3$	$\Rightarrow a$ bleibt 1.7;	$1.7 \leq x < 1.8$
	$a = 1.70$	$a + 0.01 = 1.71 :$	$1.71^2 = 2.9241 \leq 3$	$\Rightarrow a = 1.71$	
	$a = 1.71$	$a + 0.01 = 1.72 :$	$1.72^2 = 2.9584 \leq 3$	$\Rightarrow a = 1.72$	
	$a = 1.72$	$a + 0.01 = 1.73 :$	$1.73^2 = 2.9929 \leq 3$	$\Rightarrow a = 1.73$	
	$a = 1.73$	$a + 0.01 = 1.74 :$	$1.74^2 = 3.0276 > 3$	$\Rightarrow a$ bleibt 1.73	$1.73 \leq x < 1.74$

$z = 15$;	$a = 1$	$a + 1 = 2 :$	$2^2 = 4 \leq 15$	$\Rightarrow a = 2$	
	$a = 2$	$a + 1 = 3 :$	$3^2 = 9 \leq 15$	$\Rightarrow a = 3$	
	$a = 3$	$a + 1 = 4 :$	$4^2 = 16 > 15$	$\Rightarrow a$ bleibt 3	$3 \leq x < 4$
	$a = 3.0$	$a + 0.1 = 3.1 :$	$3.1^2 = 9.61 \leq 15$	$\Rightarrow a = 3.1$;	
	...	Zwischenschritte selber durchführen			
	$a = 3.7$	$a + 0.1 = 3.8 :$	$3.8^2 = 14.44 \leq 15$	$\Rightarrow a = 3.8$;	
	$a = 3.8$	$a + 0.1 = 3.9 :$	$3.9^2 = 15.21 > 15$	$\Rightarrow a$ bleibt 3.8;	$3.8 \leq x < 3.9$
	$a = 3.80$	$a + 0.01 = 3.81 :$	$3.81^2 = 14.5161 \leq 15$	$\Rightarrow a = 3.81$;	
	...	Zwischenschritte selber durchführen			
	$a = 3.86$	$a + 0.01 = 3.87 :$	$3.87^2 = 14.9769 \leq 15$	$\Rightarrow a = 3.87$;	
	$a = 3.87$	$a + 0.01 = 3.88 :$	$3.88^2 = 15.0544 > 15$	$\Rightarrow a$ bleibt 3.87;	$3.87 \leq x < 3.88$

Aufg. 28/37: a) $\sqrt{12}$ ist diejenige **positive** Zahl, die **quadriert =12** ergibt. b) Sei $a \underline{\geq 0}$, dann ist $(\sqrt{a})^2 = \underline{a}$.

c) Ziehe niemals die Wurzel aus einer negativen Zahl, weil das Quadrat jeder Zahl ≥ 0 ist.

Aufg. 28/38: a) $\sqrt{64} = \sqrt{8^2} = 8$, $\sqrt{225} = \sqrt{15^2} = 15$, $\sqrt{1024} = \sqrt{2^{10}} = \sqrt{32^2} = 32$, $\sqrt{1\,000\,000} = \sqrt{1000^2} = 1000$;

b) $\sqrt{1.21} = \sqrt{1.1^2} = 1.1$, $\sqrt{0.04} = \sqrt{0.2^2} = 0.2$, $\sqrt{4.84} = \sqrt{2.2^2} = 2.2$, $\sqrt{28.09} = \sqrt{5.3^2} = 5.3$,
c) $\sqrt{\frac{1}{4}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$, $\sqrt{\frac{1}{144}} = \sqrt{\left(\frac{1}{12}\right)^2} = \frac{1}{12}$, $\sqrt{\frac{121}{49}} = \sqrt{\left(\frac{11}{7}\right)^2} = \frac{11}{7}$, $\sqrt{\frac{100}{81}} = \sqrt{\left(\frac{10}{9}\right)^2} = \frac{10}{9}$;
d) $\sqrt{2\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}$, $\sqrt{1\frac{7}{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{4}{3}$;

Aufg. 28/39: a) Jan weiss, dass die Straße nass ist (Wenn es regnet, dann ist die Straße nass).
b) Jan kann nicht davon ausgehen, dass es regnet, wenn die Straße nass ist. Es könnte zu regnen aufgehört haben.
c) Wenn es regnet, dann ist die Straße nass. Wenn die Straße nicht nass ist, dann regnet es auch nicht.

Aufg. 28/40: a) Eine Primzahl ist ein ganze Zahl größer 1, die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist. b) Es gibt vermutlich unendlich viele; c) Gegenteil: Es gibt endlich viele Primzahlen;
d) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210 = z_4$, 211 hat nicht die Teiler $\{2, 3, 5, 7\}$, durch probieren der Zahlen 11 und 13 erhalten wir, dass 211 eine Primzahl ist.
e) 2311 hat nicht die Teiler $\{2, 3, 5, 7, 11\}$ und ist (ebenfalls) eine Primzahl; 30031 hat nicht die Teiler $\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ ist aber keine Primzahl, denn $30031 = 59 \cdot 509$.
f) $z_n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot \ldots \cdot p_n$, $z_n + 1$ hat nicht die Teiler $\{p_1 \ldots p_n\}$; also ist $z_n + 1$ entweder eine Primzahl (wie $z_4 + 1$ und $z_5 + 1$) oder hat Primteiler, die wir nicht berücksichtigt hatten wie $z_6 + 1$. Dies ist ein Widerspruch zur Tatsache, dass wir alle Primzahlen p_i bei der Definition von z_n verwendet haben.

g) Gesucht ist das Komiker-Duo Oliver Hardy (dick) und Stan Laurel (doof), die als 'Dick und Doof' (Serie des ZDF in den siebziger Jahren) zahlreiche Schwarz-Weiß-Filme mit wahren 'Zerstörungsorgien' gedreht haben.

Ollis Aussage ist natürlich an sich schon zweifelhaft. Wenn wir dies aber außer Acht lassen, so gilt $P \Rightarrow D$. Stan (in den Filmen als 'doof' charakterisiert) interpretiert die Aussage als $\bar{P} \Rightarrow \bar{D}$ und damit als $D \Rightarrow P$ und weil er ja 'doof' ist, muss er nach dieser Interpretation einen Porsche haben.

Aufg. 29/41: a) PFZ von Q: $9 = 3 \cdot 3$, $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, $25 = 5 \cdot 5$, $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, $144 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, $400 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$; PFZ von $\bar{Q}$: $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, $32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, $40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$; $108 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$; Bei Quadratzahlen ist die Anzahl jedes Primfaktors gerade.

b) x heißt Schloss wurde gedreht; o = offen z = zu

Zelle	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1 Durchlauf	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
2 Durchlauf		x		x		x		x		x		x		x		x	
3 Durchlauf			x			x			x			x			x		
4 Durchlauf				x				x				x				x	
5 Durchlauf					x					x					x		
6 Durchlauf						x						x					
7 Durchlauf							x							x			
8 Durchlauf								x								x	
9 Durchlauf									x								
10-17 Durchlauf										x	x	x	x	x	x	x	x
Am Ende	o	z	z	o	z	z	z	z	o	z	z	z	z	z	z	o	z
Anzahl x	1	2	2	3	2	4	2	4	3	2	2	6	2	4	4	5	2

Jedes x steht für einen Teiler; wenn die Anzahl der Elemente der Teilermenge ungerade ist, bleibt die Zelle offen. Dies ist genau beiden Quadratzahlen der Fall.

Aufg. 29/42: a) Die Primfaktorzerlegungen von p und q sind teilerfremd;
b) $2 = \frac{p^2}{q^2}$, weil $\sqrt{2}$ ist diejenige positive Zahl, die quadriert $= 2$ ist. $(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2$. $2 \cdot q^2 = p^2$, damit hat p^2 den Primfaktor 2, damit hat p den Primfaktor 2, weil bei Quadratzahlen Primfaktoren geradzahlig sind.

c) Sei $p = 2 \cdot p'$, dann gilt $2 \cdot q^2 = p^2 = (2 \cdot p') \cdot (2 \cdot p') \Leftrightarrow q^2 = 2 \cdot p' \cdot p'$, also hat q^2 (und damit q) den Primfaktor 2. Das ist ein Widerspruch zur Annahme, dass p und q teilerfremd sind.

d) $\mathbb{N}$ = natürliche Zahlen $\mathbb{Z}$ = ganze Zahlen $\mathbb{Q}$ = rationale Zahlen $\mathbb{R}$ = reelle Zahlen.

e) $\frac{1}{4} = 0.25$, $\frac{1}{3} = 0.\bar{3}$, $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$. $0.\overline{3} = \frac{1}{3}$, $0.\bar{1} = \frac{1}{9}$, $0.\bar{4} = \frac{4}{9}$, $0.\bar{9} = \frac{9}{9} = 1 \not< 1$, $0.0\bar{4} = \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{90}$, $0.000\bar{6} = \frac{1}{1000} \cdot \frac{6}{9} = \frac{6}{9000}$, $0.\overline{01} = \frac{1}{99}$, $0.\overline{34} = \frac{34}{99}$, $0.\overline{123} = \frac{123}{999}$, $0.1\bar{6} = \frac{1}{10} + \frac{6}{90} = \frac{9+6}{90} = \frac{1}{6}$,

Die Dezimaldarstellung eines Bruches ist entweder abbrechend oder (von einer Stelle an) periodisch. Die Dezimaldarstellung von $\sqrt{2}$ oder π ist weder abbrechend noch (von einer Stelle an) periodisch.

Aufg. 29/43: **a)** $\sqrt{12}$, **b)** Wir wollen $\sqrt{12}$ approximieren. Dazu approximieren wir das Quadrat aus Teil a) durch ein Rechteck mit einer Seitenlänge $x_1 = 3$; $y_1 = \frac{12}{3} = 4$.
c) Die tatsächliche Seitenlänge ist zwischen x_1 und y_1: Wir wählen x_2 als Mitte von x_1 und y_1 also $x_2 = \frac{x_1+y_1}{2} = 3.5$; y_2 ist dann $y_2 = \frac{12}{x_2} = \frac{12}{3.5} \approx 3.4285714$;

d)
$$\begin{aligned} x_3 &= \tfrac{x_2+y_2}{2} \approx 3.464285714, & y_3 &= \tfrac{12}{x_3} \approx 3.463917526;\\ x_4 &= \tfrac{x_3+y_3}{2} \approx 3.46410162, & y_4 &= \tfrac{12}{x_4} \approx 3.46410161;\\ x_5 &= \tfrac{x_4+y_4}{2} \approx 3.464101615, & y_5 &= \tfrac{12}{x_5} \approx 3.464101615; \end{aligned}$$

e) Die Werte für x_n und auch für y_n nähern sich sehr schnell $\sqrt{12}$ an.
Die Annäherungsgeschwindigkeit ist abhängig vom Startwert (x_1).

f) $\sqrt{20}$:
$$\begin{aligned} &\text{Startwert: } x_1 = 4 & y_1 &= \tfrac{20}{x_1} = 5\\ x_2 &= \tfrac{x_1+y_1}{2} = 4.5, & y_2 &= \tfrac{20}{x_2} = 4.\bar{4};\\ x_3 &= \tfrac{x_2+y_2}{2} = 4.47\bar{2}, & y_3 &= \tfrac{20}{x_3} \approx 4.472049689;\\ x_4 &= \tfrac{x_3+y_3}{2} \approx 4.472135956, & y_4 &= \tfrac{20}{x_4} \approx 4.472135954; \end{aligned}$$

$\sqrt{30}$:
$$\begin{aligned} &\text{Startwert: } x_1 = 5 & y_1 &= \tfrac{30}{x_1} = 6\\ x_2 &= \tfrac{x_1+y_1}{2} = 5.5, & y_2 &= \tfrac{30}{x_2} = 5.\overline{45};\\ x_3 &= \tfrac{x_2+y_2}{2} \approx 5.477\overline{27}, & y_3 &= \tfrac{30}{x_3} \approx 5.477178423;\\ x_4 &= \tfrac{x_3+y_3}{2} \approx 5.477225575, & y_4 &= \tfrac{30}{x_4} \approx 5.477225575; \end{aligned}$$

$\sqrt{42}$:
$$\begin{aligned} &\text{Startwert: } x_1 = 6 & y_1 &= \tfrac{42}{x_1} = 7\\ x_2 &= \tfrac{x_1+y_1}{2} = 6.5, & y_2 &= \tfrac{42}{x_2} = 6.461538462;\\ x_3 &= \tfrac{x_2+y_2}{2} \approx 6.480769231, & y_3 &= \tfrac{42}{x_3} \approx 6.480712166;\\ x_4 &= \tfrac{x_3+y_3}{2} \approx 6.480740699, & y_4 &= \tfrac{42}{x_4} \approx 6.480740698; \end{aligned}$$

g) Das Heronverfahren: Es soll $\sqrt{a}$ approximiert werden
1) Wähle $x_1 = 1$, dann ist $y_1 = \frac{a}{x_1}$, 1b) $x_2 = \frac{x_1+y_1}{2}$, $y_2 = \frac{a}{x_2}$;
1c) $x_3 = x_{2+1} = \frac{x_2+y_2}{2}$, $y_3 = y_{2+1} = \frac{a}{x_2}$; 1d) $x_4 = x_{3+1} = \frac{x_3+y_3}{2}$, $y_4 = y_{3+1} = \frac{a}{x_3}$;
2) $x_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}$, $y_{n+1} = \frac{a}{x_{n+1}}$;
3) Das Verfahren ist abzubrechen, wenn die gewünschte Genauigkeit erreicht ist, das heißt, wenn sich die entsprechende Nachkommastelle nicht mehr ändert.

Aufg. 29/44:

a) $\sqrt{10}$:
$$\begin{aligned} &\text{Startwert: } x_1 = 3 & y_1 &= \tfrac{10}{3} = 3.\bar{3}\\ x_2 &= \tfrac{x_1+y_1}{2} = 3.1\bar{6}, & y_2 &= \tfrac{10}{x_2} = 3.157894737;\\ x_3 &= \tfrac{x_2+y_2}{2} \approx 3.162280702, & y_3 &= \tfrac{10}{x_3} \approx 3.162274619; \end{aligned}$$

$\sqrt{10}$:
$$\text{Startwert: } x_1 = 10 \qquad y_1 = \tfrac{10}{x_1} = 1$$

$$\begin{array}{llllllll}
x_2 & = & \frac{x_1+y_1}{2} & = & 5.5, & y_2 & = \frac{10}{x_2} & = 1.\overline{81}; \\
x_3 & = & \frac{x_2+y_2}{2} & = & 3.65\overline{90}, & y_3 & = \frac{10}{x_3} & \approx 2.732919255; \\
x_4 & = & \frac{x_3+y_3}{2} & \approx & 3.196005082, & y_4 & = \frac{10}{x_4} & \approx 3.128906164; \\
x_5 & = & \frac{x_4+y_4}{2} & \approx & 3.162455623, & y_4 & = \frac{10}{x_4} & \approx 3.162099708;
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllllll}
\sqrt{10}: & \text{Startwert: } x_1 & = & -3 & & y_1 & = \frac{10}{x_1} & = -10 \\
x_2 & = & \frac{x_1+y_1}{2} & = & -3.1\bar{6}, & y_2 & = \frac{10}{x_2} & = -3.157894737; \\
x_3 & = & \frac{x_2+y_2}{2} & \approx & -3.162280702, & y_3 & = \frac{10}{x_3} & \approx -3.162274619;
\end{array}$$

$x_1 > 0$, dann geht die Folge gegen $\sqrt{10}$ (allgemein $\sqrt{a}$), $x_1 < 0$, dann geht die Folge gegen $-\sqrt{10}$ (allgemein $-\sqrt{a}$), $x_1 = 0$, dann ist x_2 nicht definiert.

Aufg. 29/45: (Tipp: quadrieren) a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8} = 4$, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{6} = \sqrt{12}$, $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a\cdot b}$ (für $a, b \geq 0$).

$$\begin{array}{llll}
\text{Beweis:} & \left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\right)^2 & = & \left(\sqrt{a\cdot b}\right)^2 \\
\Leftrightarrow & (\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}) & = & a\cdot b \quad \text{Definition von 'Quadrieren' und } (\sqrt{a})^2 = a \\
\Leftrightarrow & \sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{b} & = & a\cdot b \quad \text{Kommutativ und Assoziativgesetz} \\
\Leftrightarrow & a\cdot b & = & a\cdot b \quad \sqrt{a}\cdot\sqrt{a} = a \quad \text{(qed)}
\end{array}$$

Beachten Sie, dass beide Seiten der Gleichung ≥ 0 sind. Im Allgemeinen ist Quadrieren keine Äquivalenzumformung (siehe später). b) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

i) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{45} = \sqrt{225} = 15$, ii) $\sqrt{200}\cdot\sqrt{8} = \sqrt{1600} = 40$, iii) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}} = \sqrt{\frac{5}{20}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$,

iv) $\sqrt{2a}\cdot\sqrt{8a} = \sqrt{16a^2} = 4a$, v) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{12}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{144} = 12$, vi) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{2a}\cdot\sqrt{8} = 4a$,

vii) $\sqrt{ab}\cdot\sqrt{3b}\cdot\sqrt{12a^3} = \sqrt{36a^4b^2} = 6a^2b$, viii) $\frac{\sqrt{ab^2}}{\sqrt{a^3}} = \sqrt{\frac{ab^2}{a^3}} = \frac{a}{b}$,

ix) $\frac{\sqrt{2ab}\sqrt{12b^2}\sqrt{2a}}{\sqrt{3b}} = \sqrt{\frac{2ab\cdot 12b^2}{6ab}} = \sqrt{4b^2} = 2b$, x) $\frac{\sqrt{14ab}\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{7b^4}\cdot\sqrt{2a^3}} = \sqrt{\frac{14ab\cdot b}{7b^4\cdot 2a^3}} = \sqrt{\frac{1}{a^2\cdot b^2}} = \frac{1}{ab}$,

xi) $\sqrt{\frac{6a^5}{5b}}\cdot\sqrt{\frac{27b^3}{10a^7}} = \sqrt{\frac{6a^5}{5b}\cdot\frac{27b^3}{10a^7}} = \sqrt{\frac{6a^5\cdot 27b^3}{5b\cdot 10a^7}} = \sqrt{\frac{81\cdot b^2}{25\cdot a^2}} = \frac{9\cdot b}{5\cdot a}$;

Beachten Sie, dass $a, b \geq 0$ ist, damit ist $\sqrt{a^2} = |a| = a$ der Betrag kann also weggelassen werden.

Aufg. 30/46:

b) $\sqrt{8} = \sqrt{2\cdot 2\cdot 2} = 2\cdot\sqrt{2}$, $\sqrt{108} = \sqrt{2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3} = 2\cdot 3\cdot\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$,
$\sqrt{375} = \sqrt{3\cdot 5\cdot 5\cdot 5} = 5\sqrt{15}$, $\sqrt{600} = \sqrt{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 5} = 10\sqrt{6}$,
$\sqrt{16a^3} = \sqrt{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot a\cdot a\cdot a} = 4a\sqrt{a}$, $\sqrt{25ab^2} = \sqrt{5\cdot 5\cdot a\cdot b\cdot b} = 5b\sqrt{a}$,
$\sqrt{49a^2} = \sqrt{7\cdot 7\cdot a\cdot a} = 7a\sqrt{1} = 7a$. $\sqrt{200a^4} = \sqrt{2\cdot 2\cdot 2\cdot 5\cdot 5\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a} = 10a^2\sqrt{2}$
$\sqrt{72a^2b^3c^4} = \sqrt{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b\cdot b\cdot c\cdot c\cdot c\cdot c} = 6abc^2\sqrt{2b}$

i) weitere: $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$, $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, $\sqrt{200} = 10\sqrt{2}$, $\sqrt{30} = \sqrt{30}$, $\sqrt{225} = 15$.

c) Aus $\sqrt{12}$ soll teilweise die Wurzel gezogen werden. Zuerst wird die 12 unter der Wurzel in Primfaktoren zerlegt. $\sqrt{12} = \sqrt{2\cdot 2\cdot 3}$, dann wird nach nach Paaren gesucht (hier $2\cdot 2$) und diese Paare werden als *ein* Faktor aus der Wurzel geholt ($2\cdot\sqrt{3}$). Ich nenne dieses Verfahren auch 'Discoprinzip'. Zwei Faktoren lernen sich in der Wurzeldisco kennen und weil man in der Disco nicht miteinander reden kann gehen sie zusammen raus und sind dort ein Pärchen (unzertrennlich).

Aufg. 30/47: a) $2\sqrt{20}-\sqrt{45}=2\sqrt{2\cdot 2\cdot 5}-\sqrt{3\cdot 3\cdot 5}=4\sqrt{5}-3\sqrt{5}=\sqrt{5}$;
b) $3\sqrt{96}-5\sqrt{24}=3\sqrt{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3}-5\sqrt{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3}=12\sqrt{2\cdot 3}-10\sqrt{2\cdot 3}=2\sqrt{6}$;
c) $\frac{4}{5}\sqrt{200}-4\sqrt{8}=\frac{4}{5}\sqrt{2\cdot 2\cdot 2\cdot 5\cdot 5}-4\sqrt{2\cdot 2\cdot 2}=\frac{4\cdot 2\cdot 5}{5}\sqrt{2}-4\cdot 2\sqrt{2}=0$;
d) $\frac{\sqrt{300}+\sqrt{192}}{\sqrt{27}}=\frac{\sqrt{2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 5}+\sqrt{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3}}{\sqrt{3\cdot 3\cdot 3}}=\frac{10\cdot\sqrt{3}+8\cdot\sqrt{3}}{3\cdot\sqrt{3}}=\frac{18\cdot\sqrt{3}}{3\cdot\sqrt{3}}=6$;
e) $\frac{3\sqrt{50}-4\sqrt{75}}{\sqrt{200}}=\frac{3\sqrt{2\cdot 5\cdot 5}-4\sqrt{3\cdot 5\cdot 5}}{\sqrt{2\cdot 2\cdot 2\cdot 5\cdot 5}}=\frac{15\sqrt{2}-20\sqrt{3}}{10\sqrt{2}}=\frac{5(3\sqrt{2}-4\sqrt{3})}{10\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}-4\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=1.5-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$;
f) $\frac{2\sqrt{12}-8\sqrt{27}}{\sqrt{75}}=\frac{2\sqrt{12}-8\sqrt{27}}{\sqrt{75}}=\frac{2\sqrt{2\cdot 2\cdot 3}-8\sqrt{3\cdot 3\cdot 3}}{\sqrt{3\cdot 5\cdot 5}}=\frac{4\sqrt{3}-24\sqrt{3}}{5\sqrt{3}}=\frac{-20\sqrt{3}}{5\sqrt{3}}=-4$;
g) $\frac{8\sqrt{200}+2\sqrt{800}}{\sqrt{0.09}}=\frac{8\sqrt{2\cdot 2\cdot 2\cdot 5\cdot 5}+2\sqrt{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5\cdot 5}}{\sqrt{3\cdot 3\cdot 0.1\cdot 0.1}}=\frac{80\sqrt{2}+40\sqrt{2}}{3\cdot 0.1}=\frac{40\sqrt{2}}{0.1}=400\sqrt{2}$;
h) $\frac{-3.5\sqrt{40}-3\sqrt{90}}{\sqrt{2560}}=\frac{-3.5\sqrt{2\cdot 2\cdot 2\cdot 5}-3\sqrt{2\cdot 3\cdot 3\cdot 5}}{\sqrt{2^9\cdot 5}}=\frac{-7\sqrt{2\cdot 5}-9\sqrt{10}}{2^4\sqrt{2\cdot 5}}=\frac{-16\sqrt{10}}{16\sqrt{10}}=-1$;

i) $(\sqrt{27}+\sqrt{3})\cdot\sqrt{3}=\sqrt{81}+\sqrt{9}=12$; **j)** $\sqrt{7}\cdot(\sqrt{343}+\sqrt{28})=(\sqrt{2401}+\sqrt{196})=49+14=63$;

k) $(\sqrt{80}+\sqrt{20}):\sqrt{5}=\sqrt{16}+\sqrt{4}=4+2=6$; **l)** $(\sqrt{108}+\sqrt{48}):\sqrt{3}=\sqrt{36}+\sqrt{16}=10$;
m) $(\sqrt{8}+\sqrt{18})^2=8+2\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{18}+18=26+2\cdot\sqrt{144}=50$;

n) $(\sqrt{20}-2\sqrt{45})^2=20-4\cdot\sqrt{20}\cdot\sqrt{45}+45=20-4\cdot\sqrt{900}+4\cdot 45=20-4\cdot\sqrt{900}+180=80$;

o) $(\sqrt{7}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{7}+\sqrt{3})=7-3=4$; **p)** $(2\sqrt{5}-5\sqrt{2})\cdot(2\sqrt{5}+5\sqrt{2})=20-50=-30$.

Aufg. 30/48: a) $(a\sqrt{b}+b\sqrt{b})\cdot\sqrt{b}=a\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}+b\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}=ab+b^2$;
b) $(5b\sqrt{a}+3b\sqrt{a}):(2\sqrt{a})=8b\sqrt{a}:(2\sqrt{a})=4b$; **c)** $(b\sqrt{a}+a\sqrt{b})^2=b^2a+2ab\sqrt{ab}+a^2b$;
d) $(\sqrt{4ab}-2\sqrt{ba})^2=(2\sqrt{ab}-2\sqrt{ba})^2=0^2=0$; **e)** $(3a\sqrt{b}-3b\sqrt{a})^2=9a^2b-18ab\sqrt{ab}+9ab^2$;
f) $(\sqrt{b-a}-\sqrt{b+a})^2=b-a-2\sqrt{b^2-a^2}+a+b=2b-2\sqrt{b^2-a^2}$;
g) $\sqrt{a^2+2ab+b^2}=\sqrt{(a+b)^2}=a+b$; **h)** $\sqrt{b^2-4ba+4a^2}=\sqrt{(2b-a)^2}=2b-a$;
i,j) $\sqrt{b^2-a^2}$ und $\sqrt{b^2+a^2}$ können nicht verändert werden.
k) $\sqrt{8a^2+8ab+2b^2}=\sqrt{2(4a^2+4ab+b^2)}=\sqrt{2(2a+b)^2}=\sqrt{2}(2a+b)$;

Aufg. 30/49: a) $\frac{2}{\sqrt{2}}\approx 1.4142$ es könnte $\sqrt{2}$ sein; $\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$;

b) $\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$, $\frac{a}{\sqrt{a}}=\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}}=\frac{a\sqrt{a}}{a}=\sqrt{a}$, $\frac{6}{\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$,

$\frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}}=\frac{a}{b}\cdot\sqrt{b}$; c) $\frac{20\cdot\sqrt{15}}{\sqrt{15}\cdot\sqrt{15}}=\frac{20\cdot\sqrt{15}}{15}=\frac{4}{3}\cdot\sqrt{15}$, $\frac{3}{\sqrt{6}}=\frac{3\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$,

$\frac{9}{\sqrt{3a}}=\frac{9\cdot\sqrt{3a}}{\sqrt{3a}\cdot\sqrt{3a}}=\frac{3}{a}\cdot\sqrt{3a}$, $\frac{1}{\sqrt{ab}}=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{ab}}=\frac{\sqrt{ab}}{ab}$, $\frac{a}{\sqrt{a}}=\frac{a\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}}=\sqrt{a}$.

d) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+2\sqrt{ab}+b$; $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=a-2\sqrt{ab}+b$; $(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$; also die dritte binomische Formel eignet sich (am wahrscheinlichsten).

e) Tipp 3. binomische Formel. $\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}^2-1^2}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}=\sqrt{2}-1$;

$\frac{1}{\sqrt{6}-2}=\frac{\sqrt{6}+2}{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)}=\frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}^2-2^2}=\frac{\sqrt{6}+2}{6-4}=0.5\sqrt{6}+1$;

$\frac{1}{\sqrt{12}-4}=\frac{\sqrt{12}+4}{(\sqrt{12}-4)(\sqrt{12}+4)}=\frac{\sqrt{12}+4}{\sqrt{12}^2-4^2}=\frac{\sqrt{4\cdot 3}+4}{12-16}=\frac{2\sqrt{3}+4}{-4}=-0.5\sqrt{3}-1$;

$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}^2-\sqrt{2}^2}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$; $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{12}}=\frac{1}{\sqrt{3}-2\sqrt{3}}=\frac{1}{-\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$;

$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{-\sqrt{3}}=-\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{12}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{36}+\sqrt{24})}{(\sqrt{3}^2-\sqrt{2}^2}=6+2\sqrt{6}$;

$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{6}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{6})(\sqrt{3}+\sqrt{6})}{(\sqrt{3}-\sqrt{6})(\sqrt{3}+\sqrt{6})}=\frac{\sqrt{3}^2+2\sqrt{3}\sqrt{6}+\sqrt{6}^2}{\sqrt{3}^2-\sqrt{6}^2}=\frac{3+2\sqrt{18}+6}{3-6}=\frac{9+3\sqrt{2}}{-3}=-3-\sqrt{2}$;

Aufg. 30/50:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\sqrt{x^2}$	4	3	2	1	0	1	2	3	4

$\sqrt{x^2}=|x|$, $(\sqrt{x})^2$ ist nur für $x\geq 0$ definiert, der Definitionsbereich von $\sqrt{x^2}$ ist ganz $\mathbb{R}$.

Beachten Sie, dass $|a^2| = a^2$; **a)** $\sqrt{4a^2} = 2 \cdot |a|$; **b)** $\sqrt{9a^4b^2} = 3 \cdot a^2 \cdot |b|$, **c)** $\sqrt{27a^2b^4c^6} = 3|a| \cdot b^2 \cdot |c|^3 \cdot \sqrt{3}$, **d)** $\sqrt{200a(bc)^2} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot a \cdot b^2 \cdot c^2} = 10|b \cdot c| \cdot \sqrt{2a}$ (hier muss $a \geq 0$ sein),

e) $\sqrt{(-2a^2b)^2} = 2a^2|b|$; f) $2|b||c|\sqrt{-a}$ nur für $a \leq 0$.

g) $\sqrt{16}$ ist definiert als diejenige **positive** reelle Zahl, die quadriert 16 ergibt;

Aufg. 30/51: a) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ gilt nicht (allgemein): $1.4142 \approx \sqrt{1+1} \neq \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2$; $\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ gilt ebenfalls nicht (allgemein): $3.464 \approx \sqrt{16-4} \neq \sqrt{16} + \sqrt{4} = 2$; $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ gilt nach Aufgabe 45, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ gilt ebenfalls:

$$\begin{array}{rrcll}
\text{Beweis:} & \left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 & = & \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 & \\
\Leftrightarrow & \frac{a}{b} & = & \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} & \text{Definition von 'Quadrieren' und } (\sqrt{a})^2 = a \\
\Leftrightarrow & \frac{a}{b} & = & \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} & \text{Kommutativ und Assoziativgesetz} \\
\Leftrightarrow & \frac{a}{b} & = & \frac{a}{b} & \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a \quad \text{(qed)}
\end{array}$$

b) $\sqrt{25} + \sqrt{81} = 5 + 9 = 14$, c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{36} = 6$, d) $\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{14}} = \sqrt{2}$,

e) $\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{63}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, f) $\sqrt{40} \cdot \sqrt{30} = \sqrt{1200} = 20\sqrt{3}$,

g) $\sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{50} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$, h) $\sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{8} = \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2} + 2$,

Aufg. 30/52: a) $A = 6a^2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{A}{6} \Leftrightarrow a = (\pm)\sqrt{\frac{A}{6}}$ (Oberfläche eines Würfels);

b) $s = \frac{a}{2} \cdot t^2 \Leftrightarrow 2s = a \cdot t^2 \Leftrightarrow \frac{2s}{t^2} = a \Leftrightarrow \frac{2s}{a} = t^2 \Leftrightarrow (\pm)\sqrt{\frac{2s}{a}} = t$ (Weg-Zeit-Gesetz);

c) $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot s} \Leftrightarrow v^2 = 2 \cdot g \cdot s \Leftrightarrow \frac{v^2}{2 \cdot g} = s \quad \Leftrightarrow \frac{v^2}{2 \cdot s} = g$ (Geschwindigkeit des freien Falls);

d) $V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3} \Leftrightarrow 3V = \pi r^2 \cdot h \Leftrightarrow \frac{3V}{\pi} = r^2 \cdot h \Leftrightarrow \frac{3V}{\pi \cdot r^2} = h \Leftrightarrow \frac{3V}{\pi \cdot h} = r^2 \Leftrightarrow (\pm)\sqrt{\frac{3V}{\pi \cdot h}} = r$ (Kegelvolumen);

Aufg. 30/53: a) i) $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ oder $x = -2$. ii) Beachten Sie dabei, dass es zwei Zahlen gibt, die quadriert 4 ergeben.

b) i) $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ oder $x = -3$; ii) $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ oder $x = -1$; iii) $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$; iv) $x^2 = 10 \Leftrightarrow x = \sqrt{10}$ oder $x = -\sqrt{10}$; v) $x^2 = -1$ hat keine (reelle Lösung).

c) Sei $a \in \mathbb{R}$. Die Gleichung $x^2 = a$ hat für $a > 0$ die zwei Lösungen $x = \sqrt{a}$ und $x = -\sqrt{a}$. Zusammengefasst als $x = \pm\sqrt{a}$; für $a = 0$ die Lösung $x = 0$ und für $a < 0$ keine Lösung.

Aufg. 31/54: a) Etwa 1.26 cm. b) ... Symbol $\sqrt[3]{2}$ mit der Eigenschaft $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = \underline{2}$.
c) 3,4,5,6,8; **d)** i) 10, ii) 100, iii) 1000, iv) 10000. Die Gleichung $x^3 = 10^{3n}$ wird von der Zahl 10^n gelöst. Die Anzahl der Nullen wird gedrittelt.

e) i) 0.1, ii) 0.01, iii) 0.001, iv) 0.0001. Die Gleichung $x^3 = 0.000 \ldots 001$ ($3n$ Nullen) wird von der Zahl $0.000 \ldots 001$ (n Nullen) gelöst. Die Anzahl der Nullen wird mit 3 multipliziert.

f) i) 0.2, ii) 0.03, iii) 0.004, iv) 0.0005.

g) Die Gleichung $x^2 = 64$ hat $\underline{2}$ Lösungen $x = \underline{8}$ und $x = \underline{-8}$, im Gegensatz zur Gleichung $x^3 = 64$ welche nur eine Lösung $x = \underline{4}$ hat.

h) Berechnen Sie $\sqrt[3]{-1}$ mit dem WTR. Tatsächlich sind dritte Wurzeln aus negativen Zahlen möglich, weil eine negative Zahl hoch 3 wieder negativ ist. Trotzdem verbieten viele Mathematiker dritte Wurzeln aus negativen Zahlen.

i) Sei $a \in \mathbb{R}$ (oder ≥ 0, je nach Sichtweise), dann ist $\sqrt[3]{a}$ diejenige Zahl, die mit 3 potenziert a ergibt.

15.2.4 LöVo zu Einheit 2.2.6 (Mitternachtsformel UE 8_8)

Aufg. 31/55: Bei einer Nullstelle x_0 gilt $\underline{f(x_0) = 0}$. Eine Nullstelle ist der x-Wert, bei dem eine Parabel <u>die x-Achse schneidet</u>. a) $f_1 : \{\pm 2\}$; $f_2 : \{0, 2\}$; $f_3 : \{3\}$; $f_4 : \{-2, 3\}$; $f_5 : \{1, 2\}$; f_6 : keine;

b) $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$; $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0, 2$; (Satz vom Nullprodukt - durch x teilen ist verboten); $x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$; (binomische Formel);

c) x kann nicht ausgeklammert werden weil beide Terme ein Absolutglied (hier '-6' und '+2') haben. Die Terme haben einen Summanden x^2 und einen Summanden (mit) x, die nicht zusammengefasst werden können und beide Terme können mit Hilfe binomischer Formeln auch nicht faktorisiert werden.

d) W<u>ertetabelle</u>. Die Nullstellen von f_7 liegen zwischen 0 und 1 bzw. 2 und 3. $x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 \approx 0.382$ und $x_2 \approx 2.618$.

e) Eine Funktion der Form $f(x) = x^2 + px + q$ kann <u>0,1 oder 2</u> Nullstellen haben. Dies kann an der Lage des <u>Scheitels</u> entschieden werden. Bei einer Nullstelle liegt er <u>auf</u>, bei zwei Nullstellen liegt er <u>unterhalb</u> und bei keiner Nullstelle liegt er <u>oberhalb</u> der x-Achse.

f) Sei x_s der x-Wert des Scheitels, dann liegt $(x_s; 0)$ genau in der Mitte der Nullstellen. Dies ist mit der Achsensymmetrie von Parabeln zu begründen.

Aufg. 31/56: a) $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$, $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$, $x^2 = -3$ unlösbar, $x^2 = 6 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6}$; $x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{8}$; $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{0} = 0$;

b) $(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = \pm\sqrt{0} \Leftrightarrow x = -1$, $(x+3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -3$, $(x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4$;

c+d) $(x+1)^2 = 1 \Leftrightarrow x + 1 = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = -2$ oder $x = 0$, $(x+3)^2 = 4 \Leftrightarrow x + 3 = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x = -5$ oder $x = -1$, $(x-4)^2 = 9 \Leftrightarrow x - 4 = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x = 1$ oder $x = 7$; quadratische Ergänzung;

$$
\text{e)}\quad
\begin{array}{rcrcll}
x^2 + px + q = 0 & \Leftrightarrow & x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \frac{p^2}{4} & = & \frac{p^2}{4} - q & \text{quadratische Ergänzung} \\
& \Leftrightarrow & (x + \frac{p}{2})^2 & = & \frac{p^2}{4} - q & \text{binomische Formel} \\
& \Leftrightarrow & x + \frac{p}{2} & = & \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} & \text{Wurzel gezogen} \\
& \Leftrightarrow & x & = & -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} & p, q \text{ Formel.}
\end{array}
$$

Aufg. 31/57: a) $p = 6$, $q = 8$, $x_{1,2} = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\frac{36}{4} - 8} = -3 \pm \sqrt{1} \quad \Rightarrow \quad x_1 = -4, x_2 = -2$;

b) $p = 5$, $q = 6$, $x_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = -2.5 \pm \sqrt{0.25} \quad \Rightarrow \quad x_1 = -3, x_2 = -2$;

c) $p = -4$, $q = 3$, $x_{1,2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\frac{16}{4} - 3} = 2 \pm \sqrt{1} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1, x_2 = 3$;

d) $x_1 = -3, x_2 = 5$; e) $x_1 = -3, x_2 = 20$; f) $x_1 = -5, x_2 = 2$; g) $x = -4$;

h) $x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 1} = 3 \pm \sqrt{1.25} \quad \Rightarrow \quad x_1 \approx 0.382, x_2 \approx 2.618$;

Teil i) Thx Trs: i) $x^2 - 4x = x \cdot (x-4) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = 4$ oder $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4}$,

ii) $x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$,

iii) $x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$,

iii) $x^2 - 4x + 3 = (x-1) \cdot (x-3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$ und $x_2 = 3$ oder $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{1}$,

iv) $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 2$ oder $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4}$,

v) $x^2 - 4x + 5 = 0$ ist unlösbar für reelle x, '$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-1}$' geht nicht.

Für $n \leq 4$ gilt $x^2 - 4x + n = (x - (2 + \sqrt{4-n}) \cdot (x - (2 - \sqrt{4-n})) = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-n}$.

j i) $x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2, x_2 = -3$; ii) $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2, x_2 = 3$;
iii) $x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = -6$; iv) $x^2 - 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1, x_2 = 6$;

Wenn die Lösungen $x^2 + px + q = 0 \quad x_1$ und x_2 sind, dann sind die Lösungen $x^2 - px + q = 0 \quad -x_1$ und $-x_2$. $x^2 + px - q = 0$ hat keine verwandten Lösungen.

k) $2x^2 - 2x - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = -3,\ x_2 = 2$;

L) $2x^2 - 5x + 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 2.5x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0.5,\ x_2 = 2$;

m) $x_1 = -1.5,\ x_2 = 1.5$; n) keine Lösung.

o)
$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{c}{a} = 0 && \text{durch } a \neq 0 \text{ dividiert}\\
&\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = -\tfrac{b}{2a} \pm \sqrt{\tfrac{b^2}{4a^2} - \tfrac{c}{a}} && p,q \text{ Formel}\\
&\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = -\tfrac{b}{2a} \pm \sqrt{\tfrac{b^2-4ac}{4a^2}} && \text{Brüche mit HN } 4a^2 \text{ addiert}\\
&\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = -\tfrac{b}{2a} \pm \tfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} && \text{teilweise Wurzel gezogen}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{Mitternachtsformel: In und auswendig}$$

p) **Die Mitternachtsformel:**$_e$ (in + auswendig) Seien $a \neq 0$, $D := b^2 - 4ac \geq 0$, D heißt Diskriminante, dann gilt $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. **(Formel 19)**

Aufg. 32/58: a) $a = 3,\ \ b = -4,\ \ c = -4,\ \ x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 3 \cdot(-4)}}{2\cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{6} = \frac{4 \pm 8}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{-2}{3}$, $x_2 = 2$;

b) i) $x^2 - 3x + 2 = (x-1)\cdot(x-2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$ und $x_2 = 2$;

ii) $x^2 + 2x - 3 = (x-1)\cdot(x+3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$ und $x_2 = -3$;

iii) $x^2 - 2x - 3 = (x-3)\cdot(x+1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3$ und $x_2 = -1$;

iv) $2x^2 - 3x + 1 = 2(x-1)\cdot(x - \frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$ und $x_2 = \frac{1}{2}$;

v) $2x^2 + 3x + 1 = 2(x+1)\cdot(x + \frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$ und $x_2 = \frac{1}{2}$;

c) i) $x_1 = 0$ und $x_2 = 1.5$; ii) $x_1 = -0.5$ und $x_2 = 2$; iii) $x_1 = -1$ und $x_2 = 2.5$;
iv) $x_1 = -1.5$ und $x_2 = 3$; v) $x_1 = -2$ und $x_2 = 3.5$;

Alle Gleichungen sind von der Form $2x^2 = 3x + c$ Für c gilt bei Ag Nr n: $c = (0, 2, 5, 9, 14) = \frac{n^2+n}{2} - 1$. Damit ist $2x^2 - 3x - \frac{n^2+n}{2} + 1$ zu lösen.
$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4\cdot 2\cdot(-\frac{n^2+n}{2} + 1)}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{4n^2+4n+1)}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{(2n+1)^2}}{4}$
$x_1 = \frac{-3+2n+1}{4} = \frac{n-1}{2}$ und $x_2 = \frac{-3-2n-1}{4} = \frac{-n-1}{2}$.

d) i) $4(x - 1.25)(x + 0) \Rightarrow x_1 = 1.25$ und $x_2 = 0$;
ii) $4(x - 1.5)(x + 0.25) \Rightarrow x_1 = 1.5$ und $x_2 = 0.25$;
iii) $4(x - 1.75)(x + 0.5) \Rightarrow x_1 = 1.75$ und $x_2 = 0.5$;
iv) $4(x - 2)(x + 0.75) \Rightarrow x_1 = 2$ und $x_2 = 0.75$;
v) $4(x - 2.25)(x + 1) \Rightarrow x_1 = 2.25$ und $x_2 = 1$;

Verallgemeinerung $4(x - (1 + \frac{n}{4}))(x + \frac{n-1}{4}) = 4x^2 - 5x + \frac{-n^2-3n+4}{4}$

e) i) $2x^2 + 26x + 60 = 0 \Leftrightarrow x = -10$ oder $x = -3$; ii) $-2x^2 + 26x + 60 = 0 \Leftrightarrow x = 15$ oder $x = -2$;
iii) $2x^2 - 26x + 60 = 0 \Leftrightarrow x = 10$ oder $x = 3$; iv) $-2x^2 - 26x + 60 = 0 \Leftrightarrow x = -15$ oder $x = 2$;
v) $2x^2 + 26x - 60 = 0 \Leftrightarrow x = -15$ oder $x = 2$; vi) $-2x^2 + 26x - 60 = 0 \Leftrightarrow x = 10$ oder $x = 3$;

vii) $2x^2 - 26x - 60 = 0 \Leftrightarrow x = 15$ oder $x = -2$; viii) $-2x^2 - 26x - 60 = 0 \Leftrightarrow x = -10$ oder $x = -3$;

Die Aufgaben 1 und 8, 2 und 7, 3 und 6 sowie 4 und 5 sind äquivalent.

Die Aufgaben 1,3,6 und 8 sowie 2,4,5 und 7 sind verwandt. Analog zur Aufgabe 31/57 gilt:

Wenn die Lösungen $ax^2 + bx + c = 0$ x_1 und x_2 sind, dann sind die Lösungen von $ax^2 - bx + c = 0$ $-x_1$ und $-x_2$. $ax^2 + bx - c = 0$ hat (in der Regel) keine verwandten Lösungen.

f) $a = -15$, $b = 1$, $c = 2$, $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot(-15)\cdot 2}}{2\cdot(-15)} = \frac{-1\pm\sqrt{1+120}}{-30} = \frac{-1\pm 11}{-30} \Rightarrow x_1 = \frac{-2}{5}$, $x_2 = \frac{1}{3}$;

g) $x_{1,2} = \frac{-15\pm\sqrt{15^2-4\cdot(-4)\cdot 4}}{2\cdot(-4)} = \frac{-1\pm\sqrt{289}}{-8} = \frac{-1\pm 17}{-8} \Rightarrow x_1 = -2$, $x_2 = 2.25$; h) $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = 1.5$;

i) $x = \frac{7}{6}$;

j) $x^2 + \frac{3}{5} = \frac{31}{20}x \overset{\cdot 20}{\Longleftrightarrow} 20x^2 + 12 = 31x \overset{-31x}{\Longleftrightarrow} 20x^2 - 31x + 12 = 0 \overset{\text{MNF}}{\Longleftrightarrow} x_{1,2} = \frac{31\pm\sqrt{31^2-4\cdot 20\cdot 12}}{2\cdot 20} = \frac{31\pm\sqrt{1}}{40} \Leftrightarrow x_1 = \frac{32}{40} = 0.8, x_2 = \frac{30}{40} = 0.75$;

k) $(1+3x)(4-12x)-4x(x+1) = 8x^2 \overset{-8x^2}{\Longleftrightarrow} 4-12x+12x-36x^2-4x^2-4x-8x^2 = 0 \overset{:4}{\Longleftrightarrow} -12x^2-x+1 = 0 \overset{\text{MNF}}{\Longleftrightarrow} x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot(-12)}}{2\cdot(-12)} = \frac{1\pm 7}{-24} \Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = -\frac{1}{4}$;

L) $(2x-5)^2 = (x-4)^2 \Leftrightarrow 4x^2-20x+25 = x^2-8x+16 \overset{-x^2+8x-16}{\Longleftrightarrow} 3x^2-12x+9 = 0 \overset{:3}{\Longleftrightarrow} x^2-4x+3 = 0 \overset{\text{MNF}}{\Longleftrightarrow} x_{1,2} = \frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2} = \frac{4\pm 2}{2} \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = 3$

Aufg. 32/59: (alle Angaben in cm) a) $x(x+4) = 77 \Leftrightarrow x^2+4x-77 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot(-77)}}{2\cdot 1}$ $\Rightarrow x_1 = 7$, $x_2 = -11$; Da Seitenlängen nicht negativ sein können gilt nur die Seitenlänge 7 und 7+4 also 11. b) 4 und 9; c) 6 und 8; d) 3 und 9; e) 5 und 12; f) 1.5 und 2.5; g) 1 und 100;

Aufg. 32/60: a) $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3$, $x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$, $x^2 - 4x + 5 = 0$ hat einen negativen Radikand: $\sqrt{4^2 - 4\cdot 1\cdot 5} = \sqrt{-4}$ ist nicht definiert;

b) Der Term $b^2 - 4ac$ heißt D<u>iskriminante</u>. Für $D > 0$ hat $ax^2 + bx + c = 0$ (<u>genau</u>) <u>2</u> Lösungen, bei $D = 0$ hat Sie (<u>genau</u>) <u>eine</u> Lösung und bei $D < 0$ hat Sie <u>keine</u> Lösung.

c) Genau eine Lösung für $c = 4$, zwei Lösungen für $c < 4$, keine Lösung für $c > 4$. $x^2 - 4x + c = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot c}}{2}$, es gibt genau eine Lösung für $16 - 4\cdot c = 0 \Leftrightarrow c = 4$ (weil dann die Wurzel =0 ist); es gibt zwei Lösungen, wenn $16 - 4\cdot c > 0 \Leftrightarrow c < 4$ und keine Lösung, falls $16 - 4\cdot c < 0$.

d) $ax^2 + bx + c = 0$ hat zwei Lösungen, falls $b^2 - 4ac > 0$; eine Lösung, falls $b^2 - 4ac = 0$ und keine Lösung, falls $b^2 - 4ac < 0$.

e) i) $x^2 + 6x + c = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-6\pm\sqrt{36-4\cdot c}}{2}$, es gibt zwei Lösungen, wenn $36 - 4\cdot c > 0 \Leftrightarrow c < 9$.
ii) $cx^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot c}}{2c}$, es gibt zwei Lösungen, wenn $16 - 4\cdot c > 0 \Leftrightarrow c < 4$.
iii) $x^2 - cx + 9 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{c\pm\sqrt{c^2-9}}{2}$, es gibt zwei Lösungen, wenn $c^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow c < -3$ oder $c > 3$;

iv) Fall $c = 0$: Keine Nullstelle; Fall $c \neq 0$: $x_{1,2} = \frac{c\pm\sqrt{c^2-16c}}{2c}$, $c^2 - 16c = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0 \lightning$ oder $c_2 = 16$; $c^2 - 16c < 0$ falls $0 < c < 16 \Rightarrow$ Keine Nullstelle, falls $0 \leq c < 16$, genau eine Nullstelle für $c = 16$ und zwei Nullstellen, falls $c < 0$ oder $c > 16$.

v) Fall $c = 0$: Keine Nullstelle; Fall $c \neq 0$: $x_{1,2} = \frac{c\pm\sqrt{c^2+4c^2}}{2c^2}$, $5c^2 = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0 \lightning$; die Diskriminante hat für $c \neq 0$ immer positives Vorzeichen $\Rightarrow$ f hat keine Nullstelle, falls $c = 0$, für keine Wahl von c genau eine Nullstelle, und zwei Nullstellen, falls $c \neq 0$.

f) $x^2 - 2 = mx$; $x_{1,2} = \frac{m\pm\sqrt{m^2+8}}{2}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{m+\sqrt{m^2+8}}{2} \cdot \frac{m-\sqrt{m^2+8}}{2} \overset{3.BinF}{=\!=\!=} \frac{1}{4} \cdot (m^2 - (m^2 + 8)) = -2$

Aufg. 32/61: a) Ausklammern: $x^2 + 4x = x(x + 4)$;

b) $x(x+4)=0 \Leftrightarrow x_1=0$ oder $x_2=-4$, angewendet wird der Satz vom Nullprodukt;

c) i) $2x^2-10x=2x(x-5)=0 \Leftrightarrow x_1=0$ oder $x_2=5$;

ii) $5x^2-9x=5x(x-1.8)=0 \Leftrightarrow x_1=0$ oder $x_2=1.8$;

iii) $x^3-9x=x(x^2-9)=0 \Leftrightarrow x_1=0$ oder $x_2=\pm 3$;

iv) $x^3-\frac{x}{4}=\frac{x}{4}(4x^2-1)=0 \Leftrightarrow x_1=0$ oder $x_2=\pm\frac{1}{2}$;

v) $x^3-x^2-6x=x(x^2-x-6)=0 \Leftrightarrow x_1=0$, $x_2=-2$ oder $x_3=3$;

vi) $x^3+8x^2-9x=0 \Leftrightarrow x_1=0$, $x_2=-9$ oder $x_3=1$;

vii) $2x^3-5x^2-42x=2x(x^2-2.5x-21)=0 \Leftrightarrow x_1=0$, $x_2=-3.5$ oder $x_3=6$;

viii) $x^3-7x^2+10x=x(x^2-7x+10)$, (SvN) $x_1=0$
$x^2-7x+10=0 \Leftrightarrow x_{2,3}=\frac{7\pm\sqrt{49-40}}{2} \Rightarrow x_2=2$, $x_3=5$, LFZ: $x\cdot(x-2)\cdot(x-5)$;

ix) $x^3-7x^2+12x=x(x^2-7x+12)$, (SvN) $x_1=0$
$x^2-7x+12=0 \Leftrightarrow x_{2,3}=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{2} \Rightarrow x_2=3$, $x_3=4$, LFZ: $x\cdot(x-3)\cdot(x-4)$;

x) $2x^3-5x^2+2x=0=x(2x^2-5x+2)$, (SvN) $x_1=0$
$2x^2-5x+2=0 \Leftrightarrow x_{2,3}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4} \Rightarrow x_2=0.5$, $x_3=2$, LFZ: $2x^2\cdot(x-0.5)\cdot(x-2)$;

xi) $4x^3-x=0=x(4x^2-1)$, (SvN) $x_1=0$
$4x^2-1=0 \Leftrightarrow x_{2,3}=\pm 0.5 \Rightarrow$ LFZ: $4x\cdot(x-0.5)\cdot(x+0.5)$;

d) Ein Summand ohne den Faktor x heißt Absolutglied. Wenn dieses fehlt, dann kann meistens x ausgeklammert werden; dann den Satz vom Nullprodukt anwenden.

Aufg. 32/62: a) $a\cdot b=0 \Rightarrow a=0$ oder $b=0$; b) $x=2$ oder $x=3$; c) beide Gleichungen haben die gleiche Lösungsmenge - sie sind also äquivalent;

d) Berechne die Nullstellen 2 und 3 und schreibe diese dann als Produkt $(x-3)\cdot(x-2)$.

e) Jede Nullstelle x_1 erzeugt einen Faktor $(x-x_1)$. berechne die Nullstellen x_1 und x_2 – damit ist $x^2+px+q=(x-x_1)\cdot(x-x_2)$; f) Weil $(x+x_0)|_{x=x_0}=(x_0+x_0)=2x_0\neq 0$, falls $x_0\neq 0$.
g) $p^2-4q\geq 0$;

h) i) $x^2+x-2=(x-1)\cdot(x+2)$; ii) $x^2+x-6=(x-2)\cdot(x+3)$; iii) $x^2+x-12=(x-3)\cdot(x+4)$; iv) $x^2+x-20=(x-4)\cdot(x+5)$;

Verallgemeinerung: $(x-n)\cdot(x+(n+1))=x^2+x-n^2-n$;

i) i) $x^2+2x+1=(x+1)^2$; ii) $x^2+4x+4=(x+2)^2$; iii) $x^2-2x+1=(x-1)^2$; iv) $x^2-6x+9=(x-3)^2$; v) $x^2-9=(x-3)(x+3)$;

Die Faktoriesierung der binomischen Formeln entspricht genau der Linearfaktorzerlegung.

j) 57 a) $x^2+6x+8=(x+2)\cdot(x+4)$, b) $x^2+5x+6=(x+2)\cdot(x+3)$, c) $x^2-4x+3=(x-1)\cdot(x+3)$, d) $x^2-2x-15=(x+3)\cdot(x-5)$, e) $x^2-17x-60=(x-3)\cdot(x-20)$, f) $x^2+3x-10=(x+5)\cdot(x-3)$;

i) $x^2-4x+n=(x-(2+\sqrt{4-n})\cdot(x-(2-\sqrt{4-n}))$;

j i) $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$; ii) $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$; iii) $x^2+5x-6=(x-1)(x+6)$; iv) $x^2-5x-6=(x+1)(x-6)$;

k) $2x^2-2x-12=2(x+3)(x-2)$; L) $2x^2-5x+2=2(x-0.5)(x-2)$; m) $4(x-1.5)(x+1.5)$; n) keine Lösung.

k) Folge (ab dem nullten Glied): (3,4,3,0,5,12,21,32,45 ...); Der Betrag hat nur auf die ersten 3 Zahlen einen Einfluss. $n^2-2n-3=(n+1)\cdot(n-3)$; 0 und 1 gelten nicht als Primzahlen. Für $n=5$ hat $(5+1)\cdot(5-3)=12$ Teiler; wegen der Linearfaktorzerlegung gilt dies auch für alle $n>5$ weil alle

Faktoren größer 1 sind. Also müssen nur die Zahlen 0..4 untersucht werden: 0 Ja, 1 Nein, 2 Ja, 3 nein, 4 ja; also drei Primzahlen.

Aufg. 32/63: a) $2x^2+2x-12 \Leftrightarrow x_1=-3\ x_2=2 \Rightarrow 2x^2+2x-12=2\cdot(x+3)\cdot(x-2)$;

b) $3x^2+6x-24 \Leftrightarrow x_1=-4\ x_2=2 \Rightarrow 3x^2+6x-24=3\cdot(x+4)\cdot(x-2)$;

c) $4x^2-16x-128 \Leftrightarrow x_1=-4\ x_2=8 \Rightarrow 4x^2-16x-128=4\cdot(x+4)\cdot(x-8)$;

d) $x^2-8x+16 \Leftrightarrow x_1=x_2=4 \Rightarrow x^2-8x+16=(x-4)^2$;

e) $\frac{x^2}{3}-2x+3 \Leftrightarrow x_1=x_2=3 \Rightarrow \frac{x^2}{3}-2x+3=\frac{1}{3}(x-3)^2$;

f) Falls der Term ax^2+bx+c keine Nullstelle hat, dann hat er keine Linearfaktorzerlegung. Falls der Term ax^2+bx+c zwei Nullstellen x_1 und x_2 hat, dann gilt $ax^2+bx+c=\underline{a(x-x_1)\cdot(x-x_2)}$. Falls der Term ax^2+bx+c eine Nullstelle x_1 hat, dann gilt $ax^2+bx+c=\underline{a(x-x_1)^2}$; x_1 heißt in diesem Falle doppelte Nullstelle.

Aufg. 33/64:

c) i) $2x^2+5x+2=2(x+2)(x+\frac{1}{2})$; ii) $3x^2+10x+3=3(x+3)(x+\frac{1}{3})$;
iii) $4x^2+17x+4=4(x+4)(x+\frac{1}{4})$; iv) $5x^2+26x+5=5(x+5)(x+\frac{1}{5})$;
verallgemeinert $nx^2+(n^2+1)x+n=n\cdot(x^2+(n+1/n)x+1)=n(x+n)(x+\frac{1}{n})$;

a) $x^2-2x+0.75=(x-1.5)\cdot(x-0.5)$, b) $2x^2+x-3=2(x+1.5)\cdot(x-1)$,
d) $9x^2-12x+4=9(x-\frac{2}{3})^2$, e) $2x^2+7x-4=2(x+4)(x-0.5)$,
f) $3x^2-17x-6=3(x-6)(x+\frac{1}{3})$, g) $4x^2-4x-15=4(x+1.5)(x-2.5)$,

i) Rechnungen siehe Aufgabe 57: g) $(x+4)^2$, h) $(x-3+\sqrt{1.25})\cdot(x-3-\sqrt{1.25})$,
i) $2x^2-2x-12=2(x+3)(x-2)$, j) $2x^2-5x+2=2(x-0.5)(x-2)$, $x_2=2$, k) $4(x-1.5)(x+1.5)$, L) keine Lösung.

j) $x^3-3x^2+2x=x\cdot(x-1)\cdot(x-2)$, k) $2x^4-2x^3-24x^2=2x^2\cdot(x-4)\cdot(x-3)$,
l) $x^2-x^4=-x^2\cdot(x-1)\cdot(x+1)$, m) $x^2-2x-2=(x-(1-\sqrt{3}))\cdot(x-(1+\sqrt{3}))$.

Aufg. 33/65: Zerlegen Sie Zähler und Nenner in Linearfaktoren und kürzen Sie.

a) $\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x-2}=x+2$; b) $\frac{x^2+3x+2}{x+2}=\frac{(x+1)\cdot(x+2)}{x+2}=x+1$;
c) $\frac{x+3}{x^2+5x+6}=\frac{x+3}{(x+2)\cdot(x+3)}=\frac{1}{x+2}$; d) $\frac{x^2-9}{x^2-x-12}=\frac{(x-3)\cdot(x+3)}{(x-4)\cdot(x+3)}=\frac{x-3}{x-4}$;
e) $\frac{4x^2-1}{2x^2-3x+1}=\frac{4(x-\frac{1}{2})\cdot(x+\frac{1}{2})}{2(x-\frac{1}{2})\cdot(x-1)}=\frac{2(x+\frac{1}{2})}{x-1}$; f) $\frac{3x^2-7x+2}{6x^2-20x+6}=\frac{3(x-\frac{1}{3})\cdot(x-2)}{6(x-\frac{1}{3})\cdot(x-3)}=\frac{x-2}{2(x-3)}$;

g) $x^2-3x-4=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\begin{cases}x_1=-1\\x_2=4\end{cases} \Rightarrow x^2-3x-4=(x+1)(x-4)$;

$x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\begin{cases}x_1=1\\x_2=4\end{cases} \Rightarrow x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$;

$\frac{x^2-3x-4}{x^2-5x+4}=\frac{(x+1)(x-4)}{(x-1)(x-4)}=\frac{x+1}{x-1}$; (dieser Bruch kann nicht weiter gekürzt werden).

h) $x^2-3x-10=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+40}}{2}=\begin{cases}x_1=-2\\x_2=5\end{cases} \Rightarrow x^2-3x-10=(x+2)(x-5)$;

$x^2-6x+5=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{2}=\begin{cases}x_1=1\\x_2=5\end{cases} \Rightarrow x^2-6x+5=(x-1)(x-5)$;

$\frac{x^2-3x-10}{x^2-6x+5}=\frac{(x+2)(x-5)}{(x-1)(x-5)}=\frac{x+2}{x-1}$; (dieser Bruch kann nicht weiter gekürzt werden).

i) $x^3-8x^2+10x = x(x^2-8x+15) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ oder $x_{2,3} = \frac{8\pm\sqrt{64-60}}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 5 \end{cases}$
$\Rightarrow x^3-8x^2+10x = x(x-3)(x-5);\quad x^2-3x = x(x-3);\quad \frac{x^3-8x^2+10x}{x^2-3x} = \frac{x(x-3)(x-5)}{x(x-3)} = x-5;$

j) $x^3+4x^2-5x = x(x^2+4x-5) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ oder $x_{2,3} = \frac{-4\pm\sqrt{16+20}}{2} = \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 5 \end{cases}$
$\Rightarrow x^3+4x^2-5x = x(x-1)(x+5);\quad x^3-x^2 = x^2(x-1);\quad \frac{x^3+4x^2-5x}{x^3-x^2} = \frac{x(x-1)(x+5)}{x^2(x-1)} = \frac{x+5}{x};$
(dieser Bruch kann nicht weiter gekürzt werden).

k) $x^3-4x^2+4x = x(x^2-4x+4) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ oder $x_{2,3} = \frac{4\pm\sqrt{16-16}}{2} = 2$ (doppelt)
$\Rightarrow x^3-4x^2+4x = x(x-2)^2;$

$x^4-3x^3+2x^2 = x^2(x^2-3x+2) = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = 0$ oder $x_{3,4} = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$
$\Rightarrow x^4-3x^3+2x^2 = x^2(x-1)(x-2);$
$\frac{x^3-4x^2+4x}{x^4-3x^3+2x^2} = \frac{x(x-2)(x-2)}{x^2(x-1)(x-2)} = \frac{x-2}{x(x-1)};$
(dieser Bruch kann nicht weiter gekürzt werden).

Aufg. 33/66: a+b) Wenn $x^2+px+q=0$ von x_1 und x_2 gelöst wird,
dann gilt $q = x_1\cdot x_2$ und $q = -(x_1+x_2)$ **(Formel 20)** .

c) i) Wir beweisen den Zusammenhang mit Hilfe der Linearfaktorzerlegung quadratischer Polynome.
ii) Multiplizieren Sie zuerst $(x-2)\cdot(x-3)$ aus ....

ii) $(x-2)\cdot(x-3) = x^2-5x+6$ und $q = 6 = 2\cdot 3 = x_1\cdot x_2$; $-5 = -(2+3) = -(x_1+x_2)$;

iii) $(x-x_1)\cdot(x-x_2) = x^2 - x_1\cdot x - x_2\cdot x + x_1\cdot x_2 = x^2-(x_1+x_2)\cdot x + x_1\cdot x_2$;
Durch einen Koeffizientenvergleich gilt $q = x_1\cdot x_2$; $p = -(x_1+x_2)$.

d) Wenn x_1 und x_2 ganzzahlig sind, dann sind $|x_1|$ und $|x_2|$ Teiler von q.

e) i) $x^2-3x+2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 2$, ii) $x^2-8x+15 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3,\ x_2 = 6$,
iii) $x^2-8x+16 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 4,\ x_2 = 4$, iv) $x^2+7x+12 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -3,\ x_2 = -4$,
v) $x^2-x+12 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -3,\ x_2 = 4$

f) Warum funktioniert das Ablesen bei folgenden Gleichungen nicht?
i) $x^2-3x+1=0$: keine ganzzahligen Nullstellen;
ii) $-x^2+3x-2=0$: Vorfaktor a vor dem x^2 ist nicht 1 (selbst -1 geht nicht)
iii) $2x^2+6x+4=0$: Vorfaktor a vor dem x^2 ist (wieder) nicht 1
iv) $x^2+1.5x+1=0$: Vorfaktor b vor dem x ist nicht ganzzahlig
v) $x^2+2x+2=0$: hat gar keine Lösung

g) Verallgemeinern Sie die Vieta-Wurzelsätze auf x^3+bx^2+cx+d=0.

$(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3) = x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x - x_1x_2x_3$,
also ist $b = -(x_1+x_2+x_3)$ und $d = -x_1x_2x_3$,

Aufg. 33/67: a) $w^2-13w+36 = 0 \Leftrightarrow w_1 = 4, w_2 = 9$; $x^4-13x^2+36 = 0$ wird mit $w = x^2$ und damit $w^2 = (x^2\cdot x^2 =)x^4$ zu $w^2-13w+36 = 0$. Damit ist $x^2 = 4$ also $x_{1,2} = \pm 2$ und $x^2 = 9$ also $x_{3,4} = \pm 3$. Diese Technik heißt **Substitution**.

Eine Gleichung der Form $ax^4+bx^2+c=0$ heißt biquadratische Gleichung, die (in der Regel) mit der Substitution $w = x^2$ gelöst.

Lösungen Teile b) +c) $w = x^2$; damit ist x^2=4 und x^2=9. $\mathbb{L} = \{\pm 2, \pm 3\}$; $x^4-13x^2+36 = (x-3)\cdot(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x+3)$;

i) $x^4-5x^2+4 = 0 \Leftrightarrow w^2-5w+4 = 0 \Leftrightarrow w_1 = 1, w_2 = 4 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 1, x_{3,4} = \pm 2$;
$x^4-5x^2+4 = (x-2)\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)$

ii) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow w^2 - 6w + 8 = 0 \Leftrightarrow w_1 = 2, w_2 = 4 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{2}, x_{3,4} = \pm 2;$
$x^4 - 6x^2 + 8 = (x-2)\cdot(x-\sqrt{2})\cdot(x+\sqrt{2})\cdot(x+2);$

iii) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow w^2 - 5w + 6 = 0 \Leftrightarrow w_1 = 2, w_2 = 4 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{2}, x_{3,4} = \pm\sqrt{3};$
$x^4 - 5x^2 + 6 = (x-\sqrt{3})\cdot(x-\sqrt{2})\cdot(x+\sqrt{2})\cdot(x+\sqrt{3});$

iv) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow w^2 - 3w - 4 = 0 \Leftrightarrow w_1 = 4, w_2 = -1 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 2,$
$w_2 = -1$ liefert keinen Beitrag; Zur Info: $x^4 - 3x^2 - 4 = (x-2)\cdot(x+2)\cdot(x^2+1)$;

v) $x^4 - 8x^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow w^2 - 8w + 16 = 0 \Leftrightarrow w_{1,2} = 4 \Leftrightarrow x_{1,2} = 2, x_{3,4} = -2;$
$x^4 - 8x^2 + 16 = (x-2)^2\cdot(x+2)^2;$

vi) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0 \Rightarrow w^2 - 7w + 12 = 0 \Leftrightarrow w_1 = 3, w_2 = 4 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{3}, x_{3,4} = \pm 2;$
$x^4 - 7x^2 + 12 = (x-2)\cdot(x-\sqrt{3})\cdot(x+\sqrt{3})\cdot(x+2);$

vii) $9x^4 - 40x^2 + 16 = 0 \Rightarrow 9w^2 - 40w + 16 = 0 \Leftrightarrow w_1 = \frac{4}{9}, w_2 = 4 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\frac{2}{3}, x_{3,4} = \pm 2;$
$9x^4 - 40x^2 + 16 = 9\cdot(x-2)\cdot(x-\frac{2}{3})\cdot(x+\frac{2}{3})\cdot(x+2);$

viii) $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$: Substitution $w = x^2$: $w^2 + 5w - 36 = 0 \Leftrightarrow$ (MNF) $w_1 = 4$, $w_2 = -9$.

Rücksubstitution: $x^2 = 4 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 2$ $x^2 \neq 9$ (kein Beitrag zur Lösungsmenge), $\mathbb{L} = \{\pm 2\}$; LFZ: $x^4 + 5x^2 - 36 = (x+2)(x-2)(x^2+9)$.

ix) $2x^4 - 32 = 2(x^4 - 16)$; $x^4 - 16 = 0$.
Substitution $w = x^2$: $w^2 = 16 \Leftrightarrow$ (MNF) $w_1 = 4$, $w_2 = -4$.

Rücksubstitution: $x^2 = 4 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 2$ $x^2 \neq -4$ (kein Beitrag zur Lösungsmenge), $\mathbb{L} = \{\pm 2\}$; LFZ: $2x^4 - 32 = 2(x-2)(x+2)(x^2+4)$.

x) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$. Substitution $w = x^2$: $w^2 - 2w + 1 = 0 \Leftrightarrow$ (MNF) $w_1 = w_2 = 1$,

Rücksubstitution: $x^2 = 1 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 1$, $\mathbb{L} = \{\pm 1\}$; LFZ: $2x^4 - 4x^2 + 2 = 2(x-1)^2(x+1)^2$.

Die folgenden Gln i und ii) können auch durch Wurzel isolieren + quadrieren (Abs. 35/2.2.8) gelöst werden.

e) i) Substitution: $w = \sqrt{x} \geq 0$, $w^2 = x \geq 0$ $f_{11}(w) = w^2 - 3w + 2 = 0 \Leftrightarrow w_1 = 1, w_2 = 2$ $\Rightarrow w_1 = 1, w_2 = 2$ $w^2 = x \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 4$.

Probe: $x - 3\sqrt{x} + 2$ mit $x = 4$: $4 - 3\sqrt{4} + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$ $\surd$

$x = 1$: $1 - 3\sqrt{1} + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$ $\surd$

ii) Substitution: $w = \sqrt{x} \geq 0$, $w^2 = x \geq 0$ $f_{12}(w) = w^2 - w - 6 = 0 \Leftrightarrow w_1 = 3, w_2 = -2$ Man beachte, dass $w_2 < 0$ ist und damit (vermutlich) kein Lösungsbeitrag zustande kommt. $w^2 = x$ $\Rightarrow x_1 = 9, x_2 = 4$. Probe: $x - \sqrt{x} - 6$ mit $x = 9$: $9 - \sqrt{9} - 6 = 0$ $\surd$

mit $x = 4$: $4 - \sqrt{4} - 6 = -4 \neq 0$ $\lightning$

iii) $x_1 = 2, x_2 = -1$; iv) $x_1 = \pm 1, x_2 = \pm 2$;

c) $x^4 - 13x^2 + 36 = (x-3)(x-2)(x+2)(x+3)$, $f_1(x) = x^4 - 5x^2 + 4 = (x-2)(x-1)(x+1)(x+2)$,

$f_2(x) = x^4 - 6x^2 + 8 = (x-2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x+2)$,

$f_3(x) = x^4 - 5x^2 + 6 = (x-\sqrt{3})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x+\sqrt{3})$,

$f_4(x) = x^4 - 3x^2 - 4 = (x-2)(x+2)(x^2+1)$, eigentlich gibt es keine LFZ,

$f_5(x) = x^4 - 8x^2 + 16 = (x-2)^2(x+2)^2$,

$f_6(x) = x^5 - 7x^3 + 12x = x(x-\sqrt{3})(x-2)(x+2)(x+\sqrt{3})$,

$f_7(x) = 9x^6 - 40x^4 + 16x^2 = 9x^2(x-2)(x-\frac{2}{3})(x+\frac{2}{3})(x+2)$, Die LFZ von $f_8(x)$, $f_9(x)$ und $f_{10}(x)$ stehen in den LöVo des Agteils b).

11+12: ok eine richtige LFZ gibt es hier nicht: $f_{11}(x) = (\sqrt{x}-2)\cdot(\sqrt{x}-1)$; $f_{12}(x) = (\sqrt{x}-3)\cdot(\sqrt{x}+2)$;

Aufg. 33/68: a) $x+1 = \frac{6}{x} \Leftrightarrow x^2 + x = 6$ (mit x durchmultipliziert) $\quad \Leftrightarrow x_1 = 2, x_2 = -3$;

b) $x + \frac{2}{x+3} = 0 \Leftrightarrow x(x+3) + 2 = 0$ (mit $x+3$ durchmultipliziert) $\quad \Leftrightarrow x_1 = -2, x_2 = -1$;

c) $x = \frac{1}{3-2x} \Leftrightarrow x(3-2x) = 1$ (mit $3-2x$ durchmultipliziert) $\quad \Leftrightarrow x_1 = 0.5, x_2 = 1$;

d) $\frac{1}{x-4} = \frac{2}{x-2} \Leftrightarrow x - 2 = 2(x-4)$ (mit $x-2$ und $x-4$ (über Kreuz) multipliziert) $\quad \Leftrightarrow x = 6$;

e) $\frac{x}{x-3} = \frac{-2}{x-1} \quad | \cdot (x-1)(x-3) \quad \Leftrightarrow x(x-1) = -2(x-3) \Leftrightarrow x_1 = -3, x_2 = 2.$

Ab dem Teil f) müssen Sie den Nenner in Linearfaktoren zerlegen:

f) $\frac{1}{x\cdot(x-1)} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{x\cdot(x-1)}{x\cdot(x-1)} = \frac{x\cdot(x-1)}{x} \Leftrightarrow 1 = x - 1 \Leftrightarrow x = 2$;

g) $\frac{x+1}{x^2-3x} = \frac{x+1}{x-3} \Leftrightarrow \frac{(x+1)\cdot x\cdot(x-3)}{x\cdot(x-3)} = \frac{(x+1)\cdot x\cdot(x-3)}{x-3} \Leftrightarrow x+1 = (x+1)\cdot x \Leftrightarrow x+1 = x^2+x \Leftrightarrow x = \pm 1$;

h) $\frac{1}{x^3-2x^2} = \frac{2}{x^2-2x} - \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \frac{x^2\cdot(x-2)}{x^2\cdot(x-2)} = \frac{2\cdot x^2\cdot(x-2)}{x\cdot(x-2)} - \frac{x^2\cdot(x-2)}{x^2} \Leftrightarrow 1 = 2x - x + 2 \Leftrightarrow x = -1$;

i) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-1} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3(x+1) + 3 = 4(x^2-1)$ (mit $3(x^2-1)$ multipliziert) $\quad \Leftrightarrow x_1 = 2, x_2 = -1.25$;

j) $\frac{1}{x^2-4} + \frac{1}{x^2+2x} = \frac{1}{x^2-2x} \Leftrightarrow \frac{x\cdot(x-2)\cdot(x+2)}{(x-2)\cdot(x+2)} + \frac{x\cdot(x-2)\cdot(x+2)}{x\cdot(x+2)} = \frac{x\cdot(x-2)\cdot(x+2)}{x\cdot(x-2)} \Leftrightarrow x + x - 2 = x + 2 \Leftrightarrow x = 4$;

k) $\frac{2}{x(x-2)} + \frac{-1}{x-2} = \frac{2}{x} \Leftrightarrow 2 - x = 2(x-2)$ (mit $x(x-2)$ multipliziert) aber $x = 2$ ist keine Lösung, da $x-2$ im Nenner steht $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{0;2\}$; damit ist die Lösungsmenge leer.

l) $\frac{15}{x(x-5)} = \frac{3}{x-5} + 1 \Leftrightarrow 15 = 3x + x^2 - 5x$ (mit $x(x-5)$ multipliziert) $\Leftrightarrow x_1 = -3, x_2 = 5$ aber $x = 5$ ist keine Lösung, da $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{0;5\} \Rightarrow \mathbb{L} = \{-3\}$;

m) $\frac{2x}{x^2-4} = \frac{4-x}{x-2} + \frac{1}{x+2} \Leftrightarrow 2x = (4-x)(x+2) + x - 2$ (mit $(x+2)(x-2)$ multipliziert) $\Leftrightarrow x_1 = -2, x_2 = 3$ aber $x = -2$ ist keine Lösung, da $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{-2;2\} \Rightarrow \mathbb{L} = \{3\}$;

n) $\frac{4x-1}{x-3} = \frac{2x-3}{x-5} + \frac{2x^2-12x-4}{(x-3)(x-5)} \quad | \cdot (x-3)(x-5) \Leftrightarrow (4x-1)(x-5) = (2x-3)(x-3) + 2x^2 - 12x - 4$ $\Leftrightarrow 4x^2 - x - 20x + 5 = 2x^2 - 3x - 6x + 9 + 2x^2 - 12x - 4 \Leftrightarrow 0 = 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{3;5\}$.

Aufg. 34/69:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x^2-4	12	5	0	-3	-4	-3	0	5	12
Ungl ok?	Nein	Nein	Ja	Ja	Ja	Ja	Ja	Nein	Nein

für $-2 \le x \le 2$ ist $x^2 - 4 \le 0$. $\quad$ b) Das Ergebnis ist falsch! $x^2 - 4 \le 0 \Leftrightarrow x^2 \le 4 \not\Leftrightarrow x \le \pm 2$.

c) $x^2 - 4 = (x-2)\cdot(x+2), \quad a \cdot b \ge 0,$

$$
\begin{array}{llllllll}
\text{d) } a\cdot b \le 0 & \Leftrightarrow & (a \ge 0 & \text{und} & b \le 0) & \text{oder} & (a \le 0 & \text{und} \quad b \ge 0) \\
(x-2)\cdot(x+2) \le 0 & \Leftrightarrow & (x-2 \ge 0 & \text{und} & x+2 \le 0) & \text{oder} & (x-2 \le 0 & \text{und} \quad x+2 \ge 0) \\
 & \Leftrightarrow & (x \ge 2 & \text{und} & x \le -2) & \text{oder} & (x \le 2 & \text{und} \quad x \ge -2) \\
 & \Leftrightarrow & & \text{kein Beitrag} & & \text{oder} & & -2 \le x \le 2 \\
x^2 - x - 12 = (x-4)\cdot(x+3) & & & & & & & \\
(x-4)\cdot(x+3) \le 0 & \Leftrightarrow & (x-4 \ge 0 & \text{und} & x+3 \le 0) & \text{oder} & (x-4 \le 0 & \text{und} \quad x+3 \ge 0) \\
 & \Leftrightarrow & (x \ge 4 & \text{und} & x \le -3) & \text{oder} & (x \le 4 & \text{und} \quad x \ge -3) \\
 & \Leftrightarrow & & \text{kein Beitrag} & & \text{oder} & & -4 \le x \le 3 \\
x^2 - 8x + 15 = (x-3)\cdot(x-5) & & & & & & & \\
(x-3)\cdot(x-5) \le 0 & \Leftrightarrow & (x-3 \ge 0 & \text{und} & x-5 \ge 0) & \text{oder} & (x-3 \le 0 & \text{und} \quad x-5 \le 0) \\
 & \Leftrightarrow & (x \ge 3 & \text{und} & x \ge 5) & \text{oder} & (x \le 3 & \text{und} \quad x \le 5) \\
 & \Leftrightarrow & & x \ge 5 & & \text{oder} & & x \le 3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllllll}
6+x-x^2=-(x-3)\cdot(x+2) & & & & & & & \\
-(x-3)\cdot(x+2)\leq 0 & \Leftrightarrow & (x-3\geq 0 & \text{und} & x+2\geq 0) & \text{oder} & (x-3\leq 0 & \text{und} \quad x+2\leq 0) \\
 & \Leftrightarrow & (x\geq 3 & \text{und} & x\geq -2) & \text{oder} & (x\leq 3 & \text{und} \quad x\leq -2) \\
 & \Leftrightarrow & & x\geq 3 & & \text{oder} & & x\leq -2 \quad .
\end{array}
$$

Aufg. 34/70: a+b) $f(x)=-x^2+4x-3$ hat die Nullstellen 1 und 3 - an anderen Stellen wechselt f das Vorzeichen nicht. Deshalb genügt es das Vorzeichen der Funktion zwischen den (sowie rechts und links der) Nullstellen zu untersuchen (Abb. 252).
Die Nullstellen $\underline{x=1}$ und $\underline{x=3}$ teilen die $x-$Achse in drei Teile den Bereich $x<\underline{1}$, $\underline{1}<x<\underline{3}$ und $\underline{3<x}$. Weil $f(0)=\underline{-2\not>0}$, $f(2)=\underline{1>0}$ und $f(4)=\underline{-2\not>0}$ gilt, ist $\underline{1<x<3}$ die Lösung.
c) 2. Schritt: Schreibe $\underline{=}$ statt $\underline{>}$ und berechne die zugehörige Gleichung. Jede dieser n Lösungen ist eine (grüne) Grenze auf der $x-$Achse.

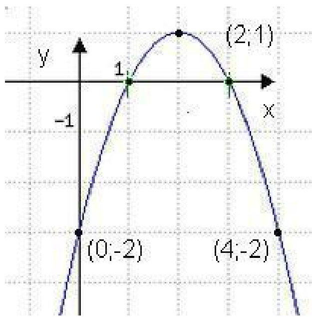


Abb. 252 Die Methode von Knapp

3. Schritt: Die (roten und grünen) Grenzen teilen die $x-$Achse in n+1 (später mehr) Teile. Setze aus dem inneren jeden Teils einen Wert in die Ungleichung ein. Ist diese erfüllt so gehört dieser Teil zur Lösung, wenn nicht dann nicht. Die Farbenbedeutung wird später erklärt.

d) i) $f(x)=x^2-9=0\Leftrightarrow x_1=-3$, $x_2=3$, $f(-4)=5>0$ (ja), $f(0)=-9\not>0$ (nein), $f(4)=5>0$ (ja) $\Rightarrow \mathbb{L}=\{x\in\mathbb{R}|x<-3 \text{ oder } x>3\}$;

ii) $f(x)=x^2-2x-8=0\Leftrightarrow x_1=-2$, $x_2=4$, $f(-3)=7>0$ (ja), $f(0)=-8\not>0$ (nein), $f(5)=7>0$ (ja) $\Rightarrow \mathbb{L}=\{x\in\mathbb{R}|x<-2 \text{ oder } x>5\}$;

iii) $f(x)=x^2-5x+4=0\Leftrightarrow x_1=1$, $x_2=4$, $f(0)=4>0$ (ja), $f(2)=-2\not>0$ (nein), $f(5)=4>0$ (ja) $\Rightarrow \mathbb{L}=\{x\in\mathbb{R}|x<1 \text{ oder } x>4\}$;

iv) $f(x)=x^3-x^2-6x=x(x^2-x-6)=0\Leftrightarrow x_1=-2$, $x_2=0$, $x_3=3$, $f(-3)=-18\not>0$ (nein), $f(-1)=4>0$ (ja), $f(1)=-6\not>0$ (nein), $f(4)=24>0$ (ja)

$\Rightarrow \mathbb{L}=\{x\in\mathbb{R}|-2<x<0 \text{ oder } x>3\}$;

v) $f(x)=x^3+2x^2=0\Leftrightarrow x_1=-2$, $x_2=0$, $f(-3)=-9\not>0$ (nein), $f(-1)=1>0$ (ja), $f(1)=3>0$ (ja) $\Rightarrow \mathbb{L}=\{x\in\mathbb{R}|-2<x<0 \text{ oder } x>0\}$;

vi) $f(x)=x^4-10x^2+9=w^2-10w-9=0\Leftrightarrow w_1=1$, $w_2=9\Leftrightarrow x_1=-3$, $x_2=-1$, $x_3=1$, $x_4=3$, $f(-4)=105>0$ (ja), $f(-2)=-15\not>0$ (nein), $f(0)=9>0$ (ja), $f(2)=-15\not>0$ (nein), $f(4)=105>0$ (ja) $\Rightarrow \mathbb{L}=\{x\in\mathbb{R}|x<-3 \text{ oder } -1<x<1 \text{ oder } x>3\}$;

Aufg. 34/71: a) $x-\frac{6}{x+1}=0\Leftrightarrow x(x+1)-6=0\Leftrightarrow x_1=-3$ und $x_2=2$ $f(-4)=-2\not>0$ (nein), $f(0)=-6\not>0$ (nein), $f(3)=1.5>0$ (ja) $\Rightarrow \mathbb{L}=\{x\in\mathbb{R}|x>3\}$;

b) $f(-2)=4$ und $f(0)=-6$. c) $x=-2$ gehört sicher zur Lösungsmenge! Warum haben $f(-2)$ und $f(0)$ verschiedene Vorzeichen obwohl zwischen -2 und 0 keine Nullstelle ist?

Die Antwort von Ag c) ist in Ag d):

d) Zwischen $x=-2$ und $x=0$ gibt es eine Definitionslücke (senkrechte Asymptote) bei $\underline{x=-1}$. Definitionslücken sind auch Grenzen.

e) Damit lautet der erste Schritt der Methode von Knapp:

1. Schritt: Untersuchen Sie die Ungleichung auf Definitionslücken und Unstetigkeitsstellen (diese werden hier nicht weiter betrachtet) und markieren Sie diese als (rote) Grenzen.

f) i) $f(x)=\frac{2}{x-2}-1$; $\mathbb{D}=\mathbb{R}\backslash\{2\}$; $\frac{2}{x-2}=1\Leftrightarrow 2=x-2\Leftrightarrow x=4$, $f(0)=-2$ (nein),

$f(3) = 1$ (ja), $f(5) = -0.\bar{3}$ (nein) $\Rightarrow \mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | 2 < x < 4\}$;

ii) $f(x) = x + \frac{4}{x-5}$; $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{5\}$; $x = \frac{-4}{x-5} \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$ und $x = 4$, $f(0) = -0.8$ (n), $f(2) = \frac{2}{3}$ (j), $f(4.5) = -3.5$ (n), $f(6) = 10$ (j) $\Rightarrow \mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x < 4$ oder $x > 5\}$;

iii) $f(x) = \frac{3x}{x-2} + 3x$; $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{2\}$; $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$, $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1$ oder $x > 2\}$;

iv) $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{2\}$; $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$, $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x < -1$ oder $2 < x < 3\}$; (Rg siehe unten)

v) $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{-3; 5\}$; $x_1 = 1$ und $x_2 = 9$, $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x < 1$ oder $5 < x < 9\}$;

vi) $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{-2; 2\}$; $x = 1.5$, $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | -2 < x < 1.5$ oder $x > 2\}$;

vii) Die Aufgabe ist so definiert, dass sich alles weghebt $(0 > 0)$; damit ist $\mathbb{L} = \{\}$ bzw. (die Farbe der Grenzen) $(0 \geq 0)$: $\mathbb{L} = \mathbb{D}$.

iv) $\frac{4x-5}{x-2} - x - 4 > 0$: Definitionslücke ist $x = 2$ (rote Grenze)

$\frac{4x-5}{x-2} - x - 4 > 0 \xrightarrow{Knapp} \frac{4x-5}{x-2} - x - 4 = 0 \xLeftrightarrow{\cdot(x-2)} 4x - 5 + (-x - 4) \cdot (x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow 4x - 5 - x^2 + 2x - 4x + 8 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 \Leftrightarrow x_1 = -1$ oder $x_2 = 3$

Wertetabelle:

x	-2	-1	0	2	2.5	3	4
$\frac{4x-5}{x-2} - x - 4$	1.25	0	-1.5	$\lightning$	3.5	0	-2.5
> 0 Ja, Nein, Grenze	Ja	Grenze	Nein	Grenze	Ja	Grenze	Nein

$\Rightarrow \mathbb{L}_1 = \{x \in \mathbb{R} | x < -1$ oder $2 < x < 3\}$;

$\frac{4x-5}{x-2} - x - 4 \geq 0$: nimm die grünen Grenzen zu $\mathbb{L}_1$ hinzu:

$\Rightarrow \mathbb{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -1$ oder $2 < x \leq 3\}$;

viii) $x - \frac{8}{x+2} > 0$ (bzw $\geq$) Abb 477/253

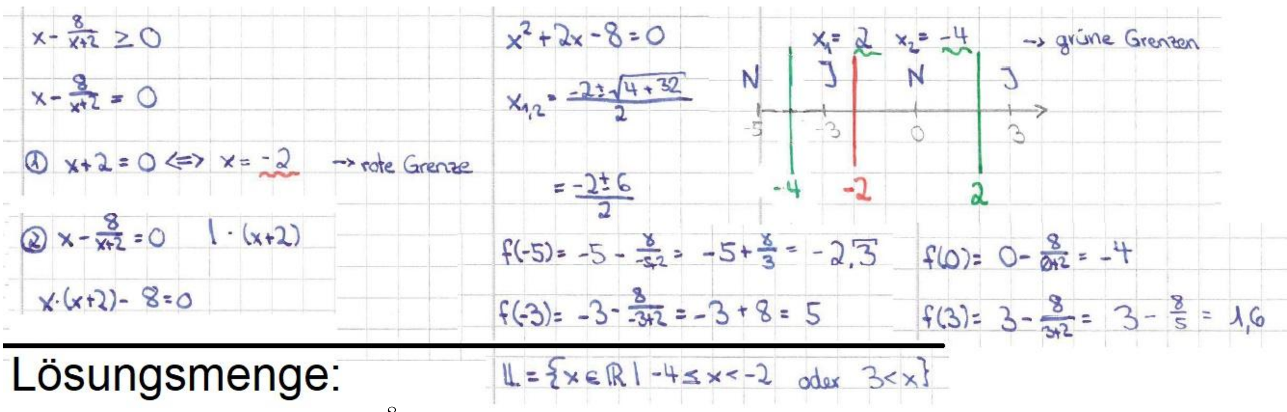


Abb. 253 *Ungleichung* $x - \frac{8}{x+2} \geq 0$

ix) $\frac{1}{(x-2)^2} - 1 > 0$:

1) Definitionslücke: $(x-2)^2 = 0$ also $x = 2$ (rote Grenze)

2) $\frac{1}{(x-2)^2} - 1 = 0 \xLeftrightarrow{+1} \frac{1}{(x-2)^2} = 1 \xLeftrightarrow{\cdot(x-2)^2} 1 = (x-2)^2 \xLeftrightarrow{\text{Wurzel}} x - 2 = \pm 1$ oder $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ (grüne Grenzen)

3) Wertetabelle:

x	0	1	1.5	2	2.5	3	4
$\frac{1}{(x-2)^2} - 1$	-0.75	0	3	$\lightning$	3	0	-0.75
Ungl erfüllt?	N		J		J		N

In diesem Fall alternieren die J/N Bereiche nicht.

Niveau Klasse 11: Schuld daran ist die senkrechte Asymptote bei $x = 2$ ohne Vorzeichenwechsel.

$\frac{1}{(x-2)^2} - 1 > 0 \Leftrightarrow \mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x < 2$ oder $2 < x < 3\} = (1; 2) \cup (2; 3)$ (Intervallschreibweise).

$\frac{1}{(x-2)^2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x < 2$ oder $2 < x \leq 3\} = [1; 2) \cup (2; 3]$; die grünen Grenzen kommen dazu, die roten nicht.

x) $4 - \frac{3x^2-12}{(x-1)^2} > 0$:

1) Definitionslücke: $(x-1)^2 = 0$ also $x = 1$ (rote Grenze)

2) $4 - \frac{3x^2-12}{(x-1)^2} = 0 \xLeftrightarrow{+\frac{3x^2-12}{(x-1)^2}} 4 = \frac{3x^2-12}{(x-1)^2} \xLeftrightarrow{\cdot(x-1)^2} 4(x-1)^2 = 3x^2 - 12 \Leftrightarrow 4x^2 - 8x + 4 = 3x^2 - 12$ $\xLeftrightarrow{-3x^2+12} x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = 4$, (doppelte, grüne Grenze)

3) Wertetabelle:

x	0	1	2	4	6
$4 - \frac{3x^2-12}{(x-1)^2}$	16	↯	4	0	0.16
Ungl erfüllt?	J		J		J

Auch in diesem Fall alternieren die J/N Bereiche nicht.

Niveau Klasse 11: Schuld daran sind die senkrechte Asymptote bei $x = 1$ ohne Vorzeichenwechsel und die doppelte Nullstelle bei $x = 4$.

$4 - \frac{3x^2-12}{(x-1)^2} > 0 \Leftrightarrow \mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x < 1$ oder $1 < x < 4$ oder $4 < x\} = \mathbb{R} \setminus \{1, 4\}$.

$4 - \frac{3x^2-12}{(x-1)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x < 1$ oder $1 < x \leq 4$ oder $4 \leq x\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. die grüne Grenze ($x = 4$) kommt dazu, die Rote nicht.

Aufg. 35/72:

	a) x	-2	-1	0	1	2	3	4
	$\frac{2}{x} - 1$	-2	-3	Error	1	0	$\frac{-1}{3}$	-0.5
	Ungl. ok?	N	N	N	J	J	N	N

b) $\frac{2}{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$; Die 2 ist Lösung von $\frac{2}{x} - 1 > 0$, die 0 hingegen nicht. Definitionslücken (rote Grenzen) gehören niemals zur Lösungsmenge einer Ungleichung, die Nullstellen im Falle des $\leq$ oder $\geq$ schon.

c) i) Durch das $\geq$ (oder $\leq$) ist die N<u>ullstelle</u> zur Lösungsmenge hinzugekommen, die De<u>finitionslücke</u> hingengen nicht. ii) Ist eine Ungleichung von der Form $f(x) \geq 0$ oder $f(x) \leq 0$, so gehören die <u>grünen</u> Grenzen zur Lösungsmenge, die <u>roten</u> Grenzen tun dies <u>in keinem Fall</u>. Ist eine Grenze grün und rot, dann gilt diese als <u>rot</u>.

d) Ag 70 d) i) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -3$ oder $x \leq 3\}$; ii) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -2$ oder $x \geq 5\}$;

iii) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 1$ oder $x \geq 4\}$; iv) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | -2 \leq x \leq 0$ oder $x \geq 3\}$;

v) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | -2 \leq x\}$; vi) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -3$ oder $-1 \leq x \leq 1$ oder $x \geq 3\}$;

Ag 71 f) i) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | 2 < x \leq 4\}$; ii) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 4$ oder $x > 5\}$;

iii) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 1$ oder $x > 2\}$; iv) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -1$ oder $2 < x \leq 3\}$;

v) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x \leq 1$ oder $5 < x \leq 9\}$; vi) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | -2 < x \leq 1.5$ oder $x > 2\}$;

vii) $\mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

Aufg. 35/73: a) 'Quadrieren': $(\sqrt{x})^2 = 2^2 \Leftrightarrow x = 4$, Probe: $\sqrt{4} = 2\surd$; $(\sqrt{x})^2 = 9^2 \Leftrightarrow x = 81$, Probe: $\sqrt{81} = 9\surd$; $(\sqrt{x})^2 = 0.1^2 \Leftrightarrow x = 0.01$, Probe: $\sqrt{0.01} = 0.1\surd$;

i) $(\sqrt{2x+8})^2 = 2^2 \Leftrightarrow 2x+8 = 4 \Leftrightarrow x = -2$; Probe: $\sqrt{2\cdot(-2)+8} = \sqrt{4} = 2\surd$;

ii) $5^2 = (\sqrt{-x+8})^2 \Leftrightarrow 25 = -x+8 \Leftrightarrow x = -17$; Probe: $\sqrt{-(-17)+8} = 5\surd$;

iii) $\sqrt{2x+8} = \sqrt{4+4x}$ (quadriert) $2x+8 = 4+4x \Leftrightarrow x = 2$.
Probe: $\sqrt{2\cdot 2+8} = \sqrt{4+4\cdot 2} \Leftrightarrow \sqrt{12} = \sqrt{12}$ (ok).

iv) $2\sqrt{3x-4} = \sqrt{14+2x}$ (quadriert) $4(3x-4) = 14+2x \Leftrightarrow x = 3$.
Probe: $2\sqrt{3\cdot 3-4} = \sqrt{14+2\cdot 3} \Leftrightarrow 2\sqrt{5} = \sqrt{20}$ (ok).

b) $x = -2$ quadriert ergibt $x^2 = 4$ nach x aufgelöst ergibt sich $x = \pm 2$.
Damit ist quadrieren keine Äquivalenzumformung, denn es sind Lösungen hinzugekommen.

Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung, dass heißt durch quadrieren können Lösungen hinzukommen. Bei durch Quadrieren gelösten Gleichungen ist immer eine Probe zu machen.

b) Wenn Sie $\sqrt{2x-7}-3$ quadrieren, verschwindet die Wurzel nicht, weil Sie die binomische Formel anwenden müssen. Die Wurzel muss isoliert werden:

$(\sqrt{x}-4)^2 = 0^2 \Leftrightarrow x - 8\sqrt{x} + 16 = 0$, die Wurzel ist noch da. Besser die Wurzel isolieren: $\sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16$, Probe $\sqrt{16} = 4\surd$;

i) $\sqrt{2x-7} - 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-7} = 3$ quadriert ergibt sich $2x-7 = 9$ oder $x = 8$.
Jetzt ist eine Probe obligatorisch: $\sqrt{2\cdot 8-7} - 3 = \sqrt{9} - 3 = 0$ (ok).

ii) $5 + 2\cdot\sqrt{1-x} = 11 \Leftrightarrow \sqrt{1-x} = 3$ (quadriert) $1-x = 9$ oder $x = -8$.
Probe: $5 + 2\cdot\sqrt{1-(-8)} = 5 + 2\cdot 3 = 11$ (ok).

d) i) $\sqrt{x-3} = \sqrt{x} - \sqrt{3}$ (quadriert) $x - 3 = x - 2\sqrt{3x} + 3 \Leftrightarrow 3 = \sqrt{3x} \Leftrightarrow x = 3$
Probe: $\sqrt{3-3} = \sqrt{3} - \sqrt{3}$ (ok).

ii) $\sqrt{2x-1} = 2 - \sqrt{x}$ (quadriert) $2x - 1 = 4 - 4\sqrt{x} + x \Leftrightarrow x - 5 = -4\sqrt{x}$ (quadriert)
$x^2 - 10x + 25 = 16x \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = 25$;

Probe: $x = 1: \ \sqrt{2-1} = 2 - \sqrt{1}$ (ok),
$x = 25: \ \sqrt{50-1} = 2 - \sqrt{25}$ aber $7 \neq -3$, damit ist $x = 25$ keine Lösung.

Aufg. 35/74:

a) $x - 1 = \sqrt{x+1}$ | quadriert (Probe) $\Rightarrow (x-1)^2 = x+1$ $\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = x + 1$
$\Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$ $\Leftrightarrow x(x-3) = 0$ $\Leftrightarrow x_1 = 3; x_2 = 0$;
Probe: $x = 0: 0 - 1 = \sqrt{0+1}$ (f); $x = 3: 3 - 1 = \sqrt{3+1}\surd$ $\Rightarrow \mathbb{L} = \{3\}$.

b) $\sqrt{x+5} = x + 3$ | quadriert (Probe!) $\Leftrightarrow (\sqrt{x+5})^2 = (x+3)^2$ $\Leftrightarrow x + 5 = x^2 + 6x + 9$
$\Leftrightarrow x^2 + 5x + 4 = 0$ $\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 4}}{2}$ $\Leftrightarrow x_1 = -4; x_2 = -1$;
Probe: $-4: \sqrt{-4+5} = -4 + 3$ (f) $-1: \sqrt{-1+5} = -1 + 3\ \surd$ $\Rightarrow \mathbb{L} = \{-1\}$.

c) $\sqrt{2x+1} + 17 = x$ $\Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = x - 17$ quadriert (Probe!)
$\Leftrightarrow 2x + 1 = (x-17)^2$ $\Leftrightarrow 2x + 1 = x^2 - 34x + 289$
$\Leftrightarrow x^2 - 36x + 288 = 0$ $\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{36\pm\sqrt{36^2-4\cdot 288}}{2}$ $\Leftrightarrow x_1 = 12; x_2 = 24$;
Probe: $x = 24: \sqrt{2\cdot 24+1} + 17 = 24\ \surd$ $x = 12: \sqrt{2\cdot 12+1} + 17 = 24$ (f) $\Rightarrow \mathbb{L} = \{24\}$.

d) $2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} = 5 \quad |\cdot 0.5\sqrt{x}$ $\Leftrightarrow x + 1 = 2.5\sqrt{x}$ quadriert (Probe obligatorisch)
$\Rightarrow (x+1)^2 = 6.25x$ $\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 6.25x$ $\Leftrightarrow x^2 - 4.25x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{4.25\pm\sqrt{4.25^2-4}}{2}$ $\Leftrightarrow x_1 = 4; x_2 = 0.25$; Probe: $\surd$.

e) $\frac{2}{\sqrt{x}} + 8\sqrt{x} = 9\sqrt{2} \quad | \cdot \sqrt{x}$ $\quad \Leftrightarrow 2 + 8x = 9\sqrt{2x} \quad |$ quadriert (Probe!)
$\Rightarrow (2+8x)^2 = 9^2(\sqrt{2x})^2$ $\quad \Leftrightarrow 4 + 32x + 64x^2 = 162x \quad \Leftrightarrow 64x^2 - 130x + 4 = 0$
$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{130 \pm \sqrt{130^2 - 4 \cdot 4 \cdot 64}}{128}$ $\quad \Leftrightarrow x_1 = 2; x_2 = \frac{1}{32}$; Probe: $\surd$.

f) $\sqrt{8x+1} + 2x = 4x - 11$ $\quad \Leftrightarrow \sqrt{8x+1} = 2x - 11 \quad |$ quadriert (Probe!)
$\Rightarrow (\sqrt{8x+1})^2 = (2x-11)^2$ $\quad \Leftrightarrow 8x + 1 = 4x^2 - 44x + 121$
$\Leftrightarrow 4x^2 - 52x + 120 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 13x + 30 = 0$ $\quad \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 30}}{2} \quad \Leftrightarrow x_1 = 3; x_2 = 10;$
Probe: $x = 3: \sqrt{8 \cdot 3 + 1} + 2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 - 11$ $\quad \Leftrightarrow 5 + 6 = 1$ falsch; also ist $x = 3$ keine Lösung;
Probe: $x = 10: \sqrt{8 \cdot 10 + 1} + 2 \cdot 10 = 4 \cdot 10 - 11$ $\quad \Leftrightarrow 9 + 20 = 29 \ \surd \Rightarrow \mathbb{L} = \{10\}$.

g) $x - \sqrt{-x+12} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{-x+12} \Rightarrow x^2 = (\sqrt{-x+12})^2 \Leftrightarrow x^2 = -x + 12 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow$
$\frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} \Leftrightarrow x_1 = 3, x_2 = -4,$ Probe: $x = 3$: $3 - \sqrt{-3+12} = 0\surd$,

$x = -4$: $-4 - \sqrt{-(-4)+12} = -8 \ \lightning$, $\Rightarrow \mathbb{L} = \{3\}$.

h) $x + 2 - \sqrt{4-x} = 0 \Leftrightarrow x + 2 = \sqrt{4-x} \Rightarrow (x+2)^2 = (\sqrt{4-x})^2 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 4 - x \Leftrightarrow x^2 + 5x \Leftrightarrow$
$x_1 = -5, x_2 = 0,$ Probe: $x = 0$: $0 + 2 - \sqrt{4-0} = 0\surd$,

$x = -5$: $-5 + 2 - \sqrt{4-(-5)} = -3 - \sqrt{9} = -6 \neq 0 \ \lightning$ $\Rightarrow \mathbb{L} = \{0\}$.

i) $\sqrt{3x+1} - x + 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} = x - 3 \Rightarrow (\sqrt{3x+1})^2 = (x-3)^2 \Leftrightarrow 3x + 1 = x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow$
$x^2 - 9x + 8 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-32}}{2} \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = 8,$ Probe: $x = 1$: $\sqrt{3 \cdot 1 + 1} - 1 + 3 = 4 \neq 0 \ \lightning$,
$x = 8$: $\sqrt{3 \cdot 8 + 1} - 8 + 3 = 0\surd$ $\Rightarrow \mathbb{L} = \{8\}$.

j) $\sqrt{2x+54} = \sqrt{x+20} + \sqrt{x+4}$ $\quad \Rightarrow (\sqrt{2x+54})^2 = (\sqrt{x+20} + \sqrt{x+4})^2$ quadriert
$\Leftrightarrow 2x + 54 = x + 20 + 2\sqrt{(x+20)\cdot(x+4)} + x + 4 \quad \Leftrightarrow \quad 15 = \sqrt{x^2 + 24x + 80}$ quadrieren:
$\Rightarrow \quad 15^2 = (\sqrt{x^2 + 24x + 80})^2$ $\quad \Leftrightarrow 225 = x^2 + 24x + 80 \Leftrightarrow x^2 + 24x - 145$ MNF:
$\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-24 \pm \sqrt{576+580}}{2} = \frac{-24 \pm 34}{2}$ $\quad \Rightarrow x_1 = 5, x_2 = -29$

Probe: $x_1 = 5$: $\sqrt{2 \cdot 5 + 54} = \sqrt{5+20} + \sqrt{5+4} \Leftrightarrow \sqrt{64} = 5 + 3\surd$,

$x_2 = -29$: $\sqrt{2 \cdot (-29) + 54} = \sqrt{-29+20} + \sqrt{-29+4} \ \lightning$, $\Rightarrow \mathbb{L} = \{5\}$.

k) $\sqrt{2x+1} = \sqrt{x} + \sqrt{x-3}$ $\quad \Rightarrow (\sqrt{2x+1})^2 = (\sqrt{x} + \sqrt{x-3})^2$ quadriert
$\Leftrightarrow \quad 2x + 1 = x + 2\sqrt{x \cdot (x-3)} + x - 3$ $\quad \Leftrightarrow 4 = 2\sqrt{x \cdot (x-3)}$ quadrieren:
$\Rightarrow \quad 2^2 = (\sqrt{x^2 - 3x})^2$ $\quad \Leftrightarrow 4 = x^2 - 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4$ MNF:
$\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2}$ $\quad \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 4$

Probe: $x_1 = -1$: $\sqrt{2(-1)+1} = \sqrt{-1} + \sqrt{-1-3} \ \lightning$,

$x_2 = 4$: $\sqrt{2 \cdot 4 + 1} = \sqrt{4} + \sqrt{4-3}\surd$ $\Rightarrow \mathbb{L} = \{4\}$.

l) $\sqrt{13x+12} = 2\sqrt{x-3} + 3\sqrt{x}$ $\quad \Rightarrow (\sqrt{13x+12})^2 = (2\sqrt{x-3} + 3\sqrt{x})^2$ quadriert
$\Leftrightarrow \quad 13x + 12 = 4(x-3) + 12\sqrt{(x-3)\cdot x} + 9x$ $\quad \Leftrightarrow 24 = 12\sqrt{(x-3)\cdot x}$:12 und quadrieren:
$\Rightarrow \quad 2^2 = (\sqrt{(x-3)\cdot x})^2$ $\quad \Leftrightarrow 4 = x^2 - 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4$ MNF:
$\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2}$ $\quad \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 4$

Probe: $x_1 = -1$: $\sqrt{13 \cdot (-1) + 12} = 2\sqrt{(-1)-3} + 3\sqrt{-1} \ \lightning$,

$x_2 = 4$: $\sqrt{13 \cdot 4 + 12} = 2\sqrt{4-3} + 3\sqrt{4} = \sqrt{64} = 2\sqrt{1} + 6\surd$ $\Rightarrow \mathbb{L} = \{4\}$.

m) $\sqrt{29 - \sqrt{x^2-9}} = 5 \Rightarrow (\sqrt{29 - \sqrt{x^2-9}})^2 = 5^2 \Leftrightarrow 29 - \sqrt{x^2-9} = 25 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-9} = 4 \Rightarrow$
$(\sqrt{x^2-9})^2 = 4^2 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 16 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x_1 = 5, x_2 = -5,$

Probe: $x = 5$: $\sqrt{29 - \sqrt{5^2-9}} = \sqrt{25} = 5\surd$, $x = -5$: $\sqrt{29 - \sqrt{(-5)^2-9}} = \sqrt{25} = 5\surd$,

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{-5, 5\}$.

Aufg. 35/75:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\sqrt{x+2}$	–	–	0	1	1.4142	1.732	4	2.236	2.449

Eingesetzt werden dürfen alle $x \geq -2$ hier ist der Radikand r (was unter der Wurzel steht) $r \geq 0$. b) $2x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$; $3-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$; $5-2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2.5$;

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\sqrt{1+x}-\sqrt{2-x}$	–	–	–	-1.723	-0.4142	0.4142	1.723	–	–

Es dürfen alle Werte x mit $-1 \leq x \leq 2$ eingesetzt werden. Bei Wurzeltermen der Form $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ dürfen alle Werte eingesetzt werden, bei welchen $a \geq 0$ und $b \geq 0$ sind.

Aufg. 35/76: Wir berechnen die Ungleichungen nach Knapp:
a) $\sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$ (Knapp) $\sqrt{1} = 1 \not> 2$, $\sqrt{9} = 3 > 2 \Rightarrow x > 4$;

b) $\sqrt{x-1} < 4$: Wurzelgrenze $x = 1$ (bzw. $\mathbb{D} = x \geq 1$) $\sqrt{x-1} = 4 \Rightarrow x-1 = 16 \Leftrightarrow x = 17$, $x = 1$ ist eine gelbe Grenze, $x = 17$ ist eine rote Grenze (des '>' wegen).
Punktprobe: $x = 0 : \sqrt{0-1}$ nein, nicht definiert (das war klar: $\mathbb{D} = x \geq 1$),
$x = 1 : \sqrt{1-1} < 4$ ja, $x = 2 : \sqrt{2-1} < 4$ ja, $x = 26 : \sqrt{26-1} \not< 4$ ja $\Rightarrow \mathbb{L}\{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x < 17\}$.

c) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-4} \geq 5$: Definitionsbereichs ($\mathbb{D}$) Grenzen: $x = -1, x = 4$ (gelb),

$$\begin{array}{rrcll}
\sqrt{x+1}+\sqrt{x-4}=5 & \Leftrightarrow \sqrt{x-4} & = & 5-\sqrt{x+1} & \text{quadriert} \\
& \Rightarrow x-4 & = & 25-10\sqrt{x+1}+x+1 & \\
& \Leftrightarrow 10\sqrt{x+1} & = & 30 & \\
& \Leftrightarrow \sqrt{x+1} & = & 3 & \text{quadriert} \\
& \Rightarrow x+1 & = & 9 & \\
& \Leftrightarrow x & = & 8, &
\end{array}$$

$\Rightarrow$ Grenzen:$x = -1, x = 4$, (gelb) und $x = 8$ (grün).

$$\begin{array}{llll}
\text{Punktprobe:} & x=-2: & \sqrt{-2+1}+\sqrt{-2-4}: & \text{nein (nicht definiert),} \\
& x=0: & \sqrt{0+1}+\sqrt{0-4}: & \text{nein (nicht definiert),} \\
& x=5: & \sqrt{5+1}+\sqrt{5-4}=\sqrt{6}+1 \not\geq 5: & \text{nein,} \\
& x=15: & \sqrt{15+1}+\sqrt{15-4}=4+\sqrt{11} \geq 5: & \text{ja}
\end{array}$$

$\Rightarrow \mathbb{L}\{x \in \mathbb{R} | x \geq 8\}$.

d) $\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} < 3$: Definitionsbereichs ($\mathbb{D}$) Grenzen: $x = -1, x = 4$ (gelb),

$$\begin{array}{rrcll}
\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}=3 & \Leftrightarrow \sqrt{x+1} & = & 3-\sqrt{4-x} & \text{quadriert} \\
& \Rightarrow x+1 & = & 9-6\sqrt{4-x}+4-x & \\
& \Leftrightarrow 2x-12 & = & -6\sqrt{4-x} & \\
& \Leftrightarrow x-6 & = & -3\sqrt{4-x} & \text{quadriert} \\
& \Rightarrow (x-6)^2 & = & 9(4-x) & \\
& \Leftrightarrow x^2-12x+36 & = & 36-9x & \\
& \Leftrightarrow x^2-3x & = & 0 & \\
& \Leftrightarrow x=3 \text{ oder } x=0 & & &
\end{array}$$

$\Rightarrow$ Grenzen: $x = -1$ (gelb), $x = 0$ (rot), $x = 3$ (rot), $x = 4$ (gelb).

$$\begin{array}{llll}
\text{Punktprobe:} & x=-2: & \sqrt{-2+1}+\sqrt{4-(-2)}: & \text{nein (nicht definiert),} \\
& x=-0.5: & \sqrt{-0.5+1}+\sqrt{4-(-0.5)}=\sqrt{8}<3: & \text{ja,} \\
& x=1.5: & \sqrt{1.5+1}+\sqrt{4-1.5}=2\sqrt{2.5} \not< 3: & \text{nein,}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll} x=3.5: & \sqrt{3.5+1}+\sqrt{4-3.5}=\sqrt{8}<3: & \text{ja,} \\ x=5: & \sqrt{5+1}+\sqrt{4-5}: & \text{nein (nicht definiert),} \end{array}$$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | -1 \le x < 0 \text{ oder } 3 < x \le 4\}$.

e) $\sqrt{x+4}+\sqrt{21-x} < 7$: Definitionsbereichs ($\mathbb{D}$) Grenzen: $x=-4, x=21$,

$$\begin{array}{rcrcll} \sqrt{x+4}+\sqrt{21-x}=7 & \Leftrightarrow & \sqrt{x+4} & = & 7-\sqrt{21-x} & \text{quadriert} \\ & \Rightarrow & x+4 & = & 49-14\sqrt{21-x}+21-x & \\ & \Leftrightarrow & 2x-66 & = & -14\sqrt{21-x} & \\ & \Leftrightarrow & x-33 & = & -7\sqrt{21-x} & \text{quadriert} \\ & \Rightarrow & (x-33)^2 & = & 49(21-x) & \\ & \Leftrightarrow & x^2-66x+1089 & = & 1029-49x & \\ & \Leftrightarrow & x^2-17x+60 & = & 0 & \\ & \Leftrightarrow & x=5 \text{ oder } x=12 & & & \end{array}$$

$\Rightarrow$ Grenzen: $x=-4$ (gelb), $x=5$ (rot), $x=12$ (rot), $x=21$ (gelb).

$$\begin{array}{llll} \text{Punktprobe:} & x=-5: & \sqrt{-5+4}+\sqrt{21-(-5)}: & \text{nein (nicht definiert),} \\ & x=0: & \sqrt{0+4}+\sqrt{21-0}\approx 6.5<7: & \text{ja,} \\ & x=8.5: & \sqrt{8.5+4}+\sqrt{21-8.5}=2\sqrt{12.5}\approx 7.07 \not< 7: & \text{nein,} \\ & x=13: & \sqrt{13+4}+\sqrt{21-13}\approx 6.95<7: & \text{ja,} \\ & x=22: & \sqrt{22+4}+\sqrt{21-22}: & \text{nein (nicht definiert),} \end{array}$$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | -4 \le x < 5 \text{ oder } 12 < x \le 21\}$.

35/76f): Ungl aus 35/74 a) $x-1=\sqrt{x+1}$ erzeugt eine gelbe Grenze $x=-1$, zweite Grenze $x=3$.

x	-2	-1	0	3	8
$x-1$	-3	-2	-1	2	7
$\sqrt{x+1}$	$\lightning$	0	1	2	3
$x-1>\sqrt{x+1}$ erfüllt?	N	N	N	=	J

$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x > 3\}$.

35/76f): Ungl aus 35/74 b) $\sqrt{x+5}=x+3$ erzeugt eine gelbe Grenze $x=-5$, zweite Grenze $x=-1$.

x	-6	-5	-4	-1	4
$\sqrt{x+5}$	$\lightning$	0	1	2	3
$x+3$	-3	-2	-1	2	7
$\sqrt{x+5}>x+3$ erfüllt?	N	J	J	=	N

$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | -5 \le x < -1\}$.

35/76f): Ungl aus 35/74 c) $\sqrt{2x+1}+17=x$ erzeugt eine gelbe Grenze $x=-0.5$, zweite Grenze $x=24$.

x	-1	-0.5	0	24	40
$\sqrt{2x+1}+17$	$\lightning$	17	18	24	26
x	-1	-0.5	0	24	40
$\sqrt{2x+1}+17>x$ erfüllt?	N	J	J	=	N

$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | -0.5 \le x < 24\}$.

35/76f): Ungl aus 35/74 d) $\sqrt{x}$ erzeugt eine gelbe Grenze $x=0$, weitere Grenzen sind $x=0.25$, $x=4$.

x	-1	0	0.01	0.25	1	4	9
$2\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}$	$\lightning$	$\lightning$	20.2	5	4	5	$6.\bar{6}$
$2\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}>5$ erfüllt?	N	N	J	=	N	=	J

$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 0.25 \text{ oder } x > 4\}$.

35/76f): Ungl aus 35/74 e) $\sqrt{x}$ erzeugt eine gelbe Grenze $x = 0$, weitere Grenzen sind $x = \frac{1}{32}$, $x = 2$.

x	-1	0	0.01	$\frac{1}{32}$	1	2	9
$2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$	↯	↯	20.8	≈ 12.73	10	12.73	$24.\bar{6}$
$\frac{2}{\sqrt{x}} + 8\sqrt{x} > 9\sqrt{2} \approx 12.73$ erfüllt?	N	N	J	=	N	=	J

$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < \frac{1}{32}$ oder $x > 2\}$.

35/76f): Ungl aus 35/74 f) $\sqrt{8x+1} + 2x = 4x - 11$ erzeugt eine gelbe Grenze $x = -0.125$, die Andere ist $x = 10$.

x	-1	-0.125	1	10	12.375
$\sqrt{8x+1} + 2x$	↯	0	5	29	34.75
$4x - 11$	↯	-11	-7	29	38.5
$\sqrt{8x+1} + 2x > 4x - 11$ erfüllt?	N	J	J	=	N

$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | -0.125 \le x < 10\}$.

35/76f): Ungl aus 35/74 g) $x - \sqrt{-x+12} = 0$ erzeugt eine gelbe Grenze $x = 12$, die Andere ist $x = 3$.

x	-4	3	8	12	13
$x - \sqrt{-x+12}$	-8	0	6	12	↯
$x - \sqrt{-x+12} > 0$ erfüllt?	N	=	J	=	N

$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | 3 < x < 12\}$.

Aufg. 36/77: a) $|x|$ ist definiert als $|x| = \sqrt{x^2}$. $|x| = \sqrt{x^2} = 2 \Rightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$. Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung, weshalb die Probe obligatorisch ist.

b) $|x| = 6 \Leftrightarrow x = \pm 6$; $\quad |x| = \sqrt{12} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{12}$; $\quad |x| = -2 \Leftrightarrow \mathbb{L} = \{\}$; $\quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

Sei $a > 0$: $|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a$, $\quad$ sei $a = 0$: $|x| = a \Leftrightarrow x = 0$, $\quad$ sei $a < 0$: $|x| = a \Leftrightarrow \mathbb{L} = \{\}$.

c_a) Algorithmus zum Berechnen einer Betragsgleichung:
Schreiben Sie $\pm(.)$ statt $|.|$ und lösen Sie alle Gleichungen nach x auf. Je nach Anzahl der Betragsterme k können dies bis zu 2^k Stück sein. Machen Sie in jedem Falle die Probe.

d) i) $|x+1| = 2$: $\pm(x+1) = 2$;

erste Gleichung: $+(x+1) = 2 \quad \overset{-1}{\Longleftrightarrow} x = 1$, Probe: $|1+1| = 2\surd$;

zweite Gleichung: $-(x+1) = 2 \quad \overset{\cdot(-1);-3}{\Longleftrightarrow} x = -3$; Probe: $|-3+1| = 2\surd$;

ii) $|2x-3| = 1$: $\pm(2x-3) = 1$;

erste Gleichung: $+(2x-3) = 1 \quad \overset{+4;:2}{\Longleftrightarrow} x = 2$; Probe: $|2 \cdot 2 - 3| = 1\surd$;

zweite Gleichung: $-(2x-3) = 1 \quad \overset{\cdot(-1);+3;:2}{\Longleftrightarrow} x = 1$; Probe: $|2 \cdot 1 - 3| = 1\surd$;

iii) $|2x+2| = x+1$: $\pm(2x+2) = x+1$;

erste Gleichung: $+(2x+2) = x+1 \quad \overset{-x;-2}{\Longleftrightarrow} x = -1$; Probe: $|2 \cdot (-1) + 2| = 1\surd$;

zweite Gleichung: $-(2x+2) = x+1 \quad \overset{+2x;-1;:3}{\Longleftrightarrow} x = -1$; Probe: $\surd$;

iv) $|2x-2| + x + 5 = 0$: $\pm(2x-2) + x + 5 = 0$;

erste Gleichung: $+(2x-2) + x + 5 = 0 \overset{-3;:3}{\Longleftrightarrow} x = -1$; Probe: $|2 \cdot (-1) - 2| + (-1) + 5 = 8 \neq 0$ ↯;

zweite Gleichung: $-(2x-2) + x + 5 = 0 \quad \overset{+x}{\Longleftrightarrow} x = 7$; Probe: $|2 \cdot 7 - 2| + 7 + 5 = 24 \neq 0$ ↯;

v) Diese Aufgabe ist einer Aufgabe aus dem Mathe-Känguru 2018 (Klasse 11) nachempfunden.

$||x-3| - 2| = 1$ wird umgeformt zu $|x-3| - 2 = \pm 1$

1. Fall $|x-3|-2=1 \Leftrightarrow |x-3|=3$ wird umgeformt zu $x-3=\pm 3$;

Fall 1a) $x-3=3 \Leftrightarrow x=6$; Fall 1b) $x-3=-3 \Leftrightarrow x=0$;

2. Fall $|x-3|-2=-1 \Leftrightarrow |x-3|=1$ wird umgeformt zu $x-3=\pm 1$;

Fall 2a) $x-3=1 \Leftrightarrow x=4$; Fall 2b) $x-3=-1 \Leftrightarrow x=2$;

Damit sind Kandidaten für die Lösungsmenge $0, 2, 4, 6$ und tatsächlich lösen alle diese Gleichung:

$x=0: ||x-3|-2|=1 \rightarrow ||0-3|-2| = |3-2| = 1_{\surd}$;

$x=2: ||x-3|-2|=1 \rightarrow ||2-3|-2| = |1-2| = 1_{\surd}$;

$x=4: ||x-3|-2|=1 \rightarrow ||4-3|-2| = |1-2| = 1_{\surd}$;

$x=6: ||x-3|-2|=1 \rightarrow ||6-3|-2| = |3-2| = 1_{\surd}$;

vi) $-|x+1|+1=|x|$ erzeugt $\pm(x+1)+1=\pm x$

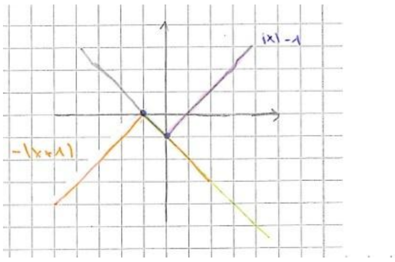


Abb. 254 $-|x+1|+1=|x|$ Graphisch interpretiert

1. Fall: $x+1+1=x \Leftrightarrow 2=0$ ↯ $(\mathbb{D}=\{x\in\mathbb{R}|x\le -1 \text{ und } x\ge 0\}=\{\})$

2. Fall: $x+1+1=-x \Leftrightarrow x=-1$ $(\mathbb{D}=\{x\in\mathbb{R}|x\le -1\})$

3. Fall: $-(x+1)+1=x \Leftrightarrow x=0$ $(\mathbb{D}=\{x\in\mathbb{R}|x\ge 0\})$

4. Fall: $-(x+1)+1=-x \Leftrightarrow 0=0$ $(\mathbb{D}=\{x\in\mathbb{R}|-1\le x\le 0\})$

und jetzt wird die Argumentation schwer (über Definitionsbereiche) $\mathbb{L}=\{x\in\mathbb{R}|-1\le x\le 0\}$.

Aufg. 36/78: a-c fehlen noch.

Die Methode von Knapp kann auch zweidimensional angewendet werden.

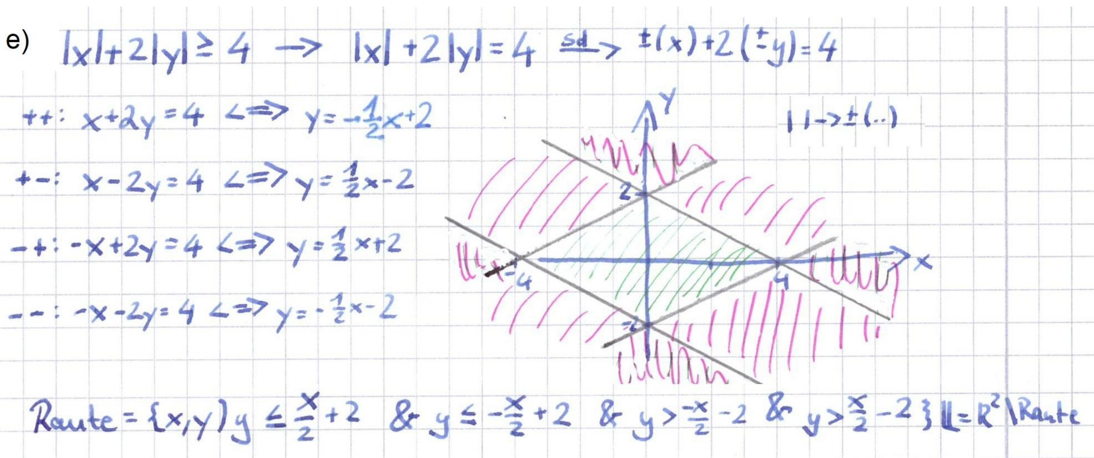


Abb. 255 $|x|+2|y|\ge 4$ graphisch interpretiert

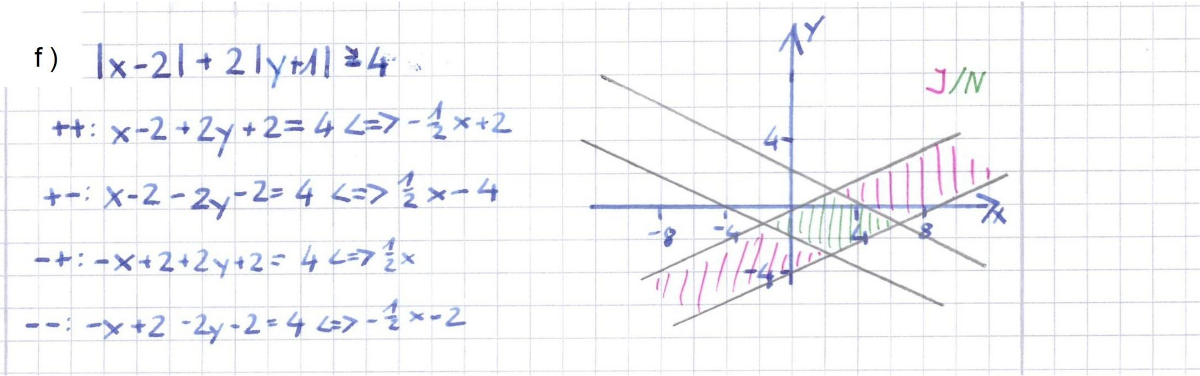


Abb. 256 $|x-2|+2|y+1| \geq 4$ graphisch interpretiert

15.2.5 LöVo zu Einheit 2.3 (Potenzrechnen UE 9_1)

Aufg. 36/79: ... a E b oder $\underline{a \cdot 10^b}$ geschrieben ($\underline{1} \leq a < \underline{10}$). a heißt **Mantisse** und b heißt Exponent.
1000$= 1 \cdot 10^3$, $0.001 = 1 \cdot 10^{-3}$ (zähle die Nullen; Nullen links = hoch '-'; Stellen nach rechts hoch '+')
a) $7200 = 7.2 \cdot 10^3$; **b)** $32100000 = 3.21 \cdot 10^7$; **c)** $100000 = 1 \cdot 10^5$; **d)** $1 = 1 \cdot 10^0$; **e)** $0.1 = 1 \cdot 10^{-1}$;
f) $0.02 = 2 \cdot 10^{-2}$; **g)** $0.003 = 3 \cdot 10^{-3}$; **h)** $0.000123 = 1.23 \cdot 10^{-4}$; **i)** $0.0099 = 9.9 \cdot 10^{-3}$;
j) $1.23 = 1.23 \cdot 10^0$.

Aufg. 36/80: **a)** 12; **b)** 12300; **c)** 101000; **d)** 31.2; **e)** 0.178; **f)** 0.000321; **g)** 0.0098; **h)** 3.21.

Aufg. 36/81:

a) $6a$, a^6; **c)** $a^6 \cdot a^3 = a^9$; $(a^6) \cdot (a^3) = (a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^9$

b) Eine Potenz besteht aus Basis (unten) und Exponent (oben).

d) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$. Beweis (mit Assoziativgesetz):

$$(a^n) \cdot (a^m) = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ Faktoren}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n+m \text{ Faktoren}} = a^{n+m}$$

Aufg. 36/82: a) $a^{15} \cdot b^{12}$; b) $a^6 \cdot b^7$, $(a^0 = 1; b = b^1)$; c) $a^2 \cdot b^3 \cdot c^6$, (Potenz vor Produkt $abc^2 = a \cdot b \cdot c \cdot c$).

Aufg. 36/83: a) $a^3(a^4+a^2) = a^7+a^5$; b) $a^4(a^5-a^2) = a^9-a^6$; c) $a^2(a^2+3a-6) = a^4+3a^3-6a^2$;
d) $3a^2(a-6a^3+7a) = 3a^3-18a^5+21a^3 = -18a^5+24a^3$;
e) $a^2(a^2+1)^2 = a^2(a^4+2a^2+1) = a^6+2a^4+a^2$;
f) $3a^2(a^2-a)^2 = 3a^2(a^4-2a^3+a^2) = 3a^6-6a^5+3a^4$;
g) $4a^2b^3(ab^2-ab)^2 = 4a^2b^3(a^2b^4-2a^2b^3+a^2b^2) = 4a^4b^7-4a^4b^6+4a^4b^5$;
h) $(a^2+b^3)(a+b)^2 = (a^2+b^3)(a^2+2ab+b^2) = a^4+2a^3b+a^2b^2+a^2b^3+2ab^4+b^5$;
i) $(3a^2bc+2ab^2c)^2 = 9a^4b^2c^2+12a^3b^3c^2+4a^2b^4c^2$;

Aufg. 36/84: a) $(ab)^2 = (ab) \cdot (ab) = a \cdot a \cdot b \cdot b = a^2b^2$, $(ac)^3 = a^3c^3$, $(ad)^4 = a^4d^4$, $(ab)^n = a^nb^n$.
Beweis (mit Assoziativ + Kommutativgesetz)

$$(ab)^n = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot \ldots \cdot (ab)}_{n \text{ Faktoren}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ Faktoren}} = a^nb^n$$

b) $(abc)^3 = a^3b^3c^3$, $(abc)^2 \cdot abc^2 = a^3b^3c^4$, $(abc)^2 \cdot (abc)^2 \cdot a^2(bc) = a^6b^5c^5$.

Aufg. 37/85: a) $(a^3)^2 = a^3 \cdot a^3 = a^6$, $(a^3)^3 = a^9$, $(a^4)^2 = a^8$.
b) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$. Beweis (mit Assoziativgesetz und erstem Potenzgesetz):

$$(a^n)^m = \underbrace{(a^n) \cdot (a^n) \cdot \ldots \cdot (a^n)}_{m \text{ Faktoren}} = a^{\overbrace{n + n + \ldots + n}^{m \text{ Summanden}}} = a^{n \cdot m}$$

c) Seien $a > 0$ und $n, m \in \mathbb{N}$, dann gilt $(a^n)^m = \underline{a^{n \cdot m}} = \underline{(a^m)^n}$. Weil es auf die Reihenfolge der <u>Exponenten</u> nicht ankommt, schreibt man diese gleich hoch.

Aufg. 37/86: a) $x^4 \cdot x^1 = x^{4+1} = x^5$; b) $30a^7$; c) $4y^4 \cdot y \cdot 4y^2 = 16y^7$;

d) $(-x^2y^3)^2(xy)^3 = x^4y^6x^3y^3 = x^7y^9$; e) $-(4x^2)^3 = -4^3x^6 = -64x^6$; f) $x^2(x^3 + x) = x^5 + x^3$;

g) $(-2x^2y^3)^2 \cdot (-4x^3y)^3 = 2^2x^4y^6 \cdot (-1) \cdot 4^3x^9y^3 = -4^4x^{13}y^9$;

h) $(-2x)^2 \cdot (2x - 4x^2) = 4x^2 \cdot (2x - 4x^2) = 8x^3 - 16x^4$;

i) $(2x^2 - 3x) \cdot (3x - 2x^2) = 6x^3 - 4x^4 - 9x^2 + 6x^3 = -4x^4 - 9x^2$;

j) $-x^2(2x - 3x^2)^2 = -x^2(4x^2 - 12x^3 + 9x^4) = -4x^4 + 12x^5 - 9x^6$;

k) $(2x - x^2)(2x + x^2)(2x - x^2)^2 = (4x^2 - x^4)(4x^2 - 4x^3 + x^4) = 16x^4 - 16x^5 + 4x^6 - 4x^6 + 4x^7 - x^8 = 16x^4 - 16x^5 + 4x^7 - x^8$;

Aufg. 37/87: a) Vervollständigen Sie: $1 = x^{\underline{0}} = x^{1+\underline{(-1)}} = x^1 \cdot x^{\underline{-1}}$. b) $x^{-1} = \frac{1}{x}$

c) (Tipp: <u>3</u> Potenzgesetz)? $x^{-2} = (x^{-1})^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}$; d) $x^{-n} = (x^{-1})^n = \left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{x^n}$.

Aufg. 37/88: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, $a^5 : a^2 = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = a^3$. $a^{n-m} = a^n \cdot a^{-m} = a^n \cdot \frac{1}{a^m} = a^n : a^m$.

Fallunterscheidung: $n \geq m$ und $n < m$. Für $n < m$ hat der Zähler <u>weniger</u> <u>Faktoren</u> als der Nenner.

Aufg. 37/89:

a) $\frac{x^2}{y} = x^2 \cdot y^{-1}$, b) $\frac{xy}{x^2} = x^{-1} \cdot y$, c) $\frac{1}{xy^2} = x^{-1} \cdot y^{-2}$,

d) $\frac{(2xy)^3}{4(x^2y)^4} = \frac{2^3x^3y^3}{4x^8y^4} = \frac{2}{x^5y} = 2x^{-5} \cdot y^{-1}$,

Aufg. 37/90: a) $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a \cdot a}{b \cdot b} = \frac{a^2}{b^2}$.

b) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$. Beweis: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a}{b}\right)}_{n \text{ Faktoren}} \underset{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a}{b \cdot b}}{=} \frac{a \cdot a \ldots \cdot a}{\underbrace{b \cdot b \ldots \cdot b}_{n \text{ Faktoren}}} = \frac{a^n}{b^n}$.

Aufg. 37/91: a) $\left(\frac{a^2}{b^5}\right)^3 = \frac{a^6}{b^{15}}$,

b) $\left(\frac{a}{b}\right)^3 \cdot \left(\frac{b^2}{a}\right)^2 = \frac{a^3b^4}{b^3a^2} = ab$; c) $\left(\frac{3x^2y^3}{2x^4y^3}\right)^2 : \left(\frac{6xy^2}{2x^2y^4}\right)^3 = \frac{3^2x^4y^6}{2^2x^8y^6} \cdot \frac{2^3x^6y^{12}}{6^3x^3y^6} = \frac{3^2}{2^2x^4} \cdot \frac{x^3y^6}{3^3} = \frac{3^2 \cdot x^3y^6}{2^2 \cdot 3^3x^4} = \frac{y^6}{2^2 \cdot 3x}$;

Aufg. 37/92: a) $\frac{y^2}{x^2} = (\frac{y}{x})^2$; b) $x^{-2-5+3} = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$; c) $(-x)^{-6} = \frac{1}{(-x)^6} = \frac{1}{x^6}$;

d) $(2x^{-4}) : (4x^{-5}) = \frac{2x^{-4}}{4x^{-5}} = \frac{x^5}{2x^4} = \frac{x}{2}$; e) $(\frac{y}{x})^n$; f) $\frac{(4x^{-1}y)^3}{(2x^{-2}y^{-2})^4} = \frac{2^6x^{-3}y^3}{2^4x^{-8}y^{-8}} = 2^2x^5y^{11}$;

g) $(\frac{(4x^{-2}y^3)^4}{(8x^2y^{-3})^3})^{-2} = (\frac{4^4x^{-8}y^{12}}{8^3x^6y^{-9}})^{-2} = (\frac{2^8y^{21}}{2^9x^{14}})^{-2} = (\frac{2x^{14}}{y^{21}})^2 = \frac{4x^{28}}{y^{42}}$;

h) $\frac{15x^{-5}y^8}{35z^7y^{-2}} \cdot \frac{21x^3y^4}{9x^{-2}z^{-3}y^{10}} = \frac{15y^8 21x^3y^4y^2x^2z^3}{35x^5z^7 \cdot 9y^{10}} = \frac{3^2 \cdot 5 \cdot 7x^{3+2}y^{8+4+2}z^3}{3^2 \cdot 5 \cdot 7x^5y^{10}z^7} = \frac{x^5y^{14}z^3}{x^5y^{10}z^7} = \frac{y^4}{z^4} = (\frac{y}{z})^4$;

i) $(\frac{x^{-8+n}y^0z^n}{x^{-8}y^{-1}z} : \frac{x^ny^{-n}z^{-2}}{x^{n+1}})^{-2} = (x^nyz^{n-1} : x^{-1}y^{-n}z^{-2})^{-2} = (x^{n+1}y^{n+1}z^{n+1})^{-2} = \frac{1}{x^{2n+2}y^{2n+2}z^{2n+2}}$;

j) $(\frac{8x^4y^2}{27x^5z})^2 \cdot (\frac{9x^2y^{-2}}{4yz})^3 \cdot (\frac{x^{-2}}{y^3z^3})^{-2} = (\frac{8y^2}{27xz})^2 \cdot (\frac{9x^2}{4y^3z})^3 \cdot (\frac{1}{x^2y^3z^3})^{-2} = \frac{2^6y^4}{3^6x^2z^2} \cdot \frac{3^6x^6}{2^6y^9z^3} \cdot x^4y^6z^6$
$= \frac{x^6x^4}{x^2} \cdot \frac{y^4y^6}{y^9} \cdot \frac{z^6}{z^2z^3} = x^8yz;$

k) $(5x)^{n+1} : x^{n-1} = 5^{n+1}x^{n+1} \cdot x^{-n+1} = 5^{n+1}x^2;$

l) $(2x^{n+1})^{n-1} \cdot 2^{1-n}x = 2^{n-1}x^{n^2-1} \cdot 2^{1-n}x = 2^{n-1+1-n}x^{n^2-1+1} = x^{n^2};$

m) $((x^{-3}y^{-2}z^{-1})^{-3})^{-2} = (x^9y^6z^3)^{-2} = x^{-18}y^{-12}z^{-6} = \frac{1}{x^{18}y^{12}z^6};$

n) $\frac{(2xy)^{2n+2}}{x^{1-2m}} : \frac{(2xy)^{2n}}{2x^{2-2m}} = 2^{2n+2}x^{2n+2}y^{2n+2} \cdot x^{2m-1} \cdot \frac{2x^{2-2m}}{2^{2n}x^{2n}y^{2n}} = 2^{2n+3}x^{2n+3}y^{2n+2} \cdot 2^{-2n}x^{-2n}y^{-2n} = 2^3x^3y^2;$

o) $\left(\frac{6x^{2-2m}}{3x^{2m-1}}\right)^3 = \left(2x^{3-4m}\right)^3 = 2^3x^{9-12m} = \frac{8x^9}{x^{12m}};$

p) $\left(\frac{36x^{3-2m}}{9x^{1-2m}}\right)^4 = \left(4x^2\right)^4 = 4^4x^8;$

q) $\left(\frac{x^{4n+8}}{x^{n-2}}\right)^n = \left(x^{3n+10}\right)^n = x^{3n^2+10n};$

r) $\frac{(x^{3n-3})^4}{(x^{4n+4})^3} = \frac{x^{12n-12}}{x^{12n+12}} = x^{-24} = \frac{1}{x^{24}};$

s) $\left(\frac{(x^{2n-m})^4}{(x^{n+m})^8}\right)^2 = \left(\frac{x^{8n-4m}}{x^{8n+8m}}\right)^2 = x^{-24m} = \frac{1}{x^{24m}},$

t) $\frac{x^{3m-3}}{x^{3m+2}} = x^{3m-3} \cdot x^{-3m-2} = x^{-5} = \frac{1}{x^5},$

u) $\frac{(2x)^{-2m-2}}{(4x)^{-3m+2}} = \frac{2^{-2m-2} . x^{-2m-2}}{(2^2)^{-3m+2} . x^{-3m+2}} = 2^{-2m-2} \cdot x^{-2m-2} \cdot 2^{6m-4} \cdot x^{3m-2} = 2^{4m-6} \cdot x^{m-4} = \frac{2^{4m} \cdot x^m}{2^6 \cdot x^4},$

v) $\frac{(3x)^{3m+3} . (27x)^{2m+2}}{(9x)^{5m+5}} = \frac{3^{3m+3} . x^{3m+3} . 27^{2m+2} . x^{2m+2}}{9^{5m+5} . x^{5m+5}} = \frac{3^{3m+3} . x^{5m+5} . (3^3)^{2m+2}}{(3^2)^{5m+5} . x^{5m+5}} = \frac{3^{3m+3} . 3^{6m+6}}{3^{10m+10}} = \frac{1}{3^{m+1}},$

w)
$$\begin{aligned}
&\frac{(12x)^{m-2} \cdot (18x)^{2m-3}}{(36x)^{3m-4}} &&= \frac{12^{m-2} \cdot x^{m-2} \cdot 18^{2m-3} \cdot x^{2m-3}}{36^{3m-4} \cdot x^{3m-4}} && \text{2. PG}\\
=&\frac{(2^2)^{m-2} . 3^{m-2} \cdot x^{m-2} . 2^{2m-3} . (3^2)^{2m-3} \cdot x^{2m-3}}{(2^2)^{3m-4} . (3^2)^{3m-4} . x^{3m-4}} &&= \frac{2^{2m-4} . 3^{m-2} \cdot x^{m-2} . 2^{2m-3} . 3^{4m-6} \cdot x^{2m-3}}{2^{6m-8} . 3^{6m-8} . x^{3m-4}} && \text{3. PG}\\
=&\frac{2^{(2m-4)+(2m-3)} . 3^{(m-2)+(4m-6)} . x^{(m-2)+(2m-3)}}{2^{6m-8} . 3^{6m-8} . x^{3m-4}} &&= \frac{2^{4m-7} . 3^{5m-8} . x^{3m-5}}{2^{6m-8} . 3^{6m-8} . x^{3m-4}} && \text{1. PG}\\
=&\,2^{(4m-7)-(6m-8)} \cdot 3^{(5m-8)-(6m-8)} \cdot x^{(3m-5)-(3m-4)} &&= \frac{2}{2^{2m} . 3^m . x}, && \text{1. PG}
\end{aligned}$$

x)
$$\begin{aligned}
& \frac{(a^2bc^3)^{2m+1} \ \cdot \ (a^3b^2c)^{2m-1}}{(abc^2)^{m+2} \ \cdot \ (a^2bc)^{m-4}} & \\
= & \frac{(a^2)^{2m+1}\, b^{2m+1}\, (c^3)^{2m+1} \ \cdot \ (a^3)^{2m-1}\, (b^2)^{2m-1}\, c^{2m-1}}{a^{m+2}\, b^{m+2}\, (c^2)^{m+2} \ \cdot \ (a^2)^{m-4}\, b^{m-4}\, c^{m-4}} & \text{2. Potenzgesetz}\\
= & \frac{a^{4m+2}\, b^{2m+1}\, c^{6m+3} \ \cdot \ a^{6m-3}\, b^{4m-2}\, c^{2m-1}}{a^{m+2}\, b^{m+2}\, c^{2m+4} \ \cdot \ a^{2m-8}\, b^{m-4}\, c^{m-4}} & \text{3. Potenzgesetz}\\
= & \frac{a^{4m+2}\, a^{6m-3} \ . \ b^{2m+1}\, b^{4m-2} \ . \ c^{6m+3}\, c^{2m-1}}{a^{m+2}\, a^{2m-8} \ . \ b^{m+2}\, b^{m-4} \ . \ c^{2m+4}\, c^{m-4}} & \text{Kommutativgesetz}\\
= & \frac{a^{4m+2+6m-3} \ . \ b^{2m+1+4m-2} \ . \ c^{6m+3+2m-1}}{a^{m+2+2m-8} \ . \ b^{m+2+m-4} \ . \ c^{2m+4+m-4}} & \text{1. Potenzgesetz}\\
= & \frac{a^{10m-1}\, b^{6m-1}\, c^{8m+2}}{a^{3m-6}\, b^{2m-2}\, c^{3m}} & \text{addiert}\\
= & a^{10m-1-(3m-6)}\, b^{6m-1-(2m-2)}\, c^{8m+2-(3m)} & \text{1. Potenzgesetz}\\
= & a^{7m+5}b^{4m+1}c^{5m+2}. &
\end{aligned}$$

Aufg. 37/93: a) $(a^{\frac{1}{2}})^2 = a^1 = a$; b) $y = \sqrt{a}$; c) $(a^{\frac{1}{2}})^2 = (\sqrt{a})^2 = a \Rightarrow a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$;
d) Weil $a^x \geq 0$ sein sollte für $a \geq 0$.

Aufg. 37/94: a) $x = \pm\sqrt{a}$, $x = a^{\frac{1}{3}}$, $x = \pm a^{\frac{1}{4}}$, $x = a^{\frac{1}{5}}$, $x = \pm a^{\frac{1}{n}}$, falls n gerade ist und $x = a^{\frac{1}{n}}$ (sonst); b) $(\sqrt[4]{a})^{\underline{4}} = \underline{a}$. c) $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$, $(\sqrt[n]{a})^n = a$, $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, d) $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a}$;

e) $\sqrt[n]{a}$ ist diejenige Zahl, die <u>hoch n = a</u> ergibt. f) $\sqrt[1]{x} = a$ und $\sqrt[0]{a}$ ist nicht definiert.

i) $x = \sqrt[3]{27} = 3$; ii) $x = \sqrt[5]{32} = 2$; iii) $x = \pm\sqrt[2]{16} = \pm 4$; iv) $x = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2$;

v) $x = \pm\sqrt[3]{512} = 8$; vi) $x = \pm\sqrt[6]{4096} = \pm 4$;

Auswendig: Die Gleichung $x^2 = 4$ hat nicht (nur) die Lösung $\underline{x = 2}$ sondern auch $\underline{x = -2}$!

Die Gleichung $x^n = a$ hat für ungerades n genau eine Lösung $x = \sqrt[n]{a}$. Falls n gerade ist, so hat die Gleichung für $a < 0$ keine Lösung und für $a > 0$ (oder $a \geq 0$) gilt $x = \pm\sqrt[n]{a}$.

Aufg. 38/95: a) $\sqrt[3]{-1} = -1$, weil $(-1)^3 = -1$; b) für ungeradzahlige n;
c) beim Schritt $(-8)^{2\cdot\frac{1}{6}} = ((-8)^2)^{\frac{1}{6}}$ wird ein Potenzgesetz bei negativer Basis angewendet.

Warum sind die Potenzgesetze nur für Basen ≥ 0 definiert? Betrachten Sie dazu $((-1)^2)^{\frac{1}{2}}$.

d) $((-1)^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$ aber $((-1)^2)^{\frac{1}{2}} = (-1)^1 = -1$;

e) (Thx Trs) Es gilt $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ siehe 29/42;

1 Fall: $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$, dann haben wir das Paar $a = b = \sqrt{2}$ gefunden.

2 Fall: $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$, dann ist $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$ (rational). Damit wäre das Paar $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$; $b = \sqrt{2}$ gefunden.

Damit ist entweder $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ oder $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ rational, wir wissen nur nicht welches beider Zahlenpaare das Gesuchte ist :) .

Aufg. 38/96: a) $\sqrt{x} = 3 \mid .^2 \Leftrightarrow x = 9$; Probe (obligatorisch): $\sqrt{9} = 3\ \surd$;
b) $\sqrt{x} = -2 \mid .^2 \rightarrow x = 4$; Probe (obligatorisch): $\sqrt{4} \neq -2\ \mathbb{L} = \{\} = \emptyset$;
c) $\sqrt[4]{x} = 5 \mid .^4 \Leftrightarrow x = 5^4 = 625$; Probe: $\sqrt[4]{625} = 5\ \surd$;
d) $\sqrt[5]{x} = 1 \mid .^5 \Leftrightarrow x = 1^5 = 1$; e) $\sqrt[3]{x} = 4 \mid .^3 \Leftrightarrow x = 4^3 = 64$; f) $\sqrt[4]{x} = 0 \mid .^4 \Leftrightarrow x = 0^4 = 0$; Probe: $\sqrt[4]{0} = 0\ \surd$;
g) $\sqrt[6]{x} = -2 \mid .^6 \Leftrightarrow x = (-2)^6 = 64$; Probe: $\sqrt[6]{64} = 2$; falsch - $\mathbb{L} = \{\}$;
h) $\sqrt[3]{x} = -1 \mid .^3 \Leftrightarrow x = (-1)^3 = -1$; Bem: $\sqrt[3]{-1} = -1$ wird nicht von allen Kollegen akzepiert.
i) $\sqrt[4]{x-3} = 2 \mid .^4 \Leftrightarrow x - 3 = 2^4 = 16 \Rightarrow x = 19$; Probe: $\sqrt[4]{19-3} = 2\ \surd$;
j) $\sqrt[3]{3-x} = -3 \mid .^3 \Leftrightarrow 3 - x = (-3)^3 = -27 \Rightarrow x = 30$;
k) $\sqrt[4]{3x+1} = 2 \mid .^4 \Leftrightarrow 3x + 1 = 2^4 = 16 \Rightarrow x = 5$; Probe: $\sqrt[4]{3\cdot 5+1} = 2\ \surd$;
l) $\sqrt[6]{10x+9} = -3 \mid .^6 \Leftrightarrow 10x + 9 = (-3)^6 = 729 \Rightarrow x = 72$; Probe: $\sqrt[6]{720\cdot 10+9} = 3$; f $\Rightarrow \mathbb{L} = \{\}$;
m) $x = \pm 2$; n) ist nur lösbar für $a \leq 3$; $x = \frac{a^2 - {}^0 a + 6}{2}$

Aufg. 38/97: a) $(\sqrt[3]{2})^6 = 2^{6:3} = 2^2 = 4$; b) $\sqrt{\sqrt[3]{3}} = (3^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{3}$;

c) $\frac{\sqrt[4]{10y}}{\sqrt[4]{2y}} = \frac{10^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4}}} = 5^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{5}$; d) $\sqrt[5]{x^2}\cdot\sqrt[5]{x^3} = x^{\frac{2}{5}}\cdot x^{\frac{3}{5}} = x^1 = x$; e) $\frac{x\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$;

f) $\frac{b}{a}\cdot\sqrt{\frac{(ab)^3:b^2}{(ab^2)^2:b^2}} = \frac{b}{a}\cdot\sqrt{\frac{a^3b}{a^2b^2}} = \frac{b}{a}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{b}{a}}$,

g) $\sqrt[4]{\frac{a^2b^3}{a^4b^7}}\cdot\sqrt{\frac{(ab)^3}{a^2b}} = \left(\frac{1}{a^2b^4}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\left(\frac{a^3b^3}{a^2b}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}b}\cdot\left(ab^2\right)^{\frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{2}}b^{-1}\cdot a^{\frac{1}{2}}b = 1$,

h) $\sqrt[5]{\frac{(ab^2)^3(3a^2b)^2}{12a^2(2ab)^3}}\cdot\sqrt[10]{a^6} = \left(\frac{a^3\cdot b^6\cdot 3^2\cdot a^4\cdot b^2}{12\cdot a^2\cdot 2^3\cdot a^3\cdot b^3}\right)^{\frac{1}{5}}\cdot a^{\frac{3}{5}} = \left(\frac{9a^7b^8}{12\cdot 8a^5b^3}\right)^{\frac{1}{5}}\cdot(a^3)^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{3a^2b^5}{32}\cdot a^3\right)^{\frac{1}{5}} = \frac{ab}{2}\sqrt[5]{3}$,

i) $\sqrt[1/2]{x} = x^{\frac{1}{1/2}} = x^2$; j) $\sqrt[-2/3]{4y} = \frac{1}{(4y)^{\frac{1}{2/3}}} = \frac{1}{(4y)^{3/2}} = \frac{1}{4^{3/2}\cdot y^{3/2}} = \frac{y^{-3/2}}{8}$,

k) $\sqrt[-x/y]{a/b} = \frac{1}{(a/b)^{y/x}} = \frac{b^{y/x}}{a^{y/x}} = \sqrt[x]{(b/a)^y}$;

l) $\sqrt[4/3]{16x^2}\cdot\sqrt[-2/3]{4x} = (16x^2)^{3/4}\cdot(4x)^{-3/2} = \frac{16^{3/4}\cdot x^{3/2}}{4^{3/2}\cdot x^{3/2}} = \frac{8\cdot x^{3/2}}{8\cdot x^{3/2}} = 1$,

m) $\sqrt[1.25]{32y}\cdot\sqrt[0.4]{4y} = (32y)^{4/5}\cdot(4y)^{5/2} = 32^{4/5}\cdot y^{4/5}\cdot 4^{5/2}\cdot y^{5/2} = 16\cdot y^{0.8}\cdot 32\cdot y^{2.5} = 64\cdot y^{3.2}$,

n) $\sqrt[-2/3]{16x^3}\cdot\sqrt[0.2]{2x}\cdot\sqrt{36x} = \frac{1}{(16x^3)^{3/2}}\cdot(2x)^{1/0.2}\cdot 36^{0.5}\cdot x^{0.5} = \frac{1}{64\cdot x^{9/2}}\cdot(2x)^5\cdot 6\cdot x^{0.5} = \frac{32\cdot 6\cdot x^{5.5}}{64\cdot x^{9/2}} = 3x$.

Aufg. 38/98:

Nr	Eigenschaft	Gesetz	assoziiertes Gesetz;	Vor.: $a, b \geq 0$ (> 0)
1 PG	gleiche Basen	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	
2 PG	gleiche Exponenten	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$	
3 PG		$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$(a^n)^m = (a^m)^n$	
4 PG	negative Exponenten	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$		
5 PG	rationale Exponenten	$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$		
6 PG	weder gleiche Basen noch Exponenten	$a^n \cdot b^m =$ kann nicht zusammengefasst werden		

Aufg. 38/99: a) $x^3 - x^2 = x \cdot x \cdot x - x \cdot x = x \cdot x(x-1) = x^2(x-1)$ b) $x^4 - 5x^3 = x^3(x-5)$

c) $x^{12} - 3x^{14} = x^{12}(1-3x^2)$; d) $x^3y - 5x^2y = x^2y(x-5)$; e) $x^7y^4 + x^4y^6 = x^4y^4(x^3+y^2)$;

f) $x^6y^4z^2 + x^4y^4z = x^4y^4z(x^2z+1)$; g) $xy + 3x - 4xy^2 = x(y+3-4y^2)$;

h) $x^3y^5 + x^3y^6 - x^4y^5 = x^3y^5(1+y-x)$;

Aufg. 38/100: a) Faktorisieren Sie mit Hilfe der binomischen Formeln: i) $x^2 - 4 = (x-2)\cdot(x+2)$; ii) $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$; iii) $x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$; iv) $4x^2 - 1 = (2x-1)\cdot(2x+1)$;

v) $4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2$; vi) $2x^2 - 8x + 8 = 2(x^2 - 4x + 4) = 2(x-2)^2$;

vii) $x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2$;

b) i) $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, (MNF $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = 2$);

ii) $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$, ($x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3, x = -2$);

iii) $2x^2 - 2x - 24 = 2(x-4)(x+3)$, ($2x^2 - 2x - 24 = 0 \Leftrightarrow x = -3, x = 4$);

iv) $x^3 - 5x^2 + 6x = x(x-2)(x-3)$; v) $2x^4 + 4x^3 + 2x^2 = 2x^2(x+1)^2$;

vi) $2x^4 - 8x^3 + 6x^2 = 2x^2(x^2 - 4x + 3) = 2x^2(x-1)(x-3)$;

c) Eine biquadratische Gleichung ist eine Gleichung der Form $ax^4 + bx^2 + c = 0$, das heißt, Summanden der Form bx^3 und dx sind nicht dabei. Biquadratische Gleichungen löst man mit Substitution, dass heißt, man ersetzt x^2 durch w.

Hier wird mit $w = x^2$ substituiert: vii) $w^2 - 13w + 36 \Rightarrow w_1 = 4, w_2 = 9 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2, x_{3,4} = \pm 3 \Rightarrow$ $x^4 - 13x^2 + 36 = (x-3)\cdot(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x+3)$;

viii) $w^2 - 26w + 25 \Rightarrow w_1 = 25, w_2 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1, x_{3,4} = \pm 5$

$\Rightarrow x^4 - 26x^2 + 25 = (x-5)\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+5)$;

ix) $4w^2 - 5w + 1 \Rightarrow w_1 = 0.25, w_2 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1, x_{3,4} = \pm 0.5$

$\Rightarrow 4x^4 - 5x^2 + 1 = 4(x-1)\cdot(x-0.5)\cdot(x+0.5)\cdot(x+1)$;

x) $w^2 - 3w - 4 \Rightarrow w_1 = -1, w_2 = 4 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$,

$\Rightarrow w^2 - 3w - 4 = (w^2+1)\cdot(w^2-4)$ $x^4 - 3x^2 - 4 = (x-2)\cdot(x+2)\cdot(x^2+1)$;

Aufg. 38/101: a) $\frac{x^3-x^2}{x^2} = \frac{x^2(x-1)}{x^2} = x - 1$; b) $\frac{x^4-2x^3}{x^5} = \frac{x^3(x-2)}{x^5} = \frac{x-2}{x^2}$;

c) $\frac{x^6}{x^5-3x^3} = \frac{x^6}{x^3(x^2-3)} = \frac{x^3}{x^2-3}$; d) $\frac{x^3-x^2}{x^4-5x^3} = \frac{x^2(x-1)}{x^3(x-5)} = \frac{x-1}{x(x-5)}$; e) $\frac{x^5-x^4}{x^3-x^2} = \frac{x^4(x-1)}{x^2(x-1)} = x^2$;

f) $\frac{x^4-2x^3+x^2}{x^3-x^2} = \frac{x^2(x-1)^2}{x^2(x-1)} = x - 1$; g) $\frac{x^5-2x^4+x^3}{x^5-x^3} = \frac{x^3(x-1)^2}{x^3(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{x+1}$;

h) $\frac{x^6-4x^5+4x^4}{x^6-2x^5} = \frac{x^4(x-2)^2}{x^5(x-2)} = \frac{x-2}{x}$; i)* $\frac{x^2-x-6}{x-3} = \frac{(x+2)(x-3)}{x-3} = (x+2)$;

j)* $\frac{x^4-x^3-6x^2}{x^2-3x} = \frac{x^2(x-3)(x-2)}{x(x-3)} = x(x-2)$; k)* $\frac{2x^4-8x^3+6x^2}{2x^3-6x^2} = \frac{2x^2(x^2-4x+3)}{2x^2(x-3)} = \frac{2x^2(x-3)(x-1)}{2x^2(x-3)} = x - 1$;

l)* $\frac{x^n-x^{n+2}}{x^n-x^{n-1}} = \frac{x^n(1-x^2)}{x^{n-1}(1-x)} = \frac{x(1-x)(1+x)}{(1-x)} = x(1+x)$; m)* $\frac{x^{2n}-x^{2n-2}}{x^{2n}-x^{2n-1}} = \frac{x^{2n-2}(x^2-1)}{x^{2n-1}(x-1)} = \frac{x+1}{x}$;

n)* $\frac{x^4-13x^2+36}{2x^4-10x^2+8} = \frac{(x-3)\cdot(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x+3)}{2\cdot(x-2)\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)} = \frac{(x-3)\cdot(x+3)}{2\cdot(x-1)\cdot(x+1)/*}$

Aufg. 38/102: a) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} = \frac{a}{a^3} + \frac{1}{a^3} = \frac{a+1}{a^3}$; b) $\frac{3}{a^2b^4} + \frac{4}{a^3b^3} + \frac{5}{a^3b^4} = \frac{3a}{a^3b^4} + \frac{4b}{a^3b^4} + \frac{5}{a^3b^4} = \frac{3a+4b+5}{a^3b^4}$;

c) $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} = \frac{a^2}{abc} + \frac{b^2}{abc} + \frac{c^2}{abc} = \frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$; d) $\frac{3a^2+1}{a^2+3a} - \frac{2a+1}{a+3} = \frac{3a^2+1}{a(a+3)} - \frac{2a^2+a}{a(a+3)} = \frac{a^2-a-1}{a(a+3)}$;

e) $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} = \frac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)} + \frac{b(a+b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{a^2+b^2)}{(a+b)(a-b)}$; **f)** $\frac{a^2+5}{a^2-4} - \frac{a+1}{a-2} + \frac{a-1}{a+2} =$

$= \frac{a^2+5}{(a-2)(a+2)} - \frac{(a+1)(a+2)}{(a-2)(a+2)} + \frac{(a-1)(a-2)}{(a-2)(a+2)} = \frac{a^2+5-(a^2+3a+2)+a^2-3a+2}{(a-2)(a+2)} = \frac{a^2-6a+5}{(a-2)(a+2)} = \frac{(a-1)(a-5)}{(a-2)(a+2)}$;

Aufg. 38/103: a) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})\cdot(\sqrt{2x}-\sqrt{2y}) = \sqrt{2x^2} - \sqrt{2xy} + \sqrt{2xy} - \sqrt{2y^2} = \sqrt{2}(x-y)$;

b) $\frac{\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{xy}}{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[3]{xy} - \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{y}(\sqrt[3]{x}-1)$;

c) $\frac{y-x}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{(y-x)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \frac{(y-x)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(x-y)} = -(\sqrt{x}-\sqrt{y}) = \sqrt{y}-\sqrt{x}$;

Aufg. 39/104: a) **i)** $\frac{a^{-2}}{a^{-1}} = a^{-2-(-1)} = a^{-1} = \frac{1}{a}$; **ii)** $(a\cdot b^2)^{-2} = a^{-2}\cdot b^{2\cdot -2} = a^{-2}\cdot b^{-4} = \frac{1}{a^2\cdot b^4}$;
iii) $a^{-4/6} = \frac{1}{a^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$; **iv)** $(a^2+a^{-3})^2 = a^4 + 2a^{-1} + a^{-6} = a^4 + \frac{2}{a} + \frac{1}{a^6}$;
v) $\frac{a^2}{a^3+a^2} = \frac{a^2}{a^2(a+1)} = \frac{1}{a+1}$;

vi) $\sqrt[3]{\sqrt{729}} = (729x^3)^{1/6} = (3^6)^{1/6}\cdot(x^3)^{1/6} = 3\sqrt{x}$,

b) **i)** $x^4 = 36 \Leftrightarrow x^4 = 6^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6}$; **ii)** $x^5 = -1024 = -2^{10} \Leftrightarrow x = -4$; **iii)** $x^6 = -2^6$, $\mathbb{L} = \{\}$;
iv) $\sqrt[3]{x} = -2$; (hoch 3) $\Leftrightarrow x = -8$; **v)** $\sqrt[6]{x} = 3$; (hoch 6) $\Leftrightarrow x = 729$, Probe: $\sqrt[6]{729} = 3\surd$;
vi) $\sqrt[4]{x} = -2$; (hoch 4) $\Leftrightarrow x = 16$ Probe: $\sqrt[4]{16} = 2 \Rightarrow \mathbb{L} = \{\}$;

15.2.6 LöVo zu Einheit 2.4 (Logarithmenrechnen UE 9_2)

Aufg. 39/105: a) Es wurde ein neues merkwürdiges Symbol '$\sqrt{\ }$' definiert, und $\sqrt{2}$ löst $x^2 = 2$.

b) $x \approx 0.3$ $x = \log(5)$, $x = \log(100) = 2$, $10^x = 1000 \Leftrightarrow x = \log(1000) = 3$,
$10^x = 3 \Leftrightarrow x = \log(3) \approx 0.477$, $10^x = 30 \Leftrightarrow x = \log(30) \approx 1.477$, $10^x = 300 \Leftrightarrow x = \log(300) \approx 2.477$,
$x = \log(1) = 0$, $10^x = 0$ und $10^x = -1$ sind nicht lösbar.

c) $10^{\log(2)} = 2$, $10^{\log(4)} = 4$ und $10^{\log(x)} = x$ falls $x > 0$ – diese Formel ist klar nach Definition.

d) $\log(1\underbrace{0...0}_{n \text{ Nullen}}) = n$ e) ... $\underline{\log(x)}$ ... Die Anzahl der Stellen einer Zahl $x > 0$ ist $\log(x)$ immer aufgerundet.

Aufg. 39/106: a) $a^n\cdot a^m = a^{n+m}$, $(a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n$, $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$. b) $x = \log(3)$, $10^{\log(3)} = 3$;
c) $3^x = 5 \Leftrightarrow 10^{x\log(3)} = 5 \Leftrightarrow x\log(3) = \log(5) \Leftrightarrow x = \frac{\log(5)}{\log(3)}$;
d) $a^x = b \Leftrightarrow 10^{x\log(a)} = b \Leftrightarrow x\log(a) = \log(b) \Leftrightarrow x = \frac{\log(b)}{\log(a)}$.

Aufg. 39/107:

a) Rechnung mit WTR: $4^x = 8 \Leftrightarrow x = \frac{\log(8)}{\log(4)} = \log_4(8) = 1.5$;

Rechnung ohne WTR: $4^x = 8 \Leftrightarrow (2^2)^x = 2^3 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^3$ (Exponentenvergleich = logarithmiert) $\Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = 1.5$; Probe: $4^{1.5} = 4^{0.5}\cdot 4^1 = 2\cdot 4 = 8$;

b) Rechnung mit WTR: $x = \frac{\log(81)}{\log(3)} = 4$;

Rechnung ohne WTR: $3^x = 81 \Leftrightarrow 3^x = 3^4$ (Exponentenvergleich) $\Leftrightarrow x = 4$; Probe: $3^4 = 81$;

c) Rechnung mit WTR: $x = \frac{\log(2)}{\log(4)} = \frac{1}{2}$;

Rechnung ohne WTR: $4^x = 2 \Leftrightarrow 2^{2x}x = 2^1$ (Exponentenvergleich) $\Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = 0.5$;

Probe: $4^{0.5} = \sqrt{4} = 2$;

d) Rechnung mit WTR: $x = \frac{\log(1)}{\log(2)} = 0$;

Rechnung ohne WTR: $2^x = 1 \Leftrightarrow 2^x = 2^0$ (Exponentenvergleich) $\Leftrightarrow x = 0$ Probe: $2^0 = 1$;

e) Rechnung mit WTR: $x = \frac{\log(0.04)}{\log(5)} = -2$;

Rechnung ohne WTR: $5^x = 0.04 = \frac{4}{100} = \frac{1}{25} = \frac{1}{5^2} = 5^{-2} \Leftrightarrow 5^x = 5^{-2}$ (Exponentenvergleich) $\Leftrightarrow x = -2$;

f) Rechnung mit WTR: $8^x = 0.5 \Leftrightarrow x = \frac{\log(0.5)}{\log(8)} = \log_8(0.5) = -\frac{1}{3}$;

Rechnung ohne WTR: $8^x = 0.5 \Leftrightarrow (2^3)^x = 2^{-1} \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{-1}$ (Exponentenvergleich) $\Leftrightarrow 3x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{3}$;

g) Rechnung mit WTR: $x = \frac{\log(\sqrt{2})}{\log(16)} = \frac{1}{8}$;

Rechnung ohne WTR: $16^x = \sqrt{2} \Leftrightarrow (2^4)^x = 2^{0.5} \Leftrightarrow 2^{4x} = 2^{0.5}$ (Exponentenvergleich) $\Leftrightarrow 4x = 0.5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{8}$;

h) Rechnung mit WTR: $x = \frac{\log(\sqrt[3]{9})}{\log(27)} = \frac{\frac{1}{3}\log(9)}{\frac{3}{2}\log(9)} = \frac{2}{9}$;

Rechnung ohne WTR: $27^x = \sqrt[3]{9} \Leftrightarrow (3^3)^x = 9^{1/3} = (3^2)^{1/3} = 3^{2/3} \Leftrightarrow 3^{3x} = 3^{2/3}$ (Exponentenvergleich) $\Leftrightarrow 3x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2}{9}$;

i) Rechnung mit WTR: $x = \frac{\log(\sqrt{5})}{\log(0.2)} = \frac{\frac{1}{2}\log(5)}{-\log(5)} = -\frac{1}{2}$;

Rechnung ohne WTR: $0.2^x = \sqrt{5} \Leftrightarrow (\frac{1}{5})^x = (5^{-1})^x = 5^{-x} = 5^{0.5}$ (Exponentenvergleich) $\Leftrightarrow -x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$;

j) $6 \cdot 3^x = \frac{2}{9} \Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{27} = \frac{1}{3^3} \Leftrightarrow 3^x = 3^{-3}$ (Exponentenvergleich) $\Leftrightarrow x = -3$;

k) Rechnung mit WTR: $9^{1.5x} = 243 \Leftrightarrow 1.5x = \frac{\log(243)}{\log(9)} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{3}$;

Rechnung ohne WTR: $9^{1.5x} = 243 \Leftrightarrow (3^2)^{1.5x} = 3^5 \Leftrightarrow 3^{3x} = 3^5$ (Exponentenvergleich) $\Leftrightarrow 3x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$;

L) Rechnung mit WTR: $2x + 1 = \frac{\log(27)}{\log(3)} \Leftrightarrow 2x + 1 = 3 \Leftrightarrow x = 1$;

Rechnung ohne WTR: $3^{2x+1} = 27 = 3^3$ (Exponentenvergleich) $\Leftrightarrow 2x + 1 = 3 \Leftrightarrow x = 1$;

m) Rechnung mit WTR: $1 - x = \frac{\log(216)}{\log(6)} \Leftrightarrow 1 - x = 3 \Leftrightarrow x = -2$;

Rechnung ohne WTR: $6^{1-x} = 216 = 6^3$ (Exponentenvergleich) $\Leftrightarrow 1 - x = 3 \Leftrightarrow x = -2$;

n) Rechnung mit WTR: $2x - 3 = \frac{\log(\sqrt{8})}{\log(\sqrt{2})} \Leftrightarrow 2x - 3 = 3 \Leftrightarrow x = 3$;

Rechnung ohne WTR: $(\sqrt{2})^{2x-3} = \sqrt{8} \Leftrightarrow (2^{0.5})^{2x-3} = \sqrt{2^3} \Leftrightarrow 2^{x-1.5} = 2^{3/2}$ (Exponentenvergleich) $x - 1.5 = 1.5 \Leftrightarrow x = 3$;

o) Rechnung mit WTR: $3x + 2 = \frac{\log(4)}{\log(\sqrt[4]{2})} \Leftrightarrow 3x + 2 = 8 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$;

Rechnung ohne WTR: $(\sqrt[4]{2})^{3x+2} = 4 \Leftrightarrow (2^{0.25})^{3x+2} = 2^{3/2} \Leftrightarrow 2^{3/4 \cdot x + 2/4} = 2^{3/2}$ (Exponentenvergleich) $0.75x + 0.5 = 1.5 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$;

p) Rechnung mit WTR: $4^{x+2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow x + 2 = \frac{\log(\sqrt{2}))}{\log(4)} \Leftrightarrow x = -2 + \frac{1}{4} = -1.75$;

Rechnung ohne WTR: $4^{x+2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow (2^2)^{x+2} = 2^{0.5} \Leftrightarrow 2^{2x+4} = 2^{0.5}$ (Exponentenvergleich) $2x+4 = 0.5$ $\Leftrightarrow 2x = -3.5 \Leftrightarrow x = -1.75$

q) $2^{x+2} + 2^{x-1} = 4 \cdot 2^x + 0.5 \cdot 2^x = 4.5 \cdot 2^x = 18 \Leftrightarrow \cdot 2^x = 4 = 2^2 \Leftrightarrow x = 2$;

t) $3^{x+2} + 4 \cdot 3^{x+1} = 9 \cdot 3^x + 12 \cdot 3^x = 21 \cdot 3^x = 7 \Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{3} = 3^{-1} \Leftrightarrow x = -1$;

r) $\frac{1}{9} \cdot 3^x + 2 \cdot 3^x = 171 \Leftrightarrow \frac{19}{9} \cdot 3^x = 171 \Leftrightarrow 3^x = 81 = 3^4 \Leftrightarrow x = 4$;

s) $\frac{1}{8} \cdot 2^x + \frac{3}{4} \cdot 2^x = 56 \Leftrightarrow \frac{7}{8} \cdot 2^x = 56 \Leftrightarrow 2^x = 64 = 2^6 \Leftrightarrow x = 6$;

u) $0.00001 \cdot 10^x + 0.005 \cdot 10^x = 501 \Leftrightarrow 0.00501 \cdot 10^x = 501 \Leftrightarrow 10^x = 10^5 \Leftrightarrow x = 5$;

v) $16 \cdot 2^{2x} - \frac{3}{4} \cdot 2^{2x} = 61 \Leftrightarrow 15.25 \cdot 2^{2x} = 61 \Leftrightarrow 2^{2x} = 4 = 2^2 \Leftrightarrow 2x = \frac{\log(4)}{\log(2)} \Leftrightarrow x = 1$;

w) $\Leftrightarrow 3 \cdot 3^{2x} - \frac{36}{27} \cdot 3^{2x} = 135 \Leftrightarrow \frac{45}{27} \cdot 3^{2x} = 135 \Leftrightarrow 3^{2x} = 81 = 3^4 \Leftrightarrow 2x = \frac{\log(81)}{\log(3)} \Leftrightarrow x = 2$;

x) $6 \cdot 2^x = 13.5 \cdot 3^x \Leftrightarrow \frac{6}{13.5} = \frac{3^x}{2^x} \Leftrightarrow \frac{4}{9} = 1.5^x = (\frac{3}{2})^x \Leftrightarrow x = \frac{\log(\frac{4}{9})}{\log(1.5)} \Leftrightarrow x = -2$;

y) $12 \cdot 2^{2x} = 3^{x+2} \Leftrightarrow \frac{12}{9} = \frac{3^x}{4^x} \Leftrightarrow \frac{4}{3} = (\frac{3}{4})^x \Leftrightarrow x = -1$;

z) $2^{2x-4} = 3^{2-x} \Leftrightarrow \frac{1}{16} \cdot 4^x = 9 \cdot (\frac{1}{3})^x \Leftrightarrow \frac{1}{144} = (\frac{1}{12})^x \Leftrightarrow x = 2$;

Aufg. 39/108: $b^x = a \Leftrightarrow x = \log_b(a)$; $2^x = 0.125 \Leftrightarrow x = \log_2(0.125) \Leftrightarrow x = \frac{\log(0.125)}{\log(2)} = -3$; $\log_b(a)$ kann nicht im GTR eingetippt werden (im WTR aber schon). Die Schreibweise $\log_a(b)$ wird oft (aber eben nicht von mir) verwendet. a) $x = \log_8(16) = \frac{\log(16)}{\log(8)} = \frac{4}{3}$; b) $x = \log_{81}(1/9) = \frac{\log(1/9)}{\log(81)} = \frac{-1}{2}$;

c) $x = \log_{100}(100000) = \frac{\log(100000)}{\log(100)} = \frac{5}{2}$; d) Weil wir im Zehnersystem rechnen.

e) Zeigen Sie <u>indirekt</u> ... Seien $p \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}$. $x = \log_2(3) \overset{2^{\cdot}}{\Longleftrightarrow} 2^x = 3$. Annahme: $x = \log_2(3) \in \mathbb{Q}$ oder $2^{\frac{p}{q}} = 3 \overset{\text{hoch } q}{\Longleftrightarrow} 2^p = 3^q \Leftrightarrow p = q = 0$ ↯, weil 2 und 3 teilerfremd sind .

Aufg. 40/109: a) $\log(2) \approx 0,30103$, $\log(5) \approx 0,69897$, $\log(10) = 1$; $\log(2) + \log(5) = \log(10)$; für $a, b > 0$ gilt $\log(a) + \log(b) = \log(a \cdot b)$. (auswendig). Beweis (durch exponieren):

$$\begin{array}{lllll} & \log(a) + \log(b) & = & \log(a \cdot b) & |10^{\cdot} \\ \Leftrightarrow & 10^{\log(a)+\log(b)} & = & 10^{\log(a \cdot b)} & \text{(exponiert)} \\ \Leftrightarrow & 10^{\log(a)} \cdot 10^{\log(b)} & = & a \cdot b & \text{(1. Potenzgesetz und } 10^{\log(a)} = a) \\ \Leftrightarrow & a \cdot b & = & a \cdot b & \text{qed} \end{array}$$

b) $\log(\frac{a}{b}) = \log(a) - \log(b)$ und $\log(\frac{1}{b}) = -\log(b)$.

c) $\log(5) \approx 0.69897$, $\log(25) \approx 1.39794$, $\log(125) \approx 2.09691$, $\log(625) \approx 2.79588$, $\log(5^b) = b \cdot \log(5)$, $\log(a^b) = b \cdot \log(a)$ (für $a; b > 0$; auswendig). Beweis (durch exponieren):

$$\begin{array}{lllll} & \log(a^b) & = & b \cdot \log(a) & |10^{\cdot} \\ \Leftrightarrow & 10^{\log(a^b)} & = & 10^{\log(a) \cdot b} & \text{(exponiert)} \\ \Leftrightarrow & a^b & = & \left(10^{\log(a)}\right)^b & \text{(3. Potenzgesetz und } 10^{\log(a)} = a) \\ \Leftrightarrow & a^b & = & a^b & \text{qed} \end{array}$$

d) $\log(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \cdot \log(a)$

Aufg. 40/110:

Seien $a, b > 0$	Nr	Gesetz	assoziiertes Gesetz
	1 LG	$\log(a \cdot b) = \underline{\log(a) + \log(b)}$	$\underline{\log(\frac{a}{b}) = \log(a) - \log(b)}$
	2 LG	$\log(a^n) = \underline{n \cdot \log(a)}$	$\underline{\text{(eventuell) } \sqrt[n]{a} = \frac{\log(a)}{n}}$
	3 LG	$\log(a + b) = \underline{\text{nicht veränderbar}}$	$\{\log(a - b)$ auch nicht $\}$

Aufg. 40/111: a) $\log(x^2) - \log(x) = 2\log(x) - \log(x) = \log(x)$;

b) $\log(x^4) - 3\log(\frac{1}{x}) = 4\log(x) + 3\log(x) = 7\log(x)$;

c) $\log(\frac{2}{x^2}) - \log(\frac{4}{x^4}) - \log(2x) = \log(\frac{2}{x^2} \cdot \frac{x^4}{4} : (2x)) = \log(\frac{x}{4})$;

d) $\log(\sqrt{x}) - \log(\frac{10}{\sqrt{x}}) - \log(\frac{100}{x}) = 0.5\log(x) + 0.5\log(x) - \log(10) - \log(100) + \log(x) = 2\log(x) - 3$;

e) $\frac{\log(x^3)}{\log(\sqrt{x})} = \frac{3\log(x)}{\frac{1}{2}\log(x)} = 6$; f) $\log(x-y) - \log(x^2 - y^2) = \log(x-y) - \log((x-y)(x+y)) = -\log(x+y)$;

g) $\log((x+y)^3) - 2\log(x^2 + 2xy + y^2) = 3\log((x+y)) - 2\log((x+y)^2) = -\log(x+y)$;

h) $\log_{x^2}(\sqrt{x}) - \log_{x^4}(\sqrt[3]{x^6}) = \frac{\log(\sqrt{x})}{\log(x^2)} - \frac{\log(\sqrt[3]{x^6})}{\log(x^4)} = \frac{0.5\log(x}{2\log(x)} - \frac{2\log(x)}{4\log(x)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Aufg. 40/112: a) $\log(\frac{3x^2}{10y^3}) = \log(3) + \log(x^2) - \log(10) - \log(y^3) = \log(3) + 2\log(x) - 1 - 3\log(y)$;

b) $\log(\frac{1}{\sqrt{10y^3}}) = \log(1) - \log(\sqrt{10}) - \log(\sqrt{y^3}) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\log(y)$;

c) $\log(10y^2 \cdot \frac{3x^4}{\sqrt{y}}) = \log(10) + \log(y^2) + \log(3x^4) - \log(\sqrt{y}) = 1 + 2\log(y) + \log(3) + 4\log(x) - \frac{1}{2}\log(y) = 1 + 1.5\log(y) + \log(3) + 4\log(x)$;

d) $\log(\sqrt[3]{\frac{5x^3}{2y^4}}) = \frac{1}{3}(\log(5x^3) - \log(2y^4)) = \frac{\log(5)+3\log(x)}{3} - \frac{\log(2)+4\log(y)}{3}$;

e) $\log(\frac{x-y}{\sqrt{x^2-y^2}}) = \log(x-y) - \frac{1}{2}\log((x+y)\cdot(x-y)) = \frac{1}{2}\log(x-y) - \frac{1}{2}\log(x+y)$;

f) $(x-y)\log(10) + \log(\sqrt{x-y}) = x - y + \frac{1}{2}\log(x-y)$;

g) $\log(\frac{3^{10}x^3}{\sqrt{10^3}y}) = 10\log(3) + 3\log(x) - \frac{1}{2}\log(1000) - \log(y) = 10\log(3) + 3\log(x) - \frac{3}{2} - \log(y)$;

Aufg. 40/113: a) $\log(x^3) - \log(2x) - \log(3x) = 3\log(x) - \log(x) - \log(x) - \log(2) - \log(3)$
$= \log(x) - \log(6)$;

b) $\log(xy) - 3\log(xy^2) + 2\log(x^2y) = \log(x) - 3\log(x) + 4\log(x) + \log(y) - 6\log(y) + 2\log(y)$
$= 2\log(x) - 3\log(y)$;

c) $\log(\sqrt{xy}) + 2\log(xy^2) - 3\log(\sqrt{x^2y}) = \frac{1}{2}\log(x) + 2\log(x) - 3\log(x) + \frac{1}{2}\log(y) + 4\log(y) - \frac{3}{2}\log(y)$
$= -\frac{1}{2}\log(x) + 3\log(y)$;

d) $\log(\frac{1}{xy}) - \log(\sqrt{\frac{x}{y}}) + \log(\frac{2}{xy}) - \log(\sqrt{\frac{y^3}{x}}) - \log(\frac{3x}{y^3}) = -\log(x) - \log(y) + \frac{1}{2}\log(y) - \frac{1}{2}\log(x) + \log(2) - \log(x) - \log(y) - \frac{3}{2}\log(y) + \frac{1}{2}\log(x) - \log(3) - \log(x) + 3\log(y) \quad = -3\log(x) + \log(2) - \log(3)$;

Aufg. 40/114: a) $x^4 - 3x^2 + 2 \Leftrightarrow w^2 - 3w + 2$ (mit $x^2 = w$) $\Leftrightarrow w_1 = 1$ oder $w_2 = 2 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1, x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$. Es handelt ich um eine biquadratische Gleichung, weil nur Potenzen mit geraden Exponenten vorkommen.

b) Sie erinnert an eine quadratische Gleichung. Lösen Sie die Gleichung durch geeignete Substitution.
$z = 2^x$: $(2^x)^2 - 3\cdot 2^x + 2 = 0 \Leftrightarrow z^2 - 3\cdot z + 2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 1$ und $z_2 = 2$;
Rücksubstitution: $2^{x_1} = z_1 = 1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\log(1)}{\log(2)} = 0$ und $2^{x_2} = z_2 = 2 \Leftrightarrow x_2 = \frac{\log(2)}{\log(2)} = 1$;

c) $w^2 - 5w + 4 = 0$ $(w = 2^x)$ $\Leftrightarrow w_1 = 1, w_2 = 4 \Leftrightarrow 2^{x_1} = 1, 2^{x_2} = 4 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\log(1)}{\log(2)} = 0, x_2 = 2$;

d) $3w^2 - 28w + 9 = 0$ $(w = 3^x)$ $\Leftrightarrow w_1 = \frac{1}{3}, w_2 = 9 \Leftrightarrow 3^{x_1} = \frac{1}{3}, 3^{x_2} = 9 \Leftrightarrow x_1 = -1, x_2 = 2$;

e) $2w^2 - 5w + 2 = 0$ $(w = 2^{-x})$ $\Leftrightarrow w_1 = \frac{1}{2}, w_2 = 2 \Leftrightarrow -x_1 = \frac{\log(\frac{1}{2})}{\log(2)}, -x_2 = \frac{\log(2)}{\log(2)} \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 1$;

f) $w^2 - 8w = 0$ $(w = 4^x)$ $\Leftrightarrow w_1 = 0, w_2 = 8 \Leftrightarrow 4^{x_1} = 0, 4^{x_2} = 8 \Leftrightarrow x_1$ geht nicht, $x_2 = 1.5$;

g) $x = 3$ ($z = -2$ würde einen negativen Logarithmus erzeugen); h) $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$;

i) $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ (beachten Sie hier: $4^x = (2^x)^2$;

j) $4^{2x} - 3 \cdot 4^x + 2 = 0 \Leftrightarrow w^2 - 3w + 2 = 0 \;\; (4^x = w) \;\; \Leftrightarrow w_1 = 1, w_2 = 2 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}$;

k) $0.5^{2x} - 12 \cdot 0.5^x + 32 = 0 \Leftrightarrow w^2 - 12w + 32 = 0 \;\; (0.5^x = w) \;\; \Leftrightarrow w_1 = 4, w_2 = 8$

$\Leftrightarrow x_1 = -2, x_2 = -3$;

L) $0.1^{2x} - 10.1 \cdot 0.1^x + 1 = 0 \Leftrightarrow w^2 - 10.1w + 1 = 0 \; (0.1^x = w) \;\; \Leftrightarrow w_1 = 10, w_2 = 0.1 \Leftrightarrow x_{1,2} = \mp 1$;

m) $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$, ($z = 0$ ergibt keinen Beitrag);

n) $5^{3x} - 130 \cdot 5^{2x} + 625 \cdot 5^x = 0$ mit $(5^x = w) \;\; \Leftrightarrow w^3 - 130 \cdot w^2 + 625w = 0 \;\; \Leftrightarrow w \cdot (w^2 - 130 \cdot w + 625) = 0$
Satz vom Nullprodukt: $w_1 = 0$ oder $w^2 - 130 \cdot w + 625 = 0$ also $w_2 = 5, w_3 = 125$;
RS: $w_1 : 5^x = 0$ kein Beitrag; $\quad w_2 : 5^x = 5 \Leftrightarrow x_2 = 1$; $\quad w_3 : 5^x = 125 \Leftrightarrow x_3 = 3$; $\qquad \Rightarrow \mathbb{L} = \{1; 3\}$.

o) $6^{3x+1} - 1297 \cdot 6^{2x} + 6^{x+3} = 0 | : 6^x \neq 0 \;\; \Leftrightarrow 6 \cdot 6^{2x} - 1297 \cdot 6^x + 216 = 0 \;\; (6^x = w) \;\; \Leftrightarrow$
$6 \cdot w^2 - 1297 \cdot w + 216 = 0 \;\; \Leftrightarrow w_1 = \frac{1}{6}, w_2 = 216 \;\; \Leftrightarrow x_1 = -1; x_2 = 3$;

p) $2^x - 3 + \frac{2}{2^x} = 0 \;\; (w = 2^x) \;\; \Leftrightarrow w - 3 + \frac{2}{w} = 0 | \cdot w \;\; \Leftrightarrow w^2 - 3w + 2 = 0 \;\; \Leftrightarrow w_1 = 1, w_2 = 2$
$\Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 1$; **q)** $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ (beachten Sie hier: $3^{-x} = \frac{1}{3^x}$;

r) $4^x - 4^{-x} = 0 \;\; (w = 4^x) \;\; \Leftrightarrow w - \frac{1}{w} = 0 \,|\cdot w \;\; \Leftrightarrow w^2 - 1 = 0 \;\; \Leftrightarrow w_1 = 0, w_2 = 1 \Leftrightarrow x_2 = 0$;

s) $x = \frac{1}{2}$, ($z = -\sqrt{2}$ ohne Beitrag); **t)** $0.5^x + 0.5^{-x-1} = 4.5 \;\; \Leftrightarrow$
$0.5^x + 2 \cdot 0.5^{-x} = 4.5$ mit $w = 0.5^x \Leftrightarrow w + \frac{2}{w} - 4.5 = 0 \;\; \Leftrightarrow w_1 = 4, w_2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_1 = 2, x_2 = -1$,

u) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x} - 28\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{3x} - \frac{28}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} + 3\left(\frac{1}{3}\right)^x = 0 \Leftrightarrow (w = (\frac{1}{3})^x) \; w^3 - \frac{28}{3}w^2 + 3w = 0$
$\Leftrightarrow w_1 = 0, w_2 = \frac{1}{3}, w_3 = 9 \Leftrightarrow x_1$ geht nicht, $x_2 = -1, x_3 = 2$,

v) $3^x + 26 = 3^{1-x} | - 3^{1-x}, \cdot 3^x \;\; \Leftrightarrow 3^{2x} + 26 \cdot 3^x - 3 = 0 \; (w = 3^x) \;\; \Leftrightarrow w^2 + 26w - 3 = 0$
$\Leftrightarrow \;\; w_1 = \frac{1}{9}, w_2 = -3$ (ohne Beitrag) $\;\Leftrightarrow\;\; x_1 = -2$;

w) $4^{x-1} + 4^{3-x} = 10 | - 10, \cdot 4^{x+1} \;\; \Leftrightarrow 4^{2x} - 40 \cdot 4^x + 4^4 = 0 \; (4^x = w) \;\; \Leftrightarrow w^2 - 40 \cdot w + 256 = 0$
$\Leftrightarrow w_1 = 8, w_2 = 32 \;\; \Leftrightarrow x_1 = 1.5, x_2 = 2.5$;

Aufg. 40/115: Die Lösungsmenge Klasse 11 (also mit e^x statt 2^x) ist notiert mit $\mathbb{L}_{11}$, die Rechnung geht analog.

a) Substitution $2^{2x} = w$ und damit $2^{4x} = w^2$: $2^{4x} - 11 \cdot 2^{2x} + 18 = 0$
$\Leftrightarrow w^2 - 11w + 18 = 0 \Leftrightarrow w_1 = 2$ oder $w_2 = 9$; Rücksubstitution: $\Leftrightarrow 2^{2x} = 2$ oder $2^{2x} = 9$
$\Leftrightarrow x_1 = 0.5$ oder $x = \frac{\log(9)}{2\log(2)}$; $\Leftrightarrow \mathbb{L} = \{0.5; \frac{\log(3)}{\log(2)}\}$; $\qquad \mathbb{L}_{11} = \{\ln(2), \ln(3)\}$.

b) x ausklammern, dann Substitution $x^2 = w$ und damit $x^4 = w^2$: $x^5 - 3x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x^4 - 3x^2 - 4) = 0$, mit dem Satz vom Nullprodukt ist $x_1 = 0$, $x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow w^2 - 3w - 4 = 0 \Leftrightarrow w_1 = 4; w_2 = -1$;
Rücksubstitution: $x^2 = 4$
$\Leftrightarrow x_{2,3} = \pm 2$; ($x^2 = -1$ keine Lösung) $\Leftrightarrow \mathbb{L} = \{-2; 0; 2\}$;

c) Substitution $2^x = w$ und damit $2^{2x} = w^2$: $2^x - 2 - \frac{15}{2^x} = 0 \Leftrightarrow w - 2 - \frac{15}{w} = 0 \Leftrightarrow w^2 - 2w - 15 = 0$
$\Leftrightarrow w_1 = 5$ oder $w_2 = -3$; Rücksubstitution: $\Leftrightarrow 2^x = 5$ oder $2^x = -3$
$\Leftrightarrow x = \frac{\log(5)}{\log(2)}$ ($2^x = -3$ hat keine Lösung); $\Leftrightarrow \mathbb{L} = \{\frac{\log(5)}{\log(2)}\}$; $\qquad \mathbb{L}_{11} = \{\ln(5)\}$.

d) Substitution $x^2 = w$ und damit $x^4 = w^2$: $\frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^2} = 1 \Leftrightarrow 6 + x^2 = x^4 \Leftrightarrow 6 + w = w^2 \Leftrightarrow w^2 - w - 6 = 0$
$\Leftrightarrow w_1 = 3$ oder $w_2 = -2$; Rücksubstitution: $\Leftrightarrow x^2 = 3$ oder $x^2 = -2$
$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$ ($x^2 = -2$ hat keine Lösung); $\Leftrightarrow \mathbb{L} = \{\pm\sqrt{3}\}$;

e) $(2x^2 - 8) \cdot (2^{2x} - 6) = 0$ Satz vom Nullprodukt: $\Leftrightarrow (2x^2 - 8 = 0)$ oder $(2^{2x} - 6 = 0) \Leftrightarrow x^2 = 4$ oder $2x = \frac{\log(6)}{\log(2)} \Leftrightarrow x = \pm 2$ oder $x = \frac{\log(6)}{2\log(2)} \Leftrightarrow \mathbb{L} = \{\pm 2; \frac{\log(6)}{2\log(2)}\}$; $\qquad \mathbb{L}_{11} = \{\pm 2, \frac{\ln(6)}{2}\}$.

f) $4 \cdot 2^{2x} + 6 \cdot 2^x = 4$; Substitution $2^x = w$ und damit $2^{2x} = w^2$: $4 \cdot 2^{2x} + 6 \cdot 2^x = 4 \Leftrightarrow 4 \cdot w^2 + 6 \cdot w - 4 = 0$
$\Leftrightarrow w_1 = 0.5$ oder $w_2 = -2$; Rücksubstitution: $\Leftrightarrow 2^x = 0.5$ oder $2^x = -2$
$\Leftrightarrow x = \frac{\log(0.5)}{\log(2)} = -1$ ($2^x = -2$ hat keine Lösung); $\Leftrightarrow \mathbb{L} = \{-1\}$; $\qquad \mathbb{L}_{11} = \{-\ln(2)\}$.

g) Substitution $2^x = w$: $2 \cdot 2^x - \frac{4}{2^x} = 0 \Leftrightarrow 2w - \frac{4}{w} = 0 \Leftrightarrow w^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow w_{1,2} = \pm\sqrt{8}$ Rücksubstitution: $\Leftrightarrow 2^x = \sqrt{8}$ oder $2^x = -\sqrt{8} \Leftrightarrow x = \frac{\log(\sqrt{8})}{\log(2)} = 1.5$ ($2^x = -\sqrt{8}$ hat keine Lösung); $\Leftrightarrow \mathbb{L} = \{1.5\}$; $\mathbb{L}_{11} = \{\ln(8)\}$.

h) Substitution $x^2 = w$ und damit $x^4 = w^2$: $x^4 = 4 + 3x^2 \Leftrightarrow w^2 - 3w - 4 = 0 \Leftrightarrow w_1 = 4$ oder $w_2 = -1$; Rücksubstitution: $\Leftrightarrow x^2 = 4$ oder $x^2 = -1$
$\Leftrightarrow x = \pm 2$ ($x^2 = -1$ hat keine Lösung); $\Leftrightarrow \mathbb{L} = \{-2; 2\}$;

i) SvN: $x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$; $2^{2x} - 5 = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} = 5 \Leftrightarrow 2x = \frac{\log(5)}{\log(2)} \Leftrightarrow$ $x_4 = \frac{\log(5)}{2 \cdot \log(2)} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}, \frac{\log(5)}{2 \cdot \log(2)}\} \quad \mathbb{L}_{11} = \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}, \frac{\ln(5)}{2}\}$.

j) Substitution: $w = 2^x$: $3 - w = \frac{2}{w} \Leftrightarrow 3w - w^2 = 2 \Leftrightarrow w^2 - 3w + 2 = 0$ (MNF) $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 8}}{2} \Rightarrow$ $w_1 = 1$, $w_2 = 2$, Rücksubstitution: $x_1 = \frac{\log(1)}{\log(2)} = 0$, $x_2 = \frac{\log(2)}{\log(2)} = 1 \Rightarrow \mathbb{L}\{0; 1\}$; $\quad \mathbb{L}_{11} = \{0, \ln(2)\}$.

k) $2^{4x} - 5 = 4 \cdot 2^{2x}$: Sei $w = 2^{2x} \Leftrightarrow w^2 - 4 \cdot w - 5 = 0 \Leftrightarrow w_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 + 4 \cdot 5}}{2} \quad = \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

Rücksubstitution: $2^{2x} = 5 \Leftrightarrow x = \frac{\log(5)}{2 \cdot \log(2)}$, $2^{2x} = -1$ ↯ $\quad \Rightarrow \mathbb{L} = \{\frac{\log(5)}{2 \cdot \log(2)}\}$; $\quad \mathbb{L}_{11} = \{\frac{\ln(5)}{2}\}$.

L) $(x^2 + 8) \cdot (2^{x-1} - 1) = 0$ mit dem Satz vom Nullprodukt:
$x^2 + 8 \neq 0$; $2^{x-1} - 1 = 0 \overset{+1}{\Longleftrightarrow} 2^{x-1} = 1 \overset{\log}{\Longleftrightarrow} x - 1 = \frac{\log(1)}{\log(2)} = 0 \overset{+1}{\Longleftrightarrow} x = 1 \Rightarrow \mathbb{L} = \{1\}$.

Aufg. 41/116:

Technik = Exponieren; a) $x = 10^2 = 100$; b) $x = 10^0 = 1$; c) $x = 10^{\log(4)} = 4$;

d) $x = \frac{10^1}{2} = 5$; e) $x = 2 \cdot 10^3 = 2000$; f) $x = \frac{10^0 + 3}{4} = 1$; g) $2x + 6 = 100 \Leftrightarrow x = 47$;

h) $x^2 = 10^4 \Leftrightarrow x = \pm 100$; **Vorsicht:** die Formel $\log(x^2) = 2\log(x)$ ändert den Definitionsbereich, deshalb darf diese nur für $x > 0$ angewendet werden; Für $x < 0$ wäre $\log(x^2) = 2\log(-x)$!

i) $x^2 + 36 = 100 \Leftrightarrow x = \pm 8$; j) $x^2 - x + 4 = 10 \Leftrightarrow x = 3, x = -2$;

k) $\log(x^2 + 1.5x) = 0 \mid 10^{\cdot} \Leftrightarrow x^2 + 1.5x = 1 \Leftrightarrow x_1 = 0.5, x_2 = -2$;

l) $\log(x) + \log(x + 1.5) = \log(x \cdot (x + 1.5))$ (siehe Ag k)) aber nur $x = 0.5$ ist Lösung, denn eine Probe ist wegen der Anwendung des Gesetzes $\log(a) + \log(b) = \log(a \cdot b)$ obligatorisch;

m) $x^2 = \frac{100}{4} = 25 \Leftrightarrow x = +5$; $x = -5$ ist keine Lösung

n) $\log(x + 1) + \log(x - 2) = 1 \Rightarrow \log((x + 1) \cdot (x - 2)) = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 10 \Leftrightarrow x_1 = 4, x_2 = -3$; Probe ergibt nur $x = 4$ als Lösung; **o)** $x = 10$, nicht $x = -10.5$; **p)** $x = 1$.

q) Falls bei der Lösung einer Logarithmengleichung ein Logarithmengesetz eingesetzt wurde ist eine <u>Probe</u> <u>obligatorisch</u>. Im Zweifelsfalle <u>mache</u> die <u>Probe</u>.

Aufg. 41/117: a) **i)** $\log(x) - \log(x^2) = \log(x) - 2\log(x) = -\log(x)$,

ii) $\log(2x) - \log(x) = \log(2) + \log(x) - \log(x) = \log(2)$, **iii)** $\frac{\log(x^3)}{\log(\sqrt{x})} = \frac{3\log(x)}{0.5\log(x)} = 6$,

iv) $\log(100000) = \log(10^5) = 5 \cdot \log(10) = 5$; **v)** $10^{\log(3x)} = 3x$;

b) **i)** $9^x = 27 \Leftrightarrow x = \frac{\log(27)}{\log(9)} = \frac{\log(3^3)}{\log(3^2)} = \frac{3\log(3)}{2\log(3)} = \frac{3}{2}$;

ii) $x^{\frac{3}{2}} = 8 \Leftrightarrow x = 8^{\frac{2}{3}} = (8^{\frac{1}{3}})^2 = 2^2 = 4$;

iii) $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$ substituiert mit $3^x = w$, $w^2 - 4w + 3 = 0 \Leftrightarrow w_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \Leftrightarrow w_1 = 1, w_2 = 3$
Rücksubstitution $3^x = 1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\log(1)}{\log(3)} = 0$, $3^x = 3 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\log(3)}{\log(3)} = 1 \Rightarrow \mathbb{L} = \{0; 1\}$.
iv) $\log(x) = 3 \Leftrightarrow x = 10^3 = 1000$;

Aufg. 41/118:

a) $7:3=\underline{2}$ Rest $\underline{1}$; **b)** 7 div 3 = $\underline{2}$; 7 mod 3 = $\underline{1}$. **c) i)** 10 div 3 = 3, 10 mod 3 = 1;
ii) 20 div 7 = 2, 20 mod 7 = 6; **iii)** 60 div 6 = 10, 60 mod 6 = 0; **iv)** 60 div 24 = 2, 60 mod 24 = 12;
v) 123 div 10 = 12, 123 mod 10 = 3; **vi)** 123 div 100 = 1, 123 mod 23;
d) 6 ist durch 3 teilbar, weil $\underline{6}$ mod $\underline{3} = \underline{0}$. a ist durch b teilbar $\Leftrightarrow$ $\underline{a \bmod b = 0}$.
e) 76 mod 10 = $\underline{6}$. a mod 10 ergibt die <u>letzte</u> <u>Stelle</u> von a. **f)** $a = (a \operatorname{div} b)\cdot b + a \bmod b$.

g) Beispiel: $13 \bmod 3 = 1 \neq 5 \bmod 3 + 8 \bmod 3 = 4$, aber $13 \bmod 3 = (5 \bmod 3 + 8 \bmod 3) \bmod 3$.

Verallgemeinert: $(a+b) \bmod n = (a \bmod n + b \bmod n) \bmod n$.

Beweis: Sei $a \bmod n = a - k_a\cdot n$ und $b \bmod n = b - k_b \cdot n$, dann ist

$a \bmod n + b \bmod n = a - k_a\cdot n + b - k_b\cdot n = a + b - (k_a + k_b)\cdot n \overset{\text{mod } n}{\Longleftrightarrow}$

$(a \bmod n + b \bmod n) \bmod n = (a + b - (k_a + k_b)\cdot n) \bmod n = (a+b) \bmod n$ (qed)

$'-'$ geht analog;

$a \bmod n \cdot b \bmod n = (a - k_a\cdot n)\cdot(b - k_b\cdot n) = a\cdot b - a\cdot k_b\cdot n - b\cdot k_a\cdot n + k_a\cdot k_b\cdot n^2 \overset{\text{mod } n}{\Longleftrightarrow}$

$(a \bmod n \cdot b \bmod n) \bmod n = (a\cdot b - a\cdot k_b\cdot n - b\cdot k_a\cdot n + k_a\cdot k_b\cdot n^2) \bmod n = (a\cdot b) \bmod n$ (qed)

g) Es soll der <u>ggT</u> der natürlichen Zahlen $a > b$ berechnet werden. Solange $a \bmod b \neq 0$ ist setze $a := a \bmod b$, und vertausche danach a und b. Das Ergebnis ist dann $\underline{b}$.

12 mod 8 = 4 $\to$ 8 mod 4 = 0 damit ist ggT(12;8)=4;

60 mod 27 = 6 $\to$ 27 mod 6 = 3 $\to$ 6 mod 3 = 0 damit ist ggT(60;27)=3;

48 mod 32 = 16 $\to$ 32 mod 16 = 0 damit ist ggT(48;32)=16;

139 mod 21 = 13 $\to$ 21 mod 13 = 8 $\to$ 13 mod 8 = 5 $\to$ 8 mod 5 = 3 $\to$ 5 mod 3 = 2

$\to$ 3 mod 2 = 1 $\to$ 2 mod 1 = 0 damit ist ggT(139;21)=1; (teilerfremd)

Aufg. 41/119: **a)** 0 Uhr, **b)** 2 Uhr, **c)** 16 Uhr, **d)** 12 Uhr, **e)** 8 Uhr, **f)** 4 Uhr, **g)** (Tipp: <u>modulo</u>) $(20+x)$ mod 24 Uhr. **h)** ... dann zeigt die Uhr x Stunden später die Zeit $\underline{(u+x) \bmod 24}$ Uhr.

Aufg. 41/120: $3\oplus 3 = 2$; $2 \oplus 2 = 0$.

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

c) In jeder zyklischen Gruppe gilt $a \oplus b = \underline{b} \oplus \underline{a}$, die Tabelle ist <u>symmetrisch</u> oder es gilt das <u>Kommutativ-</u>Gesetz.

d) Jede Zyklische Gruppe hat ein neutrales Element $\underline{0}$ mit der Eigenschaft $a \oplus \underline{0} = \underline{0}$.

e) (und auch in jeder Spalte) <u>genau</u> <u>ein</u> <u>Mal</u> vor, das heißt zu jedem $a \in G$ gibt es <u>genau</u> ein Element $\underline{-a}$ mit $a \oplus \underline{-a} = \underline{0}$. $\underline{-a}$ heißt **zu** a **inverses Element**.

f) In $\mathbb{Z}$ mod $4\mathbb{Z}$ gilt $1 \oplus \underline{3} = 0 \Rightarrow -1 = \underline{3}$; $-0 = 0$, $-2 = 2$ und $-3 = 1$ in $\mathbb{Z}$ mod $4\mathbb{Z}$.

g) $-a = \underline{n-a}$: $a \oplus (n-a) = n \bmod n = 0$.

Aufg. 42/121: **a)** kleinsche Vierergruppe $\to$ 10.8.3; **b)** keine Gruppe, NE=1 aber 0 hat kein Inverses;
c) $\mathbb{Z}$ mod $2\mathbb{Z}$ mit $x \to 0$, $y \to 1$; **d)** nicht kommutative Abbildungsgruppe $\to$ 10.8.4;
e) $(\mathbb{Z}, +)$ Gruppe; **f)** $(\mathbb{N}_0, +)$ keine Gruppe, Inverses fehlt; **g)** $(\mathbb{R}, +)$ Gruppe;

Aufg. 42/122: Der Wahrheitsgehalt einer Aussage kann w<u>ahr</u>, f<u>alsch</u> oder nicht entscheidbar sein.

a) A: '9 ist durch 3 teilbar' (wahr);	$\overline{A}$ '9 ist nicht durch 3 teilbar' (falsch);
B: '9 ist eine Quadratzahl' (wahr);	$\overline{B}$ '9 ist nicht keine Quadratzahl' (falsch);
C: 'alle Autos sind grün' (falsch);	$\overline{C}$ 'nicht alle Autos sind grün' (wahr);
D: 'gestern war Dienstag' (je nachdem);	$\overline{D}$ gestern war Sa, So, Mo, Mi, Do oder Fr (je nachdem);
M: 'heute ist Mi' (je nachdem);	$\overline{M}$ heute ist Sa, So, Mo, Di, Do oder Fr (je nachdem);

M heute ist Mittwoch, N: 'Die Straße ist naß',

b) w = wahr; f= falsch; $A \wedge B \to$ w, $\overline{A} \wedge B \to$ f, $A \wedge \overline{B} \to$ f, $\overline{A} \wedge \overline{B} \to$ f,
$A \vee B \to$ w, $\overline{A} \vee B \to$ w, $A \vee \overline{B} \to$ w und $\overline{A} \vee \overline{B} \to$ f.

d) $D \Leftrightarrow M$.

A	B	$A \vee \overline{A}$	$A \vee B$	$B \Rightarrow A$	A	$A \Rightarrow B$	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \wedge B$
w	w	w	w	w	w	w	w	w	w
w	f	w	w	w	w	f	f	f	f
f	w	w	w	f	f	w	w	f	f
f	f	w	f	w	f	w	f	w	f
DNF			$A \vee B$	$\overline{A} \vee B$		$A \vee \overline{B}$			$A \wedge B$

A	B	$\overline{A \wedge B}$	$A \Leftrightarrow \overline{B}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \wedge B$	$\overline{A}$	$A \wedge \overline{B}$	$\overline{A \vee B}$	$A \wedge \overline{A}$
w	w	f	f	f	f	f	f	f	f
w	f	w	w	w	w	f	f	f	f
f	w	w	w	f	f	w	w	f	f
f	f	w	f	w	f	w	f	w	f
DNF		$\overline{A} \vee \overline{B}$			$\overline{A} \wedge B$		$A \wedge \overline{B}$	$\overline{A} \wedge \overline{B}$	

15.3 LöVo zu Kapitel 3.1: Komplexe Zahlen (UE M$+_1$)

Seite 497-502

Aufg. 49/123: a) Wir haben uns damals durch die Einführung eines neuen merkwürdigen Symbols $\sqrt{}$ und durch eine <u>Erweiterung</u> des Zahlenbereichs der <u>rationalen</u> Zahlen zum Zahlenbereich der <u>reellen</u> Zahlen. $x^2 \geq 0 > -1$ damit ist $x^2 = -1$ nicht lösbar.

b) Wir definiernen ein neues merkwürdiges Symbol i mit $i^2 = -1$.

c) $i + i = 2i$, $i + 2i = 3i$, $3i + 5i + 1 = 8i + 1$, $6i - 3 + 7i + 4 = 13i + 1$, $3(4i - 2) = 12i - 6$, $4i(2i - 3) = -8 - 12i$, $(2 - i) \cdot (4i + 2) = 8i + 4 - 4i^2 - 2i = 8 + 6i$;

d) Eine komplexe Zahl ist von der Form $z =\underline{a + bi}$ wobei a und b <u>reelle (!)</u> Zahlen sind. a heißt Realteil von z: $a = Re(z)$, $b = Im(z)$ heißt <u>Imaginärteil</u>.

e) $\bar{z} = a - ib$ heißt <u>konjugiert</u>komplexe Zahl. $z + \bar{z} = 2a \in \mathbb{R}$ und $z - \bar{z} = 2b \in \mathbb{R}$. (Abb. 257)

$z + \bar{z} = a + bi + a - bi = 2a = 2 \cdot Re(z)$ und $z - \bar{z} = a + bi - (a - bi) = 2bi = 2i \cdot Im(z)$.

Aufg. 49/124: a) $z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)$.

b) Die Addition zweier komplexer Zahlen ist <u>komponentenweise</u> weise definiert. Das Phänomen kennen wir von Vektoren.

c) Eine komplexe Zahl kann als <u>Vektor</u> (Punkt) in der Gaußschen Zahlen<u>ebene</u> gedeutet werden. Dabei entspricht der Realteil der Abszisse (<u>$x-$Wert</u>) und der Imaginärteil der <u>Ordinate</u> (<u>$y-$Wert</u>) des Punktes z.

Aufg. 50/125: a) $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + i(a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)$.

b) $a^2 + b^2 = (a + bi) \cdot (a - bi)$ Tipp: <u>konjugiertkomplexe Zahl</u>.

c) a^2+b^2 erinnert an den Satz von Pythagoras und an das Quadrat der Länge des Vektors $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Definieren Sie damit den Betrag einer komplexen Zahl z: $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(a+ib)(a-ib)}$.

d) i) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; ii) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+1}\cdot\sqrt{a^2+1}} = \frac{\sqrt{a^3+a}}{a^2+1}$;

iii) $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$; iv) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \frac{\sqrt{a^2}-\sqrt{ab}}{a-b}$;

e) Tipp: 4. Binomische Formel. $\frac{(a_1+ib_1)(a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)(a_2-ib_2)} = \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+i(a_2b_1-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + i\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}$.

f) $\frac{(1-7i)\cdot(3-4i)}{(3+4i)\cdot(3-4i)} = \frac{3-4i-21i+28i^2}{3^2-(4i)^2} = \frac{3-25i-28}{3^2+16} = \frac{-25-25i}{25} = -1-i$, $\mathrm{Im}(-1-i) = -1$.

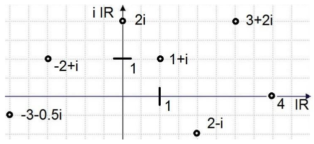


Abb. 257 Komplexe Zahlen

ii) $\frac{2+2i}{1-3i} = \frac{(2+2i)\cdot(1+3i)}{(1-3i)\cdot(1+3i)} = \frac{2+2i+6i+6i^2}{1-9i^2} = \frac{-4+8i}{10}$; $\mathrm{Im}(\frac{-4+8i}{10}) = 0.8$.

iii) $\frac{1-2i}{1+2i} = \frac{(1-2i)\cdot(1-2i)}{(1+2i)\cdot(1-2i)} = \frac{1-2i-2i+4i^2}{1-4i^2} = \frac{-3-4i}{5}$; $\mathrm{Im}(\frac{-3-4i}{5}) = -0.8$.

iv) $\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)} = \frac{1-i-i+i^2}{1-i^2} = \frac{-2i}{2}$; $\mathrm{Im}(-i) = -1$.

v) $\frac{13+26i}{5-12i} = \frac{(13+26i)\cdot(5+12i)}{(5-12i)\cdot(5+12i)} = \frac{65+130i+156i+312i^2}{25-144i^2} = \frac{-247+286i}{169}$; $\mathrm{Im}(\frac{-247+286i}{169}) = \frac{22}{13}$ (Imaginärteil).

Aufg. 50/126: $(e^x)^{(4)} = e^x$, $(\sin(x))^{(4)} = \sin(x)$, $(\cos(x))^{(4)} = \cos(x)$, Wir vermuten, dass $e^x, \sin(x)$ und $\cos(x)$ verwandt sind. b) Diese Verwandschaft ist: $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$;

c) i) $e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$; ii) $e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{i}{2}\sqrt{2}$;
iii) $2\cdot e^{i\frac{\pi}{3}} = 2(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})) = 1 + i\sqrt{3}$; iv) $e^{1+i\pi} = e^1\cdot e^{i\pi} = -e$;

v) $e^{\ln(4)+i\frac{\pi}{3}} = e^{\ln(4)}\cdot e^{i\frac{\pi}{3}} = 4\cdot(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\cdot\sin(\frac{\pi}{3})) = 4\cdot(0.5 + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2 + i2\sqrt{3}$;

d) $\frac{\pi}{6}$ entspricht 30°; Bei $z = e^{i\varphi}$ entspricht φ dem Winkel im Bogenmaß zwischen dem Vektor $e^{i\varphi}$ und dem Vektor $\binom{1}{0}$ der x-Achse (Abb. 258). e) $|e^{i\varphi}| = \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$; $|r\cdot e^{i\varphi}| = r$.

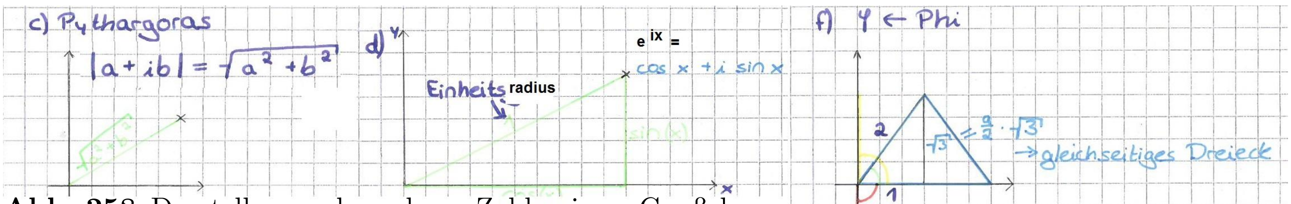
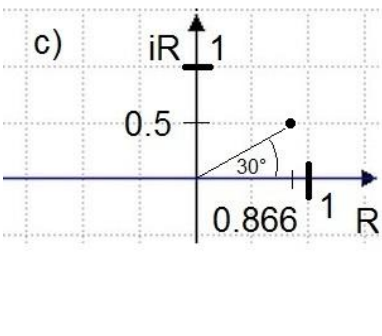


Abb. 258 Darstellungen komplexer Zahlen in er Gaußebene

f) $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, $2+i2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $3+4i \approx 5e^{i0.9273}$, $1-i = \sqrt{2}e^{i\frac{-\pi}{4}}$, $-1-i = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$, $-2+2i\sqrt{3} = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$; $i = 1e^{i\frac{\pi}{2}}$, $-3i = 3e^{i\frac{-\pi}{2}}$, $-6 = 6e^{i\pi}$;

Problem: $\tan(x)$ hat Periode π und nicht $2\cdot\pi$ (siehe Aufgabe 280d).

g) Eine komplexe Zahl kann in kartesischen Koordinaten (Form: $z = a+ib$) oder in Polarkoordinaten (Form: $z = r\cdot e^{i\varphi}$) angegeben werden. $r = a^2+b^2$,



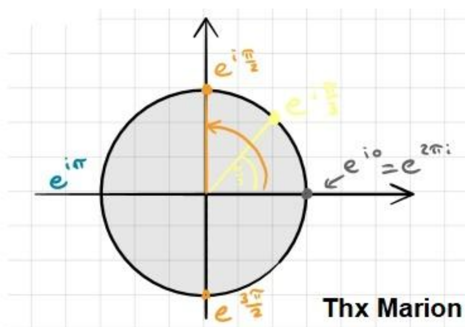


Abb. 259 Der komplexe Einheitskreis

$$\varphi = \begin{cases} \underline{\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)} & \text{falls } \underline{a > 0} \\ \underline{\frac{\pi}{2}} & \text{falls } \underline{a = 0, b > 0} \\ \underline{\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi} & \text{falls } \underline{a < 0} \\ \underline{\frac{-\pi}{2}} & \text{falls } \underline{a = 0, b < 0} \\ \underline{\text{beliebig}} & \text{falls } \underline{a = b = 0} \end{cases}$$

h) $e^{i\varphi}$ ($\varphi \in [0; 2\pi)$) beschreibt einen Kreis um den Ursprung mit Radius 1. i) Eulerformel

j) $z_1 = \sqrt{3} + i = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_2 = -\sqrt{8} + 2i\sqrt{2} = 4 \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z_3 = -2 - i\sqrt{12} = 4 \cdot e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

Aufg. 50/127: a) $e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} = (\cos(\frac{\pi}{3} + i\sin(\frac{\pi}{3})) \cdot (\cos(\frac{2\pi}{3} + i\sin(\frac{2\pi}{3})) = (0.5 + i\frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot (-0.5 + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = -0.25 + i^2(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = -1 = e^{i\pi}$.

b) $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$. Bei der Multiplikation komplexer Zahlen werden die Beträge multipliziert und die Winkel addiert.

c) Wir bevorzugen die Polarkoordinaten: $|z^n| = |(r \cdot e^{i\varphi})^n| = r^n \cdot |e^{in\varphi}| = r^n = |z|^n \to$ 14.6.1.
Bew mit karthesischen Koordinaten Abb. 499/260:

c) $|z^2| = |z|^2 \Leftrightarrow |(a+ib)^2| = (|a+ib|)^2 \Leftrightarrow |a^2 + 2abi + b^2 i^2| = (\sqrt{a^2+b^2})^2$

$\Leftrightarrow |a^2 + 2ab - b^2| = a^2 + b^2$ $\qquad \Leftrightarrow \sqrt{(a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2} = a^2 + b^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2} = a^2 + b^2$ $\qquad \Leftrightarrow \sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + b^4} = a^2 + b^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(a^2+b^2)^2} = a^2 + b^2$ $\qquad \Leftrightarrow a^2 + b^2 = a^2 + b^2$ q.e.d.

Abb. 260 Beweis mit karthesischen Koordinaten

d) Die Ergebnisse können individuell variieren.

Operation	plus	minus	mal	geteilt	Potenz	Wurzel	Logarithmus	'Vorstellung'
kartesische K.	gut	gut	mittel	mittel	schlecht	schlecht	schlecht	mittel
Vektor	gut	gut	schlecht	schlecht	schlecht	schlecht	schlecht	gut
Polark.	schlecht	schlecht	gut	gut	gut	gut	gut	schlecht

e) $\cosh(ix) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{\cos(x)+i\sin(x)+\cos(x)-i\sin(x)}{2} = \cos(x)$
mit $-iy = x$ ist $\cosh(ix) = \cosh(i(-iy)) = \cosh(y) = \cos(-iy) = \cos(iy)$ ($\cos(x)$ ist gerade)
also ist $\cos(ix) = \cosh(x)$.

$\sinh(ix) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2} = \frac{\cos(x)+i\sin(x)-(\cos(x)-i\sin(x))}{2} = i\sin(x)$
mit $-iy = x$ ist $\sinh(ix) = \sinh(i(-iy)) = \sinh(y) = i\sin(-iy) = -i\sin(iy)$ ($\sin(x)$ ist ungerade).
Mit $\frac{-1}{i} = \frac{-1 \cdot i}{i \cdot i} = \frac{-i}{-1} = i$ ist $\sin(ix) = i\sinh(x)$.

Aufg. 51/128: a) $\sin(x)$ ist $\underline{2\pi}$ periodisch, weil $\sin(x) = \sin(x + \underline{2\pi})$ gilt. Eine Funktion f heißt periodisch mit Periode $p \Leftrightarrow \underline{f(x+p) = f(x)}$.

b) $e^{2\pi i} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1 + i \cdot 0 = 1$, $e^{2k\pi i} = \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi) = 1$.

c) $e^{x+2\pi i} = \underline{e^x}$; damit ist $f(x) = e^x$ $\underline{2\pi i}$ periodisch. Die Darstellung komplexer Zahlen in Polarkoordinaten ist nicht eindeutig; in kartesischen Koordinaten hingegen schon.

d) $e^{2k\pi i} = 1$ und $e^x \neq 1$ für $x \neq 2k\pi$, damit gilt $z = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. $e^z = 2 \Leftrightarrow z = \ln(2) + 2k\pi i$

e) $\ln(r \cdot e^{i\varphi}) = \ln(r \cdot e^{i(\varphi+2k\pi)}) = \ln(r) + \ln(e^{i(\varphi+2k\pi)}) = \ln(r) + i\varphi + 2k\pi i, (k \in \mathbb{Z})$.

$\ln(-1+i) = \ln(\sqrt{2}) + i\frac{-\pi}{4} + 2k\pi i;$

f) Der komplexe Logarithmus ist mehrdeutig.

g) i) $e^z = e^1 = e^{1+2k\pi i} \Leftrightarrow z = 1 + 2k\pi i,$ ii) $r = 1, \varphi = 1, z = \ln(1) + 1 \cdot i + 2k\pi i = (2k\pi + 1)i,$

iii) $r = 3, \varphi = \pi, z = \ln(3) + i\pi + 2k\pi i,$ iv) $r = 1, \varphi = \frac{\pi}{2}, z = \ln(1) + i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i,$

v) $r = \sqrt{2}, \varphi = \frac{3\pi}{4}, z = \ln(\sqrt{2}) + i\frac{3\pi}{4} + 2k\pi i = 0.5\ln(2) + i(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi),$

vi) $r = 2, \varphi = -\frac{\pi}{3}, z = \ln(2) - i\frac{\pi}{3} + 2k\pi i,$ vii) $r = 2\sqrt{2}, \varphi = \frac{5\pi}{4}, z = 1.5\ln(2) + i(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi),$

viii) $r = 1, \varphi = -\pi, z = \pi \cdot i + 2k\pi i,$

ix) $r = 0, \varphi =$ undefiniert, genauso wie $\ln(0)$, damit ist $e^z = 0$ auch im Komplexen unlösbar.

$\overline{e^{2z}} = \frac{1}{e} \Leftrightarrow e^{2z} = \overline{\frac{1}{e}} = \frac{1}{e} = \frac{1}{e} \cdot e^0 \Leftrightarrow e^{2a+2ib} = e^{2a} \cdot e^{2ib} = e^{-1} \cdot e^{2k\pi i}$
$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{2};\ 2ib = 2k\pi i$ oder $b = k\pi \Leftrightarrow z = -1/2 + k\pi i.$

Aufg. 51/129: a) $2 = \underline{2 = 17 - 3 \cdot 5}$; b)$x^2 : (x-4) = x + 4$ Rest $r = 16$;

c) Sei $p(x) : (x - x_0) = q(x)$ Rest r. Es gilt $r = p(x)\underline{-(x - x_0) \cdot q(x)}$. Diese Gleichung gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, insbesondere für $x = \underline{x_0}$. Damit ist $r = p(\underline{x_0})$.

d) $p(x) : (x - x_0)$ hat Rest 0 $\Leftrightarrow p(x)$ ist durch $(x - x_0)$ teilbar $\Leftrightarrow p(x_0) = \underline{0}$.

e) ... ist $q(x) = p(x) : (x - x_0)$ vom Grad $\underline{n-1}$; bei jeder Division dieser Form verliert $p(x)$ einen Grad. Diese Division geht höchstens n mal.

f) Ein Polynom n-ten Graden hat höchstens n Nullstellen (Fundamentalsatz der Algebra).

Aufg. 51/130: a) $f(x) = x^2 - 4x + 4$ hat eine Nullstelle, sie zählt aber doppelt.

b) Ein Polynom n-ten Grades hat genau n (komplexe) Nullstellen entsprechend ihrer Vielfachheit oft gezählt (ohne Beweis).

c) $p_1(x) = (x+1) \cdot (x-2)^2 \cdot (x+i)^3 \cdot (x-3)^0$ hat Nullstelle $x_1 = -1$ mit Vielfachheit 1, $x_2 =$ mit Vielfachheit 2, $x_3 = -i$ mit Vielfachheit 3, $x_4 = 3$ ist keine Nullstelle.

$p_2(x) = (x^2+1) \cdot (x^2+4)^2 \cdot (x^2-1) \cdot (x^2-4)^3$
$= ((x+i) \cdot (x-i)) \cdot ((x+2i) \cdot (x-2i))^2 \cdot ((x-1) \cdot (x+1)) \cdot ((x+2) \cdot (x-2))^3,$
Nullstelle $x_1 = i$ hat Vielfachheit 1, $x_2 = -i$ hat Vielfachheit 1, $x_3 = 2i$ hat Vielfachheit 2, $x_4 = -2i$ hat Vielfachheit 2, $x_5 = 1$ hat Vielfachheit 1, $x_6 = -1$ hat Vielfachheit 1, $x_7 = 2$ hat Vielfachheit 3, $x_8 = 2$ hat Vielfachheit 3.

d) $z^4 = 1 \Leftrightarrow z = \pm 1;$ e) 4 Lösungen; Technik $e^{2k\pi i} = 1$ (siehe Logarithmen).

f) Für alle Lösungen der Gleichung $z^4 = 1$ schreiben wir $\bullet\!\sqrt[4]{1}$ (Schreibweise von Sd). Statt '1' schreiben wir nach Aufgabe 128: $1 = e^{\underline{2k\pi i}}\ k \in \mathbb{Z}$ und berechnen $(e^{\underline{2k\pi i}})^{\frac{1}{4}}$. Wir erwarten ∞ viele Werte: $(e^{2k\pi i})^{\frac{1}{4}} = e^{k\frac{\pi}{2}i}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Die Aufgabe heißt der Zauberlehrling, weil wir 4 Lösungen haben wollten und jetzt scheinbar ∞ viele (also viel zu viele) Lösungen haben. Die Darstellung in Polarkoordinaten ist eben nicht eindeutig.

$$
\text{g)}\quad
\begin{array}{llllll}
k=0: & e^{0\frac{\pi}{2}i} & = \cos(0) + i\sin(0) & = 1 & \\
k=1: & e^{1\frac{\pi}{2}i} & = \cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}) & = i & \text{neu} \\
k=2: & e^{2\frac{\pi}{2}i} & = \cos(\pi) + i\sin(\pi) & = -1 & \\
k=3: & e^{3\frac{\pi}{2}i} & = \cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2}) & = -i & \text{neu} \\
k=4: & e^{4\frac{\pi}{2}i} & = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) & = 1 & \text{wie } k=0 \\
k=5: & e^{5\frac{\pi}{2}i} & = \cos(\frac{5\pi}{2}) + i\sin(\frac{5\pi}{2}) & = i & \text{wie } k=1
\end{array}
$$

Ab $k = 4$ kommen keine neuen Ergbnisse mehr hinzu. Es gilt $z^4 = 1 \Leftrightarrow z = e^{k\frac{\pi}{2}i}$ $(k = 0, 1, 2, 3)$.

h) $z^n = z_0 = r \cdot e^{i\varphi} \Leftrightarrow z = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{\varphi+2k\pi}{n} i}$ $(k = 0, 1, .., n-1)$.

i) Die Formel von Moivre: Die Gleichung $z^n = r \cdot e^{i\varphi}$ hat genau $\underline{n}$ verschiedene Lösungen: $z = \underline{\sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{\varphi+2k\pi}{n} i}}$ $k = \underline{0, 1, .., n-1}$.

j) i) $z^2 = 9$: $z_0 = 9 \Leftrightarrow r = 9$, $\varphi = 0$; $z = \sqrt[2]{9} \cdot e^{i \cdot 2k\pi \cdot \frac{1}{2}} = 3 \cdot e^{i \cdot k\pi}$;
$k = 0$: $3 \cdot e^0 = 3$, $k = 1$: $3 \cdot e^{i\pi} = -3$;

ii) $z^2 = -4$: $z_0 = -4 \Leftrightarrow r = 4$, $\varphi = \pi$; $z = \sqrt[2]{4} \cdot e^{i \cdot (\pi+2k\pi) \cdot \frac{1}{2}} = 2 \cdot e^{i \cdot (\frac{\pi}{2}+k\pi)}$;
$k = 0$: $2 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$, $k = 1$: $2 \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2i$;

iii) $z^2 = 16i$: $z_0 = 16i \Leftrightarrow r = 16$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$; $z = \sqrt[2]{16} \cdot e^{i \cdot (\frac{\pi}{2}+2k\pi) \cdot \frac{1}{2}} = 4 \cdot e^{i \cdot (\frac{\pi}{4}+k\pi)}$;
$k = 0$: $4 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2} + i \cdot 2\sqrt{2}$, $k = 1$: $4 \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2\sqrt{2} - i \cdot 2\sqrt{2}$;

v) $z^3 = 27i$: $z_0 = 27i \Leftrightarrow r = 27$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$; $z = \sqrt[3]{27} \cdot e^{i \cdot (\frac{\pi}{2}+2k\pi) \cdot \frac{1}{3}} = 3 \cdot e^{i \cdot (\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3})}$;
$k = 0 : 3 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}}$, $k = 1 : 3 \cdot e^{i \cdot (\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})} = 3 \cdot e^{i \cdot \frac{5\pi}{6}}$, $k = 2 : 3 \cdot e^{i \cdot (\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3})} = 3 \cdot e^{i \cdot \frac{9\pi}{6}} = -3i$.

iv) $z^3 = 8i$: $z_0 = 8i \Leftrightarrow r = 8$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$; $z = \sqrt[3]{8} \cdot e^{i \cdot (\frac{\pi}{2}+2k\pi) \cdot \frac{1}{3}} = 2 \cdot e^{i \cdot (\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3})}$;
$k = 0 : 2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}}$, $k = 1 : 2 \cdot e^{i \cdot (\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})} = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{5\pi}{6}}$, $k = 2 : 2 \cdot e^{i \cdot (\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3})} = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{9\pi}{6}} = -2i$.

vi) $z^4 = -8 - 8i\sqrt{3}$: $z_0 = -8 - 8i\sqrt{3} \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{16} \cdot e^{i \cdot (\frac{4\pi}{3}+2k\pi) \cdot \frac{1}{4}} = 2 \cdot e^{i \cdot (\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2})}$; $k = 0$: $2 \cdot e^{i \cdot \frac{2\pi}{6}} = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}$,
$k = 1$: $2 \cdot e^{i \cdot \frac{5\pi}{6}}$, $k = 2$: $2 \cdot e^{i \cdot \frac{8\pi}{6}} = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{4\pi}{3}}$, $k = 3$: $2 \cdot e^{i \cdot \frac{11\pi}{6}}$.

k) Alle Zahlen $z^n = z_0 = r_0 \cdot e^{i\varphi_0}$ (n-te Einheitswurzeln) sind die Ecken eines regelmäßigen $\underline{n}$-Ecks um den Ursprung.

Aufg. 51/131: a) Berechnen Sie die Gleichungen mit Hilfe der Mitternachtsformel:

i) $z^2 + 1 = 0$: $z_{1,2} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2-4}}{2} = \pm\frac{\sqrt{-4}}{2} = \pm i$;

ii) $z^2 + 2z + 2 = 0$: $z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2-8}}{2} = -1 \pm i$;

iii) $z^2 - 4z + 8 = 0$: $z_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2-32}}{2} = 2 \pm 2i$;

iv) $z^2 - 6z + 13 = 0$: $z_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{6^2-4 \cdot 13}}{2} = 3 \pm 2i$;

v) $z^2 - 2az + a^2 + b^2 = 0$: $z_{1,2} = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2-4 \cdot (a^2+b^2)}}{2} = a \pm bi$;

b) Seien $b, c \in \mathbb{R}$, dann sind die Lösungen der Gleichung $z^2 - 2bz + b^2 + c = 0$ für $c \underline{\leq 0}$ (rein) reell und für $c \underline{< 0}$ paarweise konjugiertkomplex.

Aufg. 52/132: a) .. mit der MNF. $z_{1,2} = \frac{i+1 \pm \sqrt{(i+1)^2-4i}}{2} = \frac{i+1 \pm \sqrt{i^2+2i+1-4i}}{2} = \frac{i+1 \pm \sqrt{-2i}}{2}$;

b) Verwenden Sie die Formel von Moivre. $-2i = 2e^{\frac{-i\pi}{2}}$

$$\pm\sqrt[2]{-2i} = \sqrt{2}e^{i(k\pi - \frac{\pi}{4})} = \{\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\} = \{1 - i, -1 + i\};$$

c) $z_{1,2} = \frac{i+1 \pm \sqrt[2]{-2i}}{2} = \frac{i+1 \pm 1-i}{2} = \begin{cases} 1 \\ i \end{cases}$;

d) Die komplexe Mitternachtsformel lautet $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt[2]{b^2-4ac}}{2a}$ (bitte $b^2 - 4ac$ in Polarkoordinaten umrechnen)

e) i) $z^2 + (i-2)z - 2i = (z-2)(z+i) = 0 \Leftrightarrow z_1 = 2, z_2 = -i$,

ii) $z^2 + iz + 2 = (z+2i)(z-i) = 0 \Leftrightarrow z_1 = -2i, z_2 = i$,

iii) $z^2 + (7i-7)z - 25i = (z-3+4i)(z-4+3i) = 0 \Leftrightarrow z_1 = 3-4i, z_2 = 4-3i$.

15.4 LöVo zu Kapitel 4: Folgen und Reihen

15.4.1 LöVo zu Einheit 4.1 (exponentielles Wachstum UE 9_4) Seite 502-532

Aufg. 54/133: Lösungen ohne Verhältnisgleichung - die Ergebnisse sind doppelt unterstrichen:

a) $$\begin{array}{lcl} \text{1 kg} & \xrightarrow{\cdot 3} & \text{3 kg} \\ \text{1.99 €} & \xrightarrow{\cdot 3} & \underline{\underline{\text{5.97 €}}} \end{array}$$

b) $$\begin{array}{lcl} \text{1 Kiste} & \xrightarrow{\cdot 12} & \text{12 Kisten} \\ \text{8 kg} & \xrightarrow{\cdot 12} & \underline{\underline{\text{96 kg}}} \end{array}$$

b) 112:8 = $\underline{\underline{\text{14 (Stück)}}}$

c) $$\begin{array}{lcl} \text{5 kg} & \xrightarrow{:5} & \text{1 kg} \\ \text{7.25 €} & \xrightarrow{:5} & \underline{\underline{\text{1.45 €}}} \end{array}$$

d) $$\begin{array}{lclcl} \text{4 Tafeln} & \xrightarrow{:4} & \text{1 Tafel} & \xrightarrow{\cdot 3} & \text{3 Tafeln} \\ \text{3.20 €} & \xrightarrow{:4} & \text{0.80 €} & \xrightarrow{\cdot 3} & \underline{\underline{\text{2.4 €}}} \end{array}$$

e) $$\begin{array}{lclcl} \text{30 kg} & \xrightarrow{:20} & \text{1.5 kg} & \xrightarrow{\cdot 6} & \text{9 kg} \\ \text{20 l} & \xrightarrow{:20} & \text{1 l} & \xrightarrow{\cdot 6} & \underline{\underline{\text{6 l}}} \end{array}$$

f) $$\begin{array}{lclcl} \text{15 m} & \xrightarrow{:15} & \text{1 m} & \xrightarrow{\cdot 9} & \text{9 m} \\ \text{225 €} & \xrightarrow{:15} & \text{15 €} & \xrightarrow{\cdot 9} & \underline{\underline{\text{135 €}}} \end{array}$$

f)* $$\begin{array}{lclcl} \text{225 €} & \xrightarrow{:15} & \text{15 €} & \xrightarrow{\cdot 17} & \text{255 €} \\ \text{15 m} & \xrightarrow{:15} & \text{1 m} & \xrightarrow{\cdot 17} & \underline{\underline{\text{17 m}}} \end{array}$$

g) $$\begin{array}{lclcl} \text{8 l} & \xrightarrow{:8} & \text{1l} & \xrightarrow{\cdot 56} & \text{56l} \\ \text{100 km} & \xrightarrow{:8} & \text{12.5 km} & \xrightarrow{\cdot 56} & \underline{\underline{\text{700 km}}} \end{array}$$

g) $$\begin{array}{lclcl} \text{8 000 ml} & \xrightarrow{:100} & \text{80ml} & \xrightarrow{\cdot 750} & \underline{\underline{\text{60 000 ml = 60 l}}} \\ \text{100 km} & \xrightarrow{:100} & \text{1 km} & \xrightarrow{\cdot 750} & \text{750km} \end{array}$$

h) $$\begin{array}{lclcl} \text{42 km} & \xrightarrow{:42} & \text{1 km} & \xrightarrow{\cdot 100} & \text{100 km} \\ \text{6 300 ml} & \xrightarrow{:42} & \text{150 ml} & \xrightarrow{\cdot 100} & \underline{\underline{\text{15 000 ml = 15 l}}} \end{array}$$

i) $$\begin{array}{lclcl} \text{150 ml} & \xrightarrow{:150} & \text{1 ml} & \xrightarrow{\cdot 1000} & \text{1000ml = 1l} \\ \text{450 Tropfen} & \xrightarrow{:150} & \text{3 Tropfen} & \xrightarrow{\cdot 1000} & \underline{\underline{\text{3000 Tropfen}}} \end{array}$$

j) i) $$\begin{array}{lclcl} \text{8 min} & \xrightarrow{:8} & \text{1 min} & \xrightarrow{\cdot 100} & \text{100 min} \\ \text{40 Seiten} & \xrightarrow{:8} & \text{5 S} & \xrightarrow{\cdot 100} & \underline{\underline{\text{500 Seiten}}} \end{array}$$

j) ii) $$\begin{array}{lclcl} \text{8 min} & \xrightarrow{:8} & \text{1 min} & \xrightarrow{\cdot 30} & \text{30 min} \\ \text{40 Seiten} & \xrightarrow{:8} & \text{5 Seiten} & \xrightarrow{\cdot 30} & \underline{\underline{\text{150 Seiten}}} \end{array}$$

k) $$\begin{array}{lclcl} \text{4 Bauern} & \xrightarrow{:4} & \text{1 Bauer} & \xrightarrow{\cdot 6} & \text{6 Bauern} \\ \text{15 Tage} & \xrightarrow{\cdot 4} & \text{60 Tage} & \xrightarrow{:6} & \underline{\underline{\text{10 Tage}}} \end{array}$$

L) $$\begin{array}{lclcl} \text{5 LKW} & \xrightarrow{:5} & \text{1 LKW} & \xrightarrow{\cdot 3} & \text{3 LKW} \\ \text{12 Tage} & \xrightarrow{\cdot 5} & \text{60 Tage} & \xrightarrow{:3} & \underline{\underline{\text{20 Tage}}} \end{array}$$

m) $$\begin{array}{lclcl} \text{3 Leitungen} & \xrightarrow{:3} & \text{1 Leitung} & \xrightarrow{\cdot 5} & \text{5 Leitungen} \\ \text{11.5 min} & \xrightarrow{\cdot 3} & \text{34.5 min} & \xrightarrow{:5} & \underline{\underline{\text{6.9 min}}} \end{array}$$

n) Natürlich hat ein Mann mit Glatze keine Haare (Scherzfrage);

Aufg. 55/134:

a) $$\begin{array}{lclclcl} \text{2 Öfen} & \xrightarrow{:2} & \text{1 Ofen} & \xrightarrow{\cdot 5} & \text{5 Öfen} & & \text{5 Öfen} \\ \text{1 Std} & & \text{1 Std} & & \text{1 Std} & \xrightarrow{\cdot 8} & \text{8 Std} \\ \text{1600 kg} & \xrightarrow{:2} & \text{800 kg} & \xrightarrow{\cdot 5} & \text{4 000 kg} & \xrightarrow{\cdot 8} & \underline{\underline{\text{32 000 kg}}} \end{array}$$

b) $$\begin{array}{lclclclcl} \text{5 Pers} & \xrightarrow{:5} & \text{1 Pers} & & \text{1 Pers} & \xrightarrow{\cdot 8} & \text{8 Pers} & & \text{8 Pers} \\ \text{4 Tage} & & \text{4 Tage} & \xrightarrow{:4} & \text{1 Tag} & & \text{1 Tag} & \xrightarrow{\cdot 10} & \text{10 Tage} \\ \text{100 l} & \xrightarrow{:5} & \text{20 l} & \xrightarrow{:4} & \text{5 l} & \xrightarrow{\cdot 8} & \text{40 l} & \xrightarrow{\cdot 10} & \underline{\underline{\text{400 l}}} \end{array}$$

c) $$\begin{array}{lclclcl} \text{3 Pers} & & \text{3 Pers} & \xrightarrow{:3} & \text{1 Pers} & \xrightarrow{\cdot 4} & \text{4 Pers} \\ \text{12 Std} & \xrightarrow{:2} & \text{6 Std} & & \text{6 Std} & & \text{6 Std} \\ \text{21 Reg} & \xrightarrow{:2} & \text{10.5 Reg} & \xrightarrow{:3} & \text{3.5 Reg} & \xrightarrow{\cdot 4} & \underline{\underline{\text{14 Reg}}} \end{array}$$

d) i)
$$\begin{array}{lclclclcl}
\text{4 Bänder} & \xrightarrow{:4} & \text{1 Band} & & \text{1 Band} & \xrightarrow{\cdot 3} & \text{3 Bänder} & & \text{3 Bänder} \\
\text{10 Std} & & \text{10 Std} & \xrightarrow{:10} & \text{1 Std} & & \text{1 Std} & \xrightarrow{\cdot 8} & \text{8 Std} \\
\text{240 t} & \xrightarrow{:4} & \text{60 t} & \xrightarrow{:10} & \text{6 t} & \xrightarrow{\cdot 3} & \text{18 t} & \xrightarrow{\cdot 8} & \underline{\underline{\text{144 t}}}
\end{array}$$

d) ii)
$$\begin{array}{lclcl}
\text{4 Bänder} & \xrightarrow{:2} & \text{2 Bänder} & & \text{2 Bänder} \\
\text{240 t} & & \text{240 t} & \xrightarrow{\cdot 1.5} & \text{360 t} \\
\text{10 Std} & \xrightarrow{\cdot 2} & \text{20 Std} & \xrightarrow{\cdot 1.5} & \underline{\underline{\text{30 Std}}}
\end{array}$$

d) iii)
$$\begin{array}{lclcl}
\text{240 t} & \xrightarrow{\cdot 3} & \text{720 t} & & \text{720 t} \\
\text{10 Std} & & \text{10 Std} & \xrightarrow{:2} & \text{5 Std} \\
\text{4 Bänder} & \xrightarrow{\cdot 3} & \text{12 Bänder} & \xrightarrow{\cdot 2} & \underline{\underline{\text{24 Bänder}}}
\end{array}$$

e) i)
$$\begin{array}{lclclclcl}
\text{3 Pers} & \xrightarrow{:3} & \text{1 Pers} & & \text{1 Pers} & \xrightarrow{\cdot 4} & \text{4 Pers} & & \\
\text{50 Tage} & & \text{50 Tag} & \xrightarrow{:50} & \text{1 Tag} & & \text{1 Tag} & \xrightarrow{\cdot 300} & \text{300 Tage} \\
\text{24 kg} & \xrightarrow{:3} & \text{8 000 g} & \xrightarrow{:50} & \text{160 g} & \xrightarrow{\cdot 4} & \text{640 g} & \xrightarrow{\cdot 300} & \underline{\underline{\text{192 kg}}}
\end{array}$$

e) ii)
$$\begin{array}{lclclcl}
\text{3 Pers} & \xrightarrow{:3} & \text{1 Pers} & & \text{1 Pers} & \xrightarrow{\cdot 5} & \text{4 Pers} \\
\text{24 kg} & & \text{24 kg} & \xrightarrow{\cdot 3} & \text{72 kg} & & \text{72 kg} \\
\text{50 Tage} & \xrightarrow{\cdot 3} & \text{150 Tage} & \xrightarrow{\cdot 3} & \text{450 Tage} & \xrightarrow{:5} & \underline{\underline{\text{90 Tage}}}
\end{array}$$

f) i)
$$\begin{array}{lclclclcl}
\text{2 Pumpen} & \xrightarrow{:2} & \text{1 Pumpe} & & \text{1 Pumpe} & \xrightarrow{\cdot 5} & \text{5 Pumpen} & & \text{5 Pumpen} \\
\text{24 Std} & & \text{24 Std} & \xrightarrow{:24} & \text{1 Std} & & \text{1 Std} & \xrightarrow{\cdot 10} & \text{10 Std} \\
\text{4 800 l} & \xrightarrow{:2} & \text{2 400 l} & \xrightarrow{:24} & \text{100 l} & \xrightarrow{\cdot 5} & \text{500 l} & \xrightarrow{\cdot 10} & \underline{\underline{\text{5 000 l}}}
\end{array}$$

f) ii)
$$\begin{array}{lclcl}
\text{2 Pumpen} & & \text{2 Pumpen} & \xrightarrow{\cdot 3} & \text{6 Pumpen} \\
\text{4 800 l} & \xrightarrow{\cdot 2.5} & \text{12 000 l} & & \text{12 000 l} \\
\text{24 Std} & \xrightarrow{\cdot 2.5} & \text{60 Std} & \xrightarrow{:3} & \underline{\underline{\text{20 Std}}}
\end{array}$$

f) iii)
$$\begin{array}{lclcl}
\text{4 800 l} & \xrightarrow{\cdot 1.5} & \text{7 200 l} & & \text{7 200 l} \\
\text{24 Std} & & \text{24 Std} & \xrightarrow{\cdot 3} & \text{72 Std} \\
\text{2 Pumpen} & \xrightarrow{\cdot 1.5} & \text{3 Pumpen} & \xrightarrow{:3} & \underline{\underline{\text{1 Pumpe}}}
\end{array}$$

Aufg. 55/135: a) $E = €$; $\frac{6B \mathrel{\hat{=}} x}{4B \mathrel{\hat{=}} 2.80E} \Leftrightarrow x = \frac{6}{4} \cdot 2.80 = 4.20$ €; $\frac{12B \mathrel{\hat{=}} x}{4B \mathrel{\hat{=}} 2.80E} \Leftrightarrow x = \frac{12}{4} \cdot 2.80 = 5.60$ €; $\frac{xB \mathrel{\hat{=}} 4.9E}{4B \mathrel{\hat{=}} 2.80E} \Leftrightarrow x = \frac{4.9}{2.8} \cdot 4 = 7$ Brezeln;

b) Berechnen Sie die fehlende Größe aus G Grundwert, P Prozentwert und $p\%$ Prozentsatz.

Der Grundwert entspricht 100%, der Prozentwert entspricht dem Prozentsatz.

i) $\frac{40E \mathrel{\hat{=}} x\%}{200E \mathrel{\hat{=}} 100\%} \Leftrightarrow \frac{40}{200} \mathrel{\hat{=}} \frac{x}{100\%} \Leftrightarrow x = \frac{40 \cdot 100\%}{200} = 20\%$; **ii)** $\frac{2.4m \mathrel{\hat{=}} x\%}{60m \mathrel{\hat{=}} 100\%} \Leftrightarrow \frac{2.4}{60} \mathrel{\hat{=}} \frac{x}{100\%} \Leftrightarrow x = \frac{2.4 \cdot 100\%}{60} = 4\%$;

iii) $\frac{x \mathrel{\hat{=}} 30\%}{50 \mathrel{\hat{=}} 100\%} \Leftrightarrow \frac{x}{50} \mathrel{\hat{=}} \frac{30\%}{100\%} \Leftrightarrow x = \frac{50 \cdot 30\%}{100\%} = 15$; **iv)** $\frac{x \mathrel{\hat{=}} 4\%}{6m \mathrel{\hat{=}} 100\%} \Leftrightarrow \frac{x}{6} \mathrel{\hat{=}} \frac{4\%}{100\%} \Leftrightarrow x = \frac{6 \cdot 4\%}{100\%} = 0.24m$;

v) $\frac{100\% \mathrel{\hat{=}} x}{15\% \mathrel{\hat{=}} 75g} \Leftrightarrow \frac{100\%}{15\%} \mathrel{\hat{=}} \frac{x}{75} \Leftrightarrow x = \frac{75 \cdot 100\%}{15\%} = 500g$; **vi)** $\frac{100\% \mathrel{\hat{=}} x}{9\% \mathrel{\hat{=}} 27m} \Leftrightarrow \frac{100\%}{9\%} \mathrel{\hat{=}} \frac{x}{27} \Leftrightarrow x = \frac{27 \cdot 100\%}{9\%} = 300m$;

vii) $\frac{x \mathrel{\hat{=}} 8\%}{25s \mathrel{\hat{=}} 100\%} \Leftrightarrow x = \frac{25 \cdot 8}{100} = 2s$; **viii)** $\frac{x \mathrel{\hat{=}} 100\%}{25s \mathrel{\hat{=}} 4\%} \Leftrightarrow x = \frac{100 \cdot 25}{4} = 625g$;

ix) $\frac{x \mathrel{\hat{=}} 100\%}{24g \mathrel{\hat{=}} 12\%} \Leftrightarrow x = \frac{24 \cdot 100}{12} = 200g$; **x)** $\frac{12 \mathrel{\hat{=}} x\%}{30m \mathrel{\hat{=}} 100\%} \Leftrightarrow x = \frac{12 \cdot 100}{30} = 40\%$;

xi) $\frac{x \mathrel{\hat{=}} 7\%}{60g \mathrel{\hat{=}} 100\%} \Leftrightarrow x = \frac{7 \cdot 60}{100} = 4.2g$; **xii)** $\frac{x \mathrel{\hat{=}} 100\%}{36s \mathrel{\hat{=}} 9\%} \Leftrightarrow x = \frac{36 \cdot 100}{9} = 400s$;

c) Zins nach 1 Jahr: $\frac{x \mathrel{\hat{=}} 10\%}{100e \mathrel{\hat{=}} 100\%} \Leftrightarrow \frac{x}{100e} \mathrel{\hat{=}} \frac{10\%}{100\%} \Leftrightarrow x = \frac{100e \cdot 10\%}{100\%} = 10$€; K_1 100 € + 10 € = 110 €. Beachten Sie, dass sich beim zweiten Jahr das Kapital von 100 € auf 110 € ändert;

2 J.: $\frac{x \mathrel{\hat{=}} 10\%}{110e \mathrel{\hat{=}} 100\%} \Leftrightarrow \frac{x}{110e} \mathrel{\hat{=}} \frac{10\%}{100\%} \Leftrightarrow x = \frac{110e \cdot 10\%}{100\%} = 11€$; $K_2 = 110$ € + 11 € = 121 €;

3 J.: $\frac{x \mathrel{\hat{=}} 10\%}{121e \mathrel{\hat{=}} 100\%} \Leftrightarrow \frac{x}{121e} \mathrel{\hat{=}} \frac{10\%}{100\%} \Leftrightarrow x = \frac{121e \cdot 10\%}{100\%} = 12.1€$; $K_3 = 121$ € + 12.1 € = 133.1 €.

4 J.: $\frac{x \mathrel{\hat{=}} 10\%}{133.1e \mathrel{\hat{=}} 100\%} \Leftrightarrow \frac{x}{133.1e} \mathrel{\hat{=}} \frac{10\%}{100\%} \Leftrightarrow x = \frac{133.1e \cdot 10\%}{100\%} = 13.31€$; $K_4 = 133.1$ € + 13.31 € = 146.41 €.

Allgemeine Formel: $K_1 = 100 + \frac{100}{10} = 100 \cdot (1 + \frac{1}{10}) = 100 \cdot 1.1$;

$K_2 = 110 + \frac{110}{10} = 110 \cdot (1 + \frac{1}{10}) = K_1 \cdot 1.1 = K_0 \cdot 1.1^2$;

$K_3 = 121 + \frac{121}{10} = 121 \cdot (1 + \frac{1}{10}) = K_2 \cdot 1.1 = K_0 \cdot 1.1^3$;

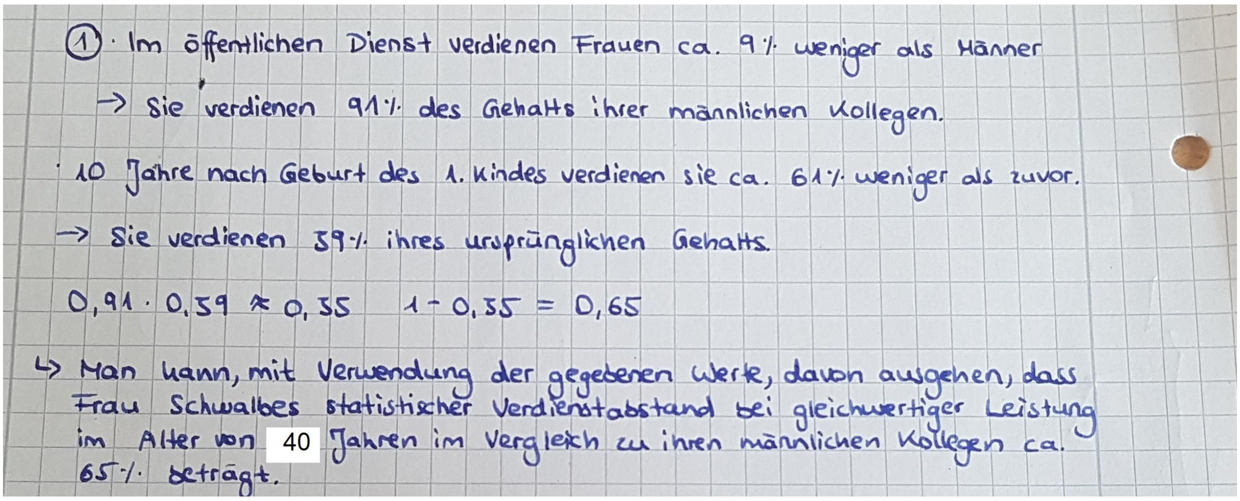
$K_n = K_{n-1} + \frac{K_{n-1}}{10} = K_{n-1} \cdot (1 + \frac{1}{10}) = K_{n-1} \cdot 1.1 = K_0 \cdot 1.1^n$;

d) Pascalsches Dreieck; bei $n = 5$ klappt es aber nicht mehr, weil die Zahl durch die '10' einen Übertrag bekommt: $K_5 = 161.051$.

e) Die Zahl $q = 1.1$ heißt W<u>achstumsfaktor</u>. $5\% : q = 1.05, 3\% : q = 1.03$ $p\% : q = 1 + \frac{p}{100}$.

f) Bei einer Agstellung ohne konkrete Angabe eines Grundwertes ist es ratsam einen Grundwert von 100 anzunehmen. In diesem Falle ist die Anzahl der Überlebenen Mücken $100 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 16$ Mücken. Tatsächlich überleben $1-0.8 \cdot 0.2$=0.84 also 84 % aller Mücken ihren ersten oder zweiten Stich nicht.

10 kg Melone besteht damit aus 0.1 kg Kohlehydrate (also nicht Wasser) und aus 9.9 kg Wasser. Nach der Trocknung bleiben die 0.1 kg Kohlehydrate erhalten. Diese entsprechen jetzt 2% der Masse: $\frac{x}{0.1kg} \mathrel{\hat{=}} \frac{100\%}{2\%} \Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5$. Sie wiegt also nur noch 5 kg.


① · Im öffentlichen Dienst verdienen Frauen ca. 9% weniger als Männer
→ Sie verdienen 91% des Gehalts ihrer männlichen Kollegen.
· 10 Jahre nach Geburt des 1. Kindes verdienen sie ca. 61% weniger als zuvor.
→ Sie verdienen 39% ihres ursprünglichen Gehalts.
0,91 · 0,39 ≈ 0,35   1 − 0,35 = 0,65
↳ Man kann, mit Verwendung der gegebenen Werte, davon ausgehen, dass Frau Schwalbes statistischer Verdienstabstand bei gleichwertiger Leistung im Alter von 40 Jahren im Vergleich zu ihren männlichen Kollegen ca. 65% beträgt.

Aufg. 56/136:

Fach	männlich	zugelassen	Quote	weiblich	zugelassen	Quote
Englisch	600	360	60%	100	80	80%
Französisch	700	357	51%	50	34	68%
Italienisch	400	104	26%	400	128	32%
Latein	300	27	9%	250	30	12%
Summe	2000	848	42.4 %	800	272	34%

b) In jedem Fach ist die Zulassungsquote der Mädchen größer als die der Jungen. Trotzdem ist die Gesamtzulassungsquote der Jungen höher als die der Mädchen. Woran liegt das? Siehe c)

c) Zuerst reduzieren wir das Problem auf zwei Studiengänge A (100 Plätze), B (50 Plätze) wobei jeweils die besten Bewerber genommen werden. Des Weiteren haben alle Mädchen Schnitte im Bereich zwischen 1.0 und 1.9 und alle Jungen haben Schnitte im Bereich 2.0 bis 2.9 . Das schlechteste Mädchen ist also immer noch besser, als der beste Junge (∗). Für Studiengang A bewerben sich 100 Jungen und ein Mädchen und für Studiengang B 100 Mädchen und ein Junge.

Fach	männlich	zugelassen	Quote	weiblich	zugelassen	Quote
A	100	99	99%	1	1	100%
B	1	0	0%	100	50	50%
Summe	101	99	98%	101	51	50.5%

Das Phänomen entsteht also, weil die Studiengänge mit den hohen Zulassungsquoten eher von den Jungen gewählt werden, während die Mädchen eher die Studiengänge mit den hohen Ablehnungsquoten gewählt haben. Eine weitere Interpretation finden Sie im (unveröffentlichten) Abschnitt 'Das Ziel des Arbeitengehens'. Er ist deshalb unveröffentlicht, weil sich leider ab und an Mitbürger auf den Schlips getreten fühlen, wenn ich die Wahrheit schreibe (Ehrlichkeit ist eben nichts für Feiglinge). Oder stellen Sie sich vor, ich hätte Eigenschaft ($*$) andersherum notiert.

Nachschlag: Nach Planet Wissen: 'Lebensglück - Was uns zufrieden macht' (Sendung vom 26.4.22 - an diesem Tag war ich gelockt) gibt es keinen Unterschied beim Lebensglück zwischen Männern und Frauen und das, obwohl Frauen doch so sehr benachteiligt sind?

Aufg. 56/137: a) 400; b) 414; c) 3.5%; d) ≈ 508.9;
e) .. $q = \underline{1 + \frac{p}{100}}$. Dies ist die Formel vom vermehrten Grundwert. f) $p = (q-1) \cdot 100$.

g) $B_a(0) = 512$; $B_a(1) = 537.6$; $p = 5\%$; $B_a(7) = 720.44$; **h)** $B_b(0) = 1000$; $B_b(1) = 980$; $p = -2\%$; $B_b(7) \approx 868.126$; **i)** $q_a \approx 1.4071$; $q_b \approx 0.868$.

Aufg. 56/138: a) $q = 1.12$, b) $q = 1.05$, c) $q = 1.001$, d) $q = 3.5$, e) $q = 0.88$, f) $q = 0.95$,
g) $q = 0.999$, h) war eine Scherzfrage.

Aufg. 56/139: a) $f(5) = 2^4 = 16$, $f(10) = 2^9 = 512$, b) $f(64) = 2^{63} = 9\,223\,372\,036\,854\,775\,808$,
c) $2^{63} \approx 9.2\text{E}18 = 9.2 \cdot 10^{18}$, d) $2.3 \cdot 10^{17}$ g, $2.3 \cdot 10^{14}$ kg, $2.3 \cdot 10^{11}$ t,
e) er wünscht sich etwa $\frac{2.3 \cdot 10^{11}}{7.2 \cdot 10^{8}} \approx 320$ Weltjahresreisernten – das ist mehr Reis, als je auf diesem Planeten bisher angebaut wurde.

Aufg. 56/140: a) $1 : 1000 : 20 = 5\dot{1}0^{-5}m$; b) ... falten verdoppelt sich dessen Dicke.
Sei x die Anzahl der Faltungen dann berechnen wir die Dicke (in Meter) als $0.00005 \cdot 2^x$;
$0.00005 \cdot 2^x = 384400 \cdot 1000 \Leftrightarrow 2^x = 7.668 \cdot 10^{12} \Leftrightarrow x = \frac{\log(7.668 \cdot 10^{12})}{\log(2)} \approx 42.8$ also etwa 43 (!) mal;

Aufg. 56/141: Die Koeffizienten werden mit Punktprobe von P und Q berechnet.
a) $P(0;2)$: $2 = c \cdot q^0 \Leftrightarrow c = 2$, $Q(1;3)$: $3 = 2 \cdot q^1 \Leftrightarrow q = 1.5$, $y = 2 \cdot 1.5^x$;

b) $P(0;4)$: $4 = c \cdot q^0 \Leftrightarrow c = 4$, $Q(1;2)$: $2 = 4 \cdot q^1 \Leftrightarrow q = 0.5$, $y = 4 \cdot 0.5^x$;

c) $P(0;2)$: $2 = c \cdot q^0 \Leftrightarrow c = 2$, $Q(3;16)$: $16 = 2 \cdot q^3 \Leftrightarrow q = \sqrt[3]{8} = 2$, $y = 2 \cdot 2^x$;

d) $P(0;27)$: $27 = c \cdot q^0 \Leftrightarrow c = 27$, $Q(5;\frac{1}{9})$: $\frac{1}{9} = 27 \cdot q^5 \Leftrightarrow q = \sqrt[5]{\frac{1}{243}} = \frac{1}{3}$, $y = 27 \cdot (\frac{1}{3})^x$;

e) $P(1;1)$: $1 = c \cdot q^1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{q}$, $Q(4;8)$: $8 = c \cdot q^4 \Leftrightarrow 8 = \frac{1}{q} \cdot q^4 \Leftrightarrow q^3 = 8 \Leftrightarrow q = 2$, $c = \frac{1}{2}$ $y = \frac{1}{2} \cdot 2^x$;

f) $P(2;1)$: $1 = c \cdot q^2 \Leftrightarrow c = \frac{1}{q^2}$, $Q(5;64)$: $32 = c \cdot q^5 \Leftrightarrow 64 = \frac{1}{q^2} \cdot q^5 \Leftrightarrow q^3 = 8 \Leftrightarrow q = 4$, $c = \frac{1}{4^2}$ $y = \frac{1}{16} \cdot 4^x$;

g) $P(-2;0.04)$: $0.04 = c \cdot q^{-2} \Leftrightarrow c = 0.04q^2$, $Q(-1;0.2)$: $0.2 = c \cdot q^{-1} \Leftrightarrow 0.2 = 0.04q^2 \cdot \frac{1}{q} \Leftrightarrow q = 5$, $c = \frac{0.2}{5^{-1}} = 1$ $y = 5^x$;

h) $P(2;0.5)$: $0.5 = c \cdot q^2 \Leftrightarrow c = 0.5 \cdot q^{-2}$, $Q(4;8)$: $8 = c \cdot q^4 \Leftrightarrow 8 = 0.5 \cdot q^{-2} \cdot q^4 \Leftrightarrow 16 = q^2 \Leftrightarrow q = \pm 4$, $q = -4$ ist kein exponentielles Wachstum, weil $q > 0$, $c = 0.5 \cdot 4^{-2} = \frac{1}{32} \Rightarrow y = \frac{1}{32} \cdot 4^x$;

Aufg. 57/142: $B_a(t) = 100 \cdot 1.1^t$, $B_a(t+1) = B_a(t) \cdot 1.1$, $B(0) = 100$. $B_b(t) = 30000 \cdot 0.73^t$, $B_b(t+1) = B_b(t) \cdot 0.73$, $B(0) = 30000$.

② $f(t) = c \cdot a^t$ $a^{30} = 0{,}9$ $a = \sqrt[30]{0{,}9}$

$f(t) = 5.000.000 \cdot \sqrt[30]{0{,}9}^{\,t}$ $f(50) = 5.000.000 \cdot \sqrt[30]{0{,}9}^{\,50} \approx 4.194.764$

$5.000.000 - 4.194.764 = 805.236$ ↳ Die Eisfläche wird in den nächsten 50 Jahren voraussichtlich um 805.236 km² abnehmen

Aufg. 57/143:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$B(t)$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512

b) $B(2) = 2 \cdot B(1)$; $B(3) = 2 \cdot B(2)$; $B(t+1) = 2 \cdot B(t)$; Die explizite Darstellung von $B(t)$ lautet: $B(t) = \underline{1 \cdot 2^t}$.

Ein Folge ist rekursiv definiert, wenn zum Anfangswert $\underline{B(0)}$ (nur) bekannt ist, wie sich $\underline{B(t+1)}$ aus $B(t)$ errechnet. Z.B. wurde in Klasse 8 das Heron-Verfahren zur Berechnung von Wurzeln behandelt.

c) $B_1(t+1) = 3 \cdot B_1(t)$, $B_2(t+1) = 6 \cdot B_2(t)$, $B_3(t+1) = 6 \cdot B_3(t)$, $B_4(t+1) = 10 \cdot B_4(t)$.

d) Eine rekursive Darstellung von $f(t) = c \cdot q^t$ besteht aus einem

1) Bildungsgesetz: $\underline{B(t+1) = q \cdot B(t)}$, 2) Startwert: $\underline{B(0) = c}$ (Informatik: Abbruchkriterium).

e) siehe Aufgabe142, Heron (Approximation von $\sqrt{a}$): $B(t+1) = \frac{B(t) + \frac{a}{B(t)}}{2}$; $B(1) = 1$.

Aufg. 57/144: a) **Jakob Maria Mierscheid** ist eine Politiker-Kunstfigur (sprich: es gibt Herrn Mierschied nicht) der SPD, die sogar Mitglied des Bundestages ist und von **Franz Müntefering** ein Abmahnung erhielt, weil sie 'Ulla Schmidt' als Unwort des Jahres vorgeschlagen hatte.

$B(1) = 128$, $B(2) = 64$, $B(x) = 256 \cdot 0.5^x$,

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$B(t)$	256	128	64	32	16	8	4	2	1	0.5

b) $B(t+1) = \frac{1}{2} \cdot B(t)$, $B(0) = 256$; $B(t) = 256 \cdot (\frac{1}{2})^t$

c) Die Halbwertszeit ist die Zeit, nach welcher sich z.B. ein radioaktiver Stoff auf die Hälfte seiner Ausgangsmasse reduziert hat.

d) $256(\frac{1}{2})^{t_H} = \frac{256}{2} \Rightarrow$ HWZ $t_H = \frac{\log(\frac{1}{2})}{\log(\frac{1}{2})} = 1$ Jahr, nach ca 9 Jahren hat die Partei keine Wähler mehr.

e) i) $\frac{6}{2} = 6 \cdot 0.25^t \Leftrightarrow \frac{1}{2} = 0.25^t \Leftrightarrow t = \frac{1/2}{0.25} = 0.5$,
ii) $\frac{16}{2} = 16 \cdot 0.0625^t \Leftrightarrow \frac{1}{2} = 0.0625^t \Leftrightarrow t = \frac{\log(0.5)}{\log(0.0625)} = \frac{1}{4}$,
iii) $\frac{2016}{2} = 2016 \cdot 0.7071^t \Leftrightarrow \frac{1}{2} = 0.7071^t \Leftrightarrow t = \frac{\log(0.5)}{\log(0.7071)} \approx 2$,
iv) $\frac{3016}{2} = 3016 \cdot 0.7071^t \Leftrightarrow \frac{1}{2} = 0.7071^t \Leftrightarrow t = \frac{\log(0.5)}{\log(0.7071)} \approx 2$,
v) $\frac{100}{2} = 100 \cdot 0.7071^t \Leftrightarrow \frac{1}{2} = 0.7071^t \Leftrightarrow t = \frac{\log(0.5)}{\log(0.7071)} \approx 2$, **vi)** $0.5 = 0.7071^t \Leftrightarrow t = \frac{\log(0.5)}{\log(0.7071)} \approx 2$;

f) $\frac{c}{2} = c \cdot (0.5)^{t_H} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = (0.5)^{t_H} \Leftrightarrow t_H = \frac{\log(\frac{1}{2})}{\log(0.5)} = 1$.

g) Die Halbwertszeit ist unabhängig vom Startwert weil sich das c auflöst.

Aufg. 58/145: a) B schrumpft genau dann, wenn $0 < q < 1$, HWZ: $\frac{c}{2} = c \cdot q^t \Leftrightarrow \frac{1}{2} = q^t \Leftrightarrow t_H = \frac{\log 0.5}{\log q}$.

b) $B(1) = 70$, $B(2) = 49$, $B(x) = 100 \cdot 0.7^x$, HWZ ist etwa 2 Jahre.
$50 = 100 \cdot 0.7^x \Leftrightarrow 0.5 = 0.7^x \Leftrightarrow x = \frac{\log 0.5}{\log 0.7} \approx 1.9433$ (Jahre). c) $\log(0.5)/\log(0.976) \approx 28.533$.

d) Sei Zunächst die Ausgangsmasse 100; damit gilt (nach zwei Tagen):

$26.4 = 100 \cdot q^2 \overset{:100}{\Longleftrightarrow} q^2 = 0.264 \Rightarrow q = (\pm)\sqrt{0.264} \approx (\pm)0.5138$.

Nach der Formel für die Halbwertszeit gilt: $HWZ = \log(0.5)/\log(0.5138) \approx 1.04$ (Tage).

Die gleichen Ergebnisse erhält auch für eine allgemeine Masse m.

e) $50 = 100 \cdot q^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = q^2 \Leftrightarrow \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = q \Rightarrow q \approx 0.7071$, weil $q > 0$ ist.

f) $t_h = \frac{\log(0.5)}{\log(q)} \Leftrightarrow t_h \cdot \log(q) = \log(0.5) \Leftrightarrow \log(q) = \frac{1}{t_h} \cdot \log(0.5) \Leftrightarrow \log(q) = \log(0.5^{\frac{1}{t_h}}) \Leftrightarrow q = 0.5^{\frac{1}{t_h}}$

$t_h = 2$: $q = 0.5^{\frac{1}{2}} \approx 0.7071$; $t_h = 3$: $q = 0.5^{\frac{1}{3}} \approx 0.7937$; $t_h = 4$: $q = 0.5^{\frac{1}{4}} \approx 0.8409$;

g) $B(t) = 50 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3.8}}$, $0.1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3.8}} \Leftrightarrow 3.8 \cdot \frac{\log 0.1}{\log 0.5} \approx 12.6$.

h) i) $B_c(t) = 10 \cdot 0.5^t$, $B_c(t+1) = B_c(t) \cdot 0.5$, $B(0) = 10$.

ii) $B_c(t) = 20 \cdot 0.5^{\frac{t}{6.75}}$, $B_c(t+1) = B_c(t) \cdot \sqrt[6.75]{0.5}$, $B(0) = 20$,

iii) $B(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{t_h}}$.

Teil i) $y = c \cdot 0.5^{t/HWZ}$: $144 = c \cdot 0.5^{128/64} \Leftrightarrow 0.25 \cdot c = 6 \Leftrightarrow c = 24$, also sind zu Beginn $24\mu g$ Yttrium betrachtet worden. $y = 24 \cdot 0.5^{t/64}$; $\sqrt[4]{165888}$ eingesetzt: $\sqrt[4]{165888} = 24 \cdot 0.5^{t/64} \overset{:24}{\Longleftrightarrow} \sqrt[4]{0.5} = 0.5^{1/4} = 0.5^{t/64} \overset{\log_{0.5}(.)}{\Longleftrightarrow} 1/4 = t/64 \overset{\cdot 64}{\Longleftrightarrow} t = 16$. 16 Std nach Beobachtungsbeginn sind noch $\sqrt[4]{165888}\mu g \approx 20.2\mu g$.

j) $B(t) = c \cdot q^t$; Tc = Technitium; $B(0) = 10 \Rightarrow c = 10$; $B(4) = 6.3 \Rightarrow 6.3 = 10 \cdot q^4 \overset{:10}{\Longleftrightarrow} 0.63 = q^4 \overset{\sqrt[4]{.}}{\Longleftrightarrow} q \approx 0.89$ (-0.89 zählt wg $q > 0$ nicht als Lösung). HZW$=\frac{-\log(2)}{\log(q)} = \frac{-\log(2)}{\log(0.89)} \approx 6$. Das Bildungsgesetz ist $B(t) = 10 \cdot (0.89)^t$ und die Halbwertzeit von Technitium ist etwa 6 Tage.

Der Bestand an Tc nimmt täglich um 11% ab. Das Zerfallsgesetz lautet: $y = c \cdot (0.5)^{t/6}$.

Aufg. 58/146: a) $t_h = \frac{\log(0.5)}{\log(1/256)} \cdot 45840 = 5730$ Jahre.

b) $5 = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} \overset{:16}{\Longleftrightarrow} \frac{5}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} \overset{\log .}{\Longleftrightarrow} \log_{1/2}(5/16) = \frac{\log(5/16)}{\log(1/2)} = \frac{t}{5730} \overset{\cdot 5730}{\Longleftrightarrow}$

$t = 5730 \cdot \frac{\log(5/16)}{\log(1/2)} \approx 9615$. Damit ist das Holz etwa 9615 Jahre alt.

Verallgemeinerung: $a = n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} \Leftrightarrow t = 5730 \cdot \log_{1/2}(a/n)$.

c) $t = 5730 \cdot \log_{1/2}(15/20) \approx 2578$ Jahre.

15.4.2 LöVo zu Einheit 4.2 (Wachstum UE 10_7)

Aufg. 58/147: Vor a) Um Summen abkürzend aufschreiben können definieren wir ein neues Zeichen: $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = \sum_{i=3}^{8} a_i$. Die Variable i heißt Summationsindex; die Schrittweite ist immer 1.

Lösungsvorschläge für Summendarstellungen: Es sind auch andere Darstellungen denkbar.

a) i) bis v)	i)	$4+5+6+7$	$= \sum_{k=1}^{4} k+3$	$= \sum_{m=0}^{3} k+4$;
	ii)	$4+6+8+10$	$= \sum_{k=1}^{4} 2k+2$	$= \sum_{m=0}^{3} 2k+4$;
	iii)	$4+7+10+13$	$= \sum_{k=1}^{4} 3k+1$	$= \sum_{m=0}^{3} 3k+4$;
	iv)	$4+8+12+16$	$= \sum_{k=1}^{4} 4k+0$	$= \sum_{m=0}^{3} 4k+4$;
	v)	$4+9+14+19$	$= \sum_{k=1}^{4} 5k-1$	$= \sum_{m=0}^{3} 5k+4$;
		$4+(4+n)+(4+2n)+(4+3n)$	$= \sum_{k=1}^{4} n \cdot k+4-n$	$= \sum_{m=0}^{3} n \cdot k+4$;

a) vi) bis x)

vi)	4+3+2+1	$=\sum_{k=1}^4 5-k$	$=\sum_{m=0}^3 4-k;$
vii)	4+2+0−2	$=\sum_{k=1}^4 6-2k$	$=\sum_{m=0}^3 4-2k;$
viii)	4+1−2 − 5	$=\sum_{k=1}^4 7-3k$	$=\sum_{m=0}^3 4-3k;$
ix)	4+0−4 − 8	$=\sum_{k=1}^4 8-4k$	$=\sum_{m=0}^3 4-4k;$
x)	4−1 − 6 − 11	$=\sum_{k=1}^4 10-4k$	$=\sum_{m=0}^3 4-5k;$
	$4+(4-n)+(4-2n)+(4-3n)$	$=\sum_{k=1}^4 4+n-n\cdot k$	$=\sum_{m=0}^3 4-n\cdot k;$

b) i) bis v)

i)	1+4+9+16	$=\sum_{k=1}^4 k^2;$	
ii)	3+6+11+18	$=\sum_{k=1}^4 k^2+2;$	
iii)	2+8+12+16	$=\sum_{k=1}^4 2\cdot k^2;$	
iv)	$\frac{1}{2}+2+4.5+8$	$=\sum_{k=1}^4 \frac{k^2}{2};$	
v)	4+16+36+64	$=\sum_{k=1}^4 (2\cdot k)^2$	$=\sum_{k=1}^4 4\cdot k^2;$

c)

i)	$4+5+..+n=\sum_{k=4}^n k,$	
ii)	$4+5+..+2n=\sum_{k=4}^{2n} k$	$=\sum_{k=1}^{2n-3} k+3$
iii)	$4+7+..+3n+1=\sum_{k=1}^n 3k+1,$	(n Summanden),
iii)	$4+6+..+2n=\sum_{k=2}^n 2k$	$=\sum_{k=1}^{n-1} 2k-2$
v)	$4+9+..+5n-1=\sum_{k=1}^n 3k+1,$	(n Summanden),
iv)	$4+3+..-n=\sum_{k=-4}^n -k,$	$(n+5)$ Summanden
v)	$4+2+..-2n=\sum_{k=-2}^n -2k,$	$(n+3)$ Summanden

f)

(1)	$\sum_{i=1}^n (a\cdot a_i)$	$= a\cdot\sum_{i=1}^n a_i$	Distributivgesetz
(2)	$\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)$	$= (\sum_{i=1}^n a_i)+(\sum_{i=1}^n b_i)$	Assoziativ- und Kommutativgesetz
(3)	$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i\cdot b_j$	$= (\sum_{i=1}^n a_i)\cdot(\sum_{j=1}^m b_j)$	Distributiv-, Assoziativ- und Kommutativgesetz

(3) $\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m (a_i b_j)\right) = \sum_{i=1}^3 a_i \cdot \sum_{j=1}^2 b_j = (a_1+a_2+a_3)\cdot(b_1+b_2) = a_1b_1+a_1b_2 + a_2b_1+a_2b_2 + a_3b_1+a_3b_2$

$=\sum_{i=1}^3 ((a_ib_1)+(a_ib_2))$ $= \sum_{j=1}^2 a_1 b_j + \sum_{j=1}^2 a_2 b_j + \sum_{j=1}^2 a_3 b_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 a_i b_j$

e) $\sum_{k=1}^5 a_k + \sum_{k=6}^n a_k = (a_1+a_2+a_3+a_4+a_5) + (a_6+a_7+a_8+...+a_n) = \sum_{k=1}^n a_k$ $\quad \sum_{k=1}^c a_k + \sum_{k=c+1}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_k \quad 1\le c\le n \quad \in \mathbb{Z}$

$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} = a_1+a_2+...+a_n$ Indexverschiebung

Thx Ann Zel

$a_4+a_5+a_6 = \sum_{k=4}^6 a_k = \sum_{j+3=4}^{j+3=6} a_{j+3} = \sum_{j=1}^3 a_{j+3}$ Substitution $j+3=k$, $k=4$ | da $j=1$

Abb. 261 LöVo zur Ag 58/147 Teil f;

Aufg. 59/148: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=1-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}=1-\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}=1-\frac{1}{16}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\frac{31}{32}=1-\frac{1}{32}$. Verallgemeinerung: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+..+\frac{1}{2^n}=\frac{2^n-1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$.

Aufg. 59/149: a) $(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2$, $(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$, $(a-b)\cdot(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=a^4-b^4$, $(a-b)\cdot(a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+...+ab^{n-1}+b^n)=a^{n+1}-b^{n+1}$.

$b^7-a^7=(a-b)\cdot(a^6+a^5b+a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4+ab^5+b^6)$

b) ... dividieren Sie für $\underline{q\neq 1}$ durch $(1-q)$.

$(1-q)\cdot(1+q+q^2+q^3+...+q^{n-1}+q^n)=q^{n+1}-q^{n+1} \Leftrightarrow 1+q+q^2+q^3+...+q^{n-1}+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

c) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{1-0.5^4}{1-0.5}=1.875$, $q=\frac{1}{2}$, $n=4$;

$1+2+4+8+16+32+64=\frac{1-2^7}{1-2}=127$, $q=2$, $n=6$.

$1+q+..+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\quad (q\neq 1)$

iii) $n=4, q=2$ Summe$=\frac{1-3^{4+1}}{1-3}=121$,

iv) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=1+q+q^2 \Rightarrow q=\frac{-1}{3}, n=2,$

$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{2+1}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{1+\frac{1}{27}}{\frac{4}{3}}=\frac{7}{9}$

v) $1-\frac{2}{7}+\frac{4}{49}-\frac{8}{343}=1+q+q^2+q^3 \Rightarrow q=\frac{-2}{7}, n=3,$

$1-\frac{2}{7}+\frac{4}{49}-\frac{8}{343}=\frac{1-\left(-\frac{2}{7}\right)^{3+1}}{1-\left(-\frac{2}{7}\right)}=\frac{265}{373}$

q ist der zweite Summand, n =Anzahl der Summanden -1

vi) $q=-0.4=-\frac{2}{5}$, $n=4$, $1-0.4+0.16-0.064+0.0256=\frac{1-\left(-\frac{2}{5}\right)^{4+1}}{1-\left(-\frac{2}{5}\right)}=0.7216,$

vii) $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}=1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}-1=\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{3+1}}{1-\left(\frac{1}{10}\right)}-1=0.111,$

Lösung des Valentinstagsproblems: d) i) $T(n)$ heißt die Teilermenge von n.

$T(6)=\{1;2;3;6\}$; die Summe aller Teiler $\neq 6$ ist $\sigma(6)=1+2+3=6$; perfekt

$28=2^2\cdot(2^3-1)=4\cdot\boxed{7}$: $T(28)=\{1;2;4;7;14;28\}$;
die Summe aller Teiler $\neq 28$ ist $\sigma(28)=1+2+4+7+14=28$; perfekt.

$120=2^3\cdot(2^4-1)=8\cdot\boxed{15}$: $T(120)=\{1;2;3;4;5;6;8;10;12;15;20;24;30;40;60;120\}$;
$\sigma(120)=1+2+3+4+5+6+8+10+12+15+20+24+30+40+60=240>120$,
micht perfekt aber genau doppelt so groß!!

ii) $496=2^4\cdot(2^5-1)=16\cdot\boxed{31}$: $T(496)=\{1;2;4;8;16;31;62;124;248;496\}$
$\sigma(496)=1+2+4+8+16+31+62+124+248=496$; perfekt

$2016=2^5\cdot(2^6-1)=32\cdot\boxed{63}$:
$T(2016)=\{1;2;3;4;6;7;8;9;12;14;16;18;21;24;28;32;36;42;48;56;63;72;$
$84;96;112;126;144;168;224;252;288;336;504;672;1008;2016\}$
$\sigma(2016)=1+2+3+4+6+7+8+9+12+14+16+18+21+24+28+32+36+42+48+56+$
$63+72+84+96+112+126+144+168+224+252+288+336+504+672+1008=4536>2016$
nicht perfekt;

$8128=2^6\cdot(2^7-1)=64\cdot\boxed{127}$:
$T(8128)=\{1;2;4;8;16;32;64;127;254;508;1016;2032;4064;8128\}$
$\sigma(8128)=1+2+4+8+16+32+64+127+254+508+1016+2032+4064=8128$ perfekt

iii) $28=4\cdot 7=2^2\cdot(2^3-1)$: $T(4)=\{1;2;4\}$; $T(28)=\{1;2;4;1\cdot 7;2\cdot 7;4\cdot 7\}$;

$$\begin{aligned}\sigma(28) &= 1+2+4 && + 1\cdot 7+2\cdot 7\\ &= 7 && +(1+2)\cdot 7\\ &= (2^3-1) && +(2^2-1)\cdot(2^3-1)=2^2\cdot(2^3-1)=4\cdot 7=28;\end{aligned}$$

$8128=64\cdot 127$: $T(64)=\{1;2;4;8;16;32;64\}$;
$T(8128)=\{1;2;4;8;16;32;64;1\cdot 127;2\cdot 127;4\cdot 127;8\cdot 127;16\cdot 127;32\cdot 127\}$

$$\begin{aligned}\sigma(8128) &= 1+2+4+8+16+32+64 && + 1\cdot 127+2\cdot 127+4\cdot 127+8\cdot 127+16\cdot 127+32\cdot 127\\ &= (2^7-1) && +(1+2+4+8+16+32)\cdot 127\\ &= (2^7-1) && +(2^6-1)\cdot(2^7-1)=2^6\cdot(2^7-1)=8128;\end{aligned}$$

Die nächste derartige perfekte Zahl ist $4096\cdot 8191=33\,550\,336$; danach $32768\cdot 131071=4\,293\,934\,528$ danach $262144\cdot 524287\approx 6.9\cdot 10^{10}$. Ob es ∞ viele Zahlen dieser Art gibt, ist (noch) nicht bekannt.

$T(33550336)=\{1;2;4;8;16;32;64;128;256;512;1024;2048;4096;8191;16382;32764;65528;$
$131056;262112;524224;1048448;2096896;4193792;8387584;16775168;33550336\}$

$1+2+4+8+16+32+64+128+256+512+1024+2048+4096+8191+16382+32764+65528+131056+262112+524224+1048448+2096896+4193792+8387584+16775168=33550336$

iv) Zeigen Sie, $z=2^n\cdot(2^{n+1}-1)$ ist perfekt, wenn $2^{n+1}-1$ eine Primzahl ist. Die Zahl $\boxed{(2^{n+1}-1)}$ steht in den LöVo der Teile i) und ii) mit einem Rahmen. Beachten Sie dabei, dass $1+2+2^2+2^3+ ... +2^n=2^{n+1}-1$ (geometrische Summe) ist. Dieser Beweis zeigt sogar genau dann, wenn, weil $\sigma(z)$ im Nichtprimzahlfall größer wird.

Das erste Gleichheitszeichen gilt nur für Primzahlen. Weil $2^{2n+1}-1$ prim ist, hat z nur Teiler der Form 2^k oder $2^k\cdot(2^{2n+1}-1)$. Deshalb kann $\sigma(z)$ als Summe aller Teiler 2^k und als Summe aller Teiler $2^k\cdot(2^{2n+1}-1)$ berechnet werden. Der eigentlich letzte Summand $2^n\cdot(2^{2n+1}-1)=z$ und gehört damit nicht zur Summe.

$$\begin{aligned}\sigma(z) &= 1+2+4+..+2^n & &+\ 1\cdot(2^{n+1}-1)+2\cdot(2^{n+1}-1)+4\cdot(2^{n+1}-1)+..+2^{n-1}\cdot(2^{n+1}-1)\\ &=(2^{n+1}-1) & &+(1+2+4+..+2^{n-1})\cdot(2^{n+1}-1)\\ &=(2^{n+1}-1) & &+(2^n-1)\cdot(2^{n+1}-1)=2^n\cdot(2^{n+1}-1)\text{ perfekt.}\end{aligned}$$

Aufg. 59/150: $0.5^n \xrightarrow[]{n\to\infty} 0,\ \ 1^n \xrightarrow[]{n\to\infty} 1,\ \ 2^n \xrightarrow[]{n\to\infty} \infty,\ \ q^n \xrightarrow[]{n\to\infty} 0,$ falls $-1<q<1$.

b) Für $-1<q<1$ gilt $q^{n+1}\to 0$ und damit $1+q+q^2+q^3+...+q^{n-1}+q^n+...=\frac{1}{1-q}$.

c) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+...=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$; d) $\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+...=\frac{1}{1-\frac{1}{5}}-1=0.25$;
e) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+...=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$.

f) Wenn der Jäger 1 500m zurückgelegt hat, ist der Hund schon zu Hause. Jetzt laufen Jäger und Hund aufeinander zu. Weil der Hund doppelt so schnell wie der Jäger ist, treffen sich Hund und Jäger nach 2 km, 1 km von zu Hause entfernt (diesen Punkt nennen wir T_1); dann ist der Jäger 500 m und der Hund 1km (nach dessen Umkehr) gelaufen. Jetzt ist der Hund 4km und der Jäger 2km gelaufen. Damit läuft der Hund: Bis zu T_1: 3+1; bis zu T_2: $3+1+1+\frac{1}{3}$;

bis zu T_3: $3+1+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}$; bis zu T_4: $3+1+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}$;

bis zu T_{n+1}: $3+1+1+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{3^n}=3-\frac{1}{3^n}+\sum_{i=0}^{n}\frac{2}{3^n}\xrightarrow{n\to\infty}3-0+2\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=3-0+2\cdot\frac{3}{2}=6$;

Das wäre auch einfacher gegangen (deshalb die Doppelindizierung): Da der Hund doppelt so schnell läuft, läuft der Hund also nicht 3 sondern 6 km.

g) i) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+...=1$;

ii) $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\frac{1}{1024}+...=\frac{1}{3}$;

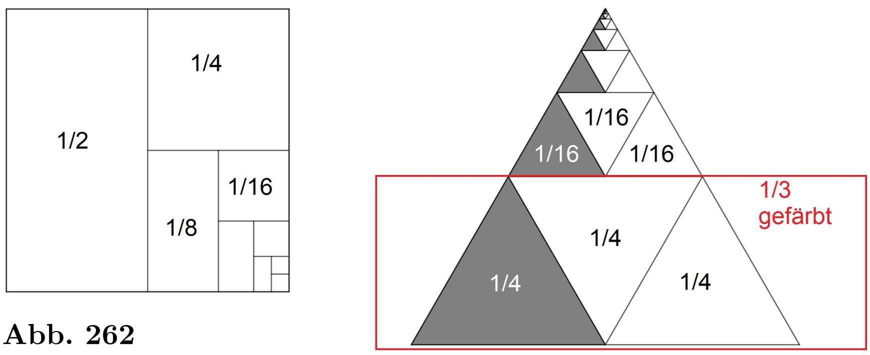


Abb. 262 Fraktale

h) Die Idee für diese Aufgabe stammt von M.Heger; ich habe die Formel iii) mit Taylorreihen gezeigt. Siehe auch die Aufgaben 203/516 + 328/824.

i) Seitenlänge $=1+a+a^2+a^3+a^4+....\ \underset{}{\overset{geo.\ Reihe}{=\!=\!=}}\ \frac{1}{1-a}$, weil $0<a<1$;

ii) Das Quadrat ist nicht wie eine Matrix, sondern wie ein Achsenkreuz indiziert. Spalte 1 hat Breite a^0; Spalte i hat Breite a^i; Zeile j hat Breite a^j; damit hat das Rechteck $R(i;j)$ in Spalte i und Zeile j die Fläche $|R(i;j)| = a^i \cdot a^j = a^{i+j}$; Eine Fläche von a^3 haben die Rechtecke $R(0;3)$, $R(1;2)$, $R(2;1)$ und $R(3;0)$; also alle $R(i;j)$ für die $i+j=3$ ist. Das Rechteck mit der Fläche a^n gibt es genau $n+1$ Mal. Man beginnt bei 0 zu zählen, damit $|R(i;j)| = a^i \cdot a^j = a^{i+j}$ gilt.

iii) $|Q| = \frac{1}{1-a} \cdot \frac{1}{1-a} = \frac{1}{(1-a)^2}$ oder $|Q| = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^4 + 5a^4 + ...[\![= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot a^{k-1}]\!]$;
Es gilt also $1 + 2a + 3a^2 + 4a^4 + 5a^4 + ... = \frac{1}{(1-a)^2}$ für $|a| < 1$ (wie bei der geometrischen Reihe).

iv) Sei $\mathcal{Y}$ geometrisch verteilt mit Wahrscheinlichkeit p und sei $q = 1-p$,
dann ist $P(\mathcal{Y} = k) = q^{k-1} \cdot p$;

$\mu = 1 \cdot p + 2 \cdot q \cdot p + 3 \cdot q^2 \cdot p + 4 \cdot q^3 \cdot p + 5 \cdot q^4 \cdot p + ...$
$\xlongequal{p\ ausklammern} p \cdot \left(1 + 2 \cdot q + 3 \cdot q^2 + 4 \cdot q^3 + 5 \cdot q^4 + ...\right)$
$\xlongequal{iii)} p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} \xlongequal{q=1-p} p \cdot \frac{1}{(1-(1-p))^2} = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$. (qed)

Aufg. 60/151: Dschingis Khan lebte im 12 Jahrhundert nach Christus und war ein mongolischer Stammesführer. Er zeugt so viele Kinder, dass man heute davon ausgeht, dass mehr als 15 Millionen Männer Nachfahren von ihm sind.

Khan hat $\underline{\infty}$ viele Kinder und einen Kuchen.

a) $\frac{1}{\infty} = 0$ also nichts, **b)** $\frac{1}{2^n}$, **c)** $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... = \frac{1}{1-0.5} - 1 = 1$ **d)** Der Durchschnitt ist $\frac{1}{\infty} = 0$ also bekommt durch die neue Teilung jedes Kind etwas und sogar mehr als der Schnitt.

Aufg. 60/152: ... nach E<u>insetzen</u> ...

a) Ein **Fixpunkt** ist ein x- Wert x_0, der sich nach Anwendung einer Funktion f nicht ändert: es gilt also $\underline{x_0 = f(x_0)}$.

b) $x = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 1$;

c) $x = x^3 \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$;

d) $x = 3x + 4 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x_0 = -2$; e) $x = x^2 - 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2, x_2 = -1$;

f) $x = \sqrt{x} \Rightarrow x^2 = x \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = 0$; Probe: $\surd$;

g) $f(x) \equiv 7$ bedeutet $f(x) = 7$ für alle $x \Rightarrow x = 7$;

h) Die Gleichung $x = \sin(x)$ ist transzendent (algebraisch unlösbar); es gilt $0 = \sin(0)$, also ist $x_0 = 0$ eine Lösung. Es gilt $\sin(x) < x$ für $x > 0$ und $\sin(x) > x$ für $x < 0$, damit gibt es keinen weiteren Schnittpunkt.

Aufg. 60/153: a) $9, 3, 1.732, 1.316, 1.147, 1.071, 1.035, 1.017, 1.009, 1.004, 1.002, ... \to 1$; $w_n = \sqrt[2n]{9}$;
b) $w_n = \sqrt[2n]{y} \to 1$, falls $y > 0$, $w_n \to 0$, falls $y = 0$, w_n ist nicht definiert, falls $y < 0$; **c)** $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$;

d) Die <u>Lösung</u> der Gleichung $\underline{g = \sqrt{g}}$ entspricht genau allen möglichen <u>Grenzwerten</u> der (rekursiven) Folge $\underline{x_{n+1} = \sqrt{x_n}}$ (abhängig vom <u>Startwert</u>).

e) Verallgemeinert: Wir finden alle möglichen Grenzwerte der rekursiven Folge mit dem Bildungsgesetz $x_{n+1} = f(x_n)$, indem wir die Gleichung $\underline{g = f(g)}$ nach g <u>auflösen</u>.

f)* $|f(a) - f(b)| \leq q \cdot |a-b| \Leftrightarrow \left|\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\right| \leq q \xrightarrow{a \to b = x} |f'(x)| \leq q$,
Sei $x_{n+1} = f(x_n)$, $x_2 - x_1 = f(x_1) - f(x_0) \leq q(x_1 - x_0)$,
$x_3 - x_2 = f(x_2) - f(x_1) \leq q(x_2 - x_1) \leq q^2(x_1 - x_0)$,
$x_4 - x_3 = f(x_3) - f(x_2) \leq q(x_3 - x_2) \leq q^3(x_1 - x_0)$, $x_{n+1} - x_n \leq q^n(x_1 - x_0)$,
$x_{n+k} - x_n \leq (q^n + q^{n+1} + q^{n+2} + .. + q^{n+k-1})(x_1 - x_0) = q^n(1 + q + q^2 + .. + q^{k-1})(x_1 - x_0) \leq q^n \cdot \frac{1}{1-q}(x_1 - x_0)$
Für $n \to \infty$ geht $q^n \cdot \frac{1}{1-q}(x_1 - x_0)$ gegen 0.

Aufg. 60/154: a) $x_{n+1} = 0.5x_n + 1 \Rightarrow g = 0.5g + 1 \Leftrightarrow 0.5g = 1 \Leftrightarrow g = 2$;
b) $x_{n+1} = 0.2x_n + 4 \Rightarrow g = 0.2g + 4 \Leftrightarrow 0.8g = 4 \Leftrightarrow g = 0.5$;

c) $B(t+1) = B(t) \cdot q$: $x = x \cdot q \Leftrightarrow x \cdot (1-q) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $q = 1$. $(y =)0$ ist die waagrechte Asymptote von q^x $(q \neq 1)$. Für $q < 1$ ist 0 der Grenzwert eines Zerfalls.

d) Heron: $x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}$, setze $x_n = x_{n+1} = x$: $x = \frac{x + \frac{a}{x}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a}$.
Für $x_0 > 0$ gilt $x_n \to +\sqrt{a}$ und für $x_0 < 0$ gilt $x_n \to -\sqrt{a}$. $x_0 = 0$ geht nicht.

e) $g = 0.6 \cdot g + 2 \Leftrightarrow 0.4g = 2 \Leftrightarrow g = 5$ (unabhängig vom Startwert);
f) 2 für $a_1 = \pm 2$, 1 für $|a_1| < 2$; **g)** 0 für $|a_1| < 2$, 2 für $a_1 = 2$ und -2 für $a_1 = -2$;
h) 1 für $a_1 = 1$ und -1 für $a_1 = -1$ (sonst alternierend);
i) $g = 0.4 \cdot g^2 \Leftrightarrow g(g - 0.4) = 0 \Leftrightarrow g_1 = 0$ (falls $|a_1| < 2.5$); $g_2 = 0.4$ (falls $|a_1| = 2.5$); kein Grenzwert für $|a_1| > 2.5$.

Wachstum

Aufg. 60/155: a) $B_1(t+1) = B(t) + 3; B_1(0) = 0$; $B_2(t+1) = B(t) + 2; B_2(0) = 2$;
$B_3(t+1) = B(t) \cdot 3; B_3(0) = 1$; $B_4(t+1) = B(t) \cdot 2; B_4(0) = 3$; $B_5(t+1) = B(t) + \frac{1}{2^t}; B_5(0) = 0$;

b) Seien $k, q, c \in \mathbb{R}$, $B(0) = c$; eine Folge der Form $B(t+1) = \underline{k + B(t)}$ (rekursiv) bzw. $B(t) = \underline{k \cdot t + c}$ heißt **lineares Wachstum**; eine Folge der Form $B(t+1) = \underline{q \cdot B(t)}$ (rekursiv) bzw. $B(t) = c \cdot q^t$ heißt **exponentielles Wachstum**.

c) lineares Wachstum: $B_1(t), B_2(t)$; exponentielles Wachstum: $B_3(t), B_4(t)$; weder noch: $B_5(t)$.

beschränktes Wachstum

Aufg. 61/156: (Banachscher-Fixpunkt-Satz) $B(t+1) = 0.9B(t) + 100000$, nach dem BFS gilt für g: $g = 0.9g + 100000 \Leftrightarrow g = 1000000$.

t	0	1	2	3	4	5
$B(t)$	2000000	1900000	1810000	≈ 1730000	≈ 1660000	≈ 1590000
$B(t)$	500000	550000	595000	635500	671950	704755
$B(t)$	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000

Aufg. 61/157: a) $B(0) = b$ $B(1) = q \cdot B(0) + c = qb + c$. Es wird für $t = 0$ eingesetzt.

b) $B(2) = q \cdot B(1) + c = q \cdot (q \cdot b + c) + c = q^2b + cq + c$,
$B(3) = q \cdot B(2) + c = q \cdot (q^2b + cq + c) + c = q^3b + cq^2 + cq + c$,
$B(4) = q \cdot B(3) + c = q \cdot (q^3b + cq^2 + cq + c) + c = q^4B(0) + cq^3 + cq^2 + cq + c$,
$B(5) = q^5b + cq^4 + cq^3 + cq^2 + cq + c$,
$B(n) = q^nb + cq^{n-1} + cq^{n-2} + .. + cq + c = q^nb + c(q^{n-1} + q^{n-2} + .. + q + 1) = q^nb + c\frac{1-q^n}{1-q}$;

$B(t) = q^t \cdot b + c\frac{1-q^t}{1-q} = q^tB(0) + c\frac{1-q^t}{1-q}$;

c) Betrachten Sie dazu auch die geometrische Folge aus Aufgabe 150. $-1 < q < 1$ oder $|q| < 1$.

d) Das Bildungsgesetz ist $B(t+1) = q \cdot B(t) + c$ - also muss die Gleichung $g = q \cdot g + c$ nach g aufgelöst werden $\Rightarrow g - q \cdot g = c \Leftrightarrow g(1-q) = c \Leftrightarrow g = \frac{c}{1-q}$.

e) Eine (rekursive) Folge mit dem Bildungsgesetz $B(t+1) = q \cdot B(t) + c$ heißt **beschränktes Wachstum** falls $\underline{-1 < q < 1}$ ist. Ihr Grenzwert (Schranke) ist $S = g = \frac{c}{1-q}$.
f) Beim beschränkten Wachstum überlagern sich ein lineares und ein exponentielles Wachstum.

Aufg. 61/158: a) $B(1) = 73$, $B(2) = 91.9$, $S = \frac{70}{0.7} = 100$.
b) $B(t+1) = 0.8B(t)$ oder $B(t) = 1000 \cdot 0.8^t$,
es handelt sich um ein beschr. Wt mit $c = 0, q = 0.8, S = 0$.

Aufg. 61/159: 'Schweine im Weltraum' (Weltall) ist ein Teil der Muppet Show und parodiert Raumschiff Enterprise; eines der Schweine ist Miss Piggy.

$B(t+1) = 1000 + 1.05 \cdot B(t)$, $B(n) = 1.05^n \cdot 1000 + 1000 \cdot \frac{1.05^n - 1}{0.05}$.
b) Sei $q = 1 + \frac{p}{100}$; $B(4) = (((a \cdot q + a) \cdot q + a) \cdot q + a) \cdot q + a = ((a \cdot q^2 + a \cdot q + a) \cdot q + a) \cdot q + a = (a \cdot q^3 + a \cdot q^2 + a \cdot q + a) \cdot q + a = a \cdot q^4 + a \cdot q^3 + a \cdot q^2 + a \cdot q + a = a \cdot (q^4 + q^3 + q^2 + q + 1) = a \cdot \frac{1-q^5}{1-q}$.
Allgemein: $B(n) = a \cdot (q^n + q^{n-1} + ... + q^2 + q + 1) = a \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
c) Das rekursive Bildungsgesetz ist von der Form $B(t+1) = c + q \cdot B(t)$ allerdings mit $q > 1$.

Aufg. 61/160: a) $g = 0.9 \cdot g + 100 \Leftrightarrow g = 1000$;

b) $B(t+1) = B(t) + 0.1 \cdot (1000 - B(t)) = B(t) + 100 - 0.1 \cdot B(t) = B(t+1) = 0.9 \cdot B(t) + 100$.

c) $B(t+1) = \underline{B(t)} + k \cdot (\underline{S} - \underline{B(t)})$ Die Darstellungsform hat den Vorteil, dass die Schranke abgelesen werden kann.

d) (i) $B(t+1) = 0.1 \cdot B(t) + 90 = B(t) + 0.9 \cdot (100 - B(t))$;

(ii) $B(t+1) = 0.4 \cdot B(t) + 100 = B(t) + 0.6 \cdot (500 - B(t))$;

(iii) $B(t+1) = 0.98 \cdot B(t) + 200 = B(t) + 0.02 \cdot (10000 - B(t))$;

Aufg. 62/161: a) $B(t+1) = 0.8 \cdot B(t) + 1000$, $B(0) = 2000$, $0.8^n \cdot 2000 + 1000 \cdot \frac{1-0.8^n}{0.2}$
b) $B(t+1) = 0.5 \cdot B(t) + 500$, $B(0) = 2000$, $0.5^n \cdot 2000 + 500 \cdot \frac{1-0.5^n}{0.5}$
c) $B(t+1) = 0.9 \cdot B(t) + 100$, $B(0) = 200$, $0.9^n \cdot 200 + 100 \cdot \frac{1-0.9^n}{0.1}$
oder zweite Lösung $B(t+1) = -0.9 \cdot B(t) + 1900$, dies ist aber kein beschränktes Wt $(0 < q < 1)$;
d) $B(t+1) = 0.3 \cdot B(t) + 70$, $B(0) = 1000$, $0.3^n \cdot 1000 + 70 \cdot \frac{1-0.3^n}{0.7}$

Rechnung für c): $S = \frac{c}{1-q} \Leftrightarrow c = S(1-q)$; $B(2) = q^2 B(0) + cq + c \Rightarrow 352 = q^2 \cdot 200 + 1000 \cdot (1-q) \cdot q + 1000 \cdot (1-q) \Leftrightarrow q^2 = 0.81 \Leftrightarrow q^2 = \pm 0.9$. $c = S(1-q) = 1000 \cdot (1-0.9) = 100$.

Aufg. 62/162: a) Hans bekommt $10 \cdot 4m$, Jan $20 \cdot m$ also bekommt Hans mehr als Jan. Weil seine Zeitschritte viel kleiner sind.

b) Hans: $B(t+1) = B(t) + 10$; Jan: $B(t+4) = B(t) + 20$;

c) Es ist leichter, Hans auf Schrittweite 4 zu setzen: Hans: $B(t+4) = B(t+3) + 10 = B(t+2) + 10 + 10 = .. = B(t) + 40$;

d) Änderungsrate ist definiert als $B(t+1) - B(t)$; bei Hans ist diese ÄR=10;

Aufg. 62/163: Notieren Sie dabei zuerst das <u>rekursive Bildungsgesetz</u>.

a) Lin Wt: $B(t+1) - B(t) = k$ die Änderungsrate ist konstant
Exp Wt: $B(t+1) - B(t) = qB(t) - B(t) = (q-1)B(t)$ die Änderungsrate ist proportional zum Bestand
Beschr. Wt: $B(t+1) - B(t) = k(S - B(t))$ die Änderungsrate ist proportional zum Sättigungsmanko (=was noch fehlt).

b) Beim linearen Wachstum ist die Änderungsrate $=\underline{k}$ also <u>konstant</u>.

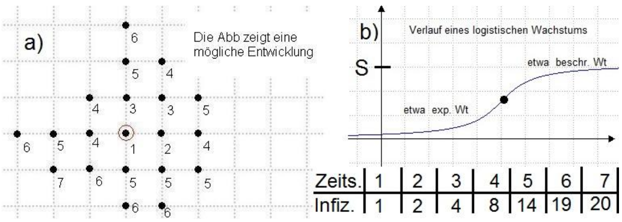
Beim exponentiellen Wachstum ist die Änderungsrate $=\underline{kB(t)}$ also <u>proportional</u> zum <u>Bestand</u>.

Beim beschränkten Wachstum ist die Änderungsrate $=\underline{k(S - B(t))}$ also <u>proportional</u> zum <u>Sättigungsmanko</u>.

c) Exp Wt: $B(t+2) - B(t) = (q^2 - 1)B(t)$, $B(t+n) - B(t) = (q^n - 1)B(t)$, Lin Wt: $B(t+2) - B(t) = 2k$, $B(t+n) - B(t) = nk$.

Aufg. 62/164: b) zuerst exponentielles Wachstum, dann beschränktes Wachstum;
c) Beim logistischen Wachstum ist die Änderungsrate proportional zum Produkt aus Bestand und Sättigungsmanko.

Logistisches Wachstum:
$B(t+1) - B(t) = \underline{k \cdot B(t) \cdot (S - B(t))}$.



Zeits.	1	2	3	4	5	6	7
Infiz.	1	2	4	8	14	19	20

d) Finden Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes (BFS) die möglichen Grenzwerte des logistischen Wachstums.

$B(t+1) = B(t) + k \cdot B(t) \cdot (S - B(t))$, mit $g = B(t+1) = B(t)$ gilt

$g = g + k \cdot g \cdot (S - g) \Leftrightarrow k \cdot g \cdot (S - g) = 0 \Leftrightarrow k = 0$ oder $g = 0$ oder $g = S$.

e) i) $B(t)$ nähert sich monoton $S = 100$ an; ii) $B(t)$ alterniert zwischen 50 und 125;
iii) $B(t) \to -\infty$; iv) Das wüsste ich auch gerne; bitte geben Sie Lösungsvorschläge an mich weiter.

f) $B(t+1) = q \cdot B(t) - k \cdot B^2(t)$: g eingesetzt: $g = q \cdot g - k \cdot g^2$; 1. Fall $g = 0$ möglicher Grenzwert; (jetzt darf durch g geteilt werden): $1 = q - k \cdot g \Leftrightarrow \frac{q-1}{k} = g$.

g) Ich habe noch keine gefunden (habe aber auch noch nicht ernsthaft gesucht).

h) ... logistische Wachstümer, deren assoziierte Funktion zwei (verschiedene) waagrechte Asymptoten hat.

Aufg. 63/165: a) $B(t+1) = B(t) + 0.01 \cdot B(t)(100 - B(t))$, $B(6) > 99$,
b) es wäre $B(t+1) = B(t) + 0.02 \cdot B(t)(100 - B(t))$, $B(3) \approx 112 > 100$.

c) es wäre $B(1) - B(0) = k \cdot B(0) \cdot (S - B(0))$ $B(1) - 0 = k \cdot 0 \cdot (S - 0) = 0$, $B(t)$ wäre also identisch 0.

d) $B(1) = 19.9$, $B(2) \approx 39.404$, $S = 2S - 0.001 \cdot S^2 \Rightarrow S_1 = 0, S_2 = 1000$.

e) Deutschland: logistisches Wt; Europa: lin Wt oder beschr Wt; Welt exp Wt.

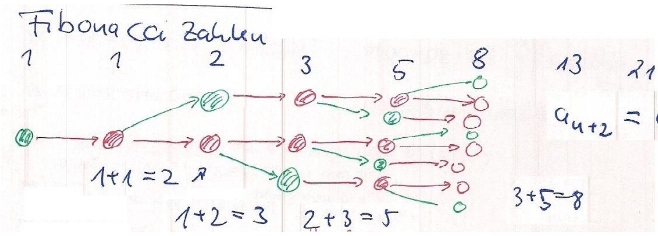
Aufg. 63/166: a) $B(t+1) = B(t) + 0.0001 \cdot B(t) \cdot (1\,000 - B(t)),\ B(0) = 100$;
b) $B(t+1) = B(t) + 0.00008 \cdot B(t) \cdot (10\,000 - B(t)),\ B(0) = 1000$;
c) $B(t+1) = B(t) + 0.00005 \cdot B(t) \cdot (1\,000 - B(t)),\ B(0) = 200$;
d) $B(t+1) = B(t) + 0.00005 \cdot B(t) \cdot (5\,000 - B(t)),\ B(0) = 1\,000$;

Aufg. 63/167: a) Sie glauben, dass er Ihr Geld anlegt, tatsächlich lässt er aber einen Palast bauen.
b) 2 €; c) 1.5 €; $(1+\frac{1}{2}) + (1+\frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{2} = (1+\frac{1}{2}) \cdot (1+\frac{1}{2}) = 1.5^2 = 2.25$ €
d) 1.7.: $(1+\frac{1}{4}) + (1+\frac{1}{4}) \cdot \frac{1}{4} = (1+\frac{1}{4})^2$; 1.10.: $(1+\frac{1}{4})^2 + (1+\frac{1}{4})^2 \cdot \frac{1}{4} = (1+\frac{1}{4})^3$;
31.12.: $(1+\frac{1}{4})^3 + (1+\frac{1}{4})^3 \cdot \frac{1}{4} = (1+\frac{1}{4})^4$; $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ e) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$.

15.4.3 LöVo zu Einheit 4.3 (Folgen UE 11_1)

Aufg. 64/168: a) $h = 4,5 \cdot n$; Nein, denn der Definitionsbereich sollte eher $\mathbb{N}$ sein, weil es keine halben Bausteine gibt. $\mathbb{D} = \mathbb{N}_0$; $\mathbb{W} = \mathbb{R}$.
b) Sei $a_n = 4.5n$ und $f(x) = 4.5x$, dann ist a_n die zu $f(x)$ **induzierte** Folge und $f(x)$ ist eine zu a_n **assoziierte** Funktion. **c)** $f_a(x) = 2^x$; $f_b(x) = 7x + 3$; $f_c(n) = \cos(\pi x)$, $f_d(n) = \frac{\cos(\pi x)}{x}$.
d) aF: $a_n = m \cdot n + c$; $B(t+1) = B(t) + m$, $B(0) = c$. gF: $b_n = c \cdot q^n$; $B(t+1) = B(t) \cdot q$, $B(0) = c$.

e) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_0 = 1, a_1 = 1$; (Abb. 263)



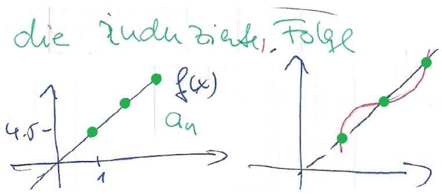


Abb. 263 Fibonacci induzierte Folge

Aufg. 64/169:

			rekursive Form		GW	Schranken
a)	12,14;	$a_n = 2n$; AF; smw;	$a_{n+1} = a_n + 2$,	$a_1 = 2$;	a_n div.	$a_n \geq 2$
b)	11,13;	$a_n = 2n - 1$; AF; smw;	$a_{n+1} = a_n + 2$,	$a_1 = 1$;	a_n div.	$a_n \geq 1$
c)	15,18;	$a_n = 3n - 3$; AF; smw;	$a_{n+1} = a_n + 3$,	$a_1 = 0$;	a_n div.	$a_n \geq 0$
d)	8,16;	$a_n = \frac{2^n}{4}$; GF; smw;	$a_{n+1} = a_n \cdot 2$,	$a_1 = \frac{1}{2}$;	a_n div.	$a_n \geq \frac{1}{2}$
e)	$\frac{1}{27}, \frac{1}{81}$;	$a_n = \frac{27}{3^n}$; GF; smf;	$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{3}$,	$a_1 = 9$;	$a_n \to 0$	$0 < a_n \leq 9$
f)	2, 2;	$a_n \equiv 2$; AF, (GF); mw; mf;	$a_{n+1} = a_n$,	$a_1 = 2$;	$a_n \to 2$	$2 \leq a_n \leq 2$
g)	$\frac{1}{6}, \frac{1}{7}$;	$a_n = \frac{1}{n}$; smf;	$a_{n+1} = a_n - \frac{1}{n \cdot (n+1)}$,	$a_1 = 1$;	$a_n \to 0$	$0 < a_n \leq 1$
h)	$-1, 1$;	$a_n = (-1)^n$; (GF);	$a_{n+1} = a_n \cdot (-1)$,	$a_1 = -1$;	a_n div.	$-1 \leq a_n \leq 1$
i)	0, 2;	$a_n = (-1)^n + 1$;	$a_{n+1} = a_n - 2(-1)^n$,	$a_1 = 0$;	a_n div.	$0 \leq a_n \leq 2$
j)	$-\frac{1}{6}, \frac{1}{7}$;	$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$;	$a_{n+1} = a_n + (-1)^n \cdot (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n})$,	$a_1 = 1$;	$a_n \to 0$	$\frac{-1}{2} \leq a_n \leq 1$
k)	$\frac{1}{7}, 0$;	$a_n = \frac{(-1)^{n+1}+1}{2n}$;	$a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^n+1}{2(n+1)} - \frac{(-1)^{n+1}+1}{2n}$,	$a_1 = 1$;	$a_n \to 0$	$0 \leq a_n \leq 1$
l)	$-5, 6$;	$a_n = (-1)^n \cdot n$;	$a_{n+1} = \frac{-a_n(n+1)}{n}$,	$a_1 = -1$;	a_n div.	a_n unbeschr.
m)	7.5, 9;	$a_n = 1.5 \cdot n$; AF; smw;	$a_{n+1} = a_n + 1.5$,	$a_1 = 1.5$;	a_n div.	$\frac{3}{2} \leq a_n$
n)	$-5, -7$;	$a_n = -2n + 5$; AF; smf;	$a_{n+1} = a_n - 2$,	$a_1 = 3$;	a_n div.	$3 \geq a_n$
o)	6, 9;	$a_n = (-1)^n + n$;	$a_{n+1} = a_n + (-1)^{n+1}(2n+1)$,	$a_1 = 0$;	a_n div.	$0 \leq a_n$

AF = arithmetische Folge; GF = geometrische Folge; GW = Grenzwert; div. = divergent; smw =streng monoton wachsend;

(GF) heißt: Eigentlich ist es eine geometrische Folge, aber ein Wachstumsfaktor q gilt: $q > 0, q \neq 1$, damit ist a_n kein exponentielles Wachstum.

Es gibt keinen Algorithmus die explizite Form einer Folge zu finden, der Fortgang ist nicht einmal eindeutig (siehe auch Aufgabe 277/766). Deshalb wird diese Aufgabenstellung oft auch als Intelligenztest verwendet. Ebenso sind rekursive Darstellungen nicht eindeutig.

Wenn Sie keine rekursive Darstellung finden können Sie einen Ansatz von Sd (nicht schön aber selten) nehmen:

Schreiben Sie die *Differenz* $a_{n+1} - a_n$ explizit auf und lösen Sie die resultierende Gleichung nach a_{n+1} auf. Beispiel: Sei $a_n = m \cdot n + c$ (arithmetische Folge), dann ist $a_{n+1} = m \cdot (n+1) + c$.

Die Differenz ist $a_{n+1} - a_n = m \cdot (n+1) + c - (m \cdot n + c)$; die Gleichung nach a_{n+1} aufgelöst:

$$a_{n+1} - a_n = m \cdot n + m + c - m \cdot n - c = m \quad \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n + m.$$

Dies ist genau die rekursive Darstellung einer arithmetischen Folge.

Statt der Differenz oben können Sie auch den Quotienten nehmen (für geometrische Folgen); ja selbst Summe oder Produkt funktionieren.

Aufg. 64/170: a) a_n smw. $\Leftrightarrow$ $a_n < a_{n+1}$ für alle n. Aus $f(n) < f(n+1) \not\Rightarrow f$ smw. Beispiel $f(x) = \sin(2\pi x) + \frac{x}{100}$. b) Sei a_n eine Folge, $f(x)$ eine zu a_n assoziierte Funktion, die streng monoton wachsend ist, dann ist a_n auch smw.

c) Extrempunkte zerstören die Monotonie einer Funktion, Terrassenpunkte hingegen nicht.

d) a_n subtrahieren bzw. durch a_n dividieren (aber) nur für $a_n > 0$. a_n smf $\Leftrightarrow a_{n+1} - a_n < 0$ oder $a_n > 0$ smf $\Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$.

e)

$a)\ a_{n+1} - a_n = 2 > 0$	$b)\ a_{n+1} - a_n = 2 > 0$	$c)\ a_{n+1} - a_n = 3 > 0$
$d)\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 > 1$	$e)\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3} < 1$	$f)\ 2 \geq 2$
$g)\ a_{n+1} - a_n = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$	$m)\ a_{n+1} - a_n = 2 > 1.5$	$n)\ a_{n+1} - a_n = -2 < 0$

f) **i)** a_n ist smf: $a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)+2} < \frac{1}{n+2} \Leftrightarrow \frac{1}{n+3} < \frac{1}{n+2} \Leftrightarrow n+2 < n+3$ (die Nenner sind > 0) $\Leftrightarrow 2 < 3\surd$;
ii) b_n ist smw: $b_{n+1} > b_n \Leftrightarrow \frac{(n+1)-1}{(n+1)} > \frac{n-1}{n} \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} > \frac{n-1}{n} \Leftrightarrow n^2 > n^2 - 1 \Leftrightarrow 0 > -1\surd$;
iii) c_n ist smf: $c_{n+1} < c_n \Leftrightarrow \frac{3(n+1)+2}{2(n+1)} < \frac{3n+2}{2n} \Leftrightarrow \frac{3n+5}{2n+2} < \frac{3n+2}{2n} \Leftrightarrow 6n^2 + 10n < (3n+2)\cdot(2n+2) \Leftrightarrow 6n^2 + 10n < 6n^2 + 10n + 4 \Leftrightarrow 0 < 4\surd$;
iv) $d_{n+1} > d_n \Leftrightarrow \frac{5(n+1)-2}{2(n+1)+1} > \frac{5n-2}{2n+1} \Leftrightarrow \frac{5n+5-2}{2n+2+1} > \frac{5n-2}{2n+1} \Leftrightarrow \frac{5n+3}{2n+3} > \frac{5n-2}{2n+1}$
$\Leftrightarrow (5n+3)(2n+1) > (5n-2)(2n+3) \Leftrightarrow 10n^2 + 6n + 5n + 3 > 10n^2 + 15n - 4n - 6 \Leftrightarrow 3 > -6\ \surd$;
v) e_n ist smw: $e_{n+1} > e_n \Leftrightarrow \frac{(n+1)^2}{(n+1)+1} > \frac{n^2}{n+1} \Leftrightarrow (n+1)^2(n+1) > n^2(n+2)$
$\Leftrightarrow n^3 + 3n^2 + 3n + 1 > n^3 + 2n^2 \Leftrightarrow n^2 + 3n + 1 > 0\surd$;
vi) $\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+2(n+1)+2} > \frac{n^2}{n^2+2n+2} \Leftrightarrow \frac{n^2+2n+1}{n^2+4n+5} > \frac{n^2}{n^2+2n+2} \Leftrightarrow (n^2+2n+1)(n^2+2n+2) > n^2(n^2+4n+5)$
$\Leftrightarrow n^4 + 2n^3 + n^2 + 2n^3 + 4n^2 + 2n + 2n^2 + 4n + 2 > n^4 + 4n^3 + 5n^2$
$\Leftrightarrow 4n^3 + 7n^2 + 6n + 2 > 4n^3 + 5n^2 \Leftrightarrow 2n^2 + 6n + 2 > 0\surd$;

Aufg. 64/171: a) Eine Folge (a_n) ist nach oben beschränkt $\Leftrightarrow$ Es gibt ein $k \in \mathbb{R}$ mit $\underline{a_n \leq k}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Eine Folge (a_n) ist nach unten beschränkt $\Leftrightarrow$ Es gibt ein $k \in \mathbb{R}$ mit $a_n \geq k$ für alle $n \in \mathbb{N}$. a_n (total) beschr. $\Leftrightarrow$ es gibt Zahlen m_1, m_2 mit $m_1 \leq a_n \leq m_2$ für alle n.
$-1, 2, -3, 4, ...$ ist total unbeschr.

b+c) i)	$a_n = \frac{1}{n+2}$	$= (\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7} ....) \to 0,$	koS=$\frac{1}{3}$, guS=0;
ii)	$b_n = \frac{n-1}{n}$	$= (0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ...) \to 1,$	koS=1, guS=0;
iii)	$c_n = \frac{3n+2}{2n}$	$= (2.5, 2, \frac{11}{6}, 1.75, 1.7, 1.\overline{6}, ...) \to 1.5,$	koS=2.5, guS=1.5;
iv)	$d_n = \frac{5n-2}{2n+1}$	$= (1, 1.6, \approx 1.86, 2, \approx 2.1, 2.15...) \to 2.5,$	koS=2.5, guS=1;
v)	$e_n = \frac{n^2}{n+1}$	$= (0.5, 1.\overline{3}, 2.25, 3.2, \approx 4.17...)$ konvergiert nicht,	eine koS gibt es nicht, guS=0.5;
vi)	$f_n = \frac{n^2}{n^2+2n+2}$	$= (0.2, 0.4, \approx 0.56, \approx 0.62, \approx 0.68...) \to 1,$	koS=1, guS=0.2;

c) Eine Folge heißt **konvergent** zum Grenzwert a, wenn sich die Folge dem Grenzwert beliebig ahhähert (siehe Abschnitt 4.7.3). Der Grenzwert darf auch erreicht werden.

a_n geht gegen a wenn die Folge von einer Stelle an auf einem Streifen der Breite 2ε um a nicht mehr herauskommt. Grenzwerte sind immer eindeutig.

d) $a_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$; e) $a_n = (-1)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$; f) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ nicht konvergent;
g) $a_n \equiv 2 \xrightarrow{n\to\infty} 2$; h) $a_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{2} \cdot \frac{1}{2n-1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$; i) $a_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{2} \cdot \frac{n}{n+1}$ kein Grenzwert;
j) $a_n = 2^{n-1}$ kein Grenzwert;

k) Es übertragen sich: beschränkt, monoton und konvergent, aber nicht unbeschränkt, divergent und auch nicht 'nicht monoton'.

Aufg. 65/172: a) Definition **Konvergenz** $a_n \to a \Leftrightarrow$ Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\underline{n_\varepsilon}$ abhängig von $\underline{\varepsilon}$, so dass für alle $n \geq n_\varepsilon$ $|a_n - a| \leq \underline{\varepsilon}$.

b) Es gibt eine Zahl $\underline{\varepsilon}$, so dass zu jedem noch so kleinen Abstand $\underline{\varepsilon}$ ein Index $\underline{n_\varepsilon}$ abhängig von $\underline{\varepsilon}$ gibt, so dass alle Folgenglieder a_n mit $\underline{n \geq n_\varepsilon}$ näher an $\underline{a}$ liegen als $\underline{\varepsilon}$.

Konvergenz nach Sd: Gib $\underline{\varepsilon}$ vor und suche dann das $\underline{n_0}$ abhängig von $\underline{\varepsilon}$.

Ansatz: Löse $|a_n - a| = \varepsilon$ nach $\underline{\varepsilon}$ auf.

d) $a, a, a, a, a, a, ... \to a$ e) $a_n \to -2$; $b_n \to \frac{-4}{3}$; f) $(a_n + b_n) \to \frac{-10}{3}$; $(a_n \cdot b_n) \to \frac{-8}{3}$ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Analoges gilt für Minus und Geteilt.

k) Man findet Grenzwerte rekursiver Folgen mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes. Siehe Abs. 4.10.2 und 4.2.2 Aufgaben 152 bis 154.

Aufg. 65/173: a) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \underline{0}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} k = \underline{k}$ (k konstant unabhängig von n).

a_n : (Ausführliche Version) - nicht KA relevant: $\lim_{n\to\infty} \frac{(3+2n)\cdot\frac{1}{n}}{-n\cdot\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n}+2}{-1} = \frac{\lim_{n\to\infty}(\frac{3}{n}+2)}{\lim_{n\to\infty} -1} = \frac{\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n} + \lim_{n\to\infty} 2}{-1} = \frac{3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+2}{-1} = \frac{3\cdot 0+2}{-1} = -2.$ b_n : (Kurzversion) $\frac{(4-4n)\cdot\frac{1}{n}}{(3n+2)\cdot\frac{1}{n}} = \frac{\frac{4}{n}-4}{3+\frac{2}{n}} \to \frac{-4}{3}$.

Die Folgen aus Aufgabe 170 e) werden in Kurzversion gerechnet: Tipp: Erweitern;

i) $a_n : \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} =' \frac{1}{\infty}' = 0,$ **ii)** $b_n : \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-1/n}{1} = \frac{1-0}{1} = 1,$

iii) $c_n : \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+2}{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3+2/n}{2} = \frac{3+0}{2} = 1.5,$

iv) $d_n : \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n-2}{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5-2/n}{2+1/n} = \frac{5-0}{2+0} = 2.5,$

v) Schlechte Notation: $'e_n : \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{1+1/n} = \infty'.$

Weil ∞ als Limes nicht vorkommen darf schreiben wir stattdessen $e_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$.

vi) $f_n : \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+2/n+2/n^2} = \frac{1}{1+0+0} = 1.$

b) $\frac{26-5n^2}{n^2-3n-2} \xrightarrow{n\to\infty} -5$; c) $\sqrt{n^2+2n-4} - \sqrt{n^2-3n+8} \xrightarrow{n\to\infty} -2.5$; d) $\sqrt{2n^2-n+10} - \sqrt{2n^2-4n+10} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{-5}{2\sqrt{2}}$; e) $\sqrt[3]{n^3+n^2} - \sqrt[3]{n^3-n^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{-5}{2\sqrt{2}}$;

f) $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e^x$ für $x \geq 0$.

Aufg. 66/174: a,b) LöVo fehlen noch

c) Sei $a_n = (1; 1.4; 1.41; 1.414; 1.4142; 1.41421; ...)$. Jedes Folgenglied ist (sogar) eine rationale Zahl. a_n ist monoton wachsend und beschränkt also konvergent (Grenzwert $\sqrt{2}$).

Aufg. 66/175: Satz 1: a_n konvergent $\Rightarrow a_n$ beschränkt und
Satz 2: a_n monoton und beschränkt $\Rightarrow a_n$ konvergent (Abb. 264).

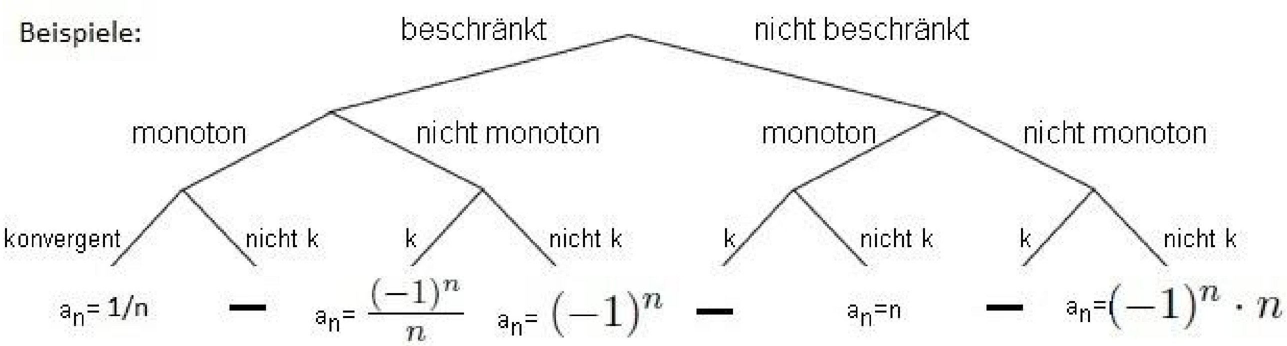


Abb. 264 Eigenschaften von Folgen

15.4.4 LöVo zu Kapitel 4.4 (Vollständige Induktion UE M+$_0$)

Aufg. 66/176: a) Verwenden Sie die Kettenregel. $\left(e^{2x}\right)''' = \left(2e^{2x}\right)'' = \left(2^2e^{2x}\right)' = 2^3e^{2x}$;

$$\left(e^{2x}\right)^{(n)} = 2^n e^{2x}.$$

b) (0) IA: Die nullte Ableitung entspricht der Funktion selbst: $f^{(0)}(x) = f(x)$.
$\left(e^{2x}\right)^{(0)} = 2^0e^{2x} = e^{2x}\surd$; $\left(e^{2x}\right)^{(1)} = 2^1e^{2x} = 2e^{2x}\surd$;

c) (1) IV: $A_n : \left(e^{2x}\right)^{(n)} = 2^ne^{2x}$. (2) IB: $A_{n+1} : \left(e^{2x}\right)^{(n+1)} = 2^{n+1}e^{2x}$.
Durch Ableiten kommt man von A_n auf A_{n+1}.
(3) $\left(\left(e^{2x}\right)^{(n)}\right)' = \left(2^ne^{2x}\right)' = 2\cdot 2^ne^{2x} = 2^{n+1}e^{2x}\surd$ oder eben qed (4).

e) (0) IA: $(e^{kx})^{(0)} = k^0e^{kx} = e^{kx}\surd$. (1) IV: $(e^{kx})^{(n)} = k^ne^{kx}$. (2) IB: $(e^{kx})^{(n+1)} = k^{n+1}e^{kx}$.

$$\begin{array}{lll} \text{(3) Rg:}\quad (e^{kx})^{(n+1)} & = \left((e^{kx})^{(n)}\right)' & \text{Definition der } n+1 \text{ Ableitung} \\ & = \left(k^ne^{kx}\right)' & \text{nach IV} \\ & = k\cdot k^ne^{kx} & \text{Ableitung nach Kettenregel} \\ & = k^{n+1}e^{kx} & \surd\ (4). \end{array}$$

Aufg. 67/177:

$$\begin{array}{lll} \textbf{a)}\ \text{Formel:} & \text{(1) IV:} & (xe^x)^{(n)} = (x+n)e^x. \\ & \text{(0) IA:} & (xe^x)^{(0)} = (x+0)e^x = f_a(x)\surd. \\ & \text{(2) IB:} & (xe^x)^{(n+1)} = (x+n+1)e^x. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{(3) Rg:}\quad (xe^x)^{(n+1)} & = \left((xe^x)^{(n)}\right)' & \text{Definition der } n+1 \text{ Ableitung} \\ & = ((x+n)e^x)' & \text{nach IV} \\ & = (x+n)e^x + e^x & \text{nach Kettenregel} \\ & = (x+n+1)e^x & \surd\ (4). \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \textbf{b)}\ \text{Formel:} & \text{(1) IV:} & (x^2e^x)^{(n)} = (x^2+2nx+n(n-1))e^x. \\ & \text{(0) IA:} & (x^2e^x)^{(0)} = (x^2+2\cdot 0\cdot x + 0\cdot(0-1))\cdot e^x = f_b(x)\surd. \\ & \text{(2) IB:} & (x^2e^x)^{(n+1)} = (x^2+2(n+1)x+(n+1)n))e^x. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{(3) Rg:}\quad (x^2e^x)^{(n+1)} & = \left((x^2e^x)^{(n)}\right)' & \text{Definition der } n+1 \text{ Ableitung} \\ & = \left((x^2+2nx+n(n-1))e^x\right)' & \text{nach IV} \\ & = (x^2+2nx+n(n-1))e^x + (2x+2n)e^x & \text{nach Kettenregel} \\ & = (x^2+2n+2x+n^2-n+2n)e^x + (2x+2n)e^x & \text{ausmultipliziert} \\ & = (x^2+2(n+1)x+(n+1)n))e^x & \surd\ (4). \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \textbf{c)}\ \text{Formel:} & \text{(1) IV:} & ((ax+b)^{-1})^{(n)} = n!(-a)^n(ax+b)^{-n-1}. \\ & \text{(0) IA:} & ((ax+b)^{-1})^{(0)} = 0!(-a)^0(ax+b)^{-0-1} = f_c(x)\surd. \\ & \text{(2) IB:} & ((ax+b)^{-1})^{(n+1)} = (n+1)!(-a)^{n+1}(ax+b)^{-(n+1)-1}. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{(3) Rg:}\quad ((ax+b)^{-1})^{(n+1)} & = \left(((ax+b)^{-1})^{(n)}\right)' & \text{Definition der } n+1 \text{ Ableitung} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} = \left(n!(-a)^n(ax+b)^{-n-1}\right)' & \text{nach IV} \\ = (-n-1)\cdot a\cdot n!(-a)^n(ax+b)^{-n-2} & \text{nach Kettenregel und Potenzregel} \\ = (n+1)!(-a)^{n+1}(ax+b)^{-(n+1)-1} & \surd\ (4). \end{array}$$

$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$, Behauptung $((1-x)^{-n})' = n!\cdot(1-x)^{-n-1}$

$$\begin{array}{lll} \text{(4) Rg:} \quad (\frac{1}{1-x})^{(n+1)} & = \left((\frac{1}{1-x})^{(n)}\right)' & \text{Definition der } n+1 \text{ Ableitung} \\ & = \left(n!\cdot(1-x)^{-n-1}\right)' & \text{nach IV} \\ & = n!\cdot(-1)\cdot(-n-1)\cdot(1-x)^{-n-2} & \text{nach Kettenregel} \\ & = (n+1)!\cdot(1-x)^{-n-2} & \surd\ (5) \end{array}$$

Aufg. 67/178: a) $A_{n+1}: 1+2+3+4+5+...+n+n+1 = \frac{(n+1)^2+(n+1)}{2}$. S_{n+1} entsteht aus S_n durch Addition von $n+1$; $S_{n+1} = S_n + n+1$.

b) Formel:

$$\begin{array}{ll} \text{(1) IV:} & 1+2+3+4+5+...+n = \frac{n^2+n}{2}. \\ \text{(0) IA:} & 1 = \frac{1^2+1}{2} = 1\surd. \\ \text{(2) IB:} & 1+2+3+4+5+...+n+n+1 = \frac{(n+1)^2+(n+1)}{2}. \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{(3) Rg:} & \underbrace{1+2+3+4+5+...+n} & +n+1 & S_{n+1} \text{ der IB} \\ = & \frac{n^2+n}{2} & +n+1 & \text{nach IV} \\ = & \frac{n^2+2n+1+1+n}{2} & & = \frac{(n+1)^2+(n+1)}{2} \quad \surd\ (4). \end{array}$$

c) $A_4: S_4 = 1+3+5+7 = 16$; $A_5: S_5 = 1+3+5+7+9 = 25$; letzter Summand: $2n-1$.

Formel:

$$\begin{array}{ll} \text{(1) IV:} & 1+3+5+7+..+2n-1 = n^2. \\ \text{(0) IA:} & 1 = 1^2\surd. \\ \text{(2) IB:} & 1+3+5+7+..+2n-1+2(n+1)-1 = (n+1)^2. \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{(3) Rg:} & \underbrace{1+3+5+7+..+2n-1} & +2(n+1)-1 & S_{n+1} \text{ der IB} \\ = & n^2 & +2n+1 & \text{nach IV} \\ = & (n+1)^2 & \surd\ (4). & \end{array}$$

d) i) Formel:

$$\begin{array}{ll} \text{(1) IV:} & 1^2+2^2+3^2+..+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \\ \text{(0) IA:} & 1^2 = \frac{1\cdot(1+1)\cdot(2+1)}{6}\surd. \\ \text{(2) IB:} & 1^2+2^2+3^2+..+n^2+(n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{(3) Rg:} & \underbrace{1^2+2^2+3^2+..+n^2} & +(n+1)^2 & S_{n+1} \text{ der IB} \\ = & \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & +\frac{6n^2+12n+6}{6} & \text{nach IV} \\ = & \frac{2n^3+3n^2+n+6n^2+12n+6}{6} & & = \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6} \quad = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \quad \surd\ (4). \end{array}$$

Der letzte Schritt der Rg kann ruhig rückwärts gerechnet werden.

d) ii) Formel:

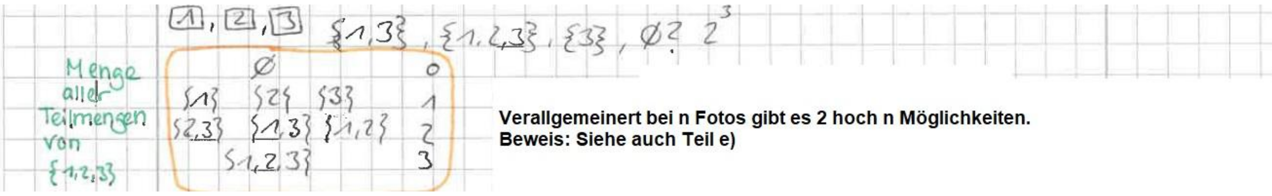
$$\begin{array}{ll} \text{(1) IV:} & 1+q+q^2+..+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}. \\ \text{(0) IA:} & q^0 = \frac{1-q^{0+1}}{1-q} = 1\surd. \end{array}$$

$$\text{(2) IB:}\quad 1+q+q^2+..+q^n+q^{n+1}=\tfrac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q}.$$

$$\begin{array}{llll}
\text{(3) Rg:} & \underbrace{1+q+q^2+..+q^n} & +q^{n+1} & S_{n+1} \text{ der IB} \\
= & \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & +\frac{q^{n+1}(1-q)}{1-q} & \text{nach IV} \\
= & \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} & & =\frac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q} \ \surd \ (4).
\end{array}$$

e) Sinan K. + Malek K. sind zwei Schüler des Abijahrgangs 2018.

Siehe Abbildung:



f) Zeigen Sie, dass M $\underline{\binom{n}{k}}$ k-elementige Teilmengen hat und dass $\mathcal{P}(M)$ $\underline{2^n}$ Elemente hat.

... Die Aussage kann mit Induktion: Rekursionsformel der Binomialkoeffizienten gezeigt werden. Die Idee ist hier, dass eine $k+1$-elementige Teilmenge aus zwei k-elementigen Teilmengen zusammengesetzt werden kann. Es kann auch über Kombinatorik gezeigt werden: Die Menge M wird als Tupel geschrieben; das Tupel k mal 'g'ewählt $n-k$ mal 'n'icht gewählt kann auf $\binom{n}{k}$ Weisen permutiert werden.

$|\mathcal{P}(M)|=2^n$: Entweder mit Induktion: $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+..+\binom{n}{n}=2^n$ oder mit folgender Idee: Sei $M=\{1,2,..,n\}$ und $\mathcal{P}(M)$ habe 2^n Elemente (IV). Sei $M'=\{1,2,..,n,n+1\}$, dann kann jedes Element von $\mathcal{P}(M')$ aus $\mathcal{P}(M)$ (mit 2^n Elementen) und aus jedem Element von $\mathcal{P}(M)$ vereinigt mit $\{n+1\}$ (wieder 2^n Elemente und verschieden von $\mathcal{P}(M)$, weil $\{n+1\}$ in M nicht vorkommt).

Aufg. 67/179: $\mathbb{N}$ ist hier $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,4,...\}$. **a)** Eine natürliche Zahl n ist durch 3 teilbar, wenn es eine natürliche Zahl x gibt, mit $n=\underline{3\cdot x}$. **b)** $n^3+2n=3\cdot x$.

$$\begin{array}{lll}
\textbf{c)}\text{ Formel:} & \text{(1) IV:} & n^3+2n=3\cdot x \text{ oder } n^3=3x-2n. \\
 & \text{(0) IA:} & 1^3+2\cdot 1=3=3\cdot 1\surd. \\
 & \text{(2) IB:} & (n+1)^3+2(n+1)=3\cdot x'.
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\text{(3) Rg:} & (n+1)^3+2(n+1) & \text{linke Seite der IB} \\
= & n^3+3n^2+3n+1+2n+2 & \text{Binomische Formel} \\
= & (3x-2n)+3n^2+3n+1+2n+2 & \text{nach IV} \\
= & 3x+3n^2+3n+3 & =3(x+n^2+n+1) \quad \surd \text{ mit } x'=x+n^2+n+1 \ (4).
\end{array}$$

Die Idee, die IV nach der höchsten Potenz aufzulösen funktioniert nicht immer, aber erstaunlich oft.

$$\begin{array}{lll}
\textbf{d)}\text{ i) Formel:} & \text{(1) IV:} & n^2+n=2\cdot x \text{ oder } n^2=2x-n. \\
 & \text{(0) IA:} & 1^2+1=2=2\cdot 1\surd. \\
 & \text{(2) IB:} & (n+1)^2+(n+1)=2\cdot x'.
\end{array}$$

$$\begin{array}{rlll}
\text{(3) Rg:} & (n+1)^2+(n+1) & \text{linke Seite der IB} & \\
= & n^2+2n+1+n+1 & \text{Binomische Formel} & \\
= & (2x-n)+2n+1+n+1 & \text{nach IV} & \\
= & 2x+2n+2 & =2(x+n+1) & \surd \text{ mit } x'=x+n+1 \text{ (4).}
\end{array}$$

$$\textbf{d)} \text{ ii) Formel: } \begin{array}{ll}
\text{(1) IV:} & n^3-n=6\cdot x \text{ oder } n^3=6x+n. \\
\text{(0) IA:} & 1^3-1=0=6\cdot 0\surd. \\
\text{(2) IB:} & (n+1)^3-(n+1)=6\cdot x'.
\end{array}$$

$$\begin{array}{rlll}
\text{(3) Rg:} & (n+1)^3-(n+1) & \text{linke Seite der IB} & \\
= & n^3+3n^2+3n+1-n-1 & \text{Binomische Formel} & \\
= & (6x+n)+3n^2+2n & \text{nach IV} & \\
= & 6x+3n^2+3n & =3(x+3n^2+n) & \text{mit } x'=x+3n^2+n
\end{array}$$

ist n^3-n nur durch 3 teilbar. n^3-n ist aber sicher gerade, denn sowohl die Differenz zweier geraden Zahlen als auch die Differenz zweier ungeraden Zahlen ist gerade. Damit n^3-n durch 2 und durch 3 also durch 6 teilbar qed (4).

Aufg. 67/180: **a)** $n=0: B(1)=B(0+1)=2\cdot B(0)=2\cdot 1=2$; $n=1: B(2)=B(1+1)=2\cdot B(1)=2\cdot 2=4$; $n=2: B(3)=B(2+1)=2\cdot B(2)=2\cdot 4=8$; $n=3: B(4)=B(3+1)=2\cdot B(3)=2\cdot 8=16$; $B(n)=2^n$;

$$\textbf{b)} \text{ ii) Formel: } \begin{array}{ll}
\text{(1) IV:} & B(n)=2^n. \\
\text{(0) IA:} & B(0)=2^0\surd. \\
\text{(2) IB:} & B(n+1)=2^{n+1}.
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
\text{(3) Rg:}\quad B(n+1) & = & 2\cdot B(n) & \text{Bildungsgesetz} \\
 & = & 2\cdot 2^n & \text{nach IV} \\
 & = & 2^{n+1} & \surd \text{ (4)}
\end{array}$$

c) i) $B(t)=mt+c$; ii) $B(t)=c\cdot q^t$; Beweis folgt sprich: Mach ich mal später also nie mehr...

(0) IA: $B(0)=c\cdot q^0+a\cdot\frac{1-q^0}{1-q}=c\surd$. Ein zweiter IA: $B(1)=c\cdot q^1+a\cdot\frac{1-q^1}{1-q}=q\cdot c+a\surd$.

c) i) (1): $B(n)=m\cdot n+c$; (0) IA: $B(0)=m\cdot 0+c=c\surd$; (2) IB: $B(n+1)=m(n+1)+c$; (3) Rg: $B(n+1)=B(n)+m$ (Rekursion) $=m\cdot n+c+m$ (IV) $=m\cdot(n+1)+c$ qed (4)

ii) (1): $B(t)=c\cdot q^t$; (0) IA: $B(0)=c\cdot q^0=c\surd$; (2) IB: $B(n+1)=c\cdot q^{t+1}$; (3) Rg: $B(n+1)=B(n)\cdot q$ (Rekursion) $=c\cdot q^t\cdot q$ (IV) $=c\cdot q^{t+1}$ qed (4)

iii) (0) IA: $B(0)=c\cdot q^0+a\cdot\frac{1-q^0}{1-q}=c\surd$. Ein zweiter IA: $B(1)=c\cdot q^1+a\cdot\frac{1-q^1}{1-q}=q\cdot c+a\surd$.

(1) IV: $B(n)=c\cdot q^n+a\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$; (2) IB: $B(n)=c\cdot q^{n+1}+a\cdot\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$; (3) Rg: $B(n+1)=q\cdot B(n)+a$ (Rekursion) $=q\cdot(c\cdot q^n+a\cdot\frac{1-q^n}{1-q})+a$ (IV) $=c\cdot q^{n+1}+a\cdot\left(\frac{q-q^{n+1}}{1-q}+\frac{1-q}{1-q}\right)=c\cdot q^{n+1}+a\cdot\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$ $\surd$ (4)

15.4.5 LöVo zu Abschnitt Vorbereitung auf Wettbewerbe: Seite 521-532

Aufg. 67/181: Beachten Sie, dass aus $0<a<b$ folgt, dass die Ungleichungen quadriert werden dürfen.

1) $a < \frac{2ab}{a+b} \quad | \cdot (a+b) \quad \Leftrightarrow a \cdot (a+b) < 2ab \quad | : a \quad \Leftrightarrow a + b < b + b \surd$;

2) $\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{a \cdot b}$ | quadriert $\Leftrightarrow \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} < a \cdot b \quad \Leftrightarrow 4ab < (a+b)^2 \quad \Leftrightarrow 0 < a^2 - 2ab + b^2 \quad \Leftrightarrow$ $0 < (a-b)^2 \surd$;

3) $\sqrt{a \cdot b} < \frac{a+b}{2}$ | quadriert $\Leftrightarrow \quad a \cdot b < \frac{(a+b)^2}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 4a \cdot b < a^2 + 2ab + b^2 \quad \Leftrightarrow$ $0 < a^2 - 2ab + b^2 \quad \Leftrightarrow 0 < (a-b)^2 \surd$;

4) $\frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ | quadriert $\Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{4} < \frac{a^2+b^2}{2} \quad \Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 < 2(a^2+b^2) \quad \Leftrightarrow 0 < a^2-2ab+b^2$ $\Leftrightarrow 0 < (a-b)^2 \surd$;

5) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} < b$ | quadriert $\Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{2} < b^2 \quad \Leftrightarrow a^2 + b^2 < 2b^2 \quad \Leftrightarrow a^2 < b^2 \surd$.

Aufg. 67/182:

Sei $a_1 < a_2$ und $b_1 < b_2$, dann gilt $\quad a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 > a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1$
$\Leftrightarrow a_2 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 > a_1 \cdot b_2 - a_1 \cdot b_1 \quad \Leftrightarrow a_2 \cdot (b_2 - b_1) > a_1 \cdot (b_2 - b_1)$
$\Leftrightarrow a_2 \cdot (b_2 - b_1) - a_1 \cdot (b_2 - b_1) > 0 \quad \Leftrightarrow (a_2 - a_1) \cdot (b_2 - b_1) > 0 \surd$.
Dieser Schritt kann analog für alle $k, l \leq n$ durchgeführt werden.

Aufg. 67/183: Mit Niveau Klasse 11: $\cos\gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \Rightarrow |\cos\gamma| = \left|\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right|$;
weil $|\cos\gamma| \leq 1$ ist, gilt $1 \geq \left|\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right| \Leftrightarrow |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \geq |\vec{a} \cdot \vec{b}|$ (qed).

Aufg. 68/184: a) Eine Null wird aus einem Faktor 'fünf' und einem Faktor 'zwei' erzeugt. Zunächst zählen wir die Faktoren 'fünf' der Primfaktorzerlegung von 100!:

$$100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \underline{5} \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot \underline{10} \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 14 \cdot \underline{15} \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot \underline{20} \cdot 21 \cdot ...$$

Jeder fünfte Faktor enthält einen Primfaktor 'fünf' - damit haben wir 20 Primfaktoren 'fünf' in 100!. Aber $25, 50, 75$ und 100 haben zwei Primfaktoren 'fünf', damit hat 100! 24 Primfaktoren 'fünf'. Es sind genügend Primfaktoren 'zwei' vorhanden, damit endet 100! auf 24 Nullen.

b) Sei A die Menge aller Kombinationen mit $x_1 = x_2$ (z.B. 4471); B die Menge aller Kombinationen mit $x_2 = x_3$ und C die Menge aller Kombinationen mit $x_3 = x_4$.
Es gilt der dreidimensionale Additionssatz:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|;$$

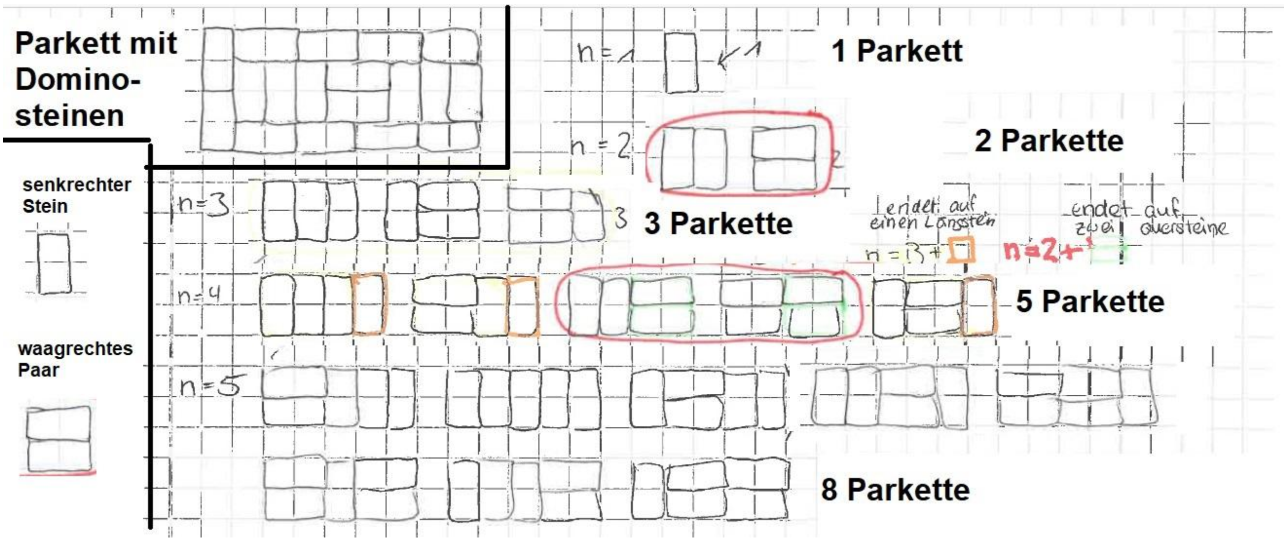
$|A| = |B| = |C| = 10^3$, $|A \cap B| = 10^2$ $(x_1 = x_2 = x_3)$, $|B \cap C| = 10^2$ $(x_2 = x_3 = x_4)$,
$|A \cap C| = 10^2$ ($x_1 = x_2$ und $x_3 = x_4$), $|A \cap B \cap C| = 10^1$ $(x_1 = x_2 = x_3 = x_4)$,
$|A \cup B \cup C| = 3 \cdot 10^3 - 3 \cdot 10^2 + 10^1 = 2710$.

Konstruktiv: Die Zahlen können folgende Kombinationen annehmen:

$xxab$ + $abxx$: mit $b \neq a \neq x$ aber x kann a sein (je $10 \cdot 9 \cdot 9$ Kombinationen);
$axxb$: mit $a \neq x \neq b$ aber a kann b sein ($10 \cdot 9 \cdot 9$ Kombinationen);
$xxxa$ + $axxx$ + $aaxx$ mit $a \neq x$ (je $10 \cdot 9$ Kombinationen), $xxxx$ (10 Kombinationen).

$\Rightarrow 3 \cdot (10 \cdot 9 \cdot 9) + 3 \cdot (10 \cdot 9) + 10 = 2710$ Kombinationen.

c) Zuerst betrachten wir alle Parkette für $n = 1, 2, 3, 4, 5$



Jedes Parkett der Größe n besteht aus allen Parkettierungen der Größe $n-1$ durch Hinzunahme eines senkrechten Steins und aus allen Parkettierungen der Größe $n-2$ durch Hinzunahme eines waagrechten Steinpaars. Damit ist $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ und $a_1 = 1$ und $a_2 = 2$. Dies ist das Bildungsgesetz der Fibonacci-Zahlen (1,2,3,5,8,13,21, ...) (beginnend mit 1 und 2, nicht mit 1 und 1).

d) Erster Ansatz: Sei $a_n = \Phi^n$, dann ist $a_{n-1} = \Phi^{n-1}$ und $a_{n-2} = \Phi^{n-2}$;

in das Bildungsgesetz $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ der Rekursion eingesetzt, ergibt sich:

$\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2} \Leftrightarrow \Phi^n - \Phi^{n-1} - \Phi^{n-2} = \Phi^{n-2} \cdot (\Phi^2 - \Phi - 1) = 0$.

Damit ist entweder $\Phi = 0$ ($\lightning$) oder $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0 \Leftrightarrow \Phi_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\cdot(-1)}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Ein zweiter Ansatz ist $a_n = c_1 \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + c_2 \cdot (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$

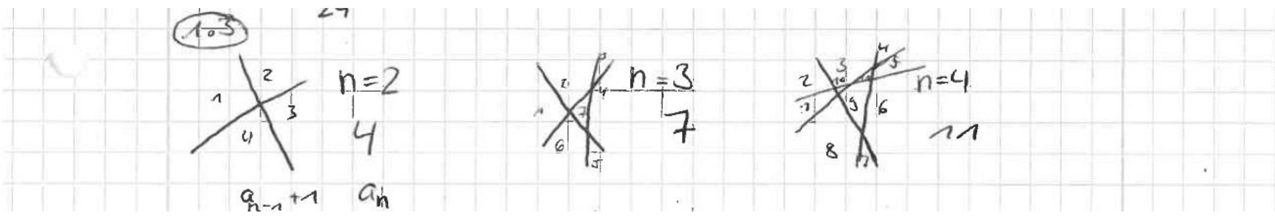
mit $n = 0$: $a_0 = c_1 \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^0 + c_2 \cdot (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^0 = c_1 + c_2 = 0$ und

mit $n = 1$: $a_1 = c_1 \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^1 + c_2 \cdot (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^1 = 0.5c_1 + \frac{\sqrt{5}}{2}c_1 + 0.5c_2 - \frac{\sqrt{5}}{2}c_2 = 1$

$c_2 = -c_1$ eingesetzt ergibt: $0.5c_1 + \frac{\sqrt{5}}{2}c_1 - 0.5c_1 + \frac{\sqrt{5}}{2}c_1 = 1 \Leftrightarrow \quad \sqrt{5}c_1 = 1 \Leftrightarrow c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

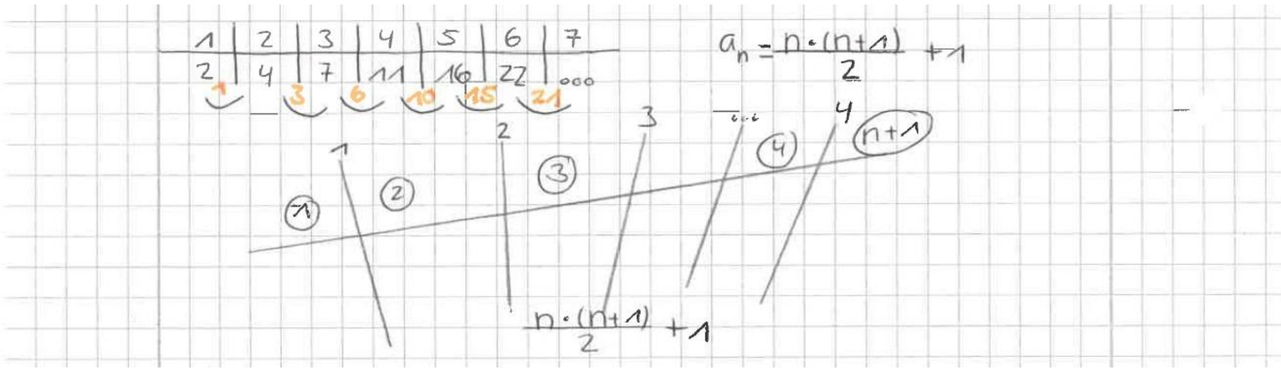
Damit ist $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$.

e) Wir machen einige Versuche:



n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Gebiete	1	2	4	7	11	16	22	29	37

+1 +2 +3 +4 +5 +6 +7 +8



wir vermuten: $a_{n+1} = a_n + n + 1$, oder $a_n = f(n) = \frac{n^2+n}{2} + 1$ (Beweis:Induktion).

f) Mögliche Ziffern sind 1,2,4,5 (Teiler der 20), damit muss die Endziffer 5 sein. Mögliche Ziffernkombinationen ohne Einsen sind damit 4,5 und 2,2,5. Diese müssen zur Quersumme 11 mit je zwei Einsen aufgefüllt werden: 1,1,4,5 oder 1,1,2,2,5. Da die 5 am Ende fix ist, kann 1,1,4,5 in drei $(=\binom{3}{1})$ und 1,1,2,2,5 in 6 $(=\binom{4}{2})$ Kombinationen auftreten. Es gibt also 9 Möglichkeiten.

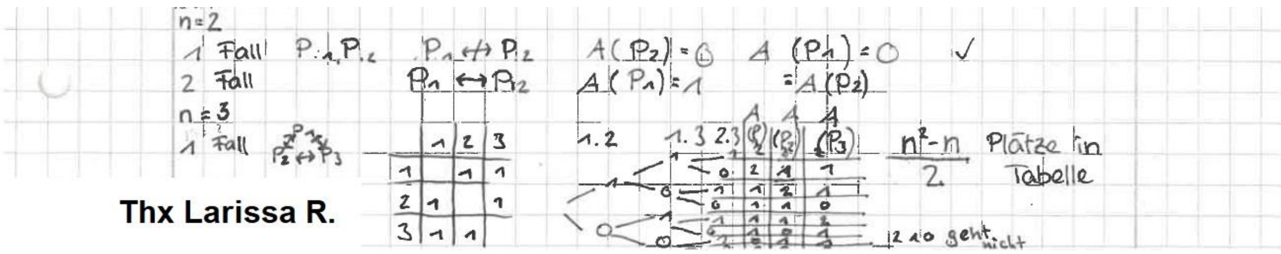
Aufg. 68/185: a) Jede der n Personen stößt mit den $n-1$ anderen Personen an $(n\cdot(n-1))$. So würde aber jeder Klang doppelt gezählt, damit sind gibt es $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ Töne.

b) Jeder Triominostein kann auf drei verschiedene Weisen gelegt werden (siehe Abbildung der Aufgabe). Beim oberen Feld haben wir 4 Möglichkeiten, beim linken dann nur noch 3 und beim rechten nur 2. Damit gibt es $4\cdot 3\cdot 2$ bzw. $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)$ Möglichkeiten (abhängig von der Lage) und $\frac{4\cdot 3\cdot 2}{3} = 8$ bzw. $\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3}$ Möglichkeiten (äquivalente gestrichen).

c) 3 Verschiedene: $\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3}$ (siehe a), 2 Verschiedene: $n\cdot 1\cdot(n-1)$, alle gleich: $n \quad \Rightarrow \frac{n^3+2n}{3}$.

Aufg. 68/186: a) In München wohnen über 1 000 000 Menschen; ein Mensch hat aber nur maximal 300 000 Haare, 1 000 000 : 300 000 = $3.\bar{3}$; damit gibt es sogar mindestens 4 Personen mit gleich vielen Haaren.

b) Das Schubfachprinzip kann nicht ohne weiters angewendet werden, weil n Personen zwischen 0 und $n-1$ (=n Fälle) Personen kennen können. HIer die Beispiele für $n = 2, n = 3$:



Es fällt auf, dass folgender Fall nicht auftreten kann: Es gibt eine Person P_1, die niemanden kennt und gleichzeitig gibt es eine Person P_n, die jeden kennt. Beweis: Wenn es P_n gibt, so kennen P_n $n-1$ Personen also insbesondere P_0 ↯.

c) Einige erfolgreiche Versuche: Rot heißt 'Kennt nicht'; grün heißt 'Kennt';

Es gibt eine Person P_1 von der (mindestens) drei Kanten gleicher Farbe ausgehen. (von jeder Person gehen 5 Kanten mit genau zwei Farben aus, damit gilt dies sogar für jede Person). Diese Kanten seien

$(P_1; P_2)$, $(P_1; P_3)$ und $(P_1; P_4)$ und nehmen wir weiter an, dass diese Personen sich gegenseitig kennen (Farbe: Grün).

Fall a) P_2 kennt P_3, dann haben wir ein Dreieck $(P_1; P_2; P_3)$ gefunden; analog P_2 kennt P_4 oder P_3 kennt P_4.

Fall b) Es gilt P_2 kennt nicht P_3 und P_2 kennt nicht P_4 und P_3 kennt nicht P_4, dann ist $(P_2; P_3; P_4)$ ein Dreieck der ANDEREN Farbe.

d) Beispiel: $\boxed{10}$, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, $\boxed{19}$ Wir reduzieren 'durch 9 teilbar' auf 'durch 2 teilbar' und erkennen, dass wir entweder zwei gerade oder zwei ungerade Zahlen benötigen. Das kann man mit 3 Zahlen erreichen. Für 'durch 9 teilbar' benötigen wir also zwei Zahlen, die den gleichen Rest modulo 9 haben, was bei 10 Zahlen mindestens ein mal der Fall ist (Schubfach).

e) Nach Teil d) gibt es unter 1001 Zahlen mindestens ein Paar $7^k, 7^m$ dessen Differenz durch 1000 teilbar ist. Sei (oBdA) $k > m$, dann gibt es ein $z \in \mathbb{N}$ mit $z \cdot 1000 = 7^k - 7^m = 7^m(7^{k-m} - 1)$, damit ist $7^{k-m} - 1$ durch 1000 teilbar, weil die PFZ von 7^m nur Siebenen und keine Faktoren 2 und 5 enthält. Damit endet 7^{k-m} auf 001.

Ich vermute, dass alle Zahlen mit einer PFZ ohne 2 und 5 diese Eigenschaft haben, also
3, 7,9,11,13,17,19,21,23, 27 ... denn hier gilt die gleiche Argumentation wie oben.

Mit einem Pascal Prg habe ich gezeigt, dass 3^{100}, 7^{50}, 11^{50}, 13^{100} und 21^{50} die gewünschte Eigenschaft haben. $_6$) Zeigen oder widerlegen Sie, dass das mit den fünfziger oder hunderter Potenzen Zufall ist (oder nicht). Und dann wäre auch noch eine Variation (001 − > abc) der Endziffern denkbar.

Aufg. 68/187: a) Offensichtlich ist $3c^2$ durch 3 teilbar aber daraus folgt nicht sofort, dass a^2 und b^2 durch 3 teilbar sind. Zu untersuchen sind drei Fälle:

$a \bmod 3 = 0 \Rightarrow a^2 \bmod 3 = 0$; $a \bmod 3 = 1 \Rightarrow a^2 \bmod 3 = 1$; $a \bmod 3 = 2 \Rightarrow a^2 \bmod 3 = 1$ (!);

Es gilt $(a + b) \bmod n = (a \bmod n + b \bmod n) \bmod n$ (die Formel gilt auch für '−' und '·'), damit gilt $(a^2 + b^2) \bmod 3 = 0 \Rightarrow a \bmod 3 = b \bmod 3 = 0$.

Nach Aufgabe 29/41 gilt a^2 hat Primfaktor 3 $\Rightarrow a$ hat Primfaktor 3. Aus $3c^2 = a^2 + b^2$ folgt $3c^2 = (3a')^2 + (3b')^2 \Leftrightarrow c^2 = 3(a'^2 + b'^2) \overset{s.o.}{\Longleftrightarrow} (3c')^2 = 3(a'^2 + b'^2) \Leftrightarrow 3c'^2 = a'^2 + b'^2$ und $a' < a$, $b' < b$ und $c' < c$. Zu jedem erfüllenden Tripel gibt es also ein kleineres erfüllendes Tripel. Weil aber $a, b, c \in \mathbb{N}$ sind muss es ein kleinstes Tripel geben $\lightning$.

b) $a \bmod 5 = 0 \Rightarrow a^2 \bmod 5 = 0$; $a \bmod 5 = 1 \Rightarrow a^2 \bmod 5 = 1$; $a \bmod 5 = 2 \Rightarrow a^2 \bmod 5 = 4$; $a \bmod 5 = 3 \Rightarrow a^2 \bmod 5 = 4$; $a \bmod 5 = 4 \Rightarrow a^2 \bmod 5 = 1$; Damit gilt $5 \cdot 1^2 = 1^2 + 2^2$

c) $a \bmod 7 = 0 \Rightarrow a^2 \bmod 7 = 0$; $a \bmod 7 = 1 \Rightarrow a^2 \bmod 7 = 1$; $a \bmod 7 = 2 \Rightarrow a^2 \bmod 7 = 4$; $a \bmod 7 = 3 \Rightarrow a^2 \bmod 7 = 2$; $a \bmod 7 = 4 \Rightarrow a^2 \bmod 7 = 2$; $a \bmod 7 = 5 \Rightarrow a^2 \bmod 7 = 4$; $a \bmod 7 = 6 \Rightarrow a^2 \bmod 7 = 1$; Damit gilt $7 \cdot c^2 = a^2 + b^2$ geht nicht analog zu a).

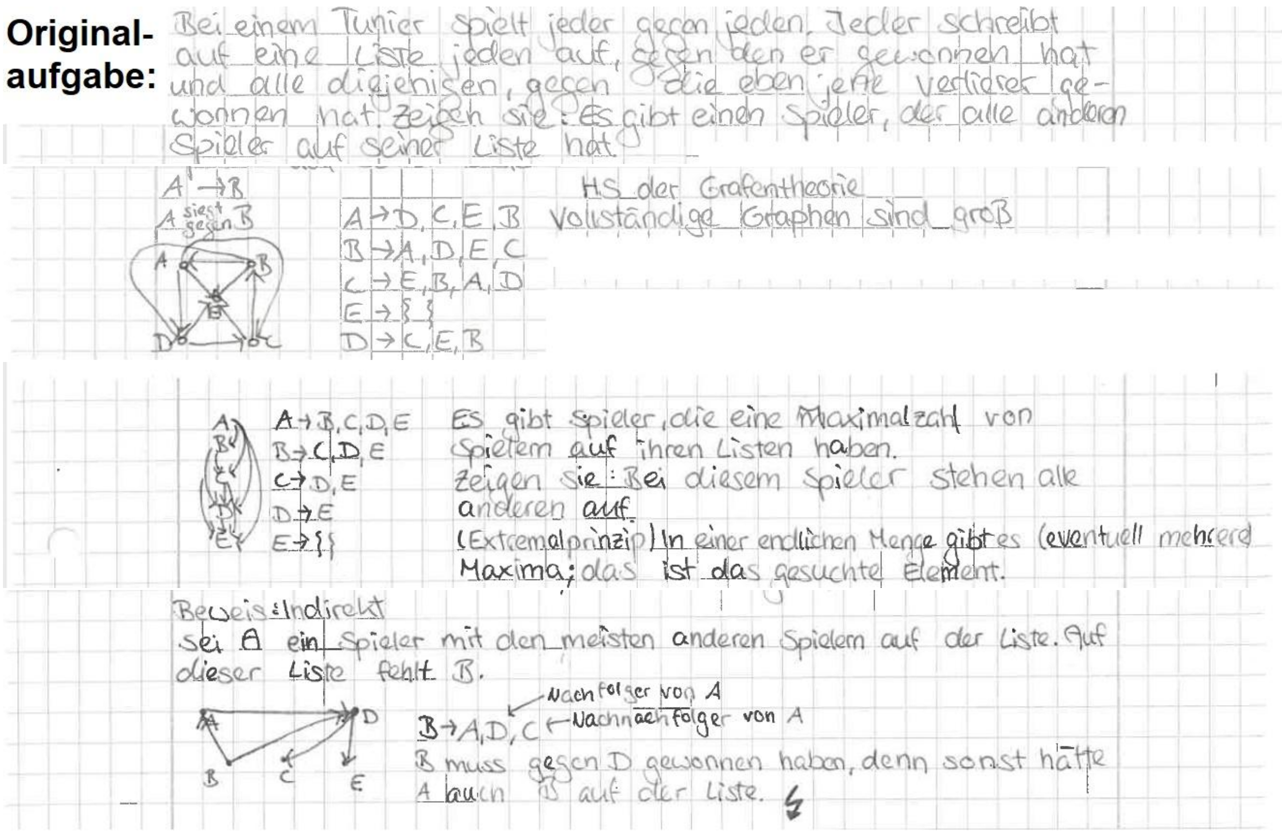
Aufg. 68/188: a) 1. Fall: Sei $a_1 < a_2$, dann ist $a_2 = \frac{a_3 + a_1}{2} \Leftrightarrow a_3 = 2a_2 - a_1 = a_2 + (a_2 - a_1) > a_2$ genauso zeigen Sie $a_4 > a_3$ usw. damit ist a_n streng monoton wachsend und $a_2 < a_{100} < a_1 < a_2$ $\lightning$

2. Fall: Sei $a_1 > a_2$, dann ist a_n streng monoton fallend und $a_2 > a_{100} > a_1 > a_2$ $\lightning$

3. Fall: $a_1 = a_2 \Rightarrow a_3 = 2a_2 - a_1 = a_2$ (geht); damit sind alle a_i identisch

b) Beweisidee: Wähle ein i mit maximalem $|M_i|$. In einer endlichen Zahlenmenge gibt es immer ein (oder mehrere) maximale Elemente. Ein maximales Element soll dann das gesuchte Element sein.

Annahme: $M_i \neq P$, dann gibt es eine Person P_j mit $P_j \notin M_i$. P_j muss gegen alle Personen aus G_i gewonnen haben, sonst wäre $P_j \in N_i$, damit gilt $M_j \supset \{P_j\} \cup \{P_i\} \cup G_i \cup N_i$ und damit ist $|M_j| \geq |M_i| + 1 > |M_i|$ $\lightning$ zur Annahme, dass $|M_i|$ maximal groß war.



Original-aufgabe: Bei einem Turnier spielt jeder gegen jeden. Jeder schreibt auf eine Liste jeden auf, gegen den er gewonnen hat und alle diejenigen, gegen die eben jene Verlierer gewonnen hat. Zeigen Sie: Es gibt einen Spieler, der alle anderen Spieler auf seiner Liste hat.

A → B
A siegt gegen B

A → D, C, E, B
B → A, D, E, C
C → E, B, A, D
E → { }
D → C, E, B

HS der Grafentheorie
Vollständige Graphen sind groß

A → B, C, D, E
B → C, D, E
C → D, E
D → E
E → { }

Es gibt Spieler, die eine Maximalzahl von Spielern auf ihren Listen haben.
Zeigen Sie: Bei diesem Spieler stehen alle anderen auf.
(Extremalprinzip) In einer endlichen Menge gibt es (eventuell mehrere) Maxima; das ist das gesuchte Element.

Beweis: Indirekt
Sei A ein Spieler mit den meisten anderen Spielern auf der Liste. Auf dieser Liste fehlt B.

Nachfolger von A
B → A, D, C ← Nachnachfolger von A
B muss gegen D gewonnen haben, denn sonst hätte A auch B auf der Liste. ↯

↑ Originalaufgabe mit Beispielen ↑

Aufg. 68/189: Definieren Sie C' als $C' := BO \cap k$ und $C' \neq B$. $\sphericalangle(C', O, A) = 180° - \gamma$. Weil $\Delta(A, O, C')$ gleichschenklig ist, ist $\sphericalangle(O, C', A) = \frac{180°-(180°-\gamma)}{2} = \frac{\gamma}{2}$. Nach dem Umfangswinkelsatz ist $\sphericalangle(A, C', O) = \sphericalangle(A, C', B) = \sphericalangle(A, C, B)$. Mit der Winkelsumme im Viereck A, O, B, C ist $\alpha + \beta = 360° - (360° - (180° - \gamma)) - \frac{\gamma}{2} = \frac{\gamma}{2}$.

Aufg. 68/190: Nach dem Umfangswinkelsatz erzeugen gleiche Sehnenlängen (in kongruenten Kreisen) auch gleiche Gegenwinkel φ bzw. $180° - \varphi$. Aus $\overline{AE} = \overline{DE}$ (auf demselben Bogen liegen) folgt damit $\beta = \gamma$; und $\sphericalangle(D, A, E) = \beta$ (beide Winkel sind Gegenwinkel der Seite $\overline{DE}$) und $\sphericalangle(E, D, A) = \beta$ (gleichschenkliges Dreieck). Aus der Winkelsumme im Dreieck $\Delta(B, C, D)$ folgt $\sphericalangle(B, D, C) = 70°$ und mit Thales gilt $\sphericalangle(A, D, B)(= \sphericalangle(A, E, B)) = 90°$. Damit ist $\sphericalangle(E, D, B) = \beta + 90° = 180° - 70°$ oder $\beta = \gamma = 20°$.

Aufg. 69/191: Wir zeigen: $\sphericalangle(D, A, C) = \sphericalangle(B, A, D)$. Nach dem Umfangswinkelsatz (UWS) gilt $\sphericalangle(D, B, C) = \sphericalangle(D, A, C)$ (Sehne $\overline{DC}$) und $\sphericalangle(B, A, D) = \sphericalangle(B, C, D)$ (Sehne $\overline{BD}$); wegen der Konstruktion von D mit Hilfe der Mittelsenkrechten ist Dreieck $\Delta(B, D, C)$ gleichschenklig und

$$\text{damit ist} \quad \sphericalangle(D, A, C) \overset{\text{UWS}}{=} \sphericalangle(D, B, C) \overset{\Delta\text{gsch}}{=} \sphericalangle(B, C, D) \overset{\text{UWS}}{=} \sphericalangle(B, A, D).$$

Aufg. 69/192: fehlt (noch)

Aufg. 69/193: a) $s = \sqrt{d^2 - (r_2 - r_1)^2}$, $\alpha = \sin^{-1}(\frac{r_2 - r_1}{d})$, $b_2 = 2\pi \cdot r_2 \cdot \frac{180° + 2\alpha}{360°}$,

$b_1 = 2\pi \cdot r_1 \cdot \frac{180° - 2\alpha}{360°}$, Riemen= $b_1 + s + b_2$.

b) $s = \sqrt{d^2 - (r_2 + r_1)^2}$, $\alpha = \sin^{-1}(\frac{r_2 + r_1}{d})$, $b_2 = 2\pi \cdot r_2 \cdot \frac{180° + 2\alpha}{360°}$, $b_1 = 2\pi \cdot r_1 \cdot \frac{180° - 2\alpha}{360°}$,

Riemen= $b_1 + s + b_2$.

Aufg. 69/194: Sei B' der Spiegelpunkt von B an g. $P = \overline{AB'} \cap g$ (Einfallswinkel=Ausfallswinkel).

Beweis: Seien L_a und L_b die Lotfußpunkte von A bzw. B auf g. $a = d(A, L_a)$, $b = d(B, L_b)$, $c = d(L_a, L_b)$ und $x = d(L_a, P)$ (gesucht); der Winkel $\alpha := \measuredangle(A, P, L_a)$, $\beta := \measuredangle(L_b, P, B)$, dann gilt $0° \leq \alpha, \beta \leq 180°$ und $\overline{AP} = \sqrt{a^2 + x^2}$, $\overline{PB} = \sqrt{b^2 + (c - x)^2}$.

Es soll $f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c - x)^2}$ minimiert werden oder $f'(x) = 0$.

$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{-2(c-x)}{2\sqrt{b^2+(c-x)^2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}} = 0 = \cos(\alpha) - \cos(\beta) \Rightarrow \alpha = \beta$
weil für $0° \leq \alpha, \beta \leq 180°$ der Kosinus injektiv / umkehrbar ist.

Aufg. 69/195: Seien x, y, z die Quaderseiten mit $A = x \cdot y$, $B = x \cdot z$ und $C = y \cdot z$, dann gilt $A \cdot B \cdot C = x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = V^2 \Rightarrow V = \sqrt{A \cdot B \cdot C}$.

Aufg. 69/196: Die Algebraisierung kann folgendermaßen funktionieren:

Das allgemeine Dreieck kann so ein Koordinatensystem gedreht werden, dass $A(r; 0)$, $B(0; 0)$ und $C(s; t)$ gilt. Jetzt muss man nur noch die einzelnen Komponenten berechnen und die Gleichheit verifizieren:

Es gilt $a = \sqrt{s^2 + t^2}$, $b = \sqrt{(r - s)^2 + t^2}$, $c = r$ und $h_c = t$. Den Umkreisradius rechnen wir über die Konstruktion über die Mittelsenkrechten m_a und m_c. Steigung der Geraden $BC = \frac{t}{s}$; $m_a : y = \frac{-s}{t}(x - \frac{s}{2}) + \frac{t}{2}$. Weil der $x-$Wert des Umkreismittelpunktes $U_x = \frac{r}{2}$ ist, gilt $U(\frac{r}{2}; \frac{-s}{t}(\frac{r}{2} - \frac{s}{2}) + \frac{t}{2})$.

Damit ist $R = \sqrt{(\frac{r}{2})^2 + (\frac{-s}{t}(\frac{r}{2} - \frac{s}{2}) + \frac{t}{2})^2}$ und

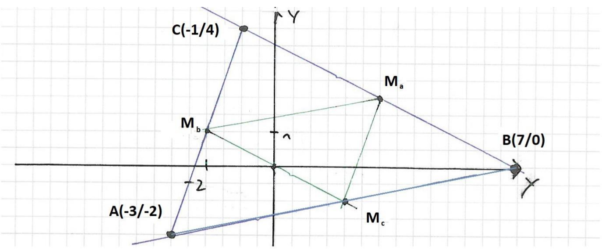
$2 \cdot h_c \cdot R = 2 \cdot t \cdot \sqrt{\frac{r^2}{4} + (\frac{-sr}{2t} + \frac{s^2}{2t} + \frac{t}{2})^2} = \sqrt{r^2t^2 + (-sr + s^2 + t^2)^2}$

$= \sqrt{r^2t^2 + s^4 + s^2r^2 - 2rs^3 - 2rst^2 + 2s^2t^2 + t^4}$.

$a \cdot b = \sqrt{(s^2 + t^2)} \cdot \sqrt{((r - s)^2 + t^2)} = \sqrt{(s^2 + t^2) \cdot (r^2 - 2rs + s^2 + t^2)}$

$= \sqrt{r^2s^2 - 2rs^3 + s^4 + s^2t^2 \ + \ r^2t^2 - 2rst^2 + s^2t^2 + t^4} = 2 \cdot h_c \cdot R$ (qed).

Zugegeben, die Lösung ist nicht elegant, aber sicher zielführend.



<--- Känguru

Landeswettbewerb --->

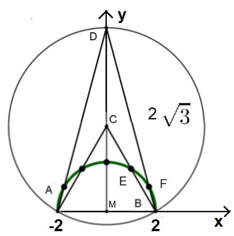


Abb. 265 Dreieck beim Känguru b) gleiche Bögen

b) Die Behauptung wird nur (oBdA) für $AB = 4$ bewiesen. Sei M die Mitte von AB und K der Kreis um M mit Radius 2$= \frac{AB}{2}$. Wir legen ein Achsenkreuz in die Zeichnung; der Ursprung ist M, die x-Achse geht in Richtung MB, die y-Achse in Richtung MD. Es gilt: $A(-2; 0)$, $B(2; 0)$, $C(0; 2\sqrt{3})$, $D(0; 4 + 2\sqrt{3})$ und K: $x^2 + y^2 = 2^2$.

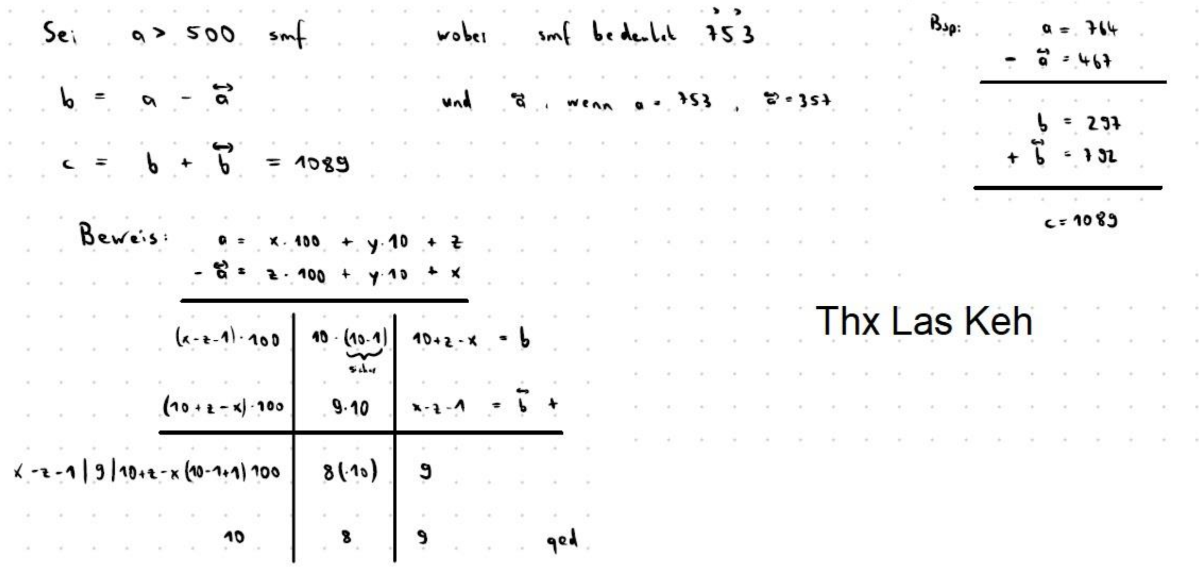
Es gilt $g_{CB} : y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$; $\quad g_{DB} : y = -(2 + \sqrt{3})x + 4 + 2\sqrt{3}$;

$g_{CB} \cap K = \{B, E\}$: $x^2 + (-\sqrt{3}x + 2\sqrt{3})^2 = 2^2 \Leftrightarrow x^2 + 3x^2 - 12x + 12 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = 2$ x_2 war klar (Punkt B) $\Rightarrow E(1; \sqrt{3})$. Damit ist $\measuredangle(B, M, E) = 60°$.

$g_{DB} \cap K = \{B, F\}$: $x^2 + (-(2+\sqrt{3})x + 4 + 2\sqrt{3})^2 = 2^2 \Leftrightarrow x^2 + (7+4\sqrt{3})x^2 - (22+12\sqrt{3})x + (28+16\sqrt{3}) = 4 \Leftrightarrow (8 + 4\sqrt{3})x^2 - (28 + 16\sqrt{3})x + (24 + 16\sqrt{3}) = 0 \overset{:4}{\Leftrightarrow} (2 + \sqrt{3})x^2 - (7 + 4\sqrt{3})x + (6 + 4\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \sqrt{3}, x_2 = 2$ x_2 war klar (Punkt B) $\Rightarrow F(\sqrt{3}; 1)$. Damit ist $\measuredangle(B, M, F) = 30°$.

Insgesamt ist $\measuredangle(B, M, F) = \measuredangle(F, M, E) = \measuredangle(E, M, C) = 30°$ also sind die Bogenlängen gleich.

Aufg. 69/197: fehlt (noch); **Aufg. 69/198**: Das Ergebnis ist immer <u>1089.</u>



Aufg. 70/199: a) Tangenten stehen auf ihrem Radius senkrecht und $\overline{CM} = \overline{AM}$, damit ist Viereck (A, B_1, C, M) ein Drachen mit Diagonale $AC \Rightarrow \sphericalangle\,(A, C, B_1) = \sphericalangle\,(B_1, A, C)$ (andere Winkel analog). Sei $\xi = \sphericalangle\,(A_1, C, B)$, $\eta = \sphericalangle\,(A, C, B_1)$ und $\zeta = \sphericalangle\,(C_1, B, A)$, dann erzeugen die gestreckten Winkel in den Punkten A, B und C ein LGS:

$$\xi + \eta + \gamma = 180°; \quad \xi + \beta + \zeta = 180°; \quad \alpha + \eta + \zeta = 180°; \quad \} \quad \Rightarrow \quad 2\xi = \alpha + 180° - \beta - \gamma;$$

aus der Winkelsumme im Dreieck ergibt sich $\xi = \alpha, \eta = \beta$ und $\zeta = \gamma$.

b) $\gamma = \sphericalangle\,(B, A, C_1) = \sphericalangle\,(C_1, B, A)$ (Teil a) $\gamma = \sphericalangle\,(C_1, M, A) = \sphericalangle\,(B, M, C_1)$ (Winkelsumme); damit sind ΔC_1MA und ΔC_1BM kongruent und rechtwinklig und A, B, C_1, M liegen auf dem Thaleskreis K über MC_1. T liegt ebenfalls auf K mit der Umkehrung des Umfangswinkelsatzes.

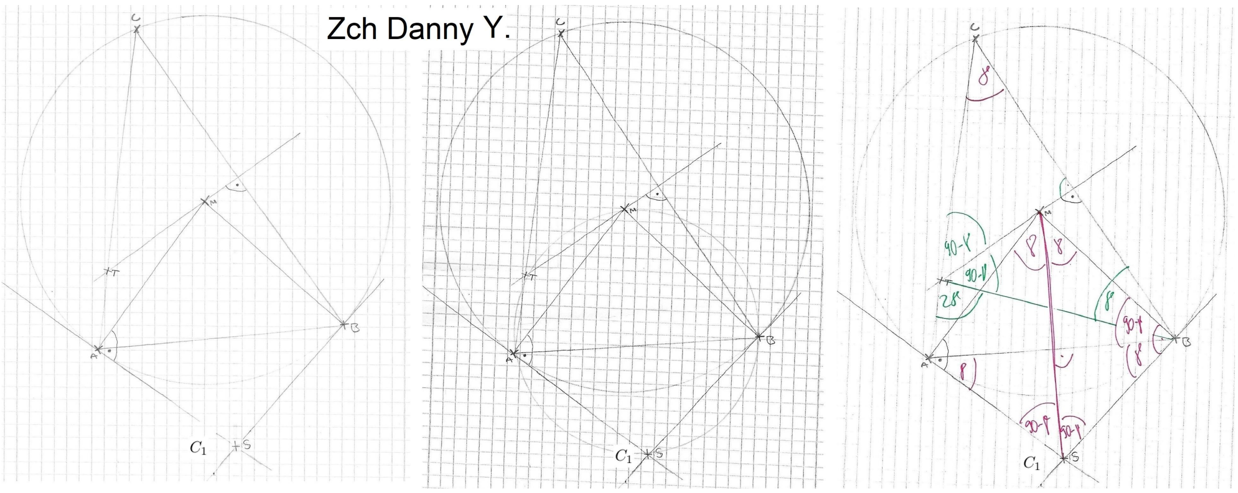


Abb. 266 a) Zch mit Bez. b) Zch mit Bez. + Kreis A, B, C_1, M, T c) Zch mit Winkeln

Damit ist zu zeigen, dass $\sphericalangle\,(A, T, B) = 2\gamma = \sphericalangle\,(B, M, A)$ (damit liegen T und M auf dem Kreis mit Basis $AB = K$). ΔBTC ist gleichschenklig mit Basis BC (Mittelsenkrechte) damit ist $\sphericalangle\,(C, T, M) = 2 \cdot (90° - \gamma)$ und $\sphericalangle\,(A, T, B) = 180 - (2 \cdot (90° - \gamma)) = 2\gamma$ (qed).

c) Die Dreiecke $\Delta(D, M, A), \Delta(A, M, B), \Delta(B, M, C)$ und $\Delta(C, M, D)$ sind gleichschenklig (mit Spitze M). Damit gilt $\alpha_1 = \beta_2$, $\beta_1 = \gamma_2$, $\gamma_1 = \delta_2$ und $\delta_1 = \alpha_2$. Damit ist $\alpha + \gamma = \alpha_1 + \alpha_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = \beta_2 + \beta_1 + \delta_2 + \delta_1 = \beta + \delta$; aus der Winkelsumme im Viereck $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$ folgt die Behauptung.

Aufg. 70/200: $n = 1$: $(1, 2) \to (1)$ (geht nicht);

$n = 2$:	$(1, 2, 3, 4) \to$	$(1, 2, 1) \to$	$(1, 1) \to$	(0) (geht);
Summe:	10	4	2	0

Beispiel $n = 3$: (geht nicht, ist aber kein Beweis);

$(1, 2, 3, 4, 5, 6) \to$	$(1, 2, 3, 4, 1) \to$	$(0, 2, 3, 4) \to$	$(2, 3, 4) \to$	$(2, 3) \to$	(1)
Summe:	21	11	9	5	1

$n = 4$:	$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) \to$	$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 1) \to$	$(1, 2, 3, 4, 1, 1) \to$	$(1, 2, 1, 1, 1) \to$
Summe	36	22	12	6
$(1, 1, 1, 1) \to$	$(1, 1, 0) \to$	$(0, 0) \to$	(0) (geht);	
4	2	0	0	

Vermutung 1: Für gerades n geht es, für ungerades nicht.

Sei n gerade: $(1, 2, 3, 4.., 2n - 3, 2n - 2, 2n - 1, 2n) \to (1, 2, 3, 4..2n - 3, 2n - 2, 1) \to (1, 2, 3, 4.., 1, 1)$; k ter Schritt: $(2n - 2k + 2) - (2n - 2k + 1) = 1$ so sind nach dem n-ten Schritt $(1, 1, .., 1)$ also n (gerade Anzahl) Einsen übrig. Bei jedem Schritt kann man jetzt eine 1 gegen eine andere 1 löschen, so dass nach n Schritten nur noch (0) übrig bleibt, siehe $n = 4$.

Betrachten sie nun die Summe aller Zahlen nach jedem Schritt.

Vermutung 2: Die Frage, ob die Summe der Zahlen gerade oder ungerade sind (Parität) ändert sich bei einem Schritt nicht:

Bei einem Schritt verändere sich $(x_1, x_2, .., x_{k-2}, a, b) \to (x_1, x_2, .., x_{k-2}, |a - b|)$.

1. Fall: a, b gerade $\Rightarrow |a - b|$ ist auch gerade, wie auch $(a + b)$;

2. Fall: a gerade, b ungerade oder umgekehrt $\Rightarrow |a - b|$ ist ungerade, wie auch $(a + b)$;

3. Fall: a, b ungerade $\Rightarrow |a - b|$ ist gerade, wie auch $(a + b)$;

Damit ändert eine Differenzbildung die Parität nicht.

Sei n gerade $n = 2k$, dann wird bis $4k$ gezählt: $1 + 2 + 3 + .. + 4k = \frac{(4k)^2+4k}{2} = \frac{16k^2+4k}{2} = 8k^2 + 2k = 2(4k^2 + k)$ ist gerade;

Sei n ungerade $n = 2k + 1$, dann wird bis $4k + 2$ gezählt: $1 + 2 + 3 + .. + 4k + 2 = \frac{(4k+2)^2+4k+2}{2} = \frac{16k^2+8k+4+4k+2}{2} = 8k^2 + 6k + 1 = 2(4k^2 + 3k) + 1$ ist ungerade;

Damit kann die 0 genau für gerades n herauskommen.

Aufg. 70/201: Loevo fehlen noch

Aufg. 70/202: Diese Aufgabe kann als Prototyp einer Überdeckungsaufgabe gesehen werden. Ein Dominostein überdeckt genau ein weißes und ein schwarzes Feld. Das Schachbrett ohne die zwei Ecken haben aber 32 weiße und 30 schwarze Felder. Ein Dominostein müsste also zwei weiße Steine überdecken, was nicht möglich ist. Eine solche Überdeckung kann es also nicht geben.

Aufg. 70/203: **a)** Die Fläche sei wie ein Schachbrett gefärbt (A1 ist schwarz), dann hat das Feld 41 schwarze und 40 weiße Felder. Jeder Käfer eines schwarzen Feldes (41 Stück) landet auf einem schwarzen Feld (40 Stück) und umgekehrt; damit bleibt (mindestens) ein schwarzes Feld leer, egal wie die Käfer laufen.

b) Wir färben das Schachbrett spaltenweise schwarz und weiß (A1 ist schwarz). So erhalten wir 45 schwarze und 36 weiße Felder. Beim Diagonalschritt die Farbe gewechselt wird, ist die Anzahl der freien schwarzen Felder ≥ 9. Das es tatsächlich möglich ist, mit 9 (schwarzen) freien Feldern auszukommen ist Hausaufgabe.

Aufg. 70/204: a) C sieht sicher die Zahlen 4; 5 und 6, B sieht die Zahlen 3; 5; 6. Damit können nur 5 oder 6 oben liegen. A muss entweder 5 oder 6 sehen. Damit kann A entweder 1,2,6 ($\lightning$) oder 2,3,4 ($\lightning$) oder 1,3,5 sehen. Bei den mit ($\lightning$) markierten Kombinatinen sieht man zwei Seiten, die eigentlich gegenüber liegen. Damit liegt die 5 (die jeder sieht) oben.

b) Sei $s := a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$.

Sei $a_1 = 1$: Dann muss a_2 ungerade sein (sonst wäre die Augensumme ungerade). Minimal ist hier erster Faktor $\frac{a_2}{a_1} = 3$ alle anderen Faktoren $\frac{a_i}{a_{i-1}} = 2$: $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 6, a_4 = 12, a_5 = 24$; $s = 46$, es sollte also einen weiteren Faktor größer 2 geben. Wenn $\frac{a_3}{a_2}$ gerade ist, dann sind a_4 und a_5 auch gerade. Möglich sind $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 6, a_4 = 12, a_5 = 36$; mit $s = 58$ und $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 6, a_4 = 18, a_5 = 36$; mit $s = 64$. Ein Faktor 4 geht auch nicht. Zu überprüfen sind: $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 6, a_4 = 12, a_5 = 48$; mit $s = 70$ sowie $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 6, a_4 = 24, a_5 = 48$; mit $s = 82$. alle anderen Möglichkeiten wären noch größer.

Ein Faktor 5 geht auch nicht: Minimal wäre dann $a_1 = 1, a_2 = 5, a_3 = 10, a_4 = 20, a_5 = 40$; mit $s = 76$ alle anderen Möglichkeiten wären zu groß.

Damit ist $a_1 \neq 1$. Wir versuchen 2: $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8, a_4 = 16, a_5 = 32$; mit $s = 62$, es muss also einen Faktor 3 geben: Minimal steht dieser am Ende: $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8, a_4 = 16, a_5 = 48$; mit $s = 78$ (hurra); Tatsächlich wären alle anderen Positionen für den Faktor 3 in der Summe zu groß; Beispiel: $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8, a_4 = 24, a_5 = 48$; mit $s = 84$.

c) Wir versuchen in M so viele gerade Zahlen wie möglich hineinzupacken: $M \supseteq \{2, 4, 6, 8, ...2n\}$ und $n \leq 335$. Weil die Summe $2 + 4 + 6 + 8 + ... + 2n = n^2 + n$ (Abs 14.7.1 oder Ag 447) ist, gilt $2 + 4 + ... + 2 \cdot 335 = 112560 > 100000$. Setzen wir $n^2 + n \leq 100000$, so erhalten wir $n \leq 315$; $100000-(315^2+315) = 460$; wir müssen also $20 = 335-315$ ungerade Zahlen finden, deren Summe 460 ist. Die Summe der ersten 20 ungeraden Zahlen $= 1+3+5+..+39 = 20^2 = 400$, es fehlen also noch 60, die wir einfach bei der 39 dazuschlagen: $2+4+6+8+...+2\cdot 315+1+3+5+..+37+99 = 100000$. Damit ist eine Menge M mit 20 ungeraden Zahlen gefunden und mit $2 + 4 + ... + 2 \cdot 316 = 100172 > 100000$ kann es auch keine Menge mit weniger ungeraden Zahlen geben.

Aufg. 70/205: a) Das Problem erzeugt ein hLGS:

$$\begin{array}{r} z_1: \\ z_2: \\ s_1: \\ s_2: \\ d: \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & +a_{12} & = s \\ a_{21} & +a_{22} & = s \\ a_{11} & +a_{21} & = s \\ a_{12} & +a_{22} & = s \\ a_{11} & +a_{22} & = s \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist $\underline{A} = s \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$; alle Koeffizienten sind also gleich.

b) Bei fast magischen Quadraten lassen Sie einfach die letzte Gleichung des hLGS weg.
Es ergibt sich die Lösung $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = s - a_{22}$, $a_{21} = s - a_{22}$ oder

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{22} & s - a_{22} \\ s - a_{22} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{22} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

also ist $\underline{A}$ symmetrisch. Die Lösung von 3×3 magischen Quadraten finden Sie u.a. in H. Henn, A. Filler: Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra.

c) Sei $z =' abc' = 100a + 10b + c$, dann ist $y =' cba' = 100c + 10b + a$;

$x = z - y = 100a + 10b + c - (100c + 10b + a) = 100(a - c) + 10b - 10b + c - a$.

Beachten Sie, dass $-9 < c - a < 0$.

Die Einerziffer von $x = z - y$ ist: $10 + c - a$

die Zehnerziffer von $x = z - y$ ist 9 (Übertrag der Einerziffer)

die Hunderterziffer von $x = z - y$ ist $a - c - 1$ (Übertrag der Zehnerziffer).

Damit ist $w = (10 + c - a) \cdot 100 + 9 \cdot 10 + a - c - 1$;

$w + x = (10 + c - a) \cdot 100 + 9 \cdot 10 + a - c - 1 + (a - c - 1) \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 10 + c - a$

$= 1000 + 100c - 100a + 90 + a - c - 1 + 100a - 100c - 100 + 90 + 10 + c - a$

$= 1000 + 90 - 1 - 100 + 90 + 10 = 1089$ (qed);

Aufg. 71/206: Kann man die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis n so in Teilmengen zerlegen, dass in jeder dieser Teilmengen die größte Zahl gleich der Summe der übrigen Zahlen ist? Lösen Sie das Problem für $n = 21$.

Betrachten wir das Problem zunächst für $n = 3$. Die Zerlegung lautet hier
{ {1,2,3 } } - da geht es. Für $n = 12$ gibt es z.B. folgende Zerlegungen

$$\begin{array}{llll} \{\{1,6,7\}; & \{2,10,12\}; & \{3,8,11\}; & \{4,5,9\}\} \\ \{\{1,10,11\}; & \{2,5,7\}; & \{3,6,9\}; & \{4,8,12\}\} \end{array}$$

Die untere Zeile korrespondiert mit der Zeile oben, indem man jedes Tripel

$(a_1, a_2, a_3) \to (a_1, 17 - a_2, 17 - a_3)$ $(17 = 12 + 4 + 1)$ transformiert.

Für n=15: $$\begin{array}{lllll} \{\{1,6,7\}; & \{2,12,14\}; & \{3,8,11\}; & \{4,9,13\}; & \{5,10,15\}\} \\ \{\{1,14,15\}; & \{2,7,9\}; & \{3,10,13\}; & \{4,8,12\}; & \{5,6,11\}\} \end{array}$$

Für $n = 21$ könnten mögliche Teilmengen z.B. so aussehen: {1,4,9,14} oder {6,7,13} oder {2,3,5,8,18}. Wir wollen jetzt Invarianten dieser Mengen suchen. Sei $S(M)$ die Summe aller Elemente der Teilmenge, dann ist $S(\{1,4,9,14\}) = 28$, $S(\{6,7,13\}) = 26$, $S(\{2,3,5,8,18\}) = 36$ also ist $S(\{?, m\}) = 2m$; also eine gerade Zahl. Die Eigenschaft '$S(M)$ ist gerade' ist also invariant.

Sei $M_1, .., M_k$ eine Zerlegung von $\{1, 2, 3, .., 21\}$, dann ist $x := S(M_1 \dot\cup .. \dot\cup M_k) = S(M_1) + .. + S(M_k)$ (Assoziativgesetz); x ist also eine Summe gerader Zahlen mit der Eigenschaft, dass
$x = S(M_1) + .. + S(M_k) = S(\{1, 2, .., 21\})$, ¡weil jede Zahl zwischen 1 und 21 sowohl rechts als auch links genau ein Mal vorkommt, aber $S(\{1, 2, .., 21\}) = 231$, also ungerade.

Anmerkung: Mit dieser Technik beweisen wir, dass die Aufgabe für die Hälfte aller natürlicher Zahlen nicht geht. Für welche Zahlen es Zerlegungen gibt und ob es Zerlegungen mit Teilmengen größer 3 gibt bleibt vorerst unklar.

Aufg. 71/207: (Aus dem BWM 2014 - 2. Runde) Für welche positiven ganzen Zahlen besitzt die Zahl $z(n) = \frac{4n+1}{n(2n-1)}$ eine abrechende Dezimalentwicklung (DE)?

Eine Dezimalentwicklung der voll gekürzten Zahl $\frac{p}{q}$ ist abbrechend $\Leftrightarrow$ q hat nur die Primfaktoren 2 und 5 oder $q = 2^{a_1} \cdot 5^{a_2}$ $(a_1, a_2 \in \mathbb{N})$. $4n+1$ und n sind für alle $n \in \mathbb{N}$ teilerfremd: Sei t in gemeinsamer Teiler von n und $4n+1$, dann ist $n = a \cdot t$ $(a \in \mathbb{N})$ und $4n + 1 = 4 \cdot a \cdot t + 1$ also ist $4n + 1 \bmod t = 1$.

Sei t in gemeinsamer Teiler von $2n - 1$ und $4n + 1$, dann ist $2n - 1 = a_1 \cdot t$ und $4n + 1 = a_2 \cdot t$; n eliminiert ergibt $4n = 2a_1 \cdot t + 2 = a_2 \cdot t - 1 \Leftrightarrow 3 = (a_2 - 2a_1) \cdot t$. Weil $a_2 - 2a_1 \in \mathbb{Z}$ kann t nur 1 oder 3 sein.

$2n - 1$ ist sicher ungerade, damit ist von der Form $(*) : 2n - 1 = 5^b \cdot 3^c$ mit $c \in \{0, 1\}$. Das 5^b erzeugt dabei die nicht abbrechende Dezimaldarstellung, das 3^c wird mit dem $4n - 1$ komplett weggekürzt. Die Endziffer von $2n - 1$ ist sicher 5 oder (algebraisch) $2n - 1 \bmod 10 = 5$.

1. Fall: n hat einen Teiler 5, dann ist $n = 5m$ $(m \in \mathbb{N})$ und $2n - 1 = 10m - 1$ und $10m - 1 \bmod 5 = 4$ und $4n + 1 \bmod 5 = 20m + 1 \bmod 5 = 1$, sprich weder $4n + 1$ noch $2n - 1$ sind durch 5 teilbar. Damit ist $2n - 1 = 1 \Leftrightarrow n = 1$ oder $2n - 1 = 3 \Leftrightarrow n = 2$ (Widerspruch zu n hat einen Teiler 5).

2. Fall: $n = 2^q$ ($q \in \mathbb{N}_0$) und $2n - 1 > 10$, dann ist $2n - 1 = 2^{q+1} - 1$; $2^{q+1} - 1 \bmod 10$ erzeugt eine periodische Folge mit Index q (bei geklammerten Zahlen ist $2n - 1 < 10$ siehe Fall 3):

q	(0)	(1)	(2)	3	4	5	6	7	8	9	..
n	(1)	(2)	(4)	8	16	32	64	128	256	512	..
$2n-1 = 2^{q+1}-1$	(1)	(3)	(7)	15	31	63	127	255	511	1023	..
$2^{q+1}-1 \bmod 10$	(1)	(3)	(7)	5	1	3	7	5	1	3	..

Weil $2n - 1 \geq 10$ (oder $q > 2$) ist, muss $2n - 1$ also Endziffer 5 haben. Damit ist $q \bmod 4 = 3 \Leftrightarrow q = 4k + 3$, ($k \in \mathbb{N}_0$).

$$2n - 1 = 2^{q+1} - 1 = 2^{4k+3+1} - 1 = (2^{2k+2})^2 - 1 = (2^{2k+2} - 1) \cdot (2^{2k+2} + 1) \quad \text{(3. BinF).}$$

Laut (∗) gilt $(2^{2k+2} - 1) \cdot (2^{2k+2} + 1) = 5^b \cdot 3^c$, weil sich die Faktoren $2^{2k+2} - 1$ und $2^{2k+2} + 1$ nur um 2 unterscheiden, kann nur einer der Faktoren Primfaktoren 3 bzw. 5 haben. Damit ist $2^{2k+2} - 1 = 3^c$ und $2^{2k+2} + 1 = 5^b$ ($c \in \{0, 1\}$) oder umgekehrt.

a) $2^{2k+2} + 1 = 3^1 = 3 \Leftrightarrow 2k + 2 = 1 \Leftrightarrow k = -1/2$ (Wid. zu $k \in \mathbb{N}_0$)
b) $2^{2k+2} + 1 = 3^0 = 1 \Leftrightarrow 2k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = -1$ (Wid. zu $k \in \mathbb{N}_0$)
c) $2^{2k+2} - 1 = 1 \Leftrightarrow 2k + 2 = 1 \Leftrightarrow k = -1/2$ (Wid. zu $k \in \mathbb{N}_0$)
d) $2^{2k+2} - 1 = 3 \Leftrightarrow 2k + 2 = 2 \Leftrightarrow k = 0$, damit ist $q = 3$ und $n = 2^3 = 8$.

Probe: $z(8) = \frac{33}{8 \cdot 15} = \frac{11}{40} = 0.275$ abbrechende DE;

3. Fall $2n - 1 < 10$, dann ist $n \in \{1, 2, 3, 4\}$; Diese Fälle überprüfen wir einzeln als Spezialfälle:

$n = 1 : z(1) = \frac{5}{1 \cdot 1} = 5$ abbrechende DE; $n = 2 : z(2) = \frac{9}{2 \cdot 3} = 1.5$ abbrechende DE;
$n = 3 : z(3) = \frac{13}{3 \cdot 5}$ nicht abbrechende DE; $n = 4 : z(4) = \frac{17}{4 \cdot 7}$ nicht abbrechende DE;

Die gesuchten Zahlen sind also $n = 1, 2, 8$.

15.5 LöVo zu Kapitel 5: Funktionen und ihre Eigenschaften

15.5.1 LöVo zu Einheit 5.1 (Quadratische Funktionen UE 8_6) Seite 532-590

Aufg. 87/208:

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
$y = f(x) = x^2$	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4

Der Scheitel liegt bei (0; 0).

Aufg. 87/209: a) 5m, b) 11.25 m, c) 20m, d) $s = \frac{g}{2}t^2$.

Aufg. 87/210: a) Stellen Sie sich vor, Sie hätten die Parabel von $f(x) = x^2$ auf einen Strumpf gezeichnet, dann ist entsteht der Graph von $f(x) = 2x^2$ durch ziehen in y-Richtung - die Länge des Strumpfes wird verdoppelt. Der Graph von $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ entsteht durch Halbierung der Länge (Abb. 267).

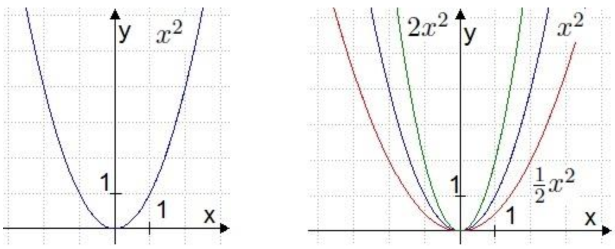
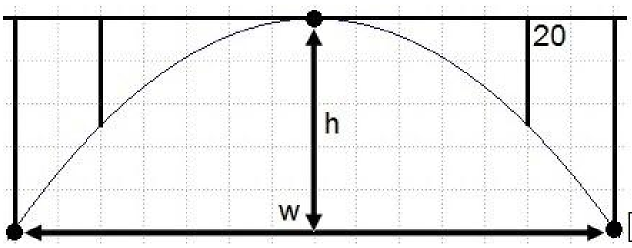


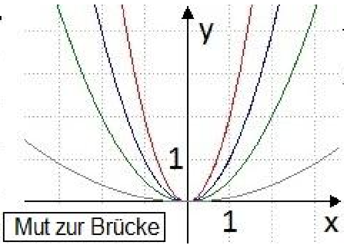
Abb. 267 Achsstreckungen von Parabeln

Die Normalparabel mit dem Streckfaktor 2 in $\underline{y}$-Richtung gestreckt ergibt den Graph von $\underline{2x^2}$.
Die Normalparabel mit dem Streckfaktor $\underline{a}$ in $\underline{y}$-Richtung gestreckt ergibt den Graph von $\underline{a \cdot x^2}$.
Parabeln sind nie <u>spitz</u>!

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)=\frac{1}{2}x^2$	2	0,5 $\frac{1}{2}$	0,125 $\frac{1}{8}$	0	0,125	0,5	2
$f(x)=x^2$	4	1	$\frac{1}{4}$ 0,25	0	$\frac{1}{4}$ 0,25	1	4
$f(x)=2x^2$	8	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	8

Thx Paula





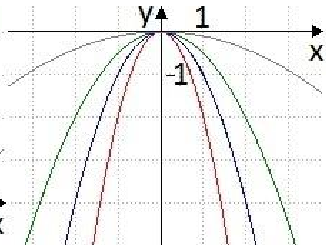


Abb. 268 Brücke gestauchte Parabeln aus Ag 210 $a = \pm 0.1, \pm 0.5, \pm 1, \pm 2,$

Der Graph von $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a = \pm 1$ heißt N<u>ormal</u>parabel.

b)

$a > 1$	Streckung mit Faktor a in y-Richtung.
$a = 1$	Identität.
$0 < a < 1$	Streckung mit Faktor a in y-Richtung ; die Streckung wirkt sich als Stauchung aus.
$-1 < a < 0$	Spiegelung an der x-Achse und Streckung mit Faktor $\vert a\vert$ in y-Richtung; die Streckung wirkt sich als Stauchung aus.
$a = -1$	Spiegelung an der x-Achse.
$a < -1$	Spiegelung an der x-Achse und Streckung mit Faktor $\vert a\vert$ in y-Richtung.

Aufg. 88/211: a) $1 = a \cdot 1^2 \Leftrightarrow a = 1$; b) $8 = a \cdot 2^2 \Leftrightarrow a = 2$; c) $2 = a \cdot (-2)^2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$;

d) $-\frac{1}{3} = a \cdot 3^2 \Leftrightarrow a = \frac{-1}{27}$; e) $-128 = a \cdot (-4)^2 \Leftrightarrow a = -8$;

f) $27 = a \cdot a^2 \Leftrightarrow a = 3$; g) $4a = a \cdot a^2 \Leftrightarrow a^3 - 4a = 0 \Leftrightarrow a(a+2)(a-2) = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0, a_2 = 2, a_3 = -2.$

Aufg. 88/212: Bitte beachten Sie, dass der Faktor a als kleiner 0 vordefiniert ist. Damit muss die Gleichung $-h = a \cdot \left(\frac{w}{2}\right)^2$ nach der jeweiligen Variablen aufgelöst werden. Obwohl h in die negative $y-$Richtung zeigt, wird h positiv angegeben. Es gilt damit
$h = -a \cdot \left(\frac{w}{2}\right)^2$, $\quad a = -\frac{4h}{w^2}$, $\quad w = 2\sqrt{\frac{h}{-a}}$. $\quad$ Da $w > 0$ entfällt das $\pm$.

b)	$a = -0.05$:	i) $h = 3.2$,	ii) $h = 12.8$,	iii) $h = 28.2$,	iv) $h = 51.2$,	v) $h = 80$;
c)	$a = -0.05$:	i) $w = 20$,	ii) $w = 40$,	iii) $w = 60$,	iv) $w = 80$,	v) $w = 100$;
d)	$w = 20$:	i) $h = 5$,	ii) $h = 10$,	iii) $h = 15$,	iv) $h = 220$,	v) $h = 25$;
e)	$w = 10$:	i) $a = -0.05$,	ii) $a = -0.1$,	iii) $a = -0.15$,	iv) $a = -0.2$,	v) $a = -0.25$;
f)	$h = 20$:	i) $a = -0.8$,	ii) $a = -0.2 = \frac{1}{4} \cdot (-0.8)$,		iii) $a = -\frac{8}{90} = \frac{1}{9} \cdot (-0.8)$,	
		iv) $a = -0.05 = \frac{1}{16} \cdot (-0.8)$,		v) $a = -0.032 = \frac{1}{25} \cdot (-0.8)$;		
g)	$h = 20$:	i) $w = 40$,	ii) $w = 20$,	iii) $w = \frac{40}{3}$,	iv) $w = 10$,	v) $w = 8$;

Zusatzerkenntnis:
b) Wenn man die Breite ver $n-$facht, ver n^2-facht sich die Höhe.
c) Wenn man die Höhe ver n^2-facht, ver $n-$facht sich die Breite.
d) Wenn man den Faktor a ver $n-$facht, ver $n-$facht sich auch die Höhe.
e) Wenn man die Höhe h ver $n-$facht, ver $n-$facht sich auch der Faktor a.
f) Verdoppelt man die Spannweite, dann wird der Vorfaktor geviertelt.
Ver n-facht man die Spannweite, dann wird der Vorfaktor durch n^2 geteilt.

g) Vervierfacht man den Vorfaktor, dann wird die Spannweite halbiert.
Ver n-facht man den Vorfaktor, dann wirrd die Spannweite Vorfaktor durch $\sqrt{n}$ geteilt.

h) d i) $a = -0.05$, als ist $f(x) = -0.05x^2$; der Länge des Pfeilers kann mit $f(5)$ berechnet werden. $f(5) = -0.05 \cdot 5^2 = -1.25$ also ist der Pfeiler 1.25m lang. Eigentlich ist die Länge des Pfeilers $p = |f(5)|$.

d ii) $a = -0.1$, $p = |f(5)| = |-0.1 \cdot 5^2| = 2.5$(m);
d iii) $a = -0.15$, $p = |f(5)| = |-0.15 \cdot 5^2| = 3.75$(m);
d iv) $a = -0.2$, $p = |f(5)| = |-0.2 \cdot 5^2| = 5$(m);
d v) $a = -0.25$, $p = |f(5)| = |-0.25 \cdot 5^2| = 6.25$(m);

Zusatzerkenntnis zu h): Wenn man den Faktor a ver $n-$facht, ver $n-$facht sich auch die Länge des Pfeilers.

i) ... an welcher Stelle ($\underline{x}-$ Wert) befindet sich der Pfeiler?
g i) $a = -0.05$, als ist $f(x) = -0.05x^2$; die Stelle des Pfeilers kann mit der Gleichung $f(x) = -0.05x^2 = -5$ berechnet werden: $-0.05x^2 = -5 \overset{:(-0.05)}{\Longleftrightarrow} x^2 = 100 \overset{\pm\sqrt{\cdot}}{\Longleftrightarrow} x = \pm 10$.
Beachten Sie, dass an beiden Stellen die Stütze der entsprechenden Länge (hier = 5) gesucht sind. Der Abstand zum Scheitel wäre alledings nur (+)10.

g ii) $-0.2x^2 = -5 \overset{:(-0.2)}{\Longleftrightarrow} x^2 = 25 \overset{\pm\sqrt{\cdot}}{\Longleftrightarrow} x = \pm 5$;
g iii) $-0.45x^2 = -5 \overset{:(-0.45)}{\Longleftrightarrow} x^2 = \frac{100}{9} \overset{\pm\sqrt{\cdot}}{\Longleftrightarrow} x = \pm\frac{10}{3} = 3.\bar{3}$;
g iv) $-0.8x^2 = -5 \overset{:(-0.8)}{\Longleftrightarrow} x^2 = 6.25 \overset{\pm\sqrt{\cdot}}{\Longleftrightarrow} x = \pm 2.5$;
g v) $-1.25x^2 = -5 \overset{:(-1.25)}{\Longleftrightarrow} x^2 = 4 \overset{\pm\sqrt{\cdot}}{\Longleftrightarrow} x = \pm 2$;

Zusatzerkenntnis zu i): Wenn man den Faktor a ver n^2-facht, wird die Stelle durch n geteilt.

Teile ab j) Die Parabel geht durch den Punkt $P(\frac{w}{2}; h)$. Punktprobe mit P ergibt:

j) $40 = a \cdot 40^2 \Leftrightarrow a = \frac{-1}{40} = -0.025$, $f(20) = -10$ also 10m, $-6.4 = \frac{-1}{40}x^2 \Leftrightarrow x = \pm 16$; (Abb. 270)

k) $20 = a \cdot 50^2 \Leftrightarrow a = \frac{-1}{125} = -0.008$, $f(20) = -3.2$ also 3.2m, $-6.4 = \frac{-1}{125}x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{800} \approx \pm 28.28$.

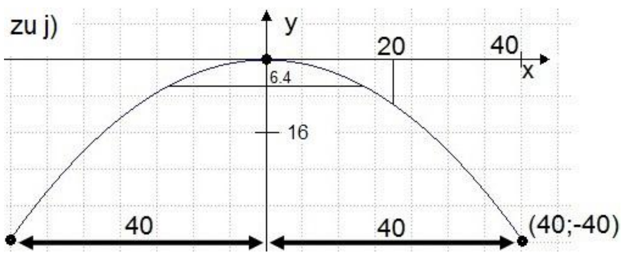


Abb. 269 Brücke

L) $10 = a \cdot 50^2 \Leftrightarrow a = \frac{-1}{250} = -0.004$, $f(20) = -1.6$ also 1.6m, $-6.4 = \frac{-1}{250}x^2 \Leftrightarrow x = \pm 40$;

m) $90 = a \cdot 90^2 \Leftrightarrow a = \frac{-1}{90} = -0.0\bar{1}$, $f(20) = -4.\bar{4}$ also etwa 4.44m, $-6.4 = \frac{-1}{90}x^2 \Leftrightarrow x = \pm 24$;

Aufg. 88/213:

b_r) i) Der Graph der Funktion $g(x) = x^2 + 1$ hat den Scheitel $S(0|1)$ und entsteht aus dem Graph der Funktion x^2 durch <u>Verschiebung</u> 1 in y Richtung (nach <u>oben</u>).

ii) Der Graph der Funktion $h(x) = x^2 - 2$ hat den Scheitel $S(0|-2)$ und entsteht aus dem Graph der Funktion x^2 durch <u>Verschiebung</u> -2 in y Richtung (um 2 nach <u>unten</u>).

iii) Der Graph der Funktion $f(x) = x^2 + c$ hat den Scheitel $S(0|c)$ und entsteht aus dem Graph der Funktion x^2 durch <u>Verschiebung</u> c in y Richtung (nach <u>oben</u>).

c_1) Wo liegt der Scheitel des Schaubildes von $f_1(x) = x^2 - 3$ und von $f_2(x) = x^2 + 10$?
d_1) Wie müssen Sie das Schaubild von $f_3(x) = x^2 - 7$ verschieben um das Schaubild von $f_4(x) = x^2 - 2$ zu erhalten?

Die Zeichnung ist im Aufgabenteil. b) Das Schaubild der Funktion $f(x) = x^2 + c$ entsteht aus dem Schaubild der Funktion $\underline{x^2}$ durch <u>Verschiebung</u> um $\underline{c}$ nach <u>oben</u>.

c) $S_1(0;-3)$, $S_2(0;10)$; d) Um $-2-(-7)=5$ Einheiten nach oben.

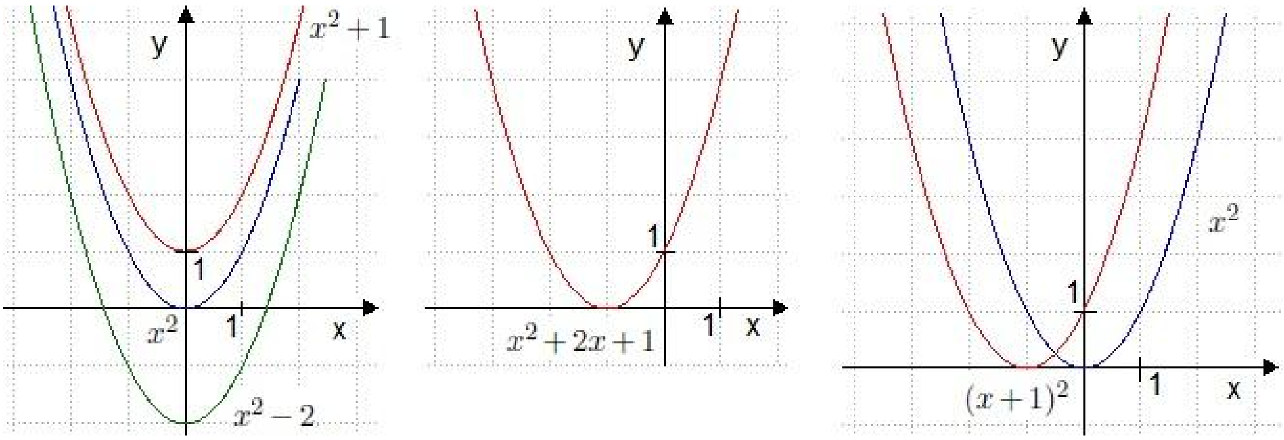


Abb. 270 Parabeln

Aufg. 88/214: a)

x	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5
$f(x)=x^2+2x+1$	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4	6.25

$f(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2$ (binomische Formel); b) $S(-1;0)$; Der Term $(x+1)^2$ kann nicht negativ werden und ist minimal $=0$ für $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ (Abb. 270).

c) i) $f_1(x)=(x+2)^2 \Rightarrow S(-2;0)$, ii) $f_2(x)=(x-3)^2 \Rightarrow S(3;0)$, iii) $f_3(x)=(x-4)^2 \Rightarrow S(4;0)$, iv) $f_4(x)=(x-5)^2 \Rightarrow S(5;0)$.

d) Das Schaubild der Funktion $f(x)=x^2-2dx+d^2=\underline{(x-d)^2}$ hat den Scheitel $S(\underline{d|0})$ und entsteht aus dem Schaubild der Funktion x^2 durch Verschiebung um $\underline{d}$ nach rechts.

e) a) Von oben nach unten: x^2+3, x^2+1, x^2-1, x^2-2;
b) Von links nach rechts: $(x+3)^2$, $(x+1)^2$, $(x-2)^2$, $(x-4)^2$;

Aufg. 88/215: a) i) $f_1(x)=(x-1)^2-1$ hat den Scheitel $S(1;-1)$;
ii) $f_2(x)=(x-2)^2-4$ hat den Scheitel $S(2;-4)$;
iii) $f_3(x)=(x-3)^2-9$ hat den Scheitel $S(3;-9)$;
iv) $f_4(x)=(x-4)^2-16$ hat den Scheitel $S(4;-16)$;

Zusatzerkenntnis: $f_n(x)=(x-n)^2-n^2$ hat den Scheitel $S(n;-n^2)$ weiterhin hat $f_n(x)$ die Nullstellen 0 und $2n$ (Wertetabelle). $f_n(x)=(x-n)^2-n^2=x^2-2nx$.

b) Das Schaubild von $f(x)=(x-d)^2+e$ hat den Scheitel $S(d|e)$.

c) Beweis (von Teil b): i) Der Term $(x-d)^2$ ist immer ≥ 0 (größer oder gleich 0)
ii) kann also minimal den Wert $\underline{0}$ haben. iii) $(x-d)^2=0 \Leftrightarrow x=d$.
iv) Damit ist $(x-d)^2+e$ für $x=d$ minimal und hat dann den Wert $\underline{e}$. v) $f(d)=\underline{e} \Rightarrow S(d|e)$.

d) i) $f(x)=x^2-4x+3$ hat den Scheitel hat den Scheitel $S(2;-1)$;
ii) $f(x)=x^2-4x+4$ hat den Scheitel hat den Scheitel $S(2;0)$;
iii) $f(x)=x^2-4x+5$ hat den Scheitel hat den Scheitel $S(2;1)$;
iv) $f(x)=x^2-4x+q$ hat den Scheitel hat den Scheitel $S(2;q-4)$;

e) Der Scheitel des Graphen von $f(x)=x^2+px+q$ ist unabhängig von q!

f) i) $f(x)=x^2-2x-3$ hat den Scheitel hat den Scheitel $S(1;-4)$;
ii) $f(x)=x^2-4x-3$ hat den Scheitel hat den Scheitel $S(2;-7)$;
iii) $f(x)=x^2-6x-3$ hat den Scheitel hat den Scheitel $S(3;-12)$;
iv) $f(x)=x^2-8x-3$ hat den Scheitel hat den Scheitel $S(4;-19)$;

f) v) $g(x) = x^2 + 2x - 3$ hat den Scheitel hat den Scheitel $S(-1; -4)$;
vi) $g(x) = x^2 + 4x - 3$ hat den Scheitel hat den Scheitel $S(-2; -7)$;
vii) $g(x) = x^2 + 6x - 3$ hat den Scheitel hat den Scheitel $S(-3; -12)$;
viii) $g(x) = x^2 + 8x - 3$ hat den Scheitel hat den Scheitel $S(-4; -19)$;

Zusatzerkenntnis: (Teil f): Der x Wert des Scheitels x_s von $f(x) = x^2 - 2ax - 3$ ist $x_s = a$. x_s von $g(x) = x^2 + 2ax - 3$ ist $x_s = -a$. Die Scheitel von $f(x)$ und $g(x)$ haben den gleichen y Wert y_s. **Der y-Wert:** $f(a) = a^2 - 2a \cdot a - 3 = -a^2 - 3 = g(-a) = (-a)^2 + 2a \cdot (-a) - 3$.

g) Der $x-$Wert des Scheitels von $f(x) = x^2 + px + q$ ist $x_s = -\frac{p}{2}$.

h) i) $x_s = -\frac{4}{2} \Rightarrow S(-2; -2)$; ii) $x_s = -\frac{8}{2} \Rightarrow S(-4; -13)$;

iii) $x_s = -\frac{-5}{2} \Rightarrow S(2.5; -6.25)$; iv) $x_s = -\frac{-7}{2} \Rightarrow S(3.5; -2.25)$;

v) $x_s = \frac{-(-3.5)}{2} = 1.75 \Rightarrow S(1.75; 3.1375)$; vi) $x_s = \frac{-1.2}{2} = 0.6 \Rightarrow S(0.6; -1.16)$;

Scheitelformen von Aufgabenteil h) i) $(x+1)^2+1$, ii) $(x+1)^2-1$, iii) $(x+3)^2-5$,
iv) $(x-2)^2+1$, v) $(x-6)^2-3$, vi) $(x-0.5)^2-0.25$, vii) $(x-1.5)^2-0.25$, viii) $(x-0.5)^2-6.25$,

i) Von links nach rechts: $(x+2)^2-2$, $(x+1)^2+2$, $(x-1)^2+1$, $(x-2)^2-1$;

j) i) $\leftrightarrow$ a), ii) $\leftrightarrow$ b), iii) $\leftrightarrow$ c), iv) $\leftrightarrow$ d), v) $\leftrightarrow$ e), vi) $\leftrightarrow$ f), vii) $\leftrightarrow$ g), viii) $\leftrightarrow$ h);

Es soll $x_s = \frac{-p}{2}$ angewendet werden, die Scheitel können (noch) durch eine Wertetabelle gefunden werden.

$f_1(x) = x^2$	$+2x$	$+2$	S(-1	$;1)$,	$f_2(x) = x^2$	$+2x$		S(-1	$;-1)$,
$f_3(x) = x^2$	$+6x$	$+4$	S(-3	$;-5)$,	$f_4(x) = x^2$	$-4x$	$+5$	$S(2$	$;1)$,
$f_5(x) = x^2$	$-10x$	$+22$	$S(5$	$;-3)$,	$f_6(x) = x^2$	$-x$		$S(0.5$	$;-0.25)$,
$f_7(x) = x^2$	$-3x$	$+2$	$S(1.5$	$;-0.25)$,	$f_8(x) = x^2$	$+x$	-6	S(-0.5	$;-6.25)$

i) $f_1(x) = (x+1)^2 + 1 \Rightarrow S(-1; 1)$;
ii) $f_2(x) = (x+1)^2 - 1 \Rightarrow S(-1; -1)$;
iii) $f_3(x) = (x+3)^2 - 5 \Rightarrow S(-3; -5)$;
iv) $f_4(x) = (x-2)^2 + 1 \Rightarrow S(2; 1)$;
v) $f_5(x) = (x-5)^2 - 3 \Rightarrow S(5; -3)$;
vi) $f_6(x) = (x-0.5)^2 - 0.25 \Rightarrow S(0.5; -0.25)$;
vii) $f_7(x) = (x-1.5)^2 - 0.25 \Rightarrow S(1.5; -0.25)$;
viii) $f_8(x) = (x+0.5)^2 - 6.25 \Rightarrow S(-0.5; -6.25)$;

k) Technik: Quadratische Ergänzung;

$$x^2+px+q = x^2+2\frac{p}{2}x+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q = \left(x-\frac{p}{2}\right)^2+q-\left(\frac{p}{2}\right)^2;$$ damit gilt $S(-\frac{p}{2}; q - \frac{p^2}{4})$.

Aufg. 89/216: Bei dieser Aufgabe ist $n \in \mathbb{N}$, x_s der $x-$Wert vom Scheitel und y_s der $y-$Wert vom Scheitel. Der Scheitel wird mit S bezeichnet.

a) i) ... mit Hilfe einer <u>Wertetabelle</u> ... Der Scheitel ist bei $S(1; 2)$ - x_s ist nicht $\frac{-p}{2}$!

x	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5
$2x^2 - 4x$	10.5	6	2.5	0	-1.5	-2	-1.5	0	2.5

ii) Das Problem ist der Faktor '2' vor dem x^2.

b) i) $f(x) = x^2 - 12x + 9$: $x_s = \frac{-p}{2} = \frac{12}{2} = 6$ hat den Scheitel $S(6; -27)$. Die weiteren Scheitel werden mit Hilfe einer Wertetabelle gefunden. ii) $2x^2 - 12x + 9$ hat den Scheitel $S(3; -9)$;
iii) $3x^2 - 12x + 9$ hat den Scheitel $S(2; -3)$; iv) $4x^2 - 12x + 9$ hat den Scheitel $S(1.5; 0)$;
iv) kann zB. auch mit einer binomischen Formel gerechnet werden: $4x^2 - 12x + 9 = (2x-3)^2$.

Zusatzerkenntnis: Sei $f(x) = ax^2 + bx + c$, so halbiert sich x_s, wenn (nur) a verdoppelt wird, bzw wird x_s durch n dividiert, wenn (nur) a ver $n-$facht wird.

c) i) $f(x) = x^2 - 4x - 5$: $x_s = \frac{-p}{2} = \frac{4}{2} = 2$ hat den Scheitel $S(2; -9)$. Die weiteren Scheitel werden mit Hilfe einer Wertetabelle gefunden. ii) $2x^2 - 8x - 10$ hat den Scheitel $S(2; -18)$; iii) $3x^2 - 12x + 15$ hat den Scheitel $S(2; -27)$; iv) $4x^2 - 16x + 20$ hat den Scheitel $S(2; -36)$;

Zusatzerkenntnis: Sei $f(x) = ax^2 + bx + c$, so bleibt x_s konstant, wenn a und b ver $n-$facht werden. $h(x) = n \cdot f(x) = n \cdot ax^2 + n \cdot bx + n \cdot c$ hat also den gleichen $x-$ Wert vom Scheitel wie f aber einen $n-$fachen $y-$Wert.

d) i) $f(x) = 3x^2 - 6x$: hat den Scheitel $S(1; -3)$ ii) $6x^2 - 24x$ hat den Scheitel $S(2; -24)$; iii) $9x^2 - 54x$ hat den Scheitel $S(3; -81)$; iv) $12x^2 - 96x$ hat den Scheitel $S(4; -192)$;

Zusatzerkenntnis: Sei $f(x) = 3n \cdot x^2 - 6n^2 \cdot x$, so ist $x_s = n$ und $y_s = -3n^2$. Alle Funktionen haben die Nullstellen 0 und $4n$.

e i) $x_s = \frac{-b}{2a}$ für $a = 1$ ist $x_s = \frac{-b}{2}$; ii) Beweis mit Hilfe der quadratischen Ergänzung.

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c = a\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \quad \Rightarrow \quad S(\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}).$$

1) $a(x-d)^2 + e = ax^2 - 2adx + ad^2 + e \Rightarrow x_s = \frac{2ad}{2a} = d$,

2) Sei $a > 0$, dann wird der Term $a(x-d)^2 + e$ für $x = d$ minimal, denn $a(x-d)^2 \geq 0$ und $a(x-d)^2 = 0 \Leftrightarrow x = d$ ($a < 0$ analog),

$y_s = f(x_s) = f(d) = a(d-d)^2 + e = e$.

3) Funktionsverschiebung: Das Schaubild von $f_1(x) = ax^2$ hat $S(0; 0)$ Das Schaubild von $f(x) = a(x-d)^2 + e$ ist K_{f_1} um d Einheiten nach rechts und um e Einheiten nach oben verschoben. Damit ist $S(d; e)$.

iv) Jede Parabel ist achsensymmetrisch zur senkrechten Geraden durch den Scheitel: $x = x_s$.

f) i) $S(-2; 0)$, ii) $S(4; -8)$, iii) $S(-1; 2)$, iv) $S(2; -12)$, v) $S(5; -2.5)$, v) $S(3; 54)$, vii) $S(0.5; 1.5)$, viii) $S(1.5; -12.75)$, ix) $S(-\frac{1}{8}; \frac{15}{16})$;

g) i) $x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \cdot 3} = -1$, $g_1(-1) = 3(-1)^2 + 6(-1) + 5 = 2 \Rightarrow S(-1; 2)$;
ii) $x_s = \frac{-3}{2 \cdot 0.5} = -3$, $g_2(-3) = -3.5 \Rightarrow S(-3; -3.5)$; iii) $x_s = \frac{-2}{2 \cdot (-1)} = 1$, $g_3(1) = 2 \Rightarrow S(1; 2)$;
iv) $x_s = \frac{-8}{2 \cdot (-2)} = 2$, $\Rightarrow S(2; 8)$; v) $S(2; 4)$; vi) $S(1; 4)$; vii) $S(-2; 4)$;
viii) $x_s = \frac{-2}{2 \cdot 2} = 0.5$, $\Rightarrow S(0.5; 1.5)$; ix) $S(-0.3; -5.45)$.

j) i) $f(x) = (x-1)(x-3)$ hat den Scheitel $S(2|-1)$, ii) $(x+1)(x+3)$ hat den Scheitel $S(-2|-1)$, iii) $(x-2)(x-6)$ hat den Scheitel $S(4|-4)$, iv) $(x+2)(x+6)$ hat den Scheitel $S(-4|-4)$,

v) $x(x-4)$ hat den Scheitel $S(2|-4)$; vi) $(x+1)(x-3)$ hat den Scheitel $S(-1|-4)$, vii) $(x+4)(x+8)$ hat den Scheitel $S(-6|-4)$, viii) $(x-2)(x+2)$ hat den Scheitel $S(0|-4)$, ix) $(x-3)(x-7)$ hat den Scheitel $S(5|-4)$,

Zusatzergebnis: Sei $a, b \in \mathbb{R}$ $(x-a)(x-b)$ hat den Scheitel $S(\frac{a+b}{2}|-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2)$; und der Scheitel von $(x-a)(x-(a+4))$ ist $S(a+2|-4)$. Es gilt sogar $(x-a)(x-(a+c))$ und $(x-b)(x-(b+c))$ (Parabeln mit gleichem Nullstellenabstand) haben den gleichen $y-$Wert vom Scheitel y_s.

k) $y = \pm(x-2)^2 + 1$.

Aufg. 90/217: a) $(-1; 1)$ und $(2; 4)$; b) $(-3; 9)$ und $(2; 4)$; c) $(-3; 9)$ und $(1; 1)$;

d) $(0; 0)$ und $(1; 1)$; e) $(-1; 1)$; $g(x)$ ist hier eine Tangente an das Schaubild von x^2 (Abb. 271).

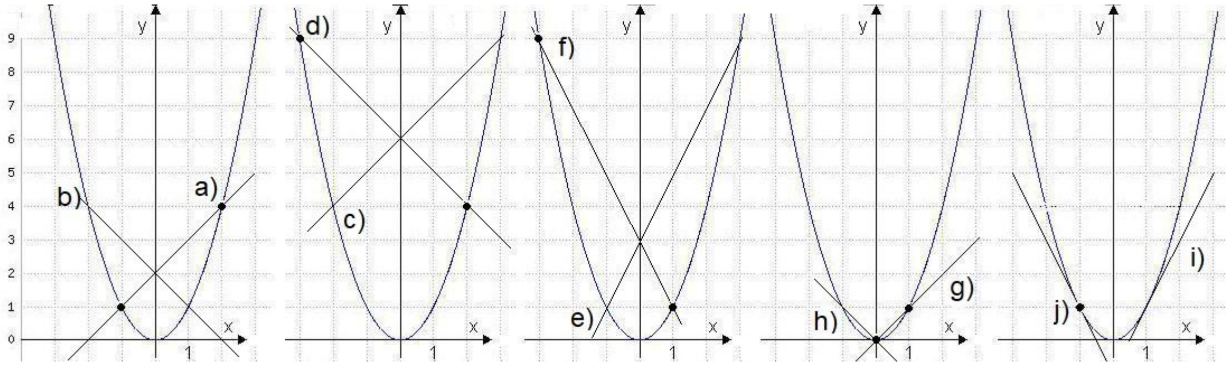


Abb. 271 Parabeln

Aufg. 90/218: (ExAg) a) $x_s = \frac{-4}{2\cdot(-0.5)} = 4, \quad f(4) = 9$; der Tunnel ist max 9m hoch.

b) Gesucht ist der Frauen Fußball Verein **1. FFC Turbine Potsdam**, der bisher sechs Mal (gesamt) deutscher Meister wurde.

b) $x \in [0; 500], \quad x_s = \frac{-400}{2\cdot 0.8} = 250 \ (\frac{U}{min}), \quad p(250) = 50000 \ (kW)$. Die Maximalleistung der Turbine ist $50000 KWh$

c) $x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{0-36}{2\cdot 0.002} = 90; k(90) = 6 \Rightarrow S(90; 6)$. Der Kraftstoffverbrauch ist bei 90 $\frac{km}{h}$ am niedrigsten, nämlich 6 $\frac{l}{100km}$.

d) Die Zahl sei x, dann ist der Vorgänger $x-1$ und der Nachfolger $x+1$. Das Produkt aus Vorgänger und Nachfolger ist $(x-1)\cdot(x+1) = x^2 - 1$ (Zielfunktion).

$a = 1, b = 0, c = -1$, damit ist $x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2\cdot 1} = 0$.

Das Produkt aus Vorgänger und Nachfolger ist für $x = 0$ am kleinsten, nämlich $0^2 - 1 = -1$.

e) NB: $u + b = 10$, ZF: $z(u) = u \cdot b = u \cdot (10 - u)$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $u_0 = b_0 = 5$; allgemein: $x + y = n$, ZF: $z(x) = x \cdot y = x \cdot (10 - x)$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $x_0 = y_0 = \frac{n}{2}$;
f) NB: $2u + 2b = 60$, ZF: $z(u) = u \cdot b = u \cdot (30 - u)$, $\mathbb{D} = [0; 30]$, $u_0 = b_0 = 15$;

g) Gesucht ist die Berliner Mauer, die am 9. November 1989 gefallen ist. 'Niemand hat die Absicht eine Mauer zu errichten' sagte der DDR-Staats- und Parteichef Walter Ulbricht, was zwei Monate später als alternative Wahrheit entlarvt wurde; siehe auch Abschnitt 385/14.1.14.

g) NB: $2u + b = 20$, ZF: $z(u) = u \cdot b = u \cdot (20 - 2u)$, $\mathbb{D} = [0; 10]$, $u_0 = 5, b_0 = 10$;

Teil h) i) $f(x) = \frac{x^2}{4} + 7$ hat den Scheitel $S(0; 7)$: 2 Meter: heißt $f(1) = \frac{1^2}{4} + 7 = 7.25 = f(-1)$; Damit ist der Durchhang 0.25 (m) 8 Meter: heißt $f(4) = \frac{4^2}{4} + 7 = 11 = f(-4)$; Damit ist der Durchhang 4 (m).

ii) $f(x) = \frac{x^2}{16} + x + 5$ hat den Scheitel $S(-8; 1)$: 2 Meter: heißt $f(-7) = \frac{(-7)^2}{16} + x + 5 = 1.0625 = f(-9)$; Damit ist der Durchhang 6.25 (cm) 8 Meter: heißt $f(-12) = \frac{(-12)^2}{16} + x + 5 = 2 = f(-4)$; Damit ist der Durchhang 2 (m)

Aufg. 91/220: a) A, B, C, D bilden ein Rechteck und C liegt auf dem Funktionsgraphen.
$A(1) = 1 \cdot 2.5 = 2.5$; $A(2) = 2 \cdot 2 = 4$; $A(3) = 3 \cdot 1.5 = 4.5$; $A(4) = 4 \cdot 1 = 4$ (Abb. 272).

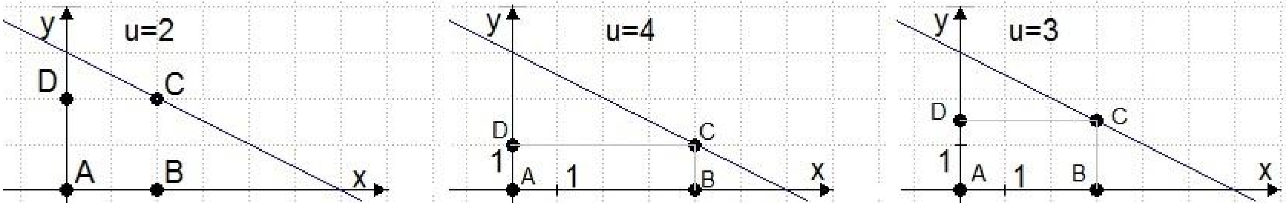


Abb. 272 Rechtecke

d) Breite=u, Höhe=$f(u) = 3 - \frac{u}{2}$, Fläche $= A(u) = u \cdot f(u) = u \cdot (3 - \frac{u}{2})$;

e) $A(u) = \frac{-u^2}{2} + 3u$ ist eine Parabel der Form $ax^2 + bx + c$ deren Scheitel den $x-$Wert $x_s = \frac{-b}{2a}$ hat: $x_s = \frac{-3}{2 \cdot -0.5} = 3$; die Fläche ist $y_s = A(3) = 4.5$.

f) **i)** $u = 2, A_{max} = 1.5 \cdot (8 - 2 \cdot 2) = 4$; **ii)** $u = 6, A_{max} = 6 \cdot (6 - 0.5 \cdot 6) = 18$; **iii)** $u = 3, A_{max} = 3 \cdot (18 - 3 \cdot 3) = 27$; **iv)*** $u = \frac{b}{2a}, A_{max} = \frac{b}{2a} \cdot \frac{b}{2} = \frac{b^2}{2a}$;

g) $U(u) = 2u + 2(3 - \frac{u}{2})$;

Aufg. 91/221: Umfang: $U(u) = u + f(u) + u + f(u) = 2u + 8 - u^2$, $x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2\cdot(-1)} = 1$, $U_{max} = U(1) = 9$.

Aufg. 91/222:

a) Gesucht ist der **Garten Eden**; Abels Vater ist Adam der im Garten Eden vom Baum der Erkenntnis einen Apfel gegessen hat (und das war nicht gut). Es gibt auch einen Mathematiker namens Niels Henrik Abel (1802-1829); nach welchem zB der Abelsche Grenzwertsatz benannt ist.

e)
Wertetabelle:

Bäume	40	41	42	43	44	$40 + x$
Ertrag/Baum	500	490	480	470	460	$500 - 10x$
Gesamt Ertrag	20 000	20 090	20 160	20210	20 240	$(40 + x) \cdot (500 - 10x)$

Ertragsfunktion: $f(x) = (40 + x) \cdot (500 - 10x)$, $S(5; 20250)$. Es müssen also noch 5 Bäume gepflanzt werden um den Maximalertrag von 20250 Äpfeln zu ernten.

b) Gesucht ist der Film **Demolition Man** (1993) bei welchem Sylvester Stallone (Schauspieler der auch Rambo spielt) den Protagonisten spielt. Dort wird von Lt. Lenina Huxley (Sandra Bullock) die Schwarzenegger Präsidenten Bilbliothek erwähnt. Das Schwarzenegger tatsächlich Präsident werden wird, ist auch in 'The Expendables' erwähnt.

$(10 - 0.5x) \cdot (320 + 20x) = 3200 + 200 \cdot x - 160 \cdot x - 10x^2 = 3000 + 40 \cdot x - 10x^2$ $x_s = \frac{-40}{-20} = 2$; damit muss der Preis um zwei Stufen $=2 \cdot 0.5$ € gesenkt werden. Beim Preis von 9 € ist 9 $\cdot 360 = 3240$ €.

c)
Wertetabelle:

Gewinn / kg	6	5.98	5.96	5.94	5.92	$6-x$
Absatz in kg	10 000	10 100	10 200	10 300	10 400	10 000 + $100x$
Gesamt Gewinn	60 000	60 398	60 792	61 182	61 568	$(6 - x) \cdot (10000 + 100x)$

Gewinn (aktuell): $6 \cdot 10000$ Euro, ZF (Gewinn): $z(u) = (6 - 0.02u) \cdot (10000 + 100 \cdot u) =$
$= 60000 + 600u - 200u - 2u^2$, $x_s = \frac{-400}{2\cdot(-2)} = 100$, damit sind 100 Preisschritte mit je 2 cent notwendig. $\mathbb{D} = [-100; 300]$, $u_0 = 100, G_0 = 80000$, Preis 18 Euro;

Die Zielfunktion ohne die 14 € Kosten wäre: $(20 - 0.02x) \cdot (10000 + 100x)$.

d) Die Fläche des Parallelogramms ist 'Rechteck $-$ 4 Dreiecke'$= a \cdot b - x(b - x) - x(a - x) = 2x^2 - (a + b)x + ab$. $x_s = \frac{-(-(a+b))}{2\cdot 2} = \frac{a+b}{4}$. Es handelt sich um ein Minimum.

e) Die Hypotenuse (lange Seite des rechtwinkligen Dreiecks - gegenüber dem 90° Winkel) wird durch eine Gerade $g(x)$ dargestellt die durch $P(0; 6)$ und $Q(12; 0)$ geht. Damit ist $g(x) = (\frac{0-6}{12-0})x + 6 = -0.5x + 6$.

$$A(u) = u \cdot f(u) = u \cdot (-0.5u + 6) = -0.5u^2 + 6u.$$

$x_s = \frac{-6}{2\cdot(-0.5)} = 6$; $A_{max} = 6 \cdot (-0.5 \cdot 6 + 6) = 18$. Damit sind die Seiten 3 und 6 m lang.

f) NB: Gerade durch $(1; 4)$ und $(3; 0)$ berechnen: $y = -2x + 6$ (mit $x = u, y = b$),
ZF: $z(u) = 2u \cdot b = 2u \cdot (6 - 2u)$, $\mathbb{D} = [1; 3]$, $u_0 = 1.5, b_0 = 3$;

g) Sei $A(90; 120 - 30)$ und $B(90 - 20; 120)$, dann ist die Bruchkante g_{AB}: $f(x) = \frac{90-120}{90-70}(x - 90) + 90$ $\Leftrightarrow f(x) = -1.5x + 225 \Leftrightarrow$ (für $70 \leq x \leq 90$).

$A = u \cdot f(u) = u \cdot (225 - 1.5u) = 225u - 1.5u^2$ $x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-225}{2 \cdot 1.5} = 75$ (das Maximum liegt zwischen 70 und 90). $A(75) = 8437.5cm^2$. Damit hat das maximale Rechteck eine Seite von $75cm$ und eine Fläche von $8437.5cm^2$; die zweite Seite ist dann $112.5cm$ lang.

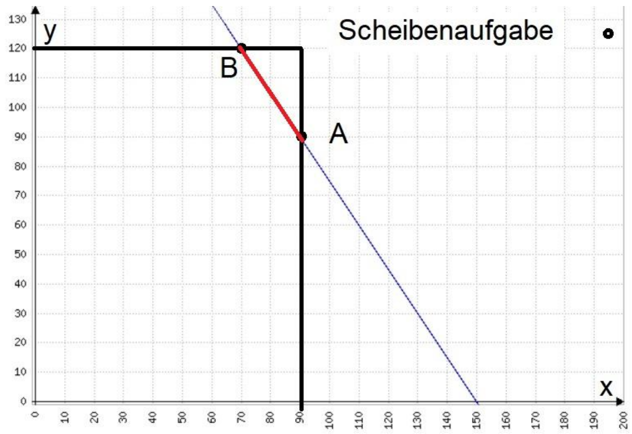


Abb. 273 die zerbrochene Scheibe

Aufg. 91/219: Die Differenzfunktion heiße $d(x)$. a) $P(1;1),\ Q(-2;4),\ g(x) = -x+2,$ $f(x) = x^2,\ d(x) = g(x) - f(x) = 2 - x - x^2,\ x_s = \frac{1}{2 \cdot -1} = -0.5,\ d(x_s) = 2.25;$

b) $P(0;0),\ Q(3;3),\ g(x) = x,\ f(x) = -(x-2)^2 + 4 = -x^2 + 4x,$ $d(x) = f(x) - g(x) = -x^2 + 3x,\ x_s = \frac{-3}{-2} = 1.5,\ d(x_s) = 2.25;$

c) $P(-2;-2),\ Q(4;4),\ g(x) = x,\ f(x) = -0.5(x-2)^2 + 6 = -0.5x^2 + 2x + 4,$ $d(x) = f(x) - g(x) = -0.5x^2 + x + 4,\ x_s = \frac{-1}{-1} = 1,\ d(x_s) = 4.5;$

d) $P(0;3.5),\ Q(7;0),\ g(x) = 3.5 - 0.5x,\ f(x) = -0.5(x-3)^2 + 8 = -0.5x^2 + 3x + 3.5,$ $d(x) = f(x) - g(x) = -0.5x^2 + 2.5x,\ x_s = 2.5,\ d(x_s) = 3.125;$

Aufg. 92/223: (Interpolation) a) $b = -2, c = 0$; Technik: Punktprobe = Einsetzen + Ausrechnen.

b) Knick in der Strecke; c) Die beiden Anschlussgeraden sind Tangenten an die Parabel. Beweis mit binomischer Formel (doppelte Lösung) oder mit Mitternachtsformel (kommt später):

$y = -2x-4 \cap y = (x+1)^2-1 : -2x-4 = (x+1)^2-1 \Leftrightarrow -2x-4 = x^2+2x \Leftrightarrow x^2+4x+4 = 0 \Leftrightarrow x = -2;$

$4x - 1 = (x+1)^2 - 1 \Leftrightarrow 4x - 1 = x^2 + 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1;$ d) $x_1 \neq x_2$.

Aufg. 92/224: a) $f(x) = x^2 + 3x + 2$, b) $f(x) = x^2 - 4x + 1$, c) $f(x) = x^2 + 5x - 6$, d) $f(x) = x^2 - x + 1$,

a) $A(0;2)$ $2=0^2+0p+q \Leftrightarrow 2=q$ einsetzen $6=1+p+2 \overset{-3}{\Leftrightarrow} 3=p$
$B(1;6)$ $6=1^2+p+q$
Lösung: $f(x)=x^2+3x+2$

Thx Lea Lan

b) $A(2;-3)$ $-3=2^2+2p+q \Leftrightarrow -3=4+2p+q \overset{-4}{\Leftrightarrow} -7=2p+q \overset{\cdot 4}{\Leftrightarrow} -28=8p+4q$
$B(4;1)$ $1=4^2+4p+q \Leftrightarrow 1=16+4p+q \overset{-16}{\Leftrightarrow} -15=4p+q \overset{\cdot(-2)}{\Leftrightarrow} 30=-8p-2q$
$2=2q \mid :2$
$q=1$
einsetzen: $30=-8p-2\cdot 1 \Leftrightarrow 30=-8p-2 \overset{+2}{\Leftrightarrow} 32=-8p \mid :-8$
$p=-4$
Lösung: $f(x)=x^2-4x+1$

d) $A(-3;13)$ $13=(-3)^2-3p+q \Leftrightarrow 13=9-3p+q \Leftrightarrow 4=-3p+q \Leftrightarrow 4=-3p+q$
$B(-1;3)$ $3=(-1)^2-p+q \Leftrightarrow 3=1-p+q \Leftrightarrow 2=-p+q \Leftrightarrow -6=3p-3q$
$-2=-2q \,|:-2$
$q=1$
einsetzen: $4=-3p+1 \Leftrightarrow 3=-3p \Leftrightarrow p=-1$
Lösung: x^2-x+1

Thx Lea Lan

e) $P(-1;-1)$ $-1=(-1)^2-p+q \Leftrightarrow -1=1-p+q \Leftrightarrow -2=-p+q$
$Q(1;7)$ $7=(1)^2+p+q \Leftrightarrow 7=1+p+q \Leftrightarrow 6=p+q$
$4=2q \,|:2$
$q=2$
einsetzen: $6=p+2 \Leftrightarrow p=4$
Lösung: $f(x)=x^2+4x+2$

f) $P(2;3)$ $3=2^2+2p+q \Leftrightarrow 3=4+2p+q \Leftrightarrow -1=2p+q \Leftrightarrow -1=2p+q$
$Q(1;2)$ $2=1^2+p+q \Leftrightarrow 2=1+p+q \Leftrightarrow 1=p+q \Leftrightarrow -2=-2p-2q$
$-3=-q \,|:(-1)$
$q=3$
einsetzen: $-1=2p+3 \Leftrightarrow -4=2p \Leftrightarrow p=-2$
Lösung: $f(x)=x^2-2x+3$

g) $P(-1;1)$ $1=(-1)^2-p+q \Leftrightarrow 1=1-p+q \Leftrightarrow 0=-p+q \Leftrightarrow 0=+2p+2q$
$Q(2;-8)$ $-8=2^2+2p+q \Leftrightarrow -8=4+2p+q \Leftrightarrow -12=2p+q \Leftrightarrow 12=-2p-q$
$12=q$
einsetzen:
$12=-2p-12 \,|+12$ Lösung: $x^2-12x+12$
$24=-2p \,|:-2$
$-12=p$

e) LGS: $-1=(-1)^2-p+q$; $7=1+p+q$ addiert ergibt sich $6=2+2q$ oder $q=2 \Rightarrow f(x)=x^2+4x+2$;
f) x^2-2x+3; g) x^2-2x+3; h) x^2-3x+3;

Aufg. 92/225: a) x^2-2x-2; Die Koeffizienten von b) und c) können z.B. über die Idee, dass der x-Wert des Scheitel $x_s=\frac{-b}{2a}$ in der Mitte zweier Stellen mit gleichem y-Wert liegt gefunden werden. Es gilt die Scheitelnormalform $y=a(x-x_s)^2+y_s$. b) x^2-4x+3; c)* $2x^2+8x-8$;

Aufg. 92/226: Kurve: $f(x)=-\frac{1}{4}x^2+2x$; Höhe: $f(4)=4\text{m}$; Weite: 8m.

Aufg. 92/227: a) Zwei lineare Funktionen (Geraden) $f_1(x)=m_1\cdot c_1$ und $f_2(x)=m_2\cdot c_2$ sind identisch $(f_1\equiv f_2)\Leftrightarrow f_1(x)=\underline{f_2(x)}$ für alle $x\in\mathbb{R}$. b) Zeigen Sie, das draus $m_1=\underline{m_2}$ und $c_1=\underline{c_2}$ folgt.

15.5.2 LöVo zu Einheit 5.2 (Umkehrfunktionen UE 9_6)

Aufg. 92/228: a) $y=y(x)=(x+x+500)\cdot 1.02=2.04x+510$;

Für 80% seines Bankguthabens $\underline{y}$ möchte er sich einen neuen CD Player kaufen.

b) Geben Sie die Funktion $z=f(\underline{y})$ an, die den Preis des CD Players abhängig vom Bankguthaben $\underline{y}$ beschreibt. $z=f(y)=0.8y$; c) $z=f(y(x))=0.8(2.04x+510)=1.632x+408$;

d) Das Einsetzen einer Funktion $y=y(x)$ in eine Funktion $z=f(\underline{y})$ heißt Hintereinanderausführung oder **Verkettung** der Funktionen f und y. Dabei heißt $\underline{y}$ die innere und $\underline{f}$ die äußere Funktion.

e) $y(x)=x-32$, $z(y)=\frac{5}{9}\cdot y$ und $z(x)=\frac{55}{9}\cdot(x-32)$.

Aufg. 93/229: a) Bei der äußeren Funktion $f(x)$ muss das x zu y umbenannt werden:

$f(y)=2y+1\Rightarrow f(y(x))=2(x^2)+1$. b) $f(y)=y^2$, $y=2x$, $f(y(x))=(2x^2)=4x^2$;

c) $f(y)=y^2+2y+3$, $y=x+1$, $f(y(x))=(x+1)^2+2(x+1)+3=x^2+2x+1+2x+2+3=x^2+4x+6$;

d) $f(y)=3y+1$, $y=2x-3$, $f(y(x))=3(2x-3)+1=6x-8$;

e) $f(y) = 2y - 1$, $y = 2x + 3, f(y(x)) = 2(2x + 3) - 1 = 4x + 5$;

f) $f(y) = y^2 + 4y - 2$, $y = 2x - 3, f(y(x)) = (2x - 3)^2 + 4(2x - 3) - 2 = 4x^2 - 4x - 5$;

g) $f(y) = 4y - 2$, $y = x^2 - 2x - 3, f(y(x)) = 4(x^2 - 2x - 3) - 2 = 4x^2 - 8x - 12 - 2 = 4x^2 - 8x - 14$;

Aufg. 93/230: $g(x) = 2 - x$, $f(x) = x(x - 4)$, $f(g(x)) = (2 - x) \cdot (2 - x - 4) = x^2 - 4$;
a) $g(3) = -1$, $f(g(3)) = f(-1) = 5$;
b) $f(x) = 0$ falls $x = 0$ oder $x = 4$, damit erfüllen $x = -2$ ($g(-2) = 4$) oder $x = 2$ ($g(2) = 0$) die Bedingung. Die Aufgabe kann auch ohne die expliziten Darstellungen gelöst werden.

c) K_f ist eine nach oben offene Normalparabel mit Scheitel $S(2/-4)$

$\Rightarrow f(x) = (x - 2)^2 - 4 = x^2 - 4x$.

K_g ist eine Gerade mit Steigung -1 und y Achsenabschnitt $2 \Rightarrow g(x) = -x + 2$.

$f(g) = g^2 - 4g$, $f(g(x)) = (-x + 2)^2 - 4(-x + 2) = x^2 - 4x + 4 + 4x - 8 = x^2 - 4$.

$g(f) = -f + 2 = -(x^2 - 4x) + 2 = -x^2 + 4x + 2$.

d) $g(-0.5) \approx 3$; $f(g(-0.5)) \approx f(3) \approx 6$. e) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$; damit sind die Stellen $g(x) = 1$ gesucht; diese sind bei $x = -1$ und $x = -5$ also zwei Nullstellen.

f) $g(x) = (x + 3)^2 - 3$; $f(x) = 2^x - 2$; $g(f(x)) = (2^x - 2 + 3)^2 - 3 = (2^x + 1)^2 - 3$;
$f(g(x)) = 2^{(x+3)^2-3} - 2$; (kaum vereinfachbar)

Aufg. 93/231: b) $f_{\text{neu}} : y = 2x$ c) Tausche die Variablen ($x = \frac{y}{2}$) und löse nach y auf.

a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = \frac{x}{2}$	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2

x	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
y	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

c) Von $y = f(x)$ kommt man auf die Umkehrfunktion $\underline{f^{-1}(x)}$, indem man $\underline{x \text{ und } y \text{ vertauscht}}$ und diese Gleichung dann nach $\underline{y \text{ auflöst}}$. **d)** Das Tauschen der Zeilen entspricht dem Tauschen von x und y.

e) i) $y = \frac{1}{3}x$, ii) $y = 2x - 2$, iii) $y = -3x + 6$, iv) $y = \frac{2}{3}x - 2$, v) $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$, vi) $y = \frac{1}{m}x - \frac{c}{m}$.

v) $y = 4x + 2$: getauscht $x = 4y + 2 \Leftrightarrow x - 2 = 4y \Leftrightarrow \frac{x-2}{4} = y \Leftrightarrow \frac{x}{4} - \frac{1}{2} = y$;

Umkehrfunktionen notieren wir auch als $f^{-1}(x)$;
Bsp: $f(x) = 2x - 2$ hat die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = 0.5x + 1$.

Aufg. 93/232:

a)

x	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5
$y = x^2$	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25

x	-2.25	-1	-0.25	0	0.25	1	2.25
$y = \pm\sqrt{x}$	–	–	–	0	± 0.5	± 1	± 1.5

b) $y = f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$ d) Problem: Negativen Zahlen kann kein Wert zugeordnet werden; positiven Zahlen hingegen zwei Werte. Bei Funktionen sollte jedem $x-$ Wert genau ein $y-$ Wert zugeordnet werden.
e) $y = x^2$ kann nur für $x \geq 0$ (bzw. für $x \leq 0$ und andere) invertiert werden.
f) Vor dem Bilden der Umkehrfunktion muss man manchmal den Definitionsbereich einschränken, um Dopplungen zu verhindern. Das Schaubild von f^{-1} geht durch Spiegelung an der Geraden $\underline{y = x}$ aus dem Schaubild von f hervor. Das Tauschen der Variablen entspricht algebraisch der Spiegelung. Der Definitionsbereich von f entspricht dem Wertebereich von $(f^{-1}(x) = \bar{f}(x))$ und umgekehrt.

Aufg. 93/233: a) $x = y^2 + 1 \Leftrightarrow x - 1 = y^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{x - 1}$ für $x \geq 1$,
b) $x = (y + 2)^2 \Leftrightarrow y + 2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow y = \sqrt{x} - 2$ für $x \geq 0$,
c) $x = (y + 1)^2 - 3 \Leftrightarrow x + 3 = (y + 1)^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{x + 3} - 1$ für $x \geq -3$,
d) $x = y^2 + 2y + 4 = (y + 1)^2 + 3 \Leftrightarrow y = \sqrt{x - 3} - 1$ für $x \geq 3$.

e) $x = y^2 - 4y + 1 = (y-2)^2 - 4 + 1 \Leftrightarrow y - 2 = (\pm)\sqrt{x+3} \Rightarrow y = \sqrt{x+3} + 2$

f) $x = 2y^2 - 4y \overset{:2}{\Leftrightarrow} \frac{x}{2} = y^2 - 2y + 1 - 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} + 1 = (y-1)^2 \Rightarrow (y-1) = (\pm)\sqrt{\frac{x+2}{2}} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{x+2}{2}} + 1$

g) $x = \frac{1}{2}y^2 - 3y \overset{:2}{\Leftrightarrow} 2x = y^2 - 6y + 9 - 9 \overset{-9}{\Longleftrightarrow} 2x + 9 = (y-3)^2 \Rightarrow y - 3 = (\pm)\sqrt{2x+9} \Rightarrow y = \sqrt{2x+9} + 3$

Aufg. 94/234: Der Graph von $f_1(x)$ heiße K_{f1} und von $f_2(x)$ heiße K_{f2} (usw).

a) K_{f2} entsteht aus K_{f1} durch Streckung mit dem Faktor 2 in y- Richtung (nach oben);

K_{f3} entsteht aus K_{f1} durch Streckung mit dem Faktor 3 in y- Richtung;

K_f entsteht aus K_{f1} durch Streckung mit dem Faktor $\sqrt{a}$ in y- Richtung;

b) K_{g1} entsteht aus K_{f1} durch Verschiebung um -1 nach rechts in x- Richtung;

K_{g2} entsteht aus K_{f1} durch Verschiebung um -2 nach rechts in x- Richtung;

c) $h_1(x) = \sqrt{2x+2} = \sqrt{2(x+1)}$, K_{h1} entsteht aus K_{f1} durch Streckung mit dem Faktor $\sqrt{2}$ in y-Richtung und anschließender Verschiebung um -1 in x-Richtung;

$h_2(x) = \sqrt{0.5x-1} = \sqrt{0.5(x-2)}$, K_{h2} entsteht aus K_{f1} durch Streckung mit dem Faktor $\sqrt{0.5}$ in y-Richtung und anschließender Verschiebung um 2 in x-Richtung;

$h_3(x) = \sqrt{3x+4.5} = \sqrt{3(x+1.5)}$, K_{h3} entsteht aus K_{f1} durch Streckung mit dem Faktor $\sqrt{3}$ in y-Richtung und anschließender Verschiebung um -1.5 in x-Richtung;

$h_4(x) = \sqrt{ax+b} = \sqrt{a(x+\frac{b}{a})}$, $(a>0)$ K_{h4} entsteht aus K_{f1} durch Streckung mit dem Faktor $\sqrt{a}$ in y- Richtung und anschließender Verschiebung um $-\frac{b}{a}$ in x-Richtung; falls $a<0$ ist gehört noch eine Spiegelung an der y-Achse dazu ($a=0$ wird hier nicht betrachtet).

$h_5(x) = \sqrt{-x}$: K_{h5} entsteht durch Spiegelung von K_{f1} an der y-Achse. Tatsächlich kann ein $-$ Zeichen unter der Wurzel stehen, hier wird das $-$ durch das $x \le 0$ ausgeglichen.

$h_6(x) = \sqrt{2-x} = \sqrt{-(x-2)}$: K_{h6} entsteht durch Spiegelung von K_{f1} an der y-Achse mit anschließender Verschiebung um 2 in x-Richtung.

$h_7(x) = \sqrt{6-2x} = \sqrt{-2(x-3)}$: K_{h7} entsteht durch Spiegelung von K_{f1} an der y-Achse und durch Streckung mit dem Faktor $\sqrt{2}$ in y- Richtung mit anschließender Verschiebung um 3 in x-Richtung.

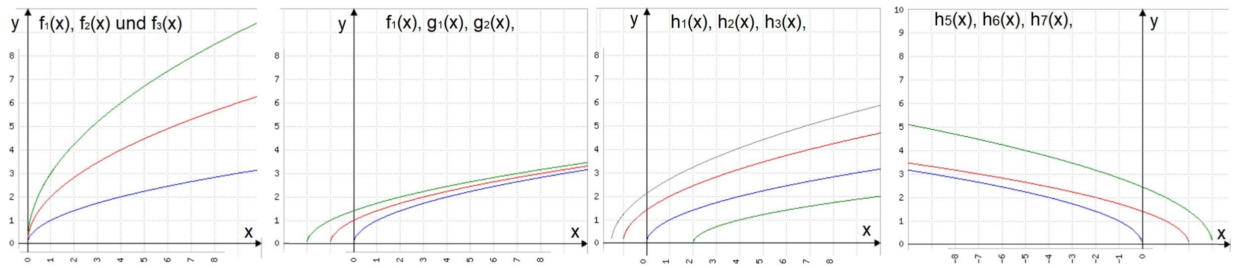


Abb. 274 gesteckte, verschobene und gespiegelte Graphen von Wurzelfunktionen

Aufg. 94/235: a)

x	-10	-2	-1	-0.5	-0.1	0	0.1	0.5	1	2	10
$y = \frac{1}{x}$	-0.1	-0.5	-1	-2	-10	'$(\pm)\infty$'	10	2	1	0.5	0.1

b) Die kritische Stelle ist $x=0$ hier erhalten wir den (ungültigen) Funktionswert $\pm\infty$, das Schaubild nähert sich der $y-$Achse an. Die $y-$Achse heißt dann **senkrechte Asymptote** (Näherungsgerade).

c) Das Schaubild nähert sich für $x \to 0$ der y-Achse an, erreicht sie aber nicht. Die y-Achse $x=0$ ist eine senkrechte Asymptote (sA) (Näherungsgerade). **d)** $\frac{1}{x}$ hat die waagrechte Asymptote $y=0$.

e) Eine Asymptote ist eine Näherungs- gerade.

Das Schaubild von $f(x) = \frac{1}{x}$ hat die sA $x = 0$, weil $\frac{1}{0} = \infty$; eine Funktion f hat bei x_0 die sA $x = x_0$, wenn $f(x_0) = \infty$ oder $f(x_0) = -\infty$ (Funktionswert ∞).

Das Schaubild von $f(x) = \frac{1}{x}$ hat die wA $y = 0$, weil $\frac{1}{\infty} = 0$; eine Funktion f hat die wA $y = y_0$, wenn $f(\infty) = y_0$ oder wenn $f(-\infty) = y_0$ (Funktion an der Stelle ∞).

Das Schaubild von $f(x) = \frac{1}{x}$ erreicht seine Asymptoten nicht.

f) $x = \frac{1}{y} \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$.

g) Das Schaubild ist punktsymmetrisch zum Ursprung und achsensymmetrisch zu $y = x$ und $y = -x$. Damit ist die Umkehrfunktion auch $y = \frac{1}{x}$ oder $f^{-1}(x) = f(x)$ die Funktion ist **selbstinvers**.

h*) Eine Funktion heißt selbstinvers $\Leftrightarrow$ $f(x) = f^{-1}(x)$. Genau die selbstinversen Funktionen sind achsensymmetrisch zu $y = x$. Selbstinverse Funktionen sind z.B. $f(x) = \frac{a}{x}$, $f(x) = -x + c$, $f(x) = x$ (es gibt aber noch viel mehr).

Aufg. 94/236: b) Beide Schaubilder nähern sich der $x-$Achse an. Die $x-$Achse ist also (wie bei Aufgabe 235) waagrechte Asymptote. c) Z.B. für $x = -1$ ist $3^{-1} = \frac{1}{3} < \frac{1}{2} = 2^{-1}$. d) $f_3(x)$ geht aus $f_2(x)$ durch Spiegelung an der $y-$Achse hervor: $f_1(-x) = 2^{-x} = \frac{1}{2^x} = 0.5^x = f_3(x)$. e) $f(x) = a^x$ ist eine Exponentialfunktion für $a > 0$ (negative Basen können keine gebrochenen Exponenten haben: Z.B $(-1)^{0.5} = \sqrt{-1}$ ist nicht definiert) und $a \neq 1$ (sonst wäre die Funktion konstant 1).

f) Alle Exponentialfunktionen $y = a^x$, $a \geq 0$, $a \neq 1$ gehen durch den Punkt $P(0; 1)$, weil $a^0 = 1$ ist und haben die waagrechte Asymptote $y = 0$.

Aufg. 95/237: a) $f_1^{-1}(x) = \frac{\log(x)}{\log(2)} = \log_2(x)$, und $f_2^{-1}(x) = \frac{\log(x)}{\log(3)} = \log_3(x)$, (Abb. 275)

x	-1	0	0.25	1/3	0.5	1	2	3	4
$f_1(x) = \frac{\log(x)}{\log(2)} = \log_2(x)$	/	$'-\infty'$	-2	-1.585	-1	0	1	1.585	2
$f_2(x) = \frac{\log(x)}{\log(3)} = \log_3(x)$	/	$'-\infty'$	-1.26	-1	-0.63	0	0.63	1	1.26
$f_3(x) = -\frac{\log(x)}{\log(2)} = \log_{1/2}(x)$	/	$'\infty'$	2	1.585	1	0	-1	-1.585	-2

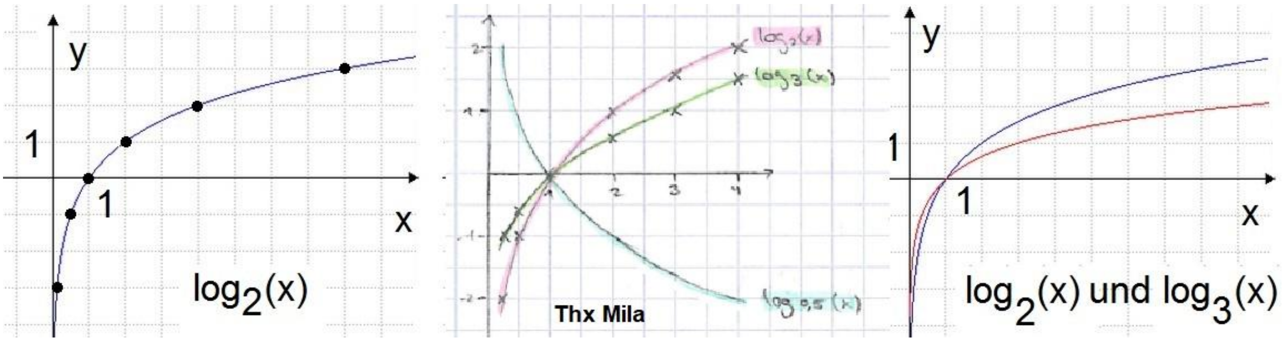


Abb. 275 Logarithmusfunktionen

c) Beim Bilden der UKF wird aus der wA $y = 0$ eine senkrechte Asymptote $x = 0$ und umgekehrt.

d) Alle Logarithmusfunktionen gehen durch $(1; 0)$ und haben die senkrechte Asymptote $x = 0$.

Aufg. 95/238: a) $f^{-1}(x) = 0.5x + 1$.

b) Es passiert nichts; Zuerst f, dann f^{-1} angewendet ergibt $f^{-1}(f(x)) = x$.

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2x - 2$	-6	-4	-2	0	2	4
$z = f^{-1}(y) = 0.5y + 1 \ = x$	-2	-1	0	1	2	3

c) Wieder passiert nichts. Zuerst f^{-1}, dann f angewendet ergibt ebenfalls $f(f^{-1}(x)) = x$. d) $f^{-1}(x) = \log(x)$; es gilt $10^{\log(x)} = x$ und $\log(10^x) = x$ (auswendig).
e) $g^{-1}(x) = \sqrt{x}$; es gilt aber $\sqrt{x^2} = |x|$ (und nicht x) dies liegt daran, dass bei $g(x) = x^2$ nur für $x \geq 0$ $g^{-1}(x) = \sqrt{x}$ gilt; $(\sqrt{x})^2 = x$.
f) $h_1^{-1}(y) = -2y + 4$; (hier schreibe ich kurz lieber y statt x).
$h_1^{-1}(h_1(x)) = -2(-0.5x + 2) + 4 = 1 \cdot x - 4 + 4 = x = -0.5(-2x + 4) + 2$;
$h_2^{-1}(y) = 0.5y + 2$; $h_2^{-1}(h_2(x)) = 0.5(2x - 4) + 2 = x = 2(0.5x + 2) - 4$;
g) $f^{-1}(f(x)) = x$. Für $f(x) = x^2$ ist $f^{-1}(f(x)) = \sqrt{x^2} = |x| \neq x$.

Aufg. 95/239: **a)** $n_a = -4$, $n_b = -3$, $n_c = -2$, $n_d = -1$, $n_e = 0$, $n_f = 1$, $n_g = 2$, $n_h = 3$, $n_i = 4$, $n_j = 5$; $n_k = 6$, $n_L = 7$, $n_m = 8$; **b+c)** Teilen Sie die Graphen in 6 Gruppen ein. Welche charakteristische Eigenschaften haben die 4 großen Gruppen?

Pot. n Verhalten	für $x \to -\infty$	für $x \to \infty$	Gem. Pkt.	Asymptoten	Symmetrie
$n < 0, n$ gerade	0	0	(-1;1), (1;1)	$x = 0$; $y = 0$	as zur y-Achse
$n < 0, n$ ungerade	0	0	(-1;-1), (1;1)	$x = 0$; $y = 0$	ps zum Ursprung
$n > 0, n$ gerade	∞	∞	(-1;1), (0;0), (1;1)	keine	as zur y-Achse
$n > 0, n$ ungerade	$-\infty$	∞	(-1;1), (0;0), (1;1)	keine	ps zum Ursprung

d) Keine

e)* Die Logarithmusfunktion hat die waagrechte Asymptote $x = 0$, weil $\log(0) = -\infty$ ist.

g)
$f(x) = (e^{x-3})^2 = e^{2x-6}$ $\quad$ $\bar{f}$: $x = e^{2y-6}$ $\quad$ Thx Mar Fee
$f'(x) = 2e^{2x-6}$ $\quad$ $\ln x = 2y - 6$
$0 = f'(x)$ $\quad$ $y = \frac{\ln x}{2} + 3$
$0 = 2e^{2x-6}$ $\neq 0 \to$ umkehrbar

f)* Warum ist der Graph von Abb. 39 e) punktiert (0/0) fehlt? 0^0 ist nicht definiert: $\log(0) = -\infty$; $\frac{1}{\log(0)} = \frac{1}{-\infty} = 0$ Für $x \to 0$ ist $[0^0 =]x^{\frac{1}{\log(x)}} = 10^{\frac{\log(x)}{\log(x)}} = 10^1 = 10$. siehe auch Ag 444 b).

Aufg. 96/240:

a) $n = \frac{\log(9)}{\log(3)} = 2$; b) $n = \frac{\log(16)}{\log(2)} = 4$; c) $n = \frac{\log(+8)}{\log(+2)} = 3$; Probe: $(-2)^3 = -8$;

d) $n = \frac{\log(81)}{\log(+3)} = 4$; Probe: $(-3)^4 = 81$. e) $128 = 4^n \Leftrightarrow n = \frac{\log(128)}{\log(4)} = 3.5$;
f) $64 = (-2)^n \Leftrightarrow n = \frac{\log(64)}{\log(-2)}$ geht nicht, aber $\frac{\log(64)}{\log(2)} = 6$, Probe $64 = (-2)^6 \surd$;
g) $-512 = (-2)^n \Leftrightarrow n = \frac{\log(-512)}{\log(-2)}$ geht nicht, aber $\frac{\log(512)}{\log(2)} = 9$, Probe $-512 = (-2)^9 \surd$; h) $243 = (-3)^n \Leftrightarrow n = \frac{\log(243)}{\log(-3)}$ geht nicht, aber $\frac{\log(243)}{\log(3)} = 5$, Probe $-243 = (-3)^5$ ↯, unlösbar;

Aufg. 96/241: a) P_a in $f(x)$ eingesetzt: $2 = c \cdot 1^n \Leftrightarrow c = 2$, $(1^n = 1)$, Q_a in $f(x)$: $8 = 2 \cdot 2^n \Leftrightarrow n = \frac{\log(4)}{\log(2)} = 2$; **b)** $c = 0.5$, $n = \frac{\log(16/0.5)}{\log(2)} = 5$;
c) nLGS (nicht lineares Gleichungssystem): $4 = c \cdot 4^n$ und $1 = c \cdot 2^n$ - durcheinander dividiert:

$$\frac{4}{1} = \frac{c \cdot 4^n}{c \cdot 2^n} \quad \Leftrightarrow \quad 4 = \frac{4^n}{2^n} \quad \Leftrightarrow \quad 4 = \left(\frac{4}{2}\right)^n \quad \Leftrightarrow \quad 4 = (2)^n \quad \Leftrightarrow \quad n = \frac{\log(4)}{\log(2)} = 2; \quad (c = 0.25)$$

d) $f_d(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3$, e) $f_e(x) = \frac{1}{16} \cdot x^4$, f) $f_f(x) = 2 \cdot x^3$, g) $f_g(x) = (-2) \cdot x^2$, h) $f_h(x) = \frac{-1}{2} \cdot x^3$,
i) $f_i(x) = \frac{-1}{3} \cdot x^2$, bei den Teilen f) bis i) ist eine Probe obligatorisch. j) $f_j(x) = 2x^{0.5}$;
k) $f_k(x) = 0.2x^2$; l) $f_l(x) = 4x^{-1}$; m) $f_m(x) = \sqrt{2}x^{0.5}$; n) $f_h(x) = \frac{1}{3}x^1$; o) $f_o(x) = 8x^{-2}$;

p) Wegen der negativen x-Werte (Teile f-i) können nicht alle entstehenden Gleichungen $a^x = b$ (vorerst) nicht mit Logarithmen gelöst werden... Wenn $a < 0$ ist, dann darf $x = \frac{\log(|b|)}{\log(|a|)}$ als Lösung der Gleichung $a^x = b$ **ausprobiert** werden, dass heißt: Die Probe ist obligatorisch!

q) $2941 = c \cdot 49^3 \Leftrightarrow c \approx 0.025$; $y = 0.025 \cdot x^3$; Jan: $0.025 \cdot 51^3 \approx 3316g$.

15.5.3 LöVo zu Einheit 5.3 (Funktionen UE 10_1)

Aufg. 96/242: Eine nicht senkrechte Gerade kann durch $y = m \cdot x + c$ dargestellt werden. m heißt Steigung, c y-Achsenabschnitt.

b) Beim Steigungsdreieck von $y = \frac{z}{n} \cdot x + c$ gehe um n nach rechts und um z nach oben.

d) Seien $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ zwei Punkte mit $x_1 \neq x_2$, dann berechnen wir die Steigung m der Verbindungsgeraden durch $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (ZPF).

e) Sei m die Steigung einer Geraden durch $P_1(x_1; y_1)$, dann ist diese von der Form
$y = m \cdot (x - x_1) + y_1$ (PSF). beide Formeln sind **in und auswendig** zu lernen!

f) i)
$$\begin{array}{llll}
g_{AB}: & m_{AB} = \frac{5-4}{3-0} = \frac{1}{3}, & g_{AB}: y = \frac{1}{3}(x-0)+4 & \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + 4; \\
g_{AC}: & m_{AC} = \frac{3-4}{5-0} = -0.2, & g_{AC}: y = -0.2(x-0)+4 & \Rightarrow y = -0.2x + 4; \\
g_{AD}: & m_{AD} = \frac{5-4}{1-0} = 1, & g_{AD}: y = 1(x-0)+4 & \Rightarrow y = x + 4; \\
g_{BC}: & m_{BC} = \frac{3-5}{5-3} = -1, & g_{BC}: y = -1(x-3)+5 & \Rightarrow y = -x + 8; \\
g_{BD}: & m_{BD} = \frac{5-5}{1-3} = 0, & g_{BD}: y = 0(x-3)+5 & \Rightarrow y = 5; \\
g_{CD}: & m_{CD} = \frac{5-3}{1-5} = -0.5, & g_{CD}: y = -0.5(x-5)+3 & \Rightarrow y = -0.5x + 5.5;
\end{array}$$

f) ii)
$$\begin{array}{lll}
m_{AB} = \frac{6-3}{2-(-1)} = 1; & y = 1 \cdot (x+1) + 3 & y = x + 4; \\
m_{AC} = [\frac{-3-3}{-1-(-1)} = \infty]; & \text{senkrechte Gerade} & x = -1; \\
m_{AD} = \frac{-2-3}{3-(-1)} = -1.25; & y = -1.25 \cdot (x+1) + 3 & y = -1.25x + 1.75; \\
m_{BC} = \frac{-3-6}{-1-2} = 3; & y = 3 \cdot (x-2) + 6 & y = 3x; \\
m_{BD} = \frac{-2-6}{3-2} = -8; & y = (-8) \cdot (x-2) + 6 & y = (-8)x + 22; \\
m_{CD} = \frac{-2-(-3)}{3-(-1)} = 0.25; & y = 0.25 \cdot (x+1) - 3 & y = 0.25x - 2.75;
\end{array}$$

g) i) $y = 0.2x + 120$; ii) $y = 100x + 384\,800$; Geschwindigkeit 100 $\frac{km}{h}$; Startkilometerstand 384 800 km. iii) $y = -6x + 69$; 69 Liter Tankinhalt; nach 11.5 Std ist der Tank leer.

Aufg. 97/243: a) Definieren Sie eine Funktion $f_1 : x$ (Zeit) $\to y$ (Abstand von Tine zu ihrer Wohnung)?

$f_1(x) = 12x$, $f_2(x) = 60 - 18x$, Alex fährt 60 km entfernt los und auf Tine zu - der Abstand verkürzt sich also. Treffpunkt: $12x = 60 - 18x \Leftrightarrow x = 2$, $f_1(2) = f_2(2) = 24$.
Sie treffen sich nach 2 Std und sind dann 24 km von Tines Wohnung entfernt.

b) Die Steigung der Geraden entspricht der (orientierten) Geschwindigkeit.

c) $f_2(x) = -18(x - 1.25) + 60$; $-18(x - 1.25) + 60 = 12x \Leftrightarrow x = 2.75, f_1(2.75) = f_2(2.75) = 33$.
Sie treffen sich nach 2.75 Std und sind dann 33 km von Tines Wohnung entfernt.

d) Gesucht sind **Joliet (Jake) und Elwood Blues**, die Blues-Brothers. (Band/Kult-Film um 1980).

Joliet: $y = 20x$; Elwood: $y = -18(x + 0.25) + 71$;
(um 12.00 Uhr ist Elwood schon unterwegs; er ist dann $18\dot{0}.25 = 4.5$ km gefahren),

x in Stunden nach 12.00 Uhr. $-18(x+0.25)+71 = 20x \Leftrightarrow -4.5+71 = 38x \Leftrightarrow x = 1.75$.
Sie treffen sich um 13.45 Uhr $20 \cdot 1.75 = 35$ km von Joliet Wohnung entfernt.

e) $d(S,M) = (15-12) \cdot 80 = 240$; $f_e(x) = 80(x-12)$; $f_i(x) = 240 - 120(x-12.5)$;
$f_e(x) = f_i(x) \Leftrightarrow x = 13.5$; $f_e(13.5) = f_i(13.5)$=120.
Sie treffen sich um 13.30 Uhr und sind dann 120 km von Stuttgart entfernt.

f) $v_H = \frac{720}{4} = 180$ m pro min, $v_J = \frac{720}{5} = 144$ m pro min,

Geraden: Jan: $y = 144x$ und Hans: $y = 720 - 180x$.

Geradenschnitt: $144x = 720 - 180x \Leftrightarrow 324x = 720 \Leftrightarrow x = 2.\bar{2} \Leftrightarrow y = 144 \cdot 2.\bar{2} = 320$.

Nach 320 m (und nach $2.\overline{2}$ Minuten) treffen sie sich.

Aufg. 97/244: a) Eine Funktion kann als W<u>ertetabelle</u> $x \longmapsto f(x)$, S<u>chaubild</u> K_f oder als T<u>erm</u> $y = f(x)$ dargestellt werden. Zum Schaubild gehören P<u>unkte</u>, zur Funktion S<u>tellen</u> (x-Werte).

Der Steigungswinkel α einer Geraden ist definiert als der Schnittwinkel der Geraden mit der <u>x-Achse</u>.
b) $y = x + c$: $m = 1$, $\alpha = 45°$; $y = 0.5x + 3$: $m = 0.5$, $\alpha = \tan^{-1}(0.5) \approx 26.6°$;
Der Steigungswinkel ist <u>unabhängig</u> vom <u>y-Achsenabschnitt</u>;
c) $y = mx + c$ hat Steigungswinkel $\alpha = \underline{\tan^{-1}(m)}$ (verwenden Sie hier das <u>Steigungs-</u>dreieck);
d) $y = \sqrt{3}x$, $m = \sqrt{3}$, $\alpha = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = 60°$; e) $y = -x$, $m = -1$, $\alpha = \tan^{-1}(-1) = -45°$;
f) $y = \frac{-1}{\sqrt{3}}x$, $\alpha = \tan^{-1}(\frac{-1}{\sqrt{3}}) = -30°$; i) $x = 3$, hat Steigung ∞ und Steigungswinkel 90°;

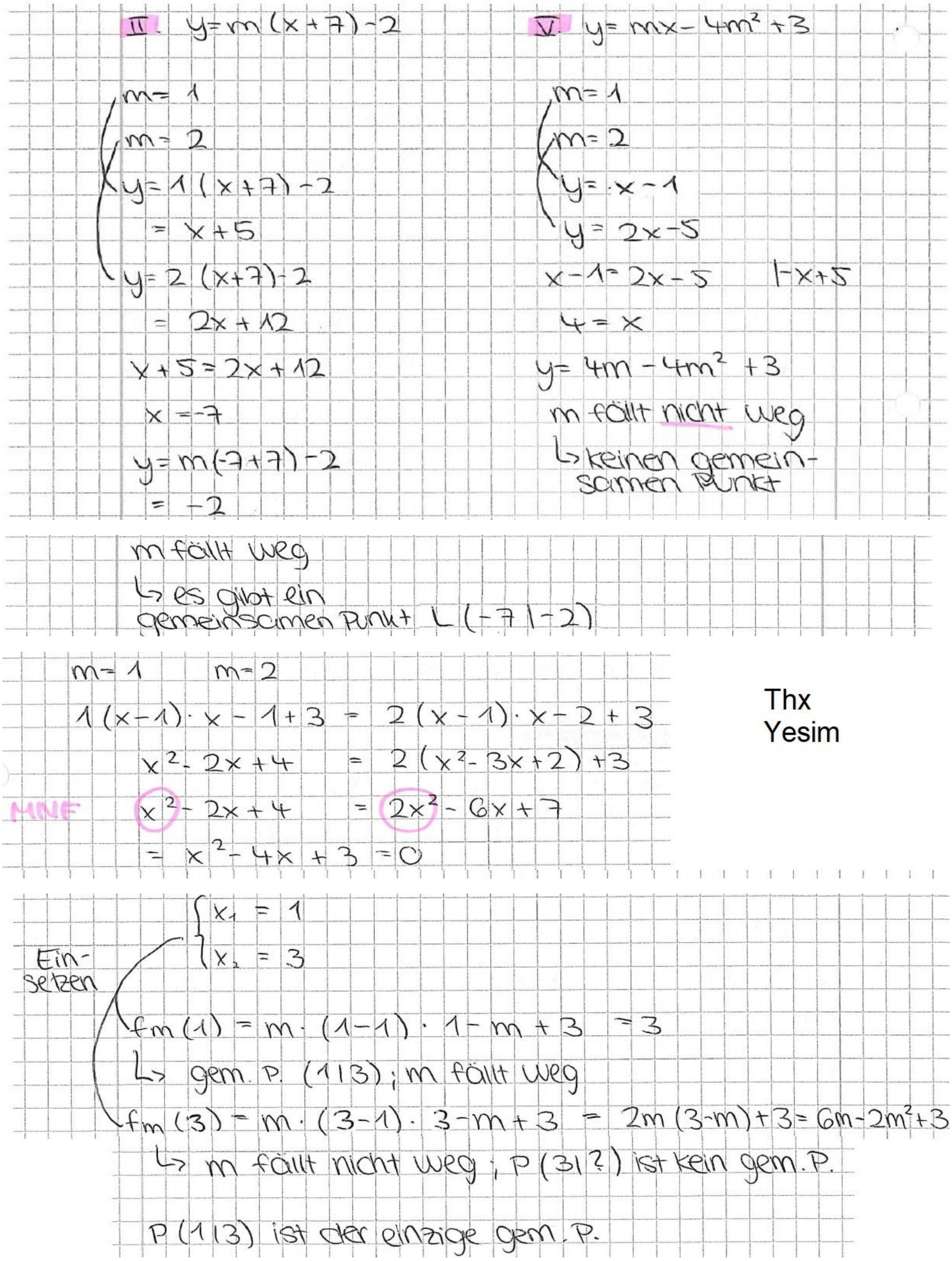
Aufg. 97/245: Point Whitmark eine Hörspielserie über einen gleichnamigen Radiosender, der heißt, wie die Stadt. Der Sender befindet sich in einem Leuchtturm und wird von drei Jungen (einer davon ist Jay Lawrence) betreiben, die immer wieder in mysteriöse Abenteuer erleben.

a) $f(x) = x + 2$, $f_t(x) = tx + 2$ oder $x = 0$; **b)** 2=1+1, damit liegt $(1;2)$ auf der Geraden, Drücken Sie dazu c abhängig von <u>m</u> aus: Punktprobe $2 = m + c \Leftrightarrow c = 2 - m$ $f_m(x) = mx + 2 - m = m(x-1) + 2$ (oder $x = 1$); $(3;4)$: $f_m(x) = m(x-3) + 4 = mx + 4 - 3m$ (oder $x = 3$),

Aufg. 97/246: **a)** $(2;1)$: $f_t(x) = t(x-2) + 1$, **b)** i) $(3;2)$, ii) $(-7;-2)$, iii) $(-2;-1)$, iv) $(4;3)$, v) keiner; (Rechnung: Abb. 548/276) iv) $y = mx - 4m + 3 = m(x-4) + 3 \Rightarrow S(4;3)$;

c) Auffinden gemeinsamer Punkte: Gegeben sei eine Funktionenschar $f_m(x)$. m heißt <u>Scharparameter</u>.
i) Setze für <u>$m = 1$</u> und für <u>$m = 2$</u> ein.
Bemerkung: Es sind auch andere <u>Zahlenkombinationen</u> für <u>m</u> einsetzbar.
ii) Schneide $K_{f_1}(x)$ mit $K_{f_2}(x)$, dass heißt <u>setze</u> die resultierenden Terme aus i) <u>gleich</u>.
iii) <u>Löse</u> die Gleichung <u>$f_1(x)$=$f_2(x)$</u> nach <u>x auf</u>.
iv) Setze das erhaltende <u>x</u> in <u>$f_m(x)$</u> ein. Falls <u>m herausfällt</u>, dann handelt es sich um einen gemeinsamen Punkt, wenn <u>nicht</u>, <u>dann</u> <u>nicht</u>.

d) **i)** $(2;1)$ und $(-4;1)$,
ii) $f_1(x) = x^2 - 10x + 9$; $f_2(x) = 2x^2 - 16x + 17$; $x^2 - 10x + 9 = 2x^2 - 16x + 17 \Leftrightarrow x = 2$ oder $x = 4$;
$f_m(2) = m \cdot 2^2 - 6m \cdot 2 - 4 \cdot 2 + 8m + 1 = -7$;
$f_m(4) = m \cdot 4^2 - 6m \cdot 4 - 4 \cdot 4 + 8m + 1 = -15$; $\Rightarrow (2/-7)$ und $(4/-15)$ sind gemeinsame Pkte.



II. $y = m(x+7) - 2$

$m = 1$

$m = 2$

$y = 1(x+7) - 2 = x + 5$

$y = 2(x+7) - 2 = 2x + 12$

$x + 5 = 2x + 12$

$x = -7$

$y = m(-7+7) - 2 = -2$

m fällt weg

↳ es gibt ein gemeinsamen Punkt L $(-7|-2)$

V. $y = mx - 4m^2 + 3$

$m = 1$

$m = 2$

$y = x - 1$

$y = 2x - 5$

$x - 1 = 2x - 5 \quad |-x+5$

$4 = x$

$y = 4m - 4m^2 + 3$

m fällt nicht weg

↳ keinen gemeinsamen Punkt

$m = 1 \qquad m = 2$

$1(x-1)\cdot x - 1 + 3 = 2(x-1)\cdot x - 2 + 3$

$x^2 - 2x + 4 = 2(x^2 - 3x + 2) + 3$

MNF $x^2 - 2x + 4 = 2x^2 - 6x + 7$

$= x^2 - 4x + 3 = 0$

$x_1 = 1$

$x_2 = 3$

Einsetzen

$f_m(1) = m\cdot(1-1)\cdot 1 - m + 3 = 3$

↳ gem. P. $(1|3)$; m fällt weg

$f_m(3) = m\cdot(3-1)\cdot 3 - m + 3 = 2m(3-m) + 3 = 6m - 2m^2 + 3$

↳ m fällt nicht weg; P $(3|?)$ ist kein gem. P.

P $(1|3)$ ist der einzige gem. P.

Thx
Yesim

Abb. 276 LöVo zur Ag 97/246 b iii, b v, d iii;

iii) $(1;3)$ $\{(m;3)$ wird nicht als gemeinsamer Punkt gewertet$\}$, **iv)** $(q;-1)$;
v) $m = 1$: $y = x^2 - x - 5x + 5$; $m = 2$: $y = 2x^2 - 4x - 10x + 20$;
$x^2 - 6x + 5 = 2x^2 - 14x + 20 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{8\pm\sqrt{8^2-60}}{2} \Leftrightarrow x_1 = 3$ und $x_2 = 5$;
$f_m(5) = m \cdot 5^2 - m^2 \cdot 5 - 5 \cdot m \cdot 5 + 5m^2 = 0 \Rightarrow P(5/0)$ ist gemeinsamer Punkt,
$f_m(3) = m \cdot 3^2 - m^2 \cdot 3 - 5 \cdot m \cdot 3 + 5m^2 = 2m^2 - 6m \Rightarrow$ es gibt keinen gemeinsamen Punkt mit $x = 3$.

i) $P(1;-1)$ in $y = m(x-2)\cdot(x+4)+1$: $-1 = m(1-2)\cdot(1+4)+1 \Leftrightarrow -2 = -5m \Leftrightarrow m = 0.4$;

ii) $P(1;-1)$ in $y = mx^2 - 6mx - 4x + 8m + 1$: $-1 = m\cdot 1^2 - 6m\cdot 1 - 4\cdot 1 + 8m + 1$
$\Leftrightarrow -1 = m - 6m - 4 + 8m + 1 \Leftrightarrow 2 = 3 \Leftrightarrow m = 2/3$

iii) $P(1;-1)$ in $y = m(x-1)\cdot(x-m)+3$: $-1 = m(1-1)\cdot(2-m)+3 \Leftrightarrow -1 = 3$ geht nicht (es gibt keine Funktion der Schar, die durch P geht).

v) $P(1;-1)$ in $-1 = m\cdot 1^2 - m^2\cdot 1 - 5m\cdot 1 + 5m^2 \Leftrightarrow -1 = m - m^2 - 5m + 5m^2 \Leftrightarrow 4m^2 - 4m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 0.5$. (die Ag wurde nachträglich gebaut - wg Rosamunde Pilcher: Glück gehabt)

iv) $(-2|0), (1|0)$; vi) $(-1|0), (1|2)$; vii) $(-1|-2), (2|4)$; viii) $(0|1)$; ix) $(-1|0); (0|1); (1|0)$;

x) $(\pm 2|16)$; xi) $(2|0)$.

f) gleiche Steigung m, $f_t(x) = mx + t$.

Aufg. 98/247: a) Eine Potenzfunktion besitzt einen Funktionsterm der Form $f(x) = \underline{cx^n}$; $c \in \underline{\mathbb{R}}$, $n \in \underline{\mathbb{N}_0}$.

b) Beispiel: $f(x) = \frac{5}{3}x^2 + 4.2x - \sqrt{8}$ ist ganzrational mit $a_2 = \underline{\frac{5}{3}}$, $a_1 = \underline{4.2}$ und $a_0 = \underline{-\sqrt{8}}$.

c) Der Term einer ganzrationalen Funktion ist von der Form

$a_nx^n \underline{+a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0}$. Dabei heißt der größte Exponent $\underline{n}$ mit

$\underline{a_n} \neq 0$ **Grad** der ganzrationalen Funktion.

d) Ganzrationale Funkionen sind: 1 bis 4 und 7 bis 9. 5 und 6 nicht, da da $\frac{2}{x} = 2x^{-1}$ bzw. $\sqrt{x} = x^{0.5}$ kein Term einer Potenzfunktion ist. $\sqrt{x^2} = |x|$ ist auch keine Potenzfunktion.

e) $f(x) \equiv 0$ bedeutet $f(x) = \underline{0}$ für alle $\underline{x \in \mathbb{R}}$; $f(x) = 0$ bedeutet x ist eine Nullstelle von f.

f) c) Grad 2; i) 3; ii) 2; iii) 1; iv) 0; vii) per Definition hat $f(x) \equiv 0$ keinen Grad - manchmal wird auch $-\infty$ als Grad angegeben. viii) 7, ix) 4. Keine ganzrationalen Funktionen sind v+vi+x).

g) Bei einer ganzrationalen Funktion vom Grad n heißt der Funktionsterm Polynom vom Grad $\underline{n}$ und das zugehörige Schaubild Parabel $\underline{n}$-ter Ordnung.

Aufg. 98/248: a) (alle Werte sind Schätzwerte)

Alter	0	10	50	80
Anz.	350000	380000	720000	210000

Anz.	300000	400000	600000	900000
Alter	77			

Für 400000 und 600000 gibt es mehrere Alter; für 900000 keines. Problem: Eine Zuordnung muss eindeutig sein (zu jedem x gibt es genau ein y mit $y = f(x)$).

b) Bei einer **Funktion** wird jedem x im Definitionsbereich $\mathbb{D}$ genau ein y im Wertebereich $\mathbb{W}$ zugeordnet. Der Definitionsbereich $\mathbb{D}$ ist alles, was man einsetzen kann. Der Wertebereich $\mathbb{W}$ ist alles, was man herauskommen kann.

Teile c+d) Funktionen: a), c), d), f), g), h), j); keine Funktionen: b), e), i).

a) $f(x) = x^2$, c) $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$ d) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, f) $f(x) = \sin(2x)+1$, g) $f(x) = \frac{1}{\sin(2x)}$,

i) $f(x) = \begin{cases} 2x+6 & x \leq -3 \\ 2 & -3 < x < 1 \\ -2x+4 & x \geq 1 \end{cases}$ j) $f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ -x+2 & 0 < x < 2 \\ x & x \geq 2 \end{cases}$

e) Eine Relation ist eine Verallgemeinrung einer Funktion. Explizite Darstellungen sind nach y aufgelöst; implizite Darstellungen sind das nicht (umbedingt).

f) Ein Kreis ist die Menge aller Punkte, die zu einem Punkt M den gleichen Abstand r haben.

Aufg. 99/249: a) Die Menge aller (reellen) Zahlen die zwischen zwei Zahlen a und b liegen notieren wir als $\{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$. Um dies abzukürzen schreiben wir auch $\{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\} = [a; b]$ sprich: abgeschlossenes 'Intervall' a, b. Sollen die Grenzen nicht dabei sein, so notieren wir $\{x \in \mathbb{R} | a < x < b\} = (a; b) =]a; b[$ sprich: offenes 'Intervall' a, b.
b) $(1; 2]$, $(0; \infty)$, $(-\infty; 3]$;
$\{x \in \mathbb{R} | -6 \leq x < 3\} = [-6; 3)$, $\{x \in \mathbb{R} | 12 \leq x \leq 23\} = [12; 23]$,
$\{x \in \mathbb{R} | -32 < x \leq 23\} = (-32; 23]$, $\{x \in \mathbb{R} | 4 < x < 5\} = (4; 5)$, $\{x \in \mathbb{R} | x \geq 3\} = [3; \infty)$;
c) $f_1 : \mathbb{R} = (-\infty; \infty)$, $f_2 : \mathbb{R} = (-\infty; \infty)$, $f_3 : \mathbb{R}_0^+ = [0; \infty)$, $f_4 : [5; \infty)$, $f_5 : \mathbb{R}_0^- = (-\infty; 0]$,
$f_6 : [-2; 2]$, $f_7 : \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$, $f_8 : \mathbb{R} \setminus \{5\} = (-\infty; 5) \cup (5; \infty)$,
$f_9 : \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\} = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$, $f_{10} : (-3; 3)$,
$f_{11} : x < -2$ oder $x > 3 = (-\infty; -2) \cup (3; \infty)$, $f_{12} : x < -3$ oder $x > -1 = (-\infty; -3) \cup (-1; \infty)$,
$f_{13} : 2 < x < 3 = (2; 3)$, $f_{14} : -2 < x < 4$ und $x \geq 0 = (-2; 4) \cap [0; \infty) = [0; 4)$.

$f_{15} : -4 \leq x \leq 3$; $f_{16} : \mathbb{D} = (-\infty; 2] \cup [4; \infty)$

d) a) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{W} = [0; \infty)$; c) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}$; d) $\mathbb{D} = [-2; 2]$, $\mathbb{W} = [0; 2]$; f) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{W} = [0; 2]$;
g) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus k \cdot \frac{\pi}{2}\ k \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{W} = (-\infty; -1] \cup [1; \infty)$; h) $\mathbb{D} = [-3; 1]$, $\mathbb{W} = [0; 2]$.

Aufg. 99/250: a) $\mathbb{W}_1 = [0; \infty)$; b) $\mathbb{W}_2 = [-1; \infty)$; c) $\mathbb{W}_3 = [-47; \infty)$;

d) $S_4(0.5; -0.5)$, $\mathbb{W}_4 = [-0.5; \infty)$; e) $S_5(2; 4)$, $\mathbb{W}_5 = (-\infty; 4]$; f) $S_6(3; 4.5)$, $\mathbb{W}_6 = (-\infty; 4.5]$;

g) $\mathbb{W}_7 = (-\infty; 2.5]$. h) $S_8(-1.5; -0.75)$, $\mathbb{W}_8 = (-\infty; -0.75]$;

g) $3x^2 - 24x + 1$: $x_s \frac{24}{2 \cdot 3} = 4, y_s = 3 \cdot 4^2 - 24 \cdot 4 + 1 = -47$, die Parabel ist nach oben offen, damit ist $\mathbb{W}_3 = [-47; \infty)$.
k) $\mathbb{W} = [-0.75; \infty)$; L) $\mathbb{W} = (-\infty; 1.8]$

c) $3x^2 - 24x + 1$: $x_s \frac{24}{2 \cdot 3} = 4, y_s = 3 \cdot 4^2 - 24 \cdot 4 + 1 = -47$, die Parabel ist nach oben offen, damit ist $\mathbb{W}_3 = [-47; \infty)$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$x^2 - 2x + 1$	16	9	4	1	0	1	4

Die Tabelle ist ein Hinweis kein Beweis

i) $x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{4} = -0.75$ $f_9(-0.75) = -1.125 \Rightarrow \mathbb{W} = [-1.125; \infty)$;

j) $x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{-4} = -1.5$ $f_{10}(-1.5) = 4.5 \Rightarrow \mathbb{W} = [-\infty; 4.5)$;

Aufg. 99/251: Das Schaubild von $|x|$ besteht aus zwei Teilgeraden; der Geraden $y = x$ für $x \geq 0$ und $y = -x$ für $x < 0$ (Abb. 277).

b) $f_1(x) = \begin{cases} 3x & x \geq 0 \\ -3x & x < 0 \end{cases}$, $f_2(x) = \begin{cases} x - 1 & x \geq 1 \\ -(x-1) & x < 1 \end{cases}$, $f_3(x) = \begin{cases} x + 3 & x \geq -2 \\ -x - 1 & x < -2 \end{cases}$,

$f_4(x) = \begin{cases} x - 3 & x \geq 1 \\ -x - 1 & x < 1 \end{cases}$, $f_5(x) = \begin{cases} 2x - 8 & x \geq 3 \\ -2x + 4 & x < 3 \end{cases}$, $f_6(x) = \begin{cases} x - 2 & x \geq 3 \\ -x + 4 & x < 3 \end{cases}$,

$f_7(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$,

$f_8(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & x \in [-2; 2] \\ x^2 - 4 & \text{sonst} \end{cases}$,

$f_9(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \in [0; \infty) \\ \sqrt{-x} & x \in (-\infty; 0) \end{cases}$,

$f_{10}(x) = \begin{cases} -\frac{x}{x-2} & x \in (0; 2) \\ \frac{x}{x-2} & x \in (-\infty; 0) \cup [2; \infty) \end{cases}$,

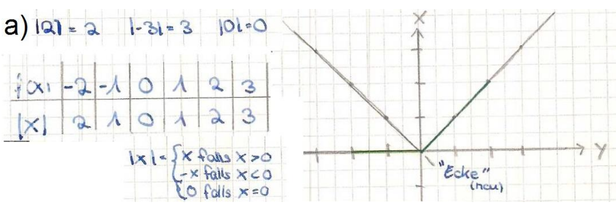
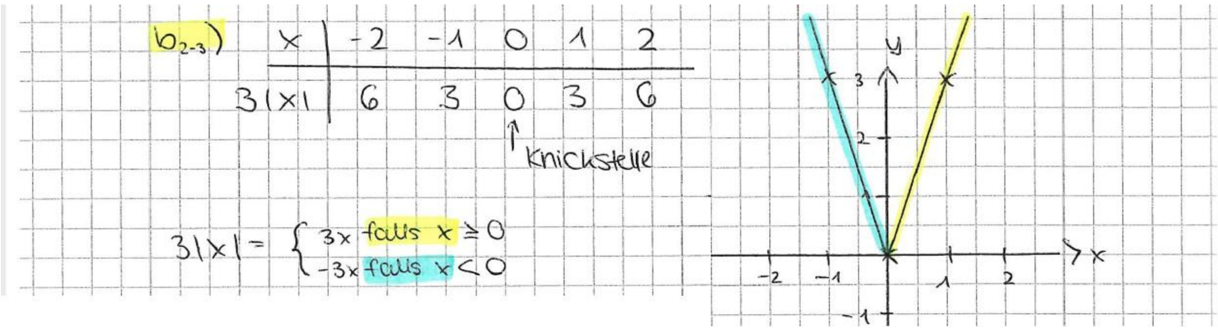


Abb. 277 Das Schaubild der Betragsfunktion



Aufg. 100/252: $f_b(x) = x^2 + 2$, $f_c(x) = (x-2)^2$, $f_d(x) = (x+3)^2$, $f_e(x) = (x+2)^2 - 1.5$, $f_f(x) = (x-1)^2 - 3$, $f_g(x) = (x+2)^2 + 3.5$; b) $f(x) = a(x-x_s)^2 + y_s$; $f(x) = (x-2)^2$; $f(x) = (x-3)^2$; $f(x) = (x-4)^2$;

c) (Regel von Sd) Statt x schreibe $(x-b)$ im Term $f(x)$.

d) Bestimmen Sie $f(x-b)$ i) $f_1(x-b) = \sqrt[3]{(x-b)}$; ii) $f_3(x) = (x-b)^2 - 3(x-b) + 2$;

e) $f_{\text{neu}}(x) = f(x-b) + c$.

f) Wenn der Graph einer Funktion f um b nach rechts und um c nach oben verschoben wird, so ergibt sich der neue Funktionsterm $f_{neu}(x) = \underline{f(x-b) + c}$.

Aufg. 100/253: a) $f_{1\text{neu}}(x) = 2(x-1) = 2x-2$, b) $f_{2\text{neu}}(x) = \frac{1}{2}(x-2) + 1 = \frac{1}{2}x$,
c) $f_{3\text{neu}}(x) = 2(x-1) - 5 + 3 = 2x - 4$, $f_{4\text{neu}}(x) = -x + 4$, $f_{5\text{neu}}(x) = x^2 - 2x + 2$,
$f_{6\text{neu}}(x) = (x-2)^2 + 2(x-2) = x^2 - 4x + 4 + 2x - 4 = x^2 - 2x$,
$f_{7\text{neu}}(x) = -(x-2)^2 - 4(x-2) + 4 \; - 1 = -x^2 + 4x - 4 - 4x + 8 + 3 = -x^2 + 7$;
$f_{8\text{neu}}(x) = 2(x-3) - (x-3)^2 + 2 \; = 2x - 6 - x^2 + 6x - 9 + 2 = -x^2 + 8x - 13$.

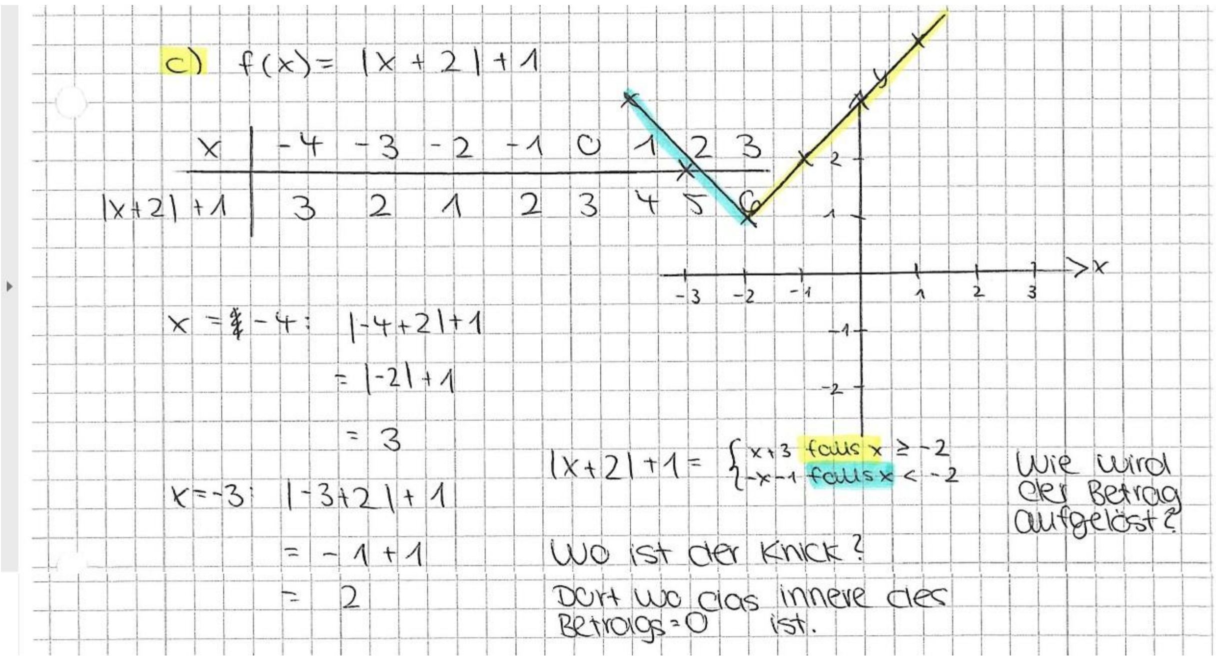


Abb. 278 LöVo zur Ag 99/251 b, c;

Aufg. 100/254: $K_{\bar{f}}$ sei K_f an der x–Achse gespiegelt.
a) $\bar{f}_a(x) = -x^2$, $\bar{f}_b(x) = -2x - 1$, $\bar{f}_c(x) = -x^3 - 2$, $\bar{f}(x) = -(f(x))$.

b) $K_{\bar{f}}$ sei jetzt K_f an der y–Achse gespiegelt.
$\bar{f}_d(x) = -x + 2$, $\bar{f}_e(x) = -2x - 1$, $\bar{f}_f(x) = -(x+1)^3$, $\bar{f}(x) = f(-x)$.
Im Teil a) wird y durch $(-y)$ ersetzt, im Teil b) x durch $(-x)$.

$f(-x)$ heißt: Statt x schreibe $(-x)$.

d) Der Funktionsterm der gespiegelten Funktion ist $f_{neu}(x) = f(-x)$. Die Terme sind aus Ag 256.

a) $f(x) = x^2 - 2x - 1$, $f_{neu}(x) = f(-x) = (-x)^2 - 2(-x) - 1 = x^2 + 2x - 1$;
b) $f(x) = 4x^3 - 3x$, $f_{neu}(x) = f(-x) = 4(-x)^3 - 3(-x) = -4x^3 + 3x$;
c) $f(x) = 0.5(x^4 - 4x^2)$, $f_{neu}(x) = f(-x) = 0.5((-x)^4 - 4(-x)^2) = 0.5(x^4 - 4x^2) = f(x)$ (in diesem Fall);

d) $f(x) = 0.25x^5 - x^3 + x$, $f_{neu}(x) = f(-x) = 0.25(-x)^5 - (-x)^3 + (-x) = -0.25x^5 + x^3 - x = -f(x)$ (in diesem Fall);

e) $f(x) = x^4 - 0.1x^7$, $f_{neu}(x) = f(-x) = (-x)^4 - 0.1(-x)^7 = x^4 - 0.1x^7$;
f) $f(x) = 1.5x^2 - 0.9x^4 + 0.1x^6$, $f_{neu}(x) = f(-x) = 1.5(-x)^2 - 0.9(-x)^4 + 0.1(-x)^6 = 1.5x^2 - 0.9x^4 + 0.1x^6 = f(x)$ (in diesem Fall);

g) $f(x) = x^3 - 0.3x^4$, $f_{neu}(x) = f(-x) = (-x)^3 - 0.3(-x)^4 - x^3 - 0.3x^4$;
h) $f(x) = x - x^2 + x^3$, $f_{neu}(x) = f(-x) = (-x) - (-x)^2 + (-x)^3 - x - x^2 - x^3$;
i) $f(x) = 0.5(2x^3 - x^5 + 0.1x^7)$, $f_{neu}(x) = f(-x) = 0.5(2(-x)^3 - (-x)^5 + 0.1(-x)^7) = -0.5(2x^3 - x^5 + 0.1x^7) = -f(x)$ (in diesem Fall);

j) $f(x) = x^8 - 0.5x^{10} + x + 1$, $f_{neu}(x) = f(-x) = (-x)^8 - 0.5(-x)^{10} + (-x) + 1 = x^8 - 0.5x^{10} - x + 1$;

Aufg. 100/255: a) $x^2 \xrightarrow{x\to\infty} \underline{\infty}$, weil K_f nach rechts <u>oben</u> verschwindet.

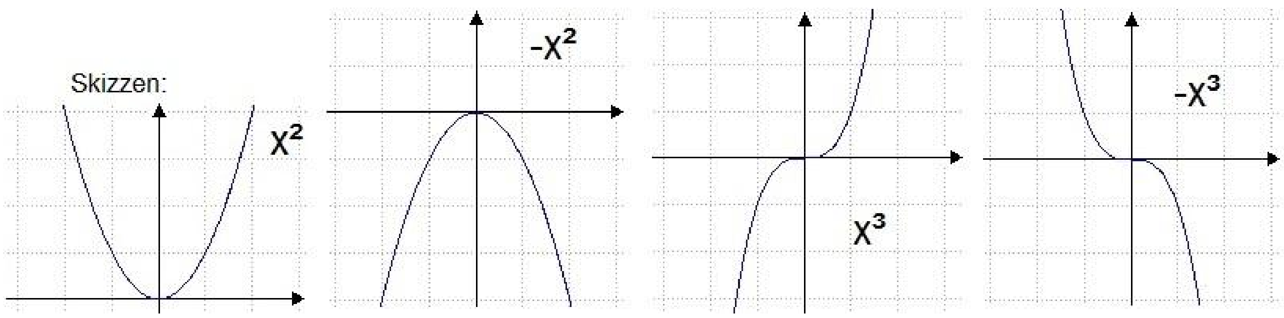
$x^2 \xrightarrow{x\to-\infty} \underline{\infty}$, weil K_f nach <u>links</u> <u>oben</u> verschwindet.

$x^3 \xrightarrow{x\to\infty} \underline{\infty}$, weil K_f nach <u>rechts oben</u> verschwindet.

$x^3 \xrightarrow{x\to-\infty} \underline{-\infty}$, weil K_f nach <u>links unten</u> verschwindet. z.B. $-x^2$; es fehlt die Gruppe $-x^3$.

In Abb. 279 sind die Schaubilder von $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = x^4$, $f(x) = -0.5x^6$, $f(x) = -0.25x^5$, $f(x) = 0.1x^7$, $f(x) = -0.1x^8$ abgebildet. Es gibt 4 Gruppen:
Gruppe 1: $f(x) \xrightarrow{x\to\pm\infty} \infty$, $c > 0, n$ gerade, Gruppe 2: $f(x) \xrightarrow{x\to\pm\infty} -\infty$, $c < 0, n$ gerade,
Gruppe 3: $f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$, $f(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$, $c > 0, n$ ungerade ($f(x) = x$ gehört zur Gruppe 3),
Gruppe 4: $f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$, $f(x) \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$, $c < 0, n$ ungerade.

Grad n	a_n Verhalten	für $x \to -\infty$	für $x \to \infty$	Beispiel
n gerade	$a_n > 0$	$f(x) \to \infty$	$f(x) \to \infty$	x^2
n gerade	$a_n < 0$	$f(x) \to -\infty$	$f(x) \to -\infty$	$-x^2$
n ungerade	$a_n > 0$	$f(x) \to -\infty$	$f(x) \to \infty$	x^3
n ungerade	$a_n < 0$	$f(x) \to \infty$	$f(x) \to -\infty$	$-x^3$



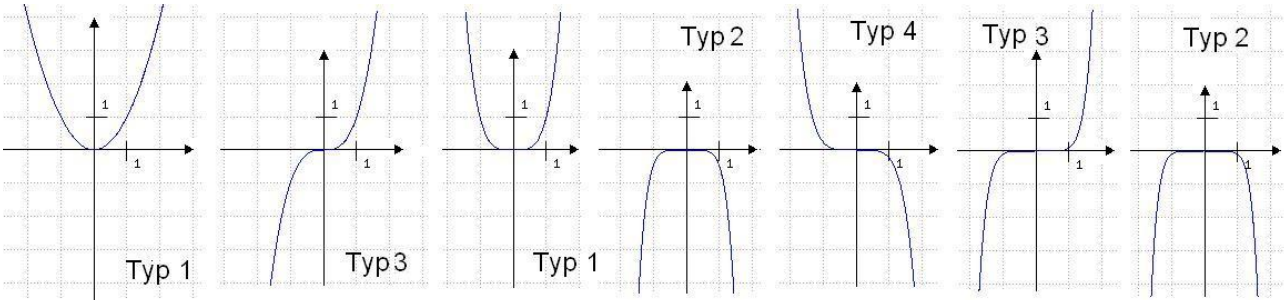


Abb. 279 Schaubilder von Funktionen der Form $c \cdot x^n$, n=2..8

b) Setzen Sie für x einen großen Wert z.B. $x = 1000$ ein. Wenn $f(1000)$ groß (idR größer 100) ist, dann geht f gegen unendlich. Dies gilt nicht allgemein - ist aber einen Versuch wert. (Abb. 279)

Aufg. 101/256: $f_1(x) \xrightarrow{x\to\pm\infty} \infty$, das x^2, weil x^2 stärker wächst als $-7x+9$;
K_f ist eine nach oben geöffnete Normalparabel (Gruppe 1).
Dies erkennt man am Summanden x^2, der Rest $(-7x+9)$ ist ohne Bedeutung.

a) x^2-2x-1:	$c>0, n$ gerade,	b) $4x^3-3x$:	$c>0, n$ ungerade,
c) $0.5(x^4-4x^2)$:	$c>0, n$ gerade,	d) $0.25x^5-x^3+x$:	$c>0, n$ ungerade,
e) $x^4-0.1x^7$:	$c<0, n$ ungerade,	f) $1.5x^2-0.9x^4+0.1x^6$:	$c>0, n$ gerade,
g) $x^3-0.3x^4$:	$c<0, n$ gerade,	h) $x-x^2+x^3$:	$c>0, n$ ungerade,
i) $0.5(2x^3-x^5+0.1x^7)$:	$c>0, n$ ungerade,	j) $x^8-0.5x^{10}+x+1$:	$c<0, n$ gerade.

k) Jede Funktion wird von einem Summanden dominiert. Es ist der Summand mit dem höchsten Exponenten, der den Grad festlegt.

l) Eine ganzrationale Funktion mit ungeradem Grad hat mindestens eine Nullstelle.

Beweis: Siehe Ag 386b) in den LöVo auf Seite 620.

Aufg. 101/257:

$f_1(x) \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$, $f_1(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$, Typ '$-x^2$',
$f_2(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$, $f_2(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$, Typ '$-x^3$', $f_3(x) \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$, $f_3(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$, Typ '$-x^4$',
$f_4(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$, $f_4(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$, Typ '$x^2$', $f_5(x) \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$, $f_5(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$, Typ '$-x^2$',
$f_6(x) \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$, $f_6(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$, Typ '$-x^3$', $f_7(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$, $f_7(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$, Typ '$x^3$',
$f_8(x) \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$, $f_8(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$, Typ '$-x^3$', $f_9(x) \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$, $f_9(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$, Typ '$-x^3$',
$f_{10}(x) \xrightarrow{x\to\infty} -2$, $f_{10}(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -2$, Typ 'konstante Funktion'.

Aufg. 101/258: a) $x^2+x-12, = (x-3)(x+4)$, **b)** $x^2-4x+4=(x-2)^2$,

c) $2x^2+2x-12 = 2(x+3)(x-2)$, **d)** $3x^2+6x = 3x(x+2)$, **e)** $4x^2-12x+8 = 4(x-1)(x-2)$,

f) $x^4-10x^2+9 = (x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$, **g)** $x^4-7x^2+12 = (x-2)(x+2)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$,

h) $2x^4-52x+50 = 2(x-1)(x+1)(x-5)(x+5)$, **i)** $1-5x^2+4x^4 = 4(x-1)(x+1)(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})$,

j) $2x^4-26x^2+72 = 2(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$, **k)** $-x^4+5x^2-4 = -(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)$,

zu j) $2x^4-26x^2+72=0$ Substitution $x^2=w$: $2w^2-26w+72=0 \Leftrightarrow w^2-12w+36=0$:
$w_{1,2} = \frac{13\pm\sqrt{169-144}}{2}$, $w_1=4, w_2=9 \Rightarrow x_{1,2}=\pm 2$, $x_{3,4}=\pm 3$,
Vorfaktor $a=2 \Rightarrow 2x^4-26x^2+72 = 2\cdot(x-3)\cdot(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x+3)$;

L) $x^5-20x^2+64 = x(x-2)(x+2)(x-4)(x+4)$,

m) $x^6 - 29x^4 + 100x^2 = x^2(x-2)(x+2)(x-5)(x+5)$,

n) $x^2 + 1$ kann nicht in Linearfaktoren zerlegt werden.

o) $4x^6 - 4x^2 = 4x^2(x^4 - 1) = 4x^2(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 4x^2(x-1)(x+1)(x^2+1)$

p) Es gilt $x^2 + px + q \;\equiv\; (x - x_1) \cdot (x - x_2)$; nach dem Satz vom Nullprodukt ist $(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0 \Leftrightarrow x = x_1$ oder $x = x_2$. Damit sind x_1 und x_2 die Nullstellen von $x^2 + px + q$.

Aufg. 102/259: (Abb. 280)

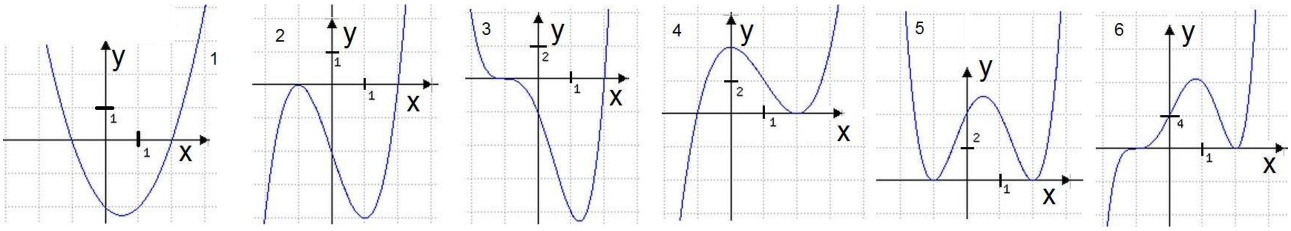


Abb. 280 Nullstellen

f_1: Beide Nst. sind einfach; f_2: $x = -1$ doppelt, $x = 2$ einfach; f_3: $x = -1$ dreifach, $x = 2$ einfach; f_4: $x = -1$ einfach, $x = 2$ doppelt; f_5: Beide Nst. sind doppelt; f_6: $x = -1$ dreifach, $x = 2$ doppelt.

Alle Terme sind linearfaktorzerlegt angegeben. Es gibt hier 3 Gruppen von Nullstellen.

Aufg. 102/260: a) Alle Nullstellen sind vom Typ 1. Was passiert am Ende also für $f_2(x)$? Beide Nullstellen sind zusammengewandert zu einer Nullstelle vom Typ 2.

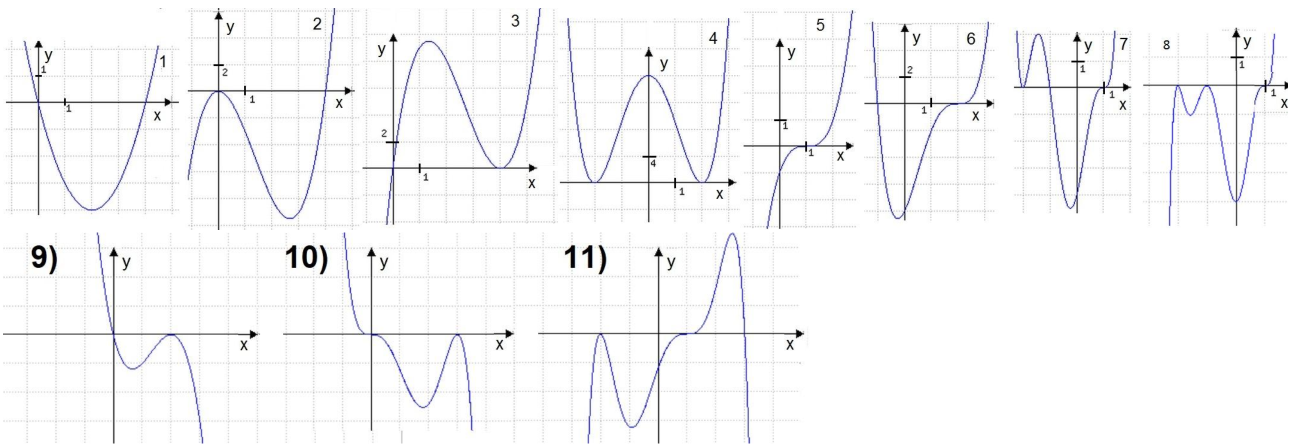
Bei einer Nullstelle vom Typ 2 sind zwei Nullstellen verschmolzen. Nullstellen vom Typ 3 heißen dreifach.

Die Vielfachheit einer Nullstelle entspricht dem Exponenten des Linearfaktors $(x - x_1)$.

b) Typ	Faktor	Vielfachheit	Beschreibung
Typ 1	$(x - x_1)$	einfach	K_f schneidet die $x-$Achse
Typ 2	$(x - x_1)^2$	doppelt	K_f berührt die $x-$Achse
Typ 3	$(x - x_1)^3$	dreifach	K_f berührt und durchdringt die $x-$Achse

c) Ja, aber nur die ersten drei Vielfachheiten müssen bis zum Abitur optisch erkannt werden.

Aufg. 102/261: (Abb. 281)



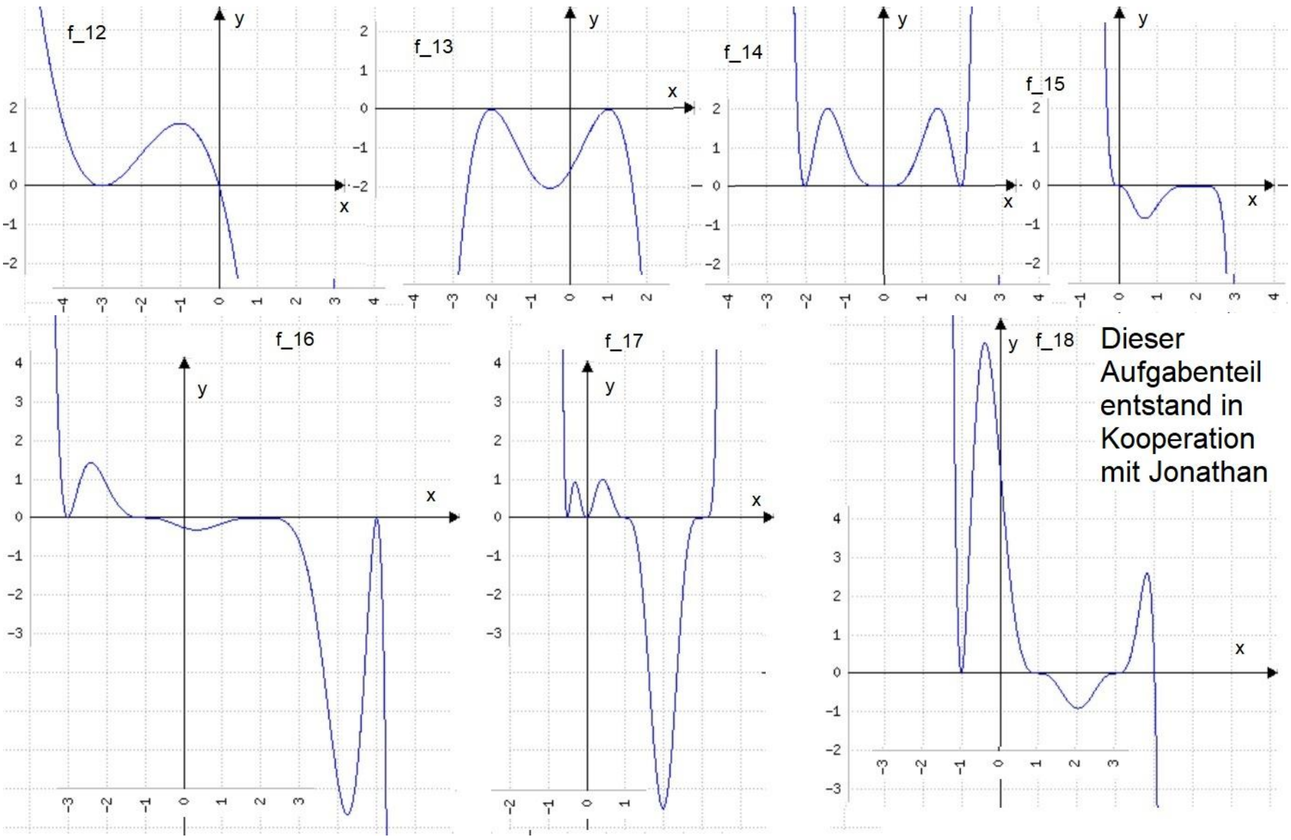


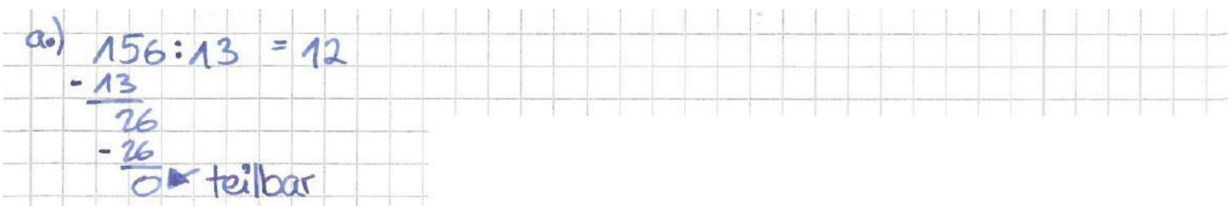
Abb. 281 Nullstellen

f_1: Beide Nst. sind einfach, Typ x^2, f_2: $x = 0$ doppelt, $x = 4$ einfach, Typ x^3, f_3: $x = 0$ einfach, $x = 4$ doppelt, Typ x^3, f_4: $x = -2$ doppelt, $x = 2$ doppelt, Typ x^2, f_5: $x = 1$ dreifach, Typ x^3, f_6: $x = -1$ einfach, $x = 2$ dreifach, Typ x^2, f_7: $x = -2$ doppelt, $x = -1$ einfach, $x = 1$ dreifach, Typ x^2.

Aufg. 103/262: **a)** $f(x) = (x+1)(x-1)(x-3)$, **b)** $f(x) = (x+2)(x-1)^2(x-3)$, **c)** $f(x) = (x+2)^2(x-1)^2(x-3)$, **d)** $f(x) = (x+2)(x-1)(x-3)(x-4)$, **e)** $f(x) = (x+2)(x-1)^2$, **f)** $f(x) = (x+3)^3(x-1)$, **g)** $f(x) = (x+2)^2(x-2)^2$, **h)** $f(x) = (x+1)^2(x-2)^3$, **i)** $f(x) = \frac{1}{4}(x+2)^2(x-2)$, **j)** $f(x) = \frac{1}{8}(x+2)^3(x-2)$, **k)** $f(x) = \frac{1}{9}(x+3)^2(x+1)(x-1)^2$, **l)** $f(x) = \frac{1}{9}(x+2)^2x(x-2)$, **m)** $f(x) = 2x^3(x-2)^2$, **n)** $f(x) = \frac{1}{3}(x+2)^2x(x-2)$, **o)** $f(x) = -(x+1)^3$, **p)** $f(x) = \frac{-1}{4}(x+2)^2(x-2)^2$, **q)** $f(x) = \frac{-1}{9}(x+2)x^3(x-2)^2$, **r)** $f(x) = 2(x-1)(x+1)$, **s)** $f(x) = -1/2(x-2)(x+2)$.

Die Funktionsterme der Graphen aus Abbildung 48r und s haben einen <u>Vorfaktor</u>, der die Graphen in <u>y-Richtung</u> <u>streckt</u>. Den Vorfaktor bestimmen Sie durch <u>einsetzen</u> und <u>ausrechnen</u>.
zu Agteil d) bei j-s ist $a \neq 1$ (Streckfaktor). Deshalb muss eine Punktprobe gemacht werden.

Aufg. 103/263: a) 156:13=12; b) $(x^2 + 5x + 6) : (x + 3) = x + 2$; c) i) $x + 3$, (Abb. 282)



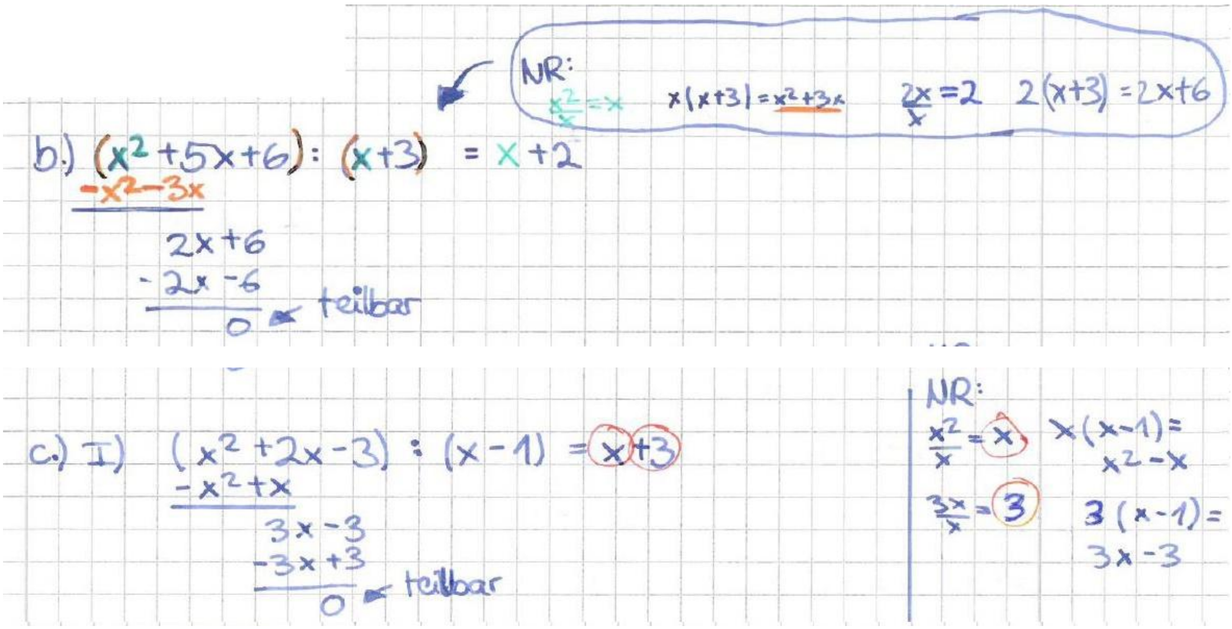


Abb. 282 Polynomdivision(en)

↑ i) $x+3$, (Abb. 282) ↓ ii) $x+3$,

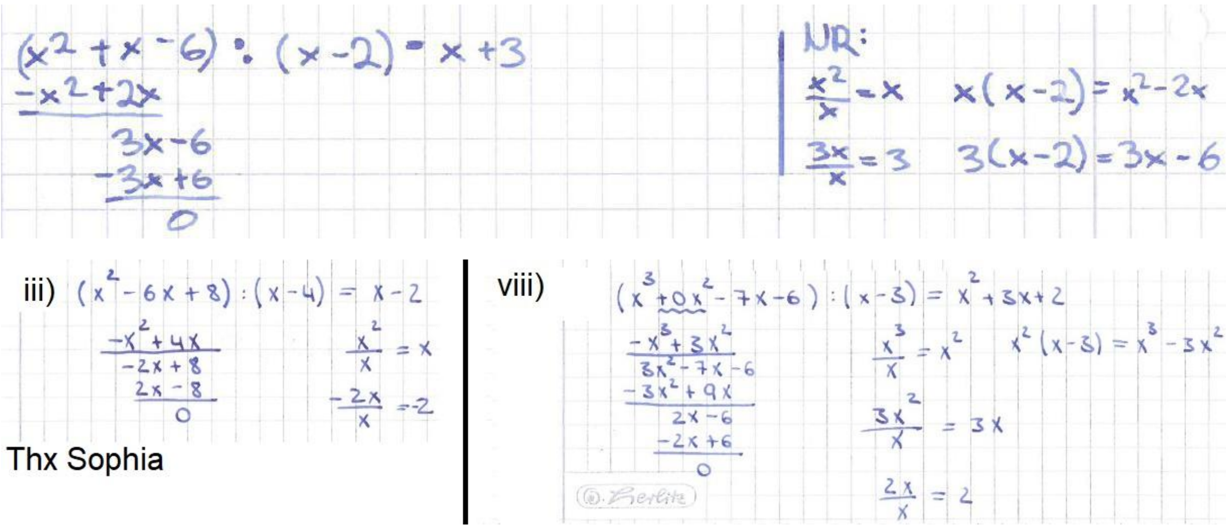


Abb. 283 Polynomdivision

iii) ↑ $x-2$, ↓ iv) $2x+6$, (Abb. 284)

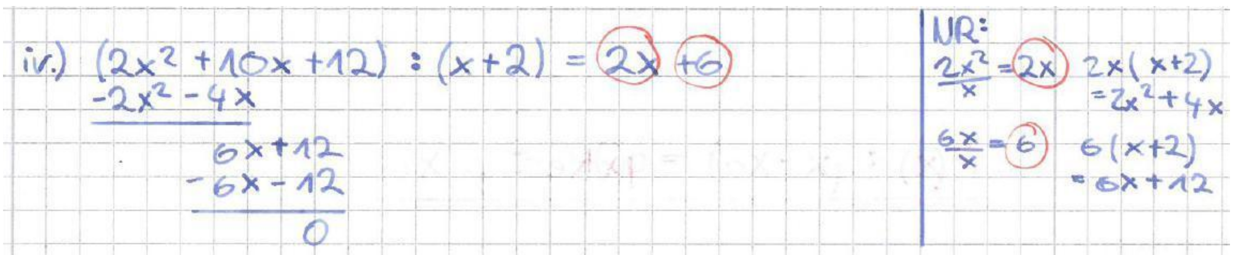


Abb. 284 Polynomdivision

v) $\uparrow 3x-2$, $\downarrow$ vi) $x-3$, (Abb. 285)

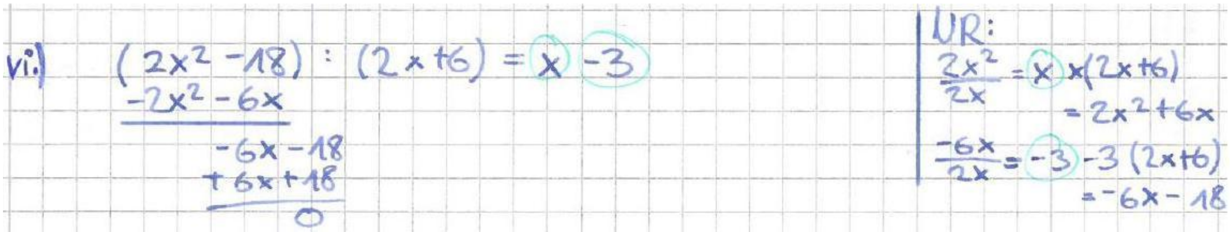


Abb. 285 Polynomdivision

vii) x^2-3x+2, viii) x^2+3x+2 (Abb. 283), ix) $2x^2-5x-3$; (Abb. 285)

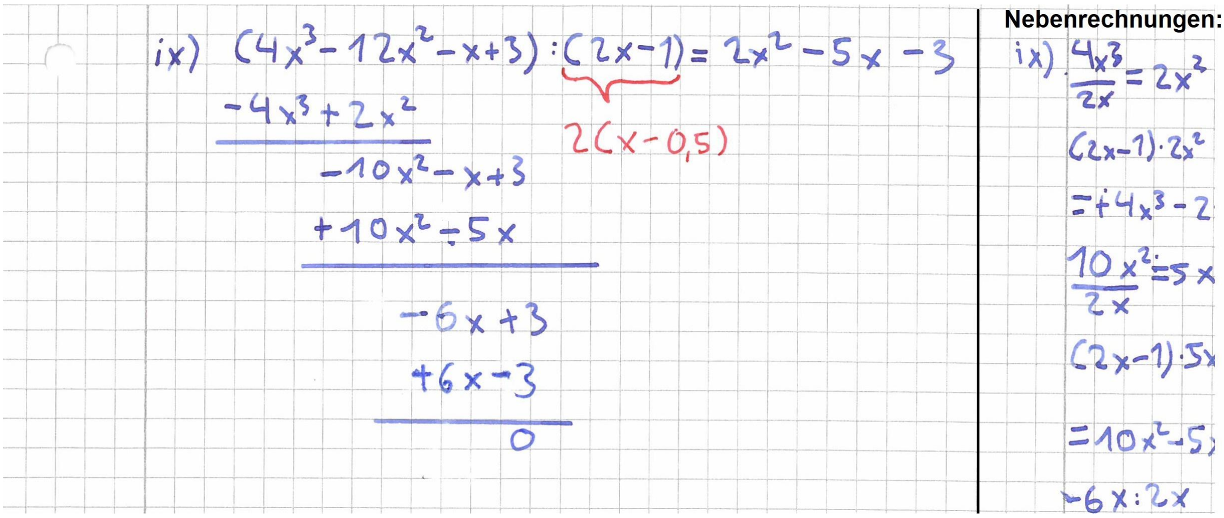


Abb. 286 Polynomdivision

Der Vergleich von Polynomdivision mit der Zahlendivision geht nicht immer.

d) Es gilt $x=y-1$, $z=y+1$, $a=(y-1)\cdot y\cdot(y+1)=y^3-y$, $b=3y$; damit ist $y^3-y=15y$ oder $y_1=-4, y_2=0, y_3=4$. Also gilt $(a;b)$ kann $(-60;-12)$, $(0;0)$ oder $(60;12)$ sein. Wer alles auf x bezieht braucht die Polynomdivision.

Aufg. 103/264: a) $x-2$ Rest 3 oder $x-2+\frac{3}{x+1}$, (x^2-x-1) ist nicht durch $(x+1)$ teilbar;

$x+1+\frac{1}{x-1}$, $x+2+\frac{4}{x-1}$, $x+3+\frac{8}{x-1}$, $x+2+\frac{1}{x-1}$, $x^2+2x+4+\frac{8}{x-2}$; (Abb. 287)

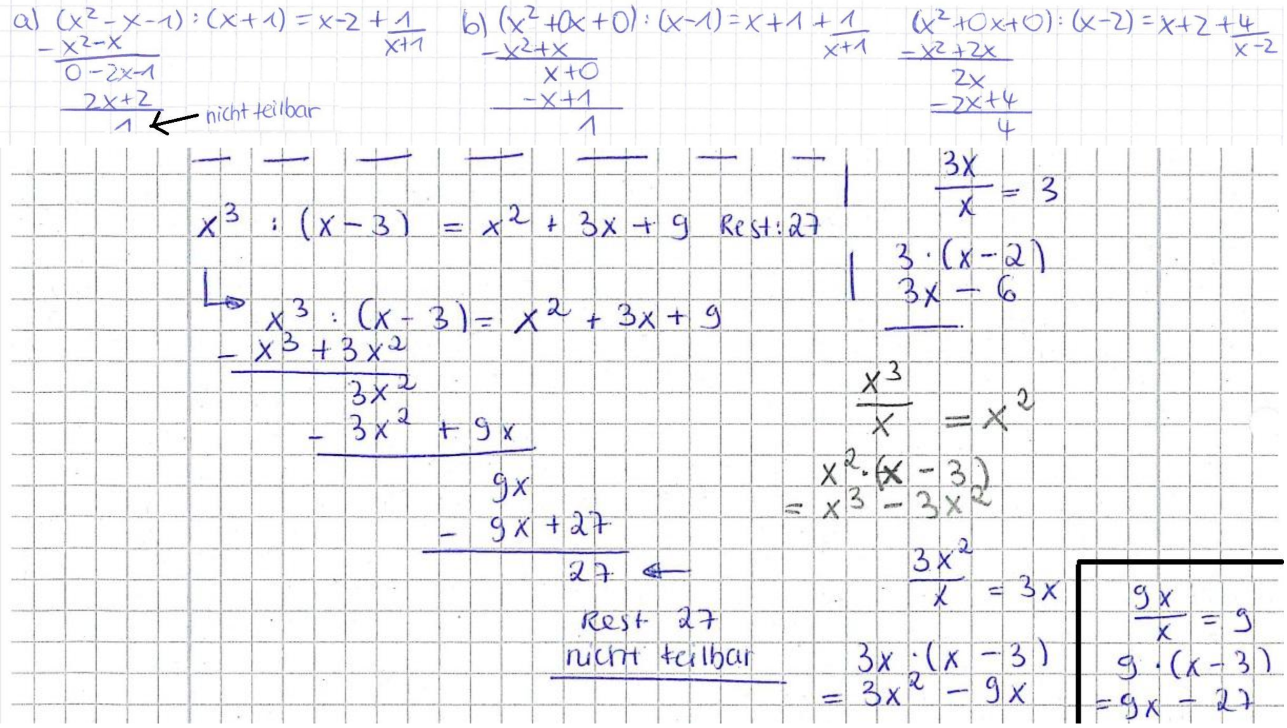


Abb. 287 Polynomdivisionen

c) $1 = 7 - 2 \cdot 3$.

Idee: $p(x) : (x - x_0) = q(x)$ Rest $r \Leftrightarrow p(x) = (x - x_0) \cdot q(x) + r$; $p(x_0) = (x_0 - x_0) \cdot q(x_0) + r = r$;

c) $p(x_0) = 0 = r$.

Aufg. 104/265: a) $p(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 0$, b) $(x - 1)$, c) $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$,

↓ d) $(x + 1)(x + 2)(x - 3)$, (Abb. 288)

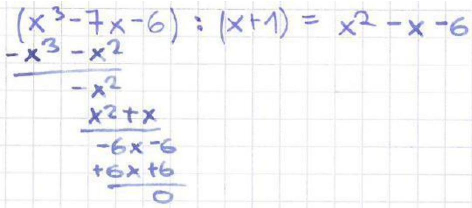
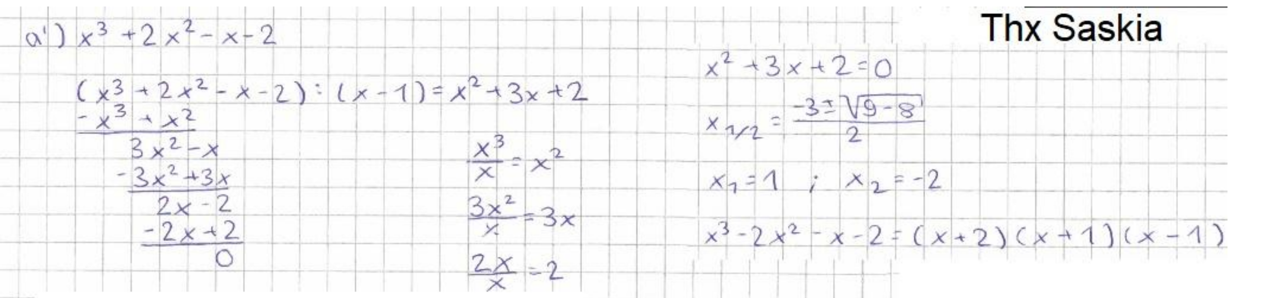


Abb. 288 Polynomdivision(en)

e) $p(x)$ hat nur zwei (einfache) Nullstellen, $p(x) = (x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)$.

f) $p(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, dann ist $a_0 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$; also ist als Nullstele ein Teiler von a_0 (= Absolutglied) eine gute Schätzung. Das gilt auch für ganzrationale Funktionen höheren Grades.

Aufg. 104/266: Nach den <u>Vieta</u>-Wurzelsätzen sind gute Schätzungen für eine Nullstellen die <u>Teiler</u> des Absolutgliedes. *a)* $(x+1)(x+2)(x-1)$; *b)* $(x+3)(x+2)(x-1)$; ↓ c) $(x+2)(x-2)(x-1)$;



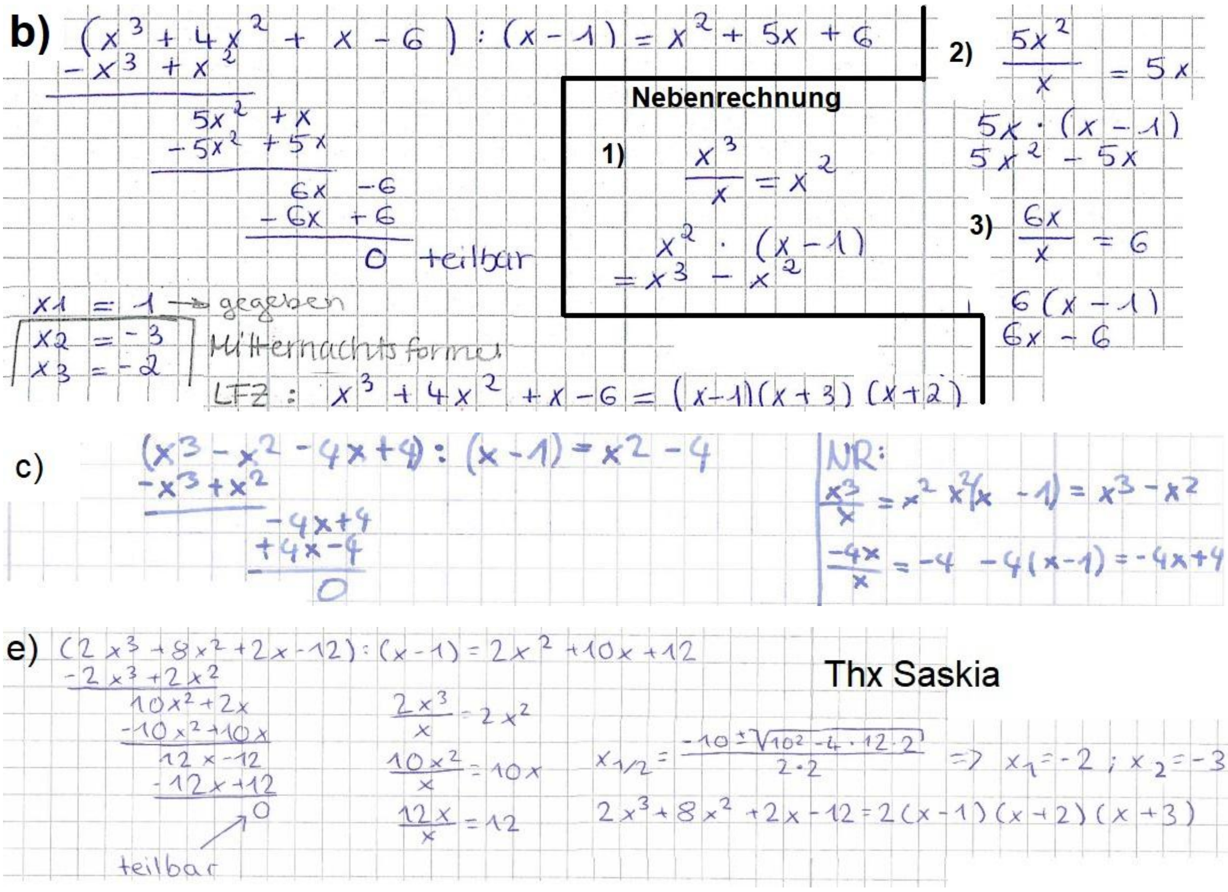


Abb. 289 Polynomdivision(en)

d) $(x-1)(x-1)(x-3)$; *e*) $2(x-1)(x+2)(x+3)$; $\downarrow$ f) $-2(x+1)(x-2)(x+2)$;

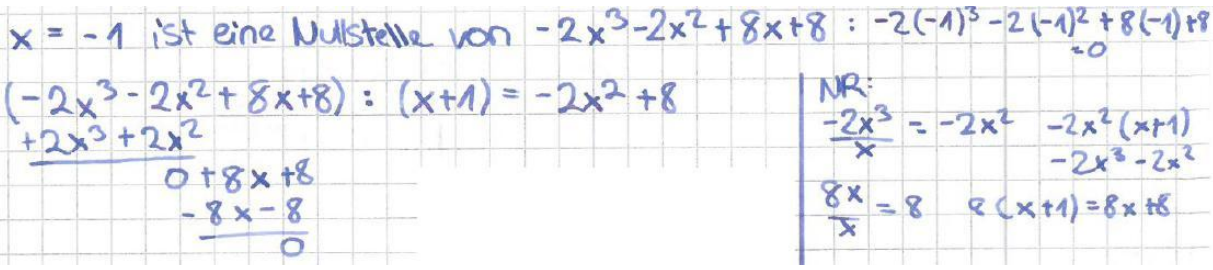


Abb. 290 Polynomdivision(en)

g) $4(x-1)^2(x+1)$; h) $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-2)$; $(x-2)^3$; $\downarrow$ i) $2\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x-1.5)$;

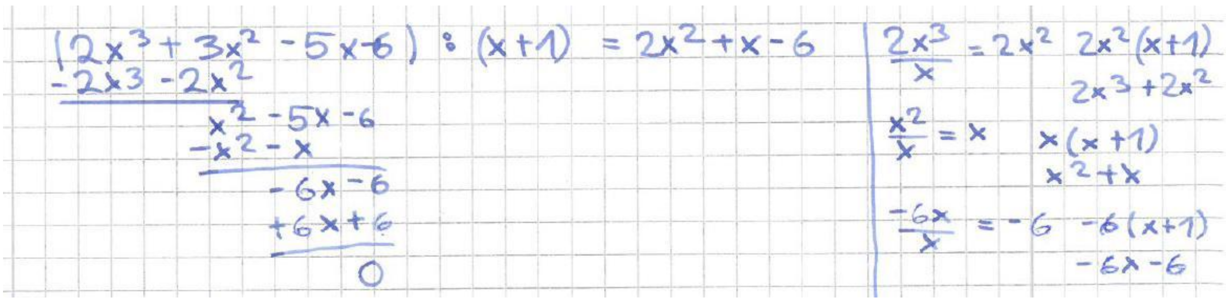


Abb. 291 Polynomdivision(en)

(Zur Ag gehören ua Abb. 289, 290, 291) $\downarrow$ j) $3\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+5)$ (Abb. 292)

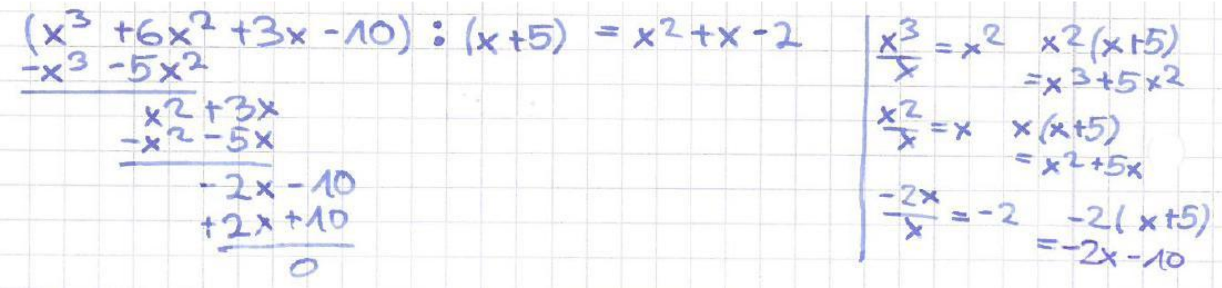


Abb. 292 Polynomdivision(en)

↓ k) $(x+1)^2 \cdot (x+4)$ (Abb. 293);

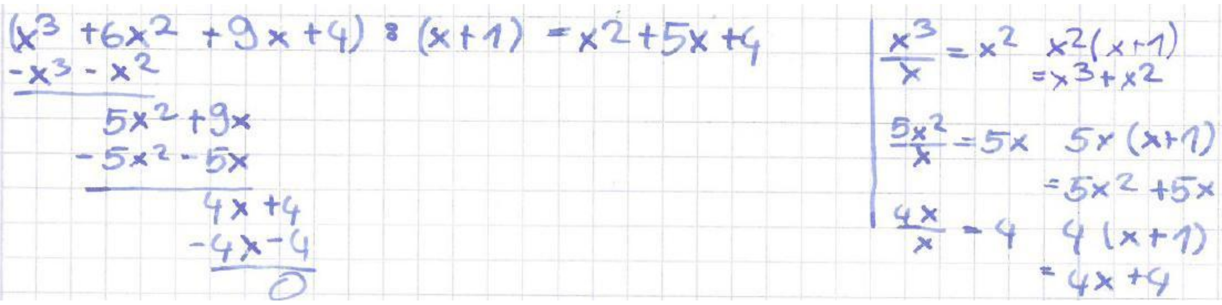


Abb. 293 Polynomdivision(en)

↓ L) $(x+1) \cdot (x-2) \cdot (x+3)$ (Abb. 294);

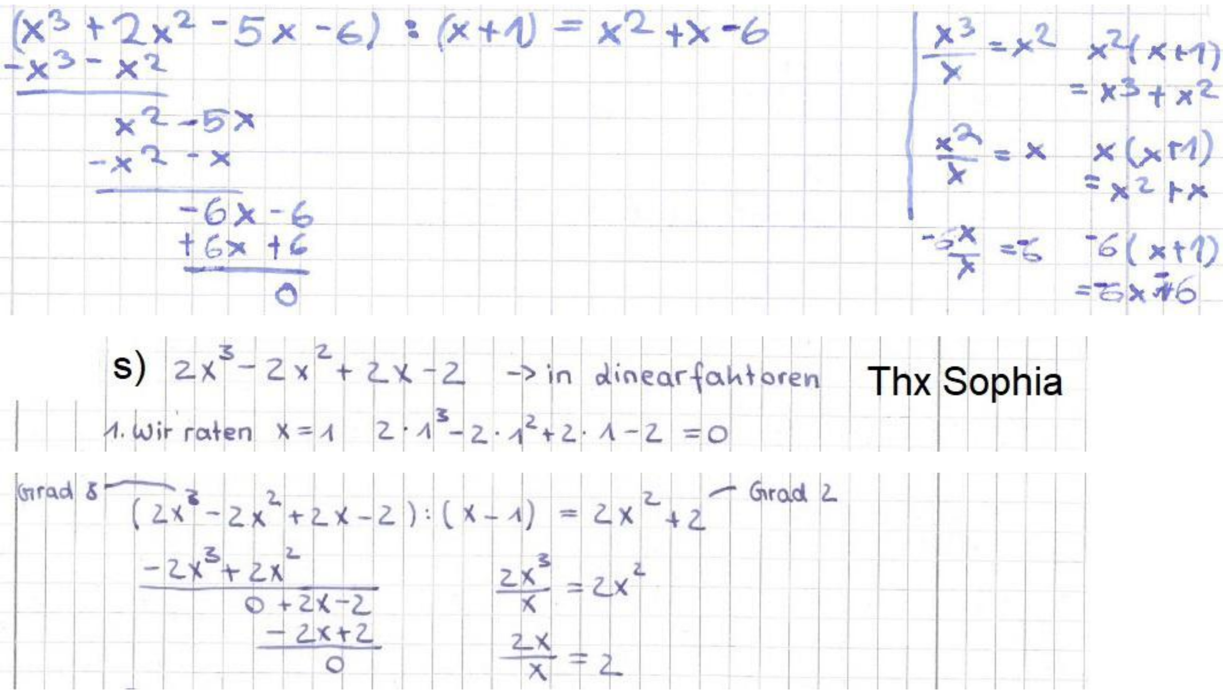


Abb. 294 Polynomdivision(en)

m) $(x+3)(x-3)(x+2)(x-2)$;
n) $3(x^2+1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$; o) $(x-2)(x+2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})x^2$; p) $(x^2+4)(x^2+1)x^2$;
q) $(x-1)^2(x-2)(x+2)$; r) $2(x+1)^2(x-3)(x+2)$. s) $2(x^2+1)(x-1)$ (Abb 560/294)

t) Abi 2006: $(x^3-3x^2-x+3):(x-1) = x^2-2x-3$ (Rg fehlt noch);
mit der MNF: $x_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2+4 \cdot 3}}{2} \Rightarrow x_2 = -1, x_3 = 3$;

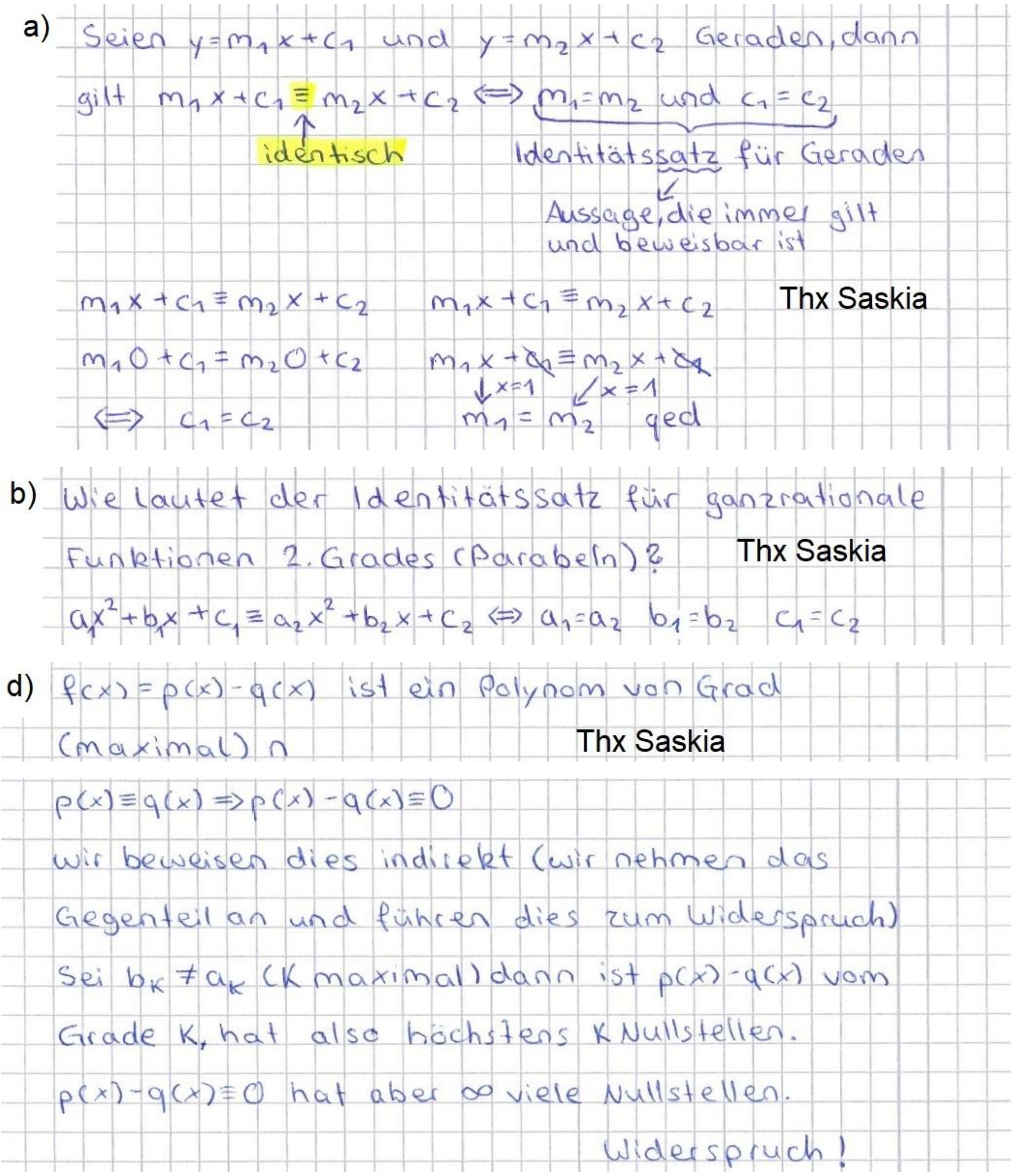
$f_{06}(x) = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-3)$;

Abi 2010: $(2x^3+3x^2-8x+3):(x-1) = 2x^2+5x-3$ (Rg fehlt noch);
mit der MNF: $x_{2,3} = \frac{-5\pm\sqrt{5^2+4\cdot 2\cdot 3}}{2\cdot 2} \Rightarrow x_2 = 0.5, x_3 = -3$;

$f_{10}(x) = 2\cdot(x-1)\cdot(x-0.5)\cdot(x+3)$;

Aufg. 104/267: Sei $p(x)$ vom Grad n und x_0 eine Nullstelle von $p(x)$, dann ist $q(x) = p(x) : (x-x_0)$ vom Grad $\underline{n-1}$; bei jeder Division dieser Form <u>verliert</u> $p(x)$ einen Grad. Diese Division geht <u>höchstens n</u> mal. Damit hat ein reelles Polynom n-ten Grades <u>höchstens n</u> Nullstellen (Fundamentalsatz der Algebra).

Aufg. 104/268: c) $p(x) \equiv q(x)$ bedeutet $p(x) = q(x)$ für <u>alle $x \in \mathbb{R}$</u>.


a) Seien $y=m_1x+c_1$ und $y=m_2x+c_2$ Geraden, dann
gilt $m_1x+c_1 \equiv m_2x+c_2 \iff \underbrace{m_1=m_2 \text{ und } c_1=c_2}_{\text{Identitätssatz für Geraden}}$
identisch
Aussage, die immer gilt und beweisbar ist

$m_1x+c_1 \equiv m_2x+c_2$
$m_1 0+c_1 \equiv m_2 0+c_2$
$\iff c_1=c_2$

$m_1x+c_1 \equiv m_2x+c_2$
$m_1x+\cancel{c_1} \equiv m_2x+\cancel{c_2}$
$x=1$ $x=1$
$m_1 = m_2$ qed

Thx Saskia

b) Wie lautet der Identitätssatz für ganzrationale Funktionen 2. Grades (Parabeln)?
$a_1x^2+b_1x+c_1 \equiv a_2x^2+b_2x+c_2 \iff a_1=a_2 \quad b_1=b_2 \quad c_1=c_2$

Thx Saskia

d) $f(x)=p(x)-q(x)$ ist ein Polynom von Grad (maximal) n

Thx Saskia

$p(x)\equiv q(x) \Rightarrow p(x)-q(x)\equiv 0$
wir beweisen dies indirekt (wir nehmen das Gegenteil an und führen dies zum Widerspruch)
Sei $b_K \neq a_K$ (K maximal) dann ist $p(x)-q(x)$ vom Grade K, hat also höchstens K Nullstellen.
$p(x)-q(x)\equiv 0$ hat aber ∞ viele Nullstellen.
Widerspruch!

Abb. 295 Identitätssatz für Polynome

d) $p(x) \equiv q(x) \Leftrightarrow n = m$ und $a_i = b_i$ für $i = 1..n$. Beweisen Sie mit Hilfe von $f(x) = \underline{p(x)} - \underline{q(x)}$.

$\Leftarrow$: (hier nicht gefragt) Punktweise klar, denn es kommt das gleiche heraus, wenn man zwei mal in den gleichen Term das gleiche einsetzt (muss nicht verstanden werden).

$\Rightarrow$: Indirekt (hurra); Annahme: $p(x) \equiv q(x)$, dass heißt $p(x) = q(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ $(*)$. Wir betrachten $f(x) = p(x) - q(x)$. $f(x)$ muss identisch null sein (also egal, was wir für x einsetzen, es kommt immer 0 heraus).

Sei $n = m$: $f(x) = (a_n - b_n) \cdot x^n + (a_{n-1} - b_{n-1}) \cdot x^{n-1} + ... + (a_1 - b_1) \cdot x + (a_0 - b_0)$;
wenn die Koeffizienten nicht alle gleich sind, gibt es ein (maximales) k mit $0 < k \leq n$ mit $a_k - b_k \neq 0$, damit ist f von Grad k und hat nach dem Fundamentalsatz der Algebra maximal k Nullstellen. f hat aber ∞ viele Nullstellen nach $(*)$ $\lightning$.

Für $n \neq m$ geht die Argumentation genauso nur ist hier $k = \max\{n, m\}$ (qed).

e) Der Identitätssatz für Polynome erlaubt uns den K<u>oeffizienten</u><u>vergleich</u>.

f) **i)** $a = 1, b = 0$; **ii)** $b = 4, a = -3$;
iii) $a + b = 3 \Leftrightarrow a = 3 - b, a + 2b = 4 \overset{a=3-b}{\Longleftrightarrow} 3 - b + 2b = 4 \Leftrightarrow a = 2, b = 1$;

iv) $a + b = 2 \Leftrightarrow a = 2 - b, a + 2b = 3 \overset{a=2-b}{\Longleftrightarrow} 2 - b + 2b = 3 \Leftrightarrow a = 1, b = 1$ Probe: $a - b = 0_{\surd}$;

Damit ist $h(x) = (a + b)x^2 + (a + 2b)x + a - b = (1 + 1)x^2 + (1 + 2 \cdot 1)x + 1 - 1 = 2x^2 + 3x$.

h) $A = 2B = -1$.

Aufg. 104/269: a) $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{-1}{x+1}$; b) $\frac{x+2}{x(x+1)} = \frac{2}{x} + \frac{-1}{x+1}$; c) $\frac{x+1}{x^2-x-6} = \frac{0.2}{x+2} + \frac{0.8}{x-3}$.

d) $\frac{x+13}{x^2-4x-5} = \frac{3}{x-5} - \frac{2}{x+1}$; e) $\frac{6x-13}{x^2-3.5x+1.5} = \frac{2}{x-3} + \frac{4}{x-0.5}$;

f) $\frac{2x+6}{2x^2-3x+1} = \frac{2.5}{x+0.5} - \frac{2}{x+1}$; g) $\frac{30}{x^3-x} = \frac{15}{x+1} - \frac{30}{x} + \frac{15}{x-1}$
h) $\frac{x}{x^2-2x-8} = \frac{1}{3(x+2)} + \frac{2}{3(x-4)}$;
i) $\frac{14x}{x^2-x-12} = \frac{6}{x+3} + \frac{8}{x-4}$;

Aufg. 104/270: Abb1: $(x + 1)^2(x - 2) + 3$ Abb2: $(x + 1)^2(x - 2)$; Abb3: $-1/2(x + 1)^2(x - 2)$; Abb4: $(x - 1)^2(x - 4)$

Aufg. 105/271: Der Graph ist achsensymmetrisch zur $y-$Achse.

b) x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$x^2 - 4$	12	5	0	-3	-4	-3	0	5	12
b) $x^3 - 4x$	-48	-15	0	3	0	-3	0	15	48

c) Der Graph der Funktion $f(x) = x^2 - 4$ ist <u>achsen</u>symmetrisch zur <u>y</u>-Achse, weil $f(-x) = \underline{f(x)}$ gilt.

c) Genau die Graphen einer Funktion f mit der Eigenschaft $f(-x) = \underline{f(-x)}$ sind achsensymmetrisch (as) zur <u>$y-$Achse</u>.

Aufg. 105/272: a) Ein Parallelogramm hat keine Symmetrieachsen. b) siehe oben

c) Genau die Graphen einer Funktion f mit der Eigenschaft $f(-x) = \underline{-f(-x)}$ sind punktsymmetrisch (ps) zum <u>Ursprung</u>.

Aufg. 105/273: a) Alle Funktionen sind as zur $y-$Achse; b) $f(0 + t) = f(0 - t)$ also ist $f(-t) = f(t)$;

$f_1(-t) = (-t)^2 - 4 = t^2 - 4 = f_1(t)$; $f_2(-t) = (-t)^4 = t^4 = f_2(t)$;
$f_3(-t) = 0.1 \cdot (-t)^4 - (-t)^2 = 0.1 \cdot t^4 - t^2 = f_3(t)$;
$f_4(-t) = 3(-t)^4 - 5(-t)^2 - 3 = 3t^4 - 5t^2 - 3 = f_4(t)$;
$f_5(-t) = \frac{(-t)^6}{3} - \sqrt{2} \cdot (-t)^2 = \frac{t^6}{3} - \sqrt{2} \cdot t^2 = f_5(t)$;
$f_6(-t) = \frac{(-t)^{10}}{\sqrt{5}} + \log 3 \cdot (-t)^8 = \frac{t^{10}}{\sqrt{5}} + \log 3 \cdot t^8 = f_6(t)$;
$f_7(-t) = -(-t)^6 + 2(-t)^4 - (-t)^2 = -t^6 + 2t^4 - t^2 = f_7(t)$.

c) Polynome mit geraden Exponenten sind immer achsensymmetrisch zur $y-Achse$ und es gilt $f(-t) = f(t)$ weil sich beim $f(-t)$ das $-$ Zeichen durch das quadrieren (eigentlich geradzahliges Exponieren) weghebt.

d) Polynome mit ungeraden Exponenten sind immer punktsymmetisch zum Ursprung und es gilt $f(-t) = -f(t)$ **(Formel 46)** .

e) Bei Polynomen mit geraden und ungeraden Exponenten sagt man, dass keine Symmetrie erkennbar ist.

Aufg. 106/274: as: $f_1(x) = 7x^2$; $f_9(x) = \frac{5}{x^4}$; $f_6(x) = \frac{x^6}{6} + \frac{x^2}{2} + 1$;

weder noch: $f_3(x) = 4x^3 + 2$; $f_5(x) = x^4 + 2x + 4$;

ps: $f_2(x) = 4x^5 + 2x^3$; $f_4(x) = x^7 + 2x$; $f_7(x) = \frac{x^3+2x}{4}$; $f_8(x) = \frac{1}{x}$; $f_{10}(x) = \frac{x}{x^2+1}$; $f_{11}(x) = \sqrt[3]{x}$;

xii) $f_{12}(-x) = |-x| = |-1| \cdot |x| = |x|$ (as zur y-Achse);
xiii) $f_{13}(-x) = 2^{-x+1} + \frac{2}{2^{-x}} = \frac{2}{2^x} + 2^{x+1} = f(x)$; (as zur y-Achse).

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\frac{x}{x^2+1}$	-0.3	-0.4	-0.5	0	0.5	0.4	0.3

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$2^{x+1} + \frac{2}{2^x}$	16.25	8.5	5	4	5	8.5	16.25

d) i) Der Graph von f_a ist symmetrisch zur $y-$Achse, da der Funktionsterm nur gerade Hochzahlen bei der Variable x besitzt (oder $f(-x) = f(x)$).

ii) Nullstellen: $-ax^4 + 4ax^2 = -ax^2(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = \pm 2$. Alle 3 Nullstellen sind unabhängig von a.

b) $g_1(x) \cdot g_2(x)$ ist gerade, $g_1(x) \cdot u_1(x)$ ist ungerade, $u_1(x) \cdot u_2(x)$ ist gerade.

c) ps: $a = -2$; as: $a = 0$;

Aufg. 106/275: a) **Abb. i):** $f(x) = a \cdot (x-2)^2(x+2)^2$, $f(0) = 4$:
$f(0) = a \cdot (0-2)^2(0+2)^2 = 16a = 4 \Rightarrow a = \frac{1}{4} \Rightarrow$ $f(x) = 0.25 \cdot (x-2)^2(x+2)^2$;
A: $f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$, $f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \infty$;
D: $\mathbb{D} = \mathbb{R}, \mathbb{W} = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$: $f(x) \leq 0$, weil f nur aus Quadraten besteht;
N: $x = \pm 2$; **S:** as zur y-Achse: $f(x) = 0.25x^4 - 2x^2 + 4$ ist gerade;

Abb. ii): $f(x) = a \cdot x(x-2)^2(x+2)^2$, $f(-1) = -3$:
$f(-1) = -3 = a \cdot (-1) \cdot (-1-2)^2(-1+2)^2 = -9a \Rightarrow a = \frac{1}{3} \Rightarrow$ $f(x) = 1/3 \cdot x(x-2)^2(x+2)^2$;
A: $f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$, $f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \infty$; **D:** $\mathbb{D} = \mathbb{R}, \mathbb{W} = \mathbb{R}$, f hat ungeraden Grad;
N: $x = \pm 2$ oder $x = 0$; **S:** ps zum Ursprung: $f(x) = \frac{1}{3}x^5 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{16}{3}x$ ist ungerade;

Abb. iii): $f(x) = a \cdot (x-1)^3(x+2)^2$, $f(-1) = 4$:
$f(-1) = 4 = a \cdot (-1-1)^3(-1+2)^2 = -8a \Rightarrow a = \frac{-1}{2} \Rightarrow$ $f(x) = -0.5(x-1)^3(x+2)^2$;
A: $f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} +\infty$, $f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -\infty$; **D:** $\mathbb{D} = \mathbb{R}, \mathbb{W} = \mathbb{R}$, f hat ungeraden Grad;
N: $x = -2$ oder $x = 1$; **S:** K_f ist nicht symmetrisch;

Abb. iv): $f(x) = a \cdot (x-1)^3(x+1)^3$, $f(0) = 1$:
$f(0) = 1 = a \cdot (0-1)^3(0+1)^3 = -a \Rightarrow a = -1 \Rightarrow$ $f(x) = (-1) \cdot (x-1)^3(x+1)^3$;
A: $f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$, **D:** $\mathbb{D} = \mathbb{R}, \mathbb{W} = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 1\}$: (aus dem Schaubild abgelesen);
N: $x = \pm 1$; **S:** as zur y-Achse: $f(x) = -x^6 + 3x^4 - 3x^2 + 1$ ist gerade;

Abb. v): $f(x) = a \cdot x \cdot (x-1)^2(x+1)^2(x-2)(x+2)$, $f(0.5) = -0.405$:
$f(0.5) = -0.405 = a \cdot 0.5 \cdot (0.5-1)^2(0.5+1)^2(0.5-2)(0.5+2) = \frac{135}{128} \Rightarrow a = 0.384 \Rightarrow$
$f(x) = -0.384 \cdot x \cdot (x-1)^2(x+1)^2(x-2)(x+2)$;
A: $f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} +\infty$, $f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -\infty$; **D:** $\mathbb{D} = \mathbb{R}, \mathbb{W} = \mathbb{R}$, f hat ungeraden Grad;
N: $x = \pm 1$ oder $x = 0$;
S: ps zum Ursprung: $f(x) = -0.384x^7 + 2.304x^5 - 3.456x^3 + 1.536x$ ist ungerade;

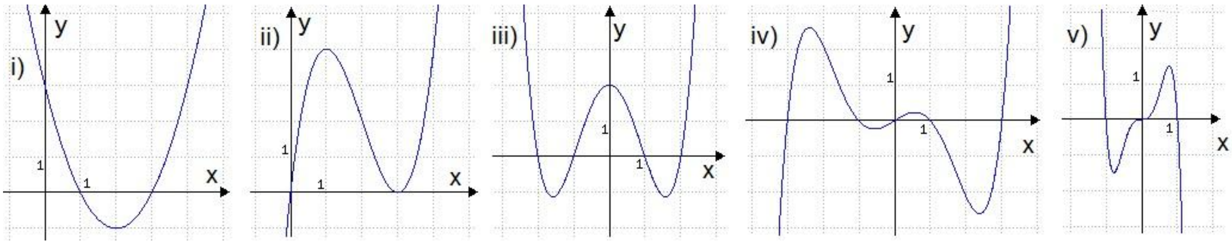


Abb. 296 Skizzierte Schaubilder

c) **i)** $x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=1$ oder $3 \Rightarrow x^2-4x+3=(x-1)\cdot(x-3)$, (Abb. 296)

$f_1(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$, $f_1(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$;

ii) $f_2(x)=x^3-6x^2+9x=x(x^2-6x+9)=x(x-3)^2$ (Binomische Formel),
$f_2(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$, $f_2(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$;

iii) $f_3(x)=0.5x^4-2.5x^2+2=0.5w^2-2.5w+2$ mit $(w=x^2)$ $w_{1,2}=\frac{2.5\pm\sqrt{(2.5)^2-4}}{2\cdot 0.5}=1$ oder 4, RS: $x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$, $x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$,

$0.5x^4-2.5x^2+2=0.5\cdot(x-2)\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)$,

$f_3(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$, $f_3(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$;

iv) $f_4(x)=0.07x^5-0.7x^3+0.63x=0.07x(x^4-10x^2+9)$, $x^4-10x^2+9=w^2-10w+9$ mit $(w=x^2)$ $w_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{100-36}}{2}=1$ oder 9, RS: $x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3$, $x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$,

$0.07x^5-0.7x^3+0.63x=0.07\cdot x\cdot(x-3)\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+3)$,

$f_4(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$, $f_4(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$;

v) $f_5(x)=8x^3-8x^5=8\cdot x^3\cdot(x^2-1)$, (binomische Formel) $f_5(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$, $f_5(x) \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$;

vi) $f_6(x)=\frac{1}{4}\cdot x^7-x^5+x^3=\frac{1}{4}\cdot x^3\cdot(x-\sqrt{2})^2\cdot(x+\sqrt{2})^2$;

d) 1)
$$\begin{aligned}
&\text{i)}\, f_{neu,1}(x) &&= f_1(x-3)+2 &&= (x-3)^2-4(x-3)+3+2,\\
&\text{ii)}\, f_{neu,2}(x) &&= f_2(x-3)+2 &&= (x-3)^3-6(x-3)^2+9(x-3)+2,\\
&\text{iii)}\, f_{neu,3}(x) &&= f_3(x-3)+2 &&= 0.5(x-3)^4-2.5(x-3)^2+2+2,\\
&\text{iv)}\, f_{neu,4}(x) &&= f_4(x-3)+2 &&= 0.07(x-3)^5-0.7(x-3)^3+0.63(x-3)+2,\\
&\text{v)}\, f_{neu,5}(x) &&= f_5(x-3)+2 &&= 8(x-3)^3-8(x-3)^5+2;
\end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned}
&\text{i)}\, f_{neu,1}(x) &&= f_1(x+4)-5 &&= (x+4)^2-4(x+4)+3-5,\\
&\text{ii)}\, f_{neu,2}(x) &&= f_2(x+4)-5 &&= (x+4)^3-6(x+4)^2+9(x+4)-5,\\
&\text{iii)}\, f_{neu,3}(x) &&= f_3(x+4)-5 &&= 0.5(x+4)^4-2.5(x+4)^2+2-5,\\
&\text{iv)}\, f_{neu,4}(x) &&= f_4(x+4)-5 &&= 0.07(x+4)^5-0.7(x+4)^3+0.63(x+4)-5,\\
&\text{v)}\, f_{neu,5}(x) &&= f_5(x+4)-5 &&= 8(x+4)^3-8(x+4)^5-5;
\end{aligned}$$

e) 1)
$$\begin{aligned}
&\text{i)}\, f_{neu,1}(x) &&= -f_1(x) &&= -(x^2-4x+3) &&= -x^2+4x-3,\\
&\text{ii)}\, f_{neu,2}(x) &&= -f_2(x) &&= -(x^3-6x^2+9x) &&= -x^3+6x^2-9x,\\
&\text{iii)}\, f_{neu,3}(x) &&= -f_3(x) &&= -(0.5x^4-2.5x^2+2) &&= -0.5x^4+2.5x^2-2,\\
&\text{iv)}\, f_{neu,4}(x) &&= -f_4(x) &&= -(0.07x^5-0.7x^3+0.63x) &&= -0.07x^5+0.7x^3-0.63x,\\
&\text{v)}\, f_{neu,5}(x) &&= -f_5(x) &&= -(8x^3-8x^5) &&= -8x^3+8x^5;
\end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned}
&\text{i)}\, f_{neu,1}(x) &&= f_1(-x) &&= (-x)^2-4(-x)+3 &&= x^2+4x+3,\\
&\text{ii)}\, f_{neu,2}(x) &&= f_2(-x) &&= (-x)^3-6(-x)^2+9(-x) &&= -x^3-6x^2-9x,\\
&\text{iii)}\, f_{neu,3}(x) &&= f_3(-x) &&= 0.5(-x)^4-2.5(-x)^2+2 &&= 0.5x^4-2.5x^2+2,
\end{aligned}$$

iv) $f_{neu,4}(x) = f_4(-x) = 0.07(-x)^5 - 0.7(-x)^3 + 0.63(-x) = -0.07x^5 + 0.7x^3 - 0.63x,$
v) $f_{neu,5}(x) = f_5(-x) = 8(-x)^3 - 8(-x)^5) = -8x^3 + 8x^5;$

Bei punktsymmetrischen Schaubildern zum Pkt (0/0) entsprechen sich die Spiegelungen an der x- und y- Achse.

f) $f_1(x)$ ist as zu $x = 2$, $f_2(x)$ ist ps zu $(2;2)$, $f_3(x)$ ist as zu $x = 0$, $f_4(x)$ und $f_5(x)$ sind ps zu $(0;0)$;

Aufg. 106/276: a) Achsensymmetrie zur Achse $x = -1$; $f(-2) = -3 = f(0)$ und $f(-3) = 0 = f(1)$; -4 und 2, -5 und 3, -6 und 4; $x_1 + x_2 = -2$ oder $-1 - x_1 = -1 + x_2$.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2+2x-3	12	5	0	-3	-4	-3	0	5	12
t	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

b) Funktion $f_1(x)$ ist achsensymmetrisch zu $x = -1$, weil $f(-1+t) = f(-1-t)$ gilt.
Dabei ist t der Abstand zur Symmetrieachse.

c) Der Graph einer Funktion ist achsensymmetrisch zur Achse $x = a \Leftrightarrow f(a-t) = f(a+t)$. Die genauen Definitionsbereiche sich schwer auszudrücken.

d) $f(x) = x^2 + 4x$ ist achsensymmetrisch (as) zu $x = -2$:

$$\begin{aligned} & f(-2-t) &= (-2-t)^2 + 4(-2-t) &= 4 + 4t + t^2 - 8 - 4t &= t^2 - 4 \\ = \; & f(-2+t) &= (-2+t)^2 + 4(-2+t) &= 4 - 4t + t^2 - 8 + 4t &= t^2 - 4 \quad \checkmark. \end{aligned}$$

Aufg. 107/277:

a) $f(1-t) = (1-t)^2 - 2(1-t) = 1 - 2t + t^2 - 2 + 2t = t^2 - 1 = (1+t)^2 - 2(1+t) = f(1+t);$
b) $f(-3-t) = (-3-t)^2 + 6(-3-t) - 2 = 9 + 6t + t^2 - 18 - 6t - 2 = t^2 - 11 = (3-t)^2 + 6(-3-t) = f(-3+t);$
d) $f(3-t) = \frac{1}{((3-t)-3)^2} = \frac{1}{t^2} = \frac{1}{((3+t)-3)^2} = f(3+t),$
e) $f(2-t) = \frac{1}{(2-t)^2 - 4(2-t) + 5} = \frac{1}{4 - 4t + t^2 - 8 + 4t + 5} = \frac{1}{t^2+1} = \frac{1}{(2+t)^2 - 4(2+t) + 5} = f(2+t);$
f) $f(1-t) = \frac{((1-t)-1)^2}{((1-t)-1)^4 + 1} = \frac{t^2}{t^4+1} = \frac{((1+t)-1)^2}{((1+t)-1)^4+1} = f(1+t);$
g) $f(-1-t) = \frac{(-1-t)^2 + 2(-1-t) + 1}{(-1-t)^2 + 2(-1-t) + 2} = \frac{1 + 2t + t^2 - 2 - 2t + 1}{1 + 2t + t^2 - 2 - 2t + 2} = \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{(-1+t)^2 + 2(-1+t) + 1}{(-1+t)^2 + 2(-1+t) + 2} = f(-1+t)$. h)
$f(-1-t) = (-1-t)^4 + 4(-1-t)^3 + 6(-1-t)^2 + 4(-1-t) + 1$
$= 1 + 4t + 6t^2 + 4t^3 + t^4 - 4(1 + 3t + 3t^2 + t^3) + 6(1 + 2t + t^2) - 4 - 4t + 1$
$= 1 + 4t + 6t^2 + 4t^3 + t^4 - 4 - 12t - 12t^2 - 4t^3 + 6 + 12t + 6t^2 - 4 - 4t + 1 = t^4 = ... = f(-1+t);$

j) Entweder ist $x = a$ eine Polstelle ohne VZW oder $E(a; f(a))$ ist ein Extrempunkt.

k) viii) $a = 3$; $f(3-t) = ((3-t)-3)^4 + 5 = t^4 + 5 = ((3+t)-3)^4 + 5 = f(3+t);$

j) Zeigen Sie dass der Graph von $y = ax^2 + bx + c$ achsensymmetrisch zur Achse $x = \frac{-b}{2a} \Leftrightarrow x = x_s$ ist.

Die Scheitelform einer Parabel ist $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$,
damit ist $f(x_s - t) = a((x_s - t) - x_s)^2 + y_s = at^2 + y_s = a((x_s + t) - x_s)^2 + y_s = f(x_s + t.)$

k) i) $x = 2$, ii) $x = 2$, iii) $x = 2$, iv) $x = 3$;

$f(x) = 4 - 2x + 0{,}5x^2$
$= 0{,}5x^2 - 2x + 4$
$a = \frac{-b}{2a} = \frac{2x}{2 \cdot 0{,}5x} = \frac{2x}{1x} = 2$

$f(a-t) = f(a+t)$
$f(2-t) = f(2+t)$

Thx Nel Hes

$0{,}5 \cdot (2-t)^2 - 2 \cdot (2-t) + 4 = 0{,}5(2+t)^2 - 2(2+t) + 4$
$0{,}5 \cdot (4 - 4t + t^2) - 4 + 2t + 4 = 0{,}5 \cdot (4 + 4t + t^2) - 4 - 2t + 4$
$2 - 2t + 0{,}5t^2 + 2t = 2 + 2t + 0{,}5t^2 - 2t$
$0{,}5t^2 + 2 = 0{,}5t^2 + 2$

k4

v) $x = 4$; vi) $x = 4$; vii) $x = 1$;

Aufg. 107/278: a)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$0.1x(x-6)^2$	0	2.5	3.2	2.7	1.6	0.5	0	0.7	3.2
t	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

b) $f(3)+f(5) = 3.2 = f(2)+f(6) = f(4-t)+f(4+t)$, 4 ist der $x-$Wert vom Symmetriepunkt, 3.2 das doppelte des $y-$Wertes.

c) Sei f eine Funktion mit der Eigenschaft, dass $f(\underline{a+t})+f(\underline{a-t}) = \underline{2b}$, dann ist K_f punktsymmetrisch zum Punkt $\underline{(a;b)}$. Das t muss wegfallen.

d) $f(x) = \frac{x-4}{x-3}$ ist punktsymmetrisch (ps) zu $P(3;1)$:

$$\left.\begin{array}{llll} f(3-t) & = \frac{(3-t)-4}{(3-t)-3} & = \frac{-t-3}{-t} & = 1+\frac{3}{t} \\ f(3+t) & = \frac{(3+t)-4}{(3+t)-3} & = \frac{t-3}{t} & = 1-\frac{3}{t} \end{array}\right\} \Rightarrow f(3-t)+f(3+t) = 1+\frac{3}{t}+1-\frac{3}{t} = 2\cdot 1.$$

e) Mitte: $M_{AB}(4;3)$; Die Mitte zweier Punkte $P(x_p;y_p)$ und $Q(x_q;y_q)$ berechnen wir mit $M(\frac{x_p+x_q}{2};\frac{y_p+y_q}{2})$ (erstes Parallelogrammgesetz). **f)** $M(a;\frac{f(a-t)+f(a+t)}{2})$ = Symmetriepunkt.

Aufg. 107/279: a) $f(1-t)+f(1+t) = ((1-t)-1)^3+2+(1+t)-1)^3+2 = -t^3+t^3+4 = 2\cdot 2$,

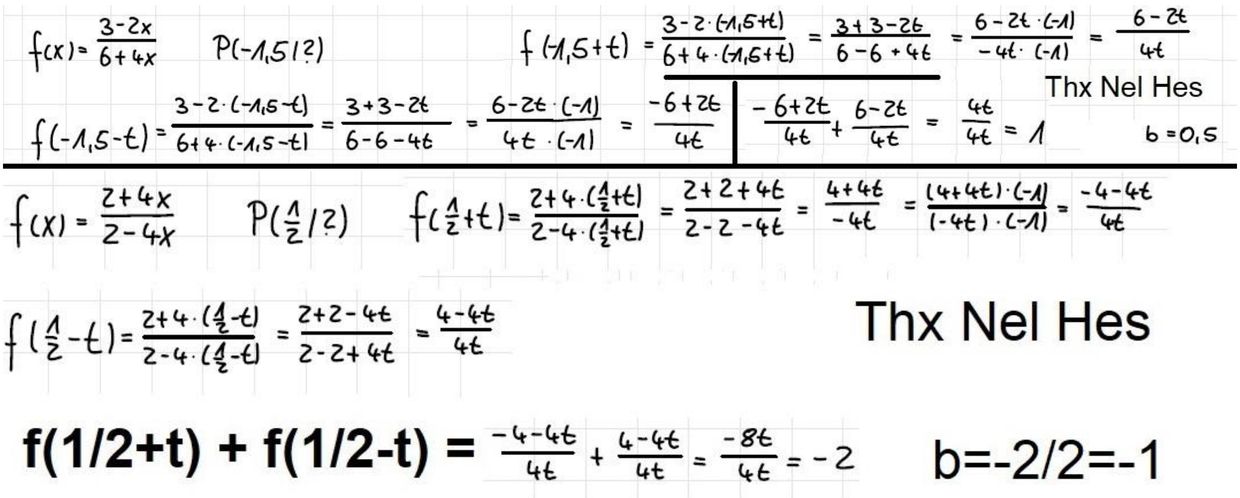
b) $f(2-t)+f(2+t) = \frac{1}{(2-t)-2}+\frac{1}{(2+t)-2} = \frac{1}{-t}+\frac{1}{t} = 0 = 2\cdot 0$,

c) $f(3-t)+f(3+t) = \frac{1}{(3-t)-3}+2+\frac{1}{(3+t)-3}+2 = \frac{-1}{t}+2+\frac{1}{t}+2 = 2\cdot 2$,

d) $f(1-t)+f(1+t) = \frac{1+(1-t)}{1-(1-t)}+\frac{1+(1+t)}{1-(1+t)} = \frac{2-t}{t}+\frac{-(2+t)}{t} = \frac{-2t}{t} = -2 = 2\cdot(-1)$,

e) $f(1-t)+f(1+t) = \frac{3+4(1-t)}{2(1-t)-2}+\frac{3+4(1+t)}{2(1+t)-2} = \frac{3+4-4t}{2-2t-2}+\frac{3+4+4t}{2+2t-2} = \frac{7-4t}{-2t}+\frac{7+4t}{2t} = \frac{-7+4t+7+4t}{2t} = \frac{8t}{2t} = 4 = 2\cdot 2$,

f) $f(-4-t)+f(-4+t) = \frac{5-6(-4-t)}{2(-4-t)+8}+\frac{5-6(-4+t)}{2(-4+t)+8} = \frac{5+24+6t}{-8-2t+8}+\frac{5+24-6t)}{-8+2t+8} = \frac{29+6t}{-2t}+\frac{29-6t}{2t} = \frac{-29-6t+29-6t}{2t} = \frac{-12t}{2t} = -6 = 2\cdot(-3)$,


$f(x) = \frac{3-2x}{6+4x}$ $P(-1{,}5|2)$ $f(-1{,}5+t) = \frac{3-2\cdot(-1{,}5+t)}{6+4\cdot(-1{,}5+t)} = \frac{3+3-2t}{6-6+4t} = \frac{6-2t\cdot(-1)}{-4t\cdot(-1)} = \frac{6-2t}{4t}$

Thx Nel Hes

$f(-1{,}5-t) = \frac{3-2\cdot(-1{,}5-t)}{6+4\cdot(-1{,}5-t)} = \frac{3+3-2t}{6-6-4t} = \frac{6-2t\cdot(-1)}{4t\cdot(-1)} = \frac{-6+2t}{4t}$ | $\frac{-6+2t}{4t}+\frac{6-2t}{4t} = \frac{4t}{4t} = 1$ $b=0{,}5$

$f(x) = \frac{2+4x}{2-4x}$ $P(\frac{1}{2}|2)$ $f(\frac{1}{2}+t) = \frac{2+4\cdot(\frac{1}{2}+t)}{2-4\cdot(\frac{1}{2}+t)} = \frac{2+2+4t}{2-2-4t} = \frac{4+4t}{-4t} = \frac{(4+4t)\cdot(-1)}{(-4t)\cdot(-1)} = \frac{-4-4t}{4t}$

$f(\frac{1}{2}-t) = \frac{2+4\cdot(\frac{1}{2}-t)}{2-4\cdot(\frac{1}{2}-t)} = \frac{2+2-4t}{2-2+4t} = \frac{4-4t}{4t}$

Thx Nel Hes

$f(1/2+t) + f(1/2-t) = \frac{-4-4t}{4t}+\frac{4-4t}{4t} = \frac{-8t}{4t} = -2$ $b=-2/2=-1$

Abb. 297 Lösungsvorschläge (Punktsymmetrie) für die Teile h und i

j) $f(-2-t)+f(-2+t) = \sqrt[3]{(-2-t)+2}+4+\sqrt[3]{(-2+t)+2}+4 = \sqrt[3]{-t}+4+\sqrt[3]{t}+4 = 2\cdot 4$,

k) $f(-2-t)+f(-2+t) = (-2-t)^3+6(-2-t)^2+12(-2-t)+(-2+t)^3+6(-2+t)^2+12(-2+t)$
$= -8-12t-6t^2-t^3+6(4+4t+t^2)-24-6t-8+12t-6t^2+t^3+6(4-4t+t^2)-24+6t$
$= -16-12t^2+24+24t+6t^2-48+24-24t+6t^2 = -16 = 2\cdot(-8)$,

L) $f(4-t) = 0.1(4-t)(4-t-6)^2 = (0.4-0.1t)(-2-t)^2 = (0.4-0.1t)(4+4t+t^2) = 1.6+1.6t+0.4t^2-0.4t-0.4t^2-0.1t^3 = 1.6+1.2t-0.1t^3$;

$f(4+t) = .. = 1.6 - 1.2t + 0.1t^3$; $f(4-t) + f(4+t) = 3.2 = 2 \cdot 1.6$ (qed).

m) $x = \frac{-d}{c}$ ist sA, $y = \frac{a}{c}$ ist wA. $f(\frac{-d}{c} - t) + f(\frac{-d}{c} - t) = \frac{a(\frac{-d}{c}-t)+b}{c(\frac{-d}{c}-t)+d} + \frac{a(\frac{-d}{c}+t)+b}{c(\frac{-d}{c}+t)+d} = \frac{\frac{-ad}{c}-at+b}{-d-ct+d} + \frac{\frac{-ad}{c}+at+b}{-d+ct+d} = \frac{\frac{+ad}{c}+at-b}{ct} + \frac{\frac{-ad}{c}+at+b}{ct} = \frac{2a}{c}$; Schnittpunkt ihrer Asymptoten.

n) Die Aussage wird (hier) nur für Funktionen der Form $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ gezeigt. Der Faktor a hat auf die Symmetrieeigenschaft keinen Einfluss; $x_w = \frac{-b}{3}$.
$f(\frac{-b}{3}) = (\frac{-b}{3})^3 + b(\frac{-b}{3})^2 + c\frac{-b}{3} + d = -\frac{b^3}{27} + \frac{b^3}{9} - \frac{-bc}{3} + d = \frac{2b^3}{27} - \frac{-bc}{3} + d$,
$f(\frac{-b}{3} - t) + f(\frac{-b}{3} + t) = (\frac{-b}{3} - t)^3 + b(\frac{-b}{3} - t)^2 + c(\frac{-b}{3} - t) + d + (\frac{-b}{3} + t)^3 + b(\frac{-b}{3} + t)^2 + c(\frac{-b}{3} + t) + d$
$= \frac{-b^3}{27} - \frac{b^2t}{3} - bt^2 - t^3 + b(\frac{b^2}{9} + \frac{2bt}{3} + t^2) - \frac{bc}{3} - ct + d + \frac{-b^3}{27} + \frac{b^2t}{3} - bt^2 + t^3 + b(\frac{b^2}{9} - \frac{2bt}{3} + t^2) - \frac{bc}{3} + ct + d$
$= \frac{-b^3}{27} - bt^2 + \frac{b^3}{9} + bt^2 - \frac{bc}{3} + d + \frac{-b^3}{27} - bt^2 + \frac{b^3}{9} + bt^2 - \frac{bc}{3} + d = \frac{4b^3}{27} - \frac{2bc}{3} + 2d = 2 \cdot f(\frac{-b}{3})$.

15.5.4 LöVo zu Einheit 5.4 (trigonometrische UE 10_4)

Aufg. 108/280: Die gesuchten Werte finden Sie in Abbildung 567/298. Einen weiteren Beweis finden Sie im Abschnitt 5.10.1: Bewiesen werden die Formeln aus **(Formel 100)** .

c) $\sin(90° - \alpha) = \sin(90°)\cos(\alpha) - \cos(90°)\sin(\alpha) = \cos(\alpha)$,
$\cos(90° - \alpha) = \cos(90°)\cos(\alpha) + \sin(90°)\sin(\alpha) = \sin(\alpha)$,
d) $\sin(360° + \alpha) = \sin(360°)\cos(\alpha) + \cos(360°)\sin(\alpha) = \sin(\alpha)$, $\cos(360° + \alpha) = \cos(\alpha)$,
Sinus und Kosinus ist 360° periodisch, Tangens sogar 180°:

$$\tan(180° + \alpha) = \frac{\sin(180° + \alpha)}{\cos(180° + \alpha)} = \frac{\sin(180°)\cos(\alpha) + \cos(180°)\sin(\alpha)}{\cos(180°)\cos(\alpha) - \sin(180°)\sin(\alpha)} = \frac{-\sin(\alpha)}{-\cos(\alpha)} = \tan(\alpha).$$

Aufg. 108/281: a) $U = 2\pi r = 2\pi$; b) $180° \mathrel{\hat{=}} \underline{\pi}$ und $09° \mathrel{\hat{=}} \underline{\frac{\pi}{2}}$; c) $\frac{\alpha}{360} = \frac{x}{2\pi} \Leftrightarrow x = \frac{\alpha \cdot 2\pi}{360}$;

d) Winkel im Gradmaß werden mit griechischen Buchstaben beschrieben, Winkel im Bogenmaß mit lateinischen Buchstaben. In der Analysis werden Winkel im Bogenmaß gemessen in der Geometrie im Gradmaß.

e) Drücken Sie die Mode-Taste und wählen Sie Radian für das Bogenmaß oder Degree für das Gradmaß aus.

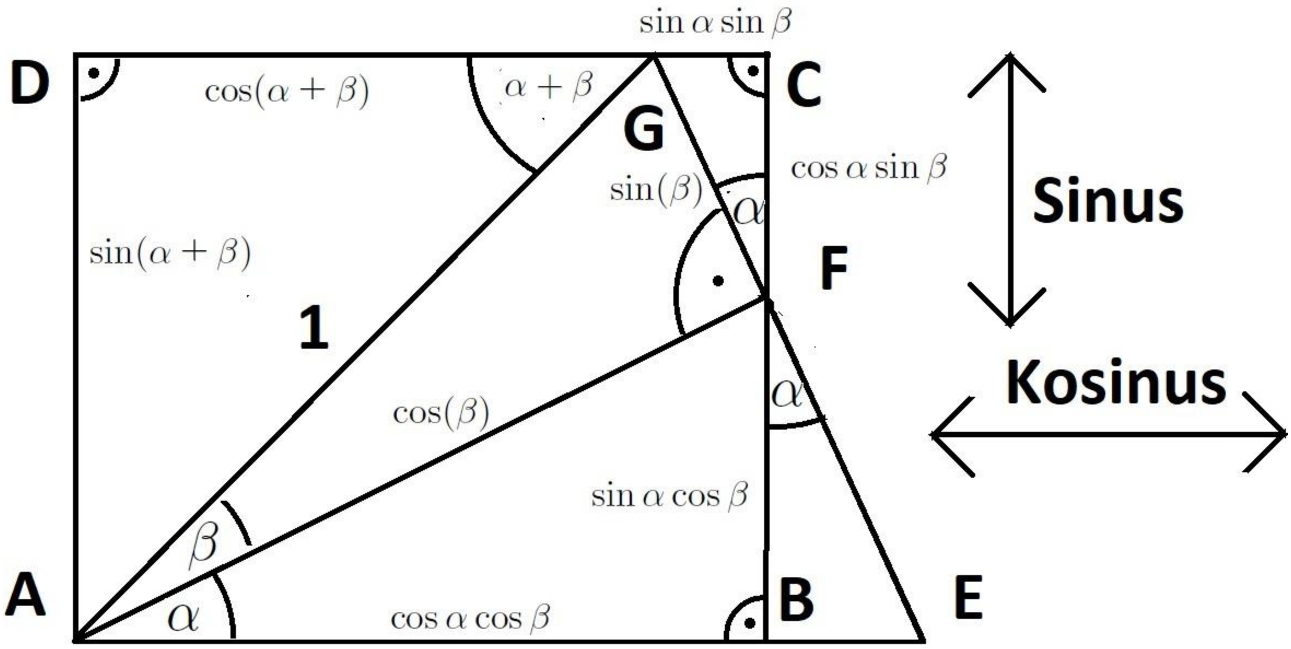


Abb. 298 Die Additionstheoreme

Aufg. 108/282:

a)

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{0}=1$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1}=0.5$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4}=1$

b) $\sin(\frac{2\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin(\frac{5\pi}{6})=\frac{1}{2}$; $\cos(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$;

c) $\sin(x+\pi)=\sin(x)\cdot\cos(\pi)+\cos(x)\cdot\sin(\pi)=-\sin(x)$, $(\cos(\pi)=-1, \sin(\pi)=0)$;
d) $\sin(x+\frac{\pi}{4})+\cos(x+\frac{\pi}{4}) = \sin(x)\cdot\cos(\frac{\pi}{4})+\cos(x)\cdot\sin(\frac{\pi}{4})+\cos(x)\cdot\cos(\frac{\pi}{4})-\sin(x)\cdot\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x)=\sqrt{2}\cdot\cos(x)$, $(\cos(\frac{\pi}{4})=\sin(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2})$;

Aufg. 109/283:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{6\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{8\pi}{6}$	$\frac{9\pi}{6}$	$\frac{10\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{12\pi}{6}$
$\sin(x)$	0	0.5	0.87	1	0.87	0.5	0	-0.5	-0.87	-1	-0.87	-0.5	0
$\cos(x)$	1	0.87	0.5	0	-0.5	-0.87	-1	-0.87	-0.5	0	0.5	0.87	1

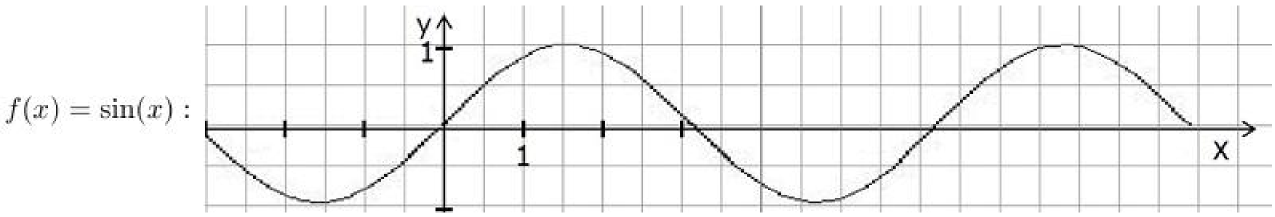


Abb. 299 Das Schaubild von $\sin(x)$

Das Schaubild einer Sinusfunktion sieht wie eine Welle aus (Abb. 299).

Der Graph der Funktion $f(x)=\sin(x)$ wiederholt sich immer wieder. Funktionen dieser Art nennt man periodisch.

Eine Welle hat die Breite 2π. Die Sinuskurve ist 2π periodisch, das heißt $\sin(\underline{x+2\pi})=\sin(x)$.

b) $\sin(\frac{\pi}{6})=\sin(\frac{13\pi}{6})=0.5$; $\sin(\frac{\pi}{3})=\sin(\frac{7\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin(\frac{\pi}{2})=\sin(\frac{5\pi}{2})=1$; $\sin(\frac{2\pi}{3})=\sin(\frac{8\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Abb. 300:

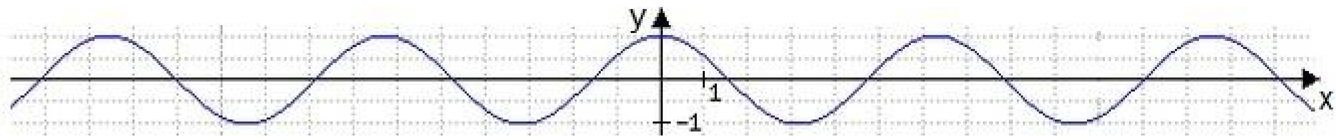


Abb. 300 Das Schaubild von $\cos(x)$

c) Sei $f(x)=\sin(x)$ und $g(x)=\cos(x)$. K_f um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschoben ergibt Kg; also $\sin(x+\frac{\pi}{2})=\cos(x)$.

Bew: $\sin(x+\frac{\pi}{2})=\sin(x)\cdot\cos(\frac{\pi}{2})+\cos(x)\cdot\sin(\frac{\pi}{2})=\cos(x)$, $(\cos(\frac{\pi}{2})=0, \sin(\frac{\pi}{2})=1)$;

$\sin(\frac{13\pi}{6})=\sin(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$; $\sin(\frac{7\pi}{3})=\sin(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin(-\frac{\pi}{6})=-\sin(\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{2}$; $\sin(-\frac{\pi}{4})=-\sin(\frac{\pi}{4})=1\frac{\sqrt{2}}{2}$;

g) $\sin(x+2\pi)=\sin(x)\cos(2\pi)+\cos(x)\sin(2\pi)=\sin(x), \quad \sin(2\pi)=0, \quad \cos(2\pi)=1$;

$\cos(x+2\pi)=\cos(x)\cos(2\pi)-\sin(x)\sin(2\pi)=\cos(x), \quad \sin(2\pi)=0, \quad \cos(2\pi)=1$;

$\tan(x+\pi)=\frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\frac{\sin(x)\cos(\pi)+\cos(x)\sin(\pi)}{\cos(x)\cos(\pi)-\sin(x)\sin(\pi)}=\frac{\sin(x)\cdot(-1)+\cos(x)\cdot 0}{\cos(x)\cdot(-1)-\sin(x)\cdot 0}=\frac{-\sin(x)}{-\cos(x)}=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=\tan(x)$

h) Eine Funktion $\mathbb{D}\to\mathbb{R}$ heißt periodisch mit Periode $p \Leftrightarrow f(x)=\underline{f(x+p)}$ für alle $x\in\underline{\mathbb{D}}$

Das minimale p dieser Art heißt die **Minimalperiode** der Funktion.

... dann ist f auch $\underline{np}$ periodisch: $f(x) = f(x+p) = f((x+p)+p) = f(x+2p) = f((x+2p)+p) = f(x+3p) = ... = f(\overline{x+np})$.

i) $p_1 = \frac{\pi}{4}$, $p_2 = \frac{\pi}{3}$, nach Definition ist $f_3(x) \equiv 7$ tatsächlich periodisch nur existiert die Basisperiode nach der Minimumdefinition nicht.

Aufg. 109/284: a) $\sin(-x) = \sin(0-x)$. Der Graph von $\sin(x)$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

b) Der Graph von $\underline{\cos(x)}$ ist achsensymmetrisch zu $x = 0 \Leftrightarrow \underline{\cos}(-x) = \underline{\cos(x)}$.

c) Der Graph von $\underline{\sin(x)}$ ist punktsymmetrisch zu $x = 0 \Leftrightarrow \underline{\sin}(-x) = \underline{-\sin(x)}$.

d) $\sin(0-x) = \sin(0)\cos(x) - \cos(0)\sin(x) = -\sin(x)$.

Der Graph von $\cos(x)$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse:

$\cos(0-x) = \cos(0)\cos(x) + \sin(0)\sin(x) = \cos(x)$.

e) Wenn Sie die (spezielle) Symmetrie einer suchen, berechnen Sie einfach $f(\underline{-x})$.
Ist $f(\underline{-x})$=$f(x)$, so ist der Graph von f, G_f <u>achsen</u>symmetrisch (zur $\underline{y-\text{Achse}}$);
ist $f(\underline{-x})$=$-f(x)$, so ist G_f <u>punkt</u>symmetrisch (zum <u>Ursprung</u>).
In jedem anderen Fall sagt man, dass <u>keine</u> Symmetrie erkennbar ist.

f) i) $f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x)$: G_f ist ps zu $(0/0)$;
ii) $g(-x) = |-x| = |-1| \cdot |x| = |x| = g(x)$: G_g ist as zur $y-$Achse.

Aufg. 109/285: a) Das Schaubild einer Funktion f ist as zur Achse $x = a \Leftrightarrow \underline{f(a-t) = f(a+t)}$ für alle $t \in \mathbb{D}$ gilt.

b,c fehlen noch;

c) $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \sin(\frac{\pi}{2})\cos(t) - \cos(\frac{\pi}{2})\sin(t) = \cos(t)$, mit $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$,
$\sin(\frac{\pi}{2} + t) = \sin(\frac{\pi}{2})\cos(t) + \cos(\frac{\pi}{2})\sin(t) = \cos(t)$.
d) $\sin(x)$ ist as zu allen Geraden der Form $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$,
$\cos(x)$ ist as zu allen Geraden der Form $x = k\pi$, für alle $k \in \mathbb{Z}$.

e) $(-1)^k = 1$, falls k gerade ist und (-1), falls k ungerade ist. Damit ist $\cos(k\pi) = \sin((2k+1)\frac{\pi}{2}) = (-1)^k$.

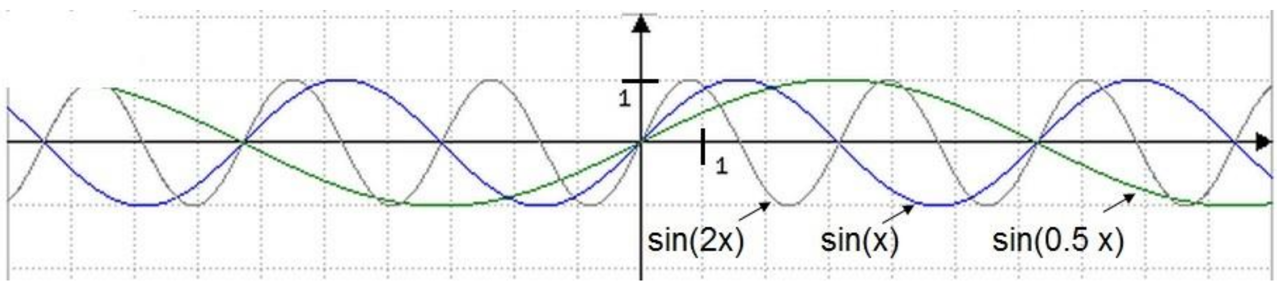
Aufg. 110/286: Das Schaubild einer Funktion f ist ps zu $P(a/b) \Leftrightarrow \underline{f(a-t) + f(a+t) = 2b}$ für alle $t \in \mathbb{D}$ gilt.

a) $\sin(\pi - t) + \sin(\pi + t) = (\sin(\pi)\cos(t) - \cos(\pi)\sin(t)) + (\sin(\pi)\cos(t) + \cos(\pi)\sin(t)) = \sin(t)) - \sin(t)) = 0$.

b) $\sin(x)$ ist ps zu allen Punkten der Form $(k\pi/0)$, $\cos(x)$ ist ps zu allen Punkten der Form $\left((2k+1)\frac{\pi}{2}/0)\right)$, für alle $k \in \mathbb{Z}$.

c,d (fehlen noch); e) $P((2k+1)\frac{\pi}{2};0)$

Aufg. 110/287: $f_1(x) = \sin(2x)$ entspricht Abb. 54 a); $f_2(x) = \sin(4x)$ entspricht Abb. 54 b); $f_3(x) = 2 \cdot \sin(x)$ entspricht Abb. 54 c);



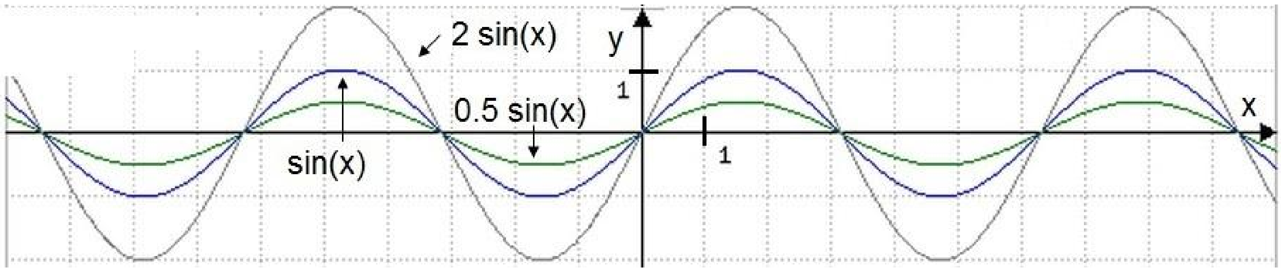


Abb. 301 Das Schaubild von $a\sin(bx)$ mit diversen Amplituden und Perioden

a) Der Faktor 2 verdoppelt die Frequenz und halbiert die Periode (Schwingungsdauer).

c) Es heißt a Amplitude, b Frequenz, c Phasenverschiebung und d Mittelwert. $p = \frac{2\pi}{b}$.

Aufg. 110/289:
a) Sei $a \geq 0$: $G_{a\sin(x)}$ entsteht aus $G_{\sin(x)}$ durch Streckung mit dem Faktor a in y-Richtung.

b) Sei $b \geq 0$: $G_{\sin(bx)}$ entsteht aus $G_{\sin(x)}$ durch Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{b}$ in x-Richtung.

c) Seien $a, b \neq 0$: $G_{a\sin(b(x-c))+d}$ entsteht aus $G_{\sin(x)}$ durch Streckung mit dem Faktor a in y-Richtung und durch Streckung mit dem Faktor __ in x-Richtung. Falls $a < 0$ wird an der y-Achse gespiegelt, falls $b < 0$ an der x-Achse. Der resultierende Graph wird danach um c in x-Richtung und um d in y-Richtung verschoben. Erst strecken, dann verschieben.

d) i) $G_{\sin(x-1)+2}$ entsteht aus $G_{\sin(x)}$ durch Verschiebung um 1 in x-Richtung und um 2 in y-Richtung.

ii) $G_{\sin(x-2)+1}$ entsteht aus $G_{\sin(x)}$ durch Verschiebung um 2 in x-Richtung und um 1 in y-Richtung.

iii) $G_{\sin(2(x-1))+1}$ entsteht aus $G_{\sin(x)}$ durch Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in x-Richtung, Verschiebung um 1 in x-Richtung und um 1 in y-Richtung.

iv) $G_{2\cdot\sin(x-1)+1}$ entsteht aus $G_{\sin(x)}$ durch Streckung mit dem Faktor 2 in y-Richtung, Verschiebung um 1 in x-Richtung und um 1 in y-Richtung.

e) Sei $a \neq 0$: $a \cdot \sin(ax - a) + a = a \cdot \sin(a(x-1)) + a$

$G_{a\cdot\sin(a(x-1))+a}$ entsteht aus $G_{\sin(x)}$ durch Streckung mit dem Faktor a in y-Richtung, Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{a}$ in x-Richtung, Verschiebung um 1 in x-Richtung und um a in y-Richtung.

Wenn alle Koeffizienten vervielfacht werden hat dies bei diesen Funktionen keinen Einfluss auf die Phasenverschiebung.

f) $n\sin(\frac{\pi}{n}x + \pi) + n = n\sin(\frac{\pi}{n}(x+n)) + n$;

$G_{n\sin(\frac{\pi}{n}x+\pi)+n}$ entsteht aus $G_{\sin(x)}$ durch Streckung mit dem Faktor n in y-Richtung, Streckung mit dem Faktor $\frac{n}{\pi}$ in x-Richtung, Verschiebung um $-n$ in x-Richtung und um n in y-Richtung.

Vorübung: i) $x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = \pm 1$; ii) $x^4 = 4x^2 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = \pm 2$; iii) $x^4 = x^3 + 6x^2 \Leftrightarrow x = 3$ oder $x = -2$;

g) i) $(-3) \cdot \sin(2x+4) + 5 = (-3) \cdot \sin(2(x-(-2)) + 5$,

$G_{(-3)\cdot\sin(2x+4)+5}$ entsteht aus $G_{\sin(x)}$ durch Streckung mit dem Faktor 3 in y-Richtung, Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in x-Richtung, Spiegelung an der y-Achse (hier äquivalent zur Spiegelung an der x-Achse), Verschiebung um -2 in x-Richtung und um 5 in y-Richtung.

ii) $3 \cdot \sin(-2x+4) + 5 = 3 \cdot \sin((-2)(x-2)) + 5$,

$G_{3\cdot\sin(-2x+4)+5}$ entsteht aus $G_{\sin(x)}$ durch Streckung mit dem Faktor 3 in y-Richtung, Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in x-Richtung, Spiegelung an der x-Achse (hier äquivalent zur Spiegelung an der y-Achse), Verschiebung um 2 in x-Richtung und um 5 in y-Richtung.

iii) $3 \cdot \sin(2x-4)+5 = 3 \cdot \sin(2(x-2))+5$,

$G_{3\cdot\sin(2x-4)+5}$ entsteht aus $G_{\sin(x)}$ durch Streckung mit dem Faktor $\underline{3}$ in y-Richtung, Streckung mit dem Faktor $\underline{\frac{1}{2}}$ in x-Richtung, Verschiebung um 2 in x-Richtung und um 5 in y-Richtung.

iv) $3 \cdot \sin(2x+4)-5 = 3 \cdot \sin(2(x-(-2)))+5$,

$G_{3\cdot\sin(2x+4)-5}$ entsteht aus $G_{\sin(x)}$ durch Streckung mit dem Faktor $\underline{3}$ in y-Richtung, Streckung mit dem Faktor $\underline{\frac{1}{2}}$ in x-Richtung, Verschiebung um -2 in x-Richtung und um -5 in y-Richtung.

g) v) $(-3) \cdot \sin(-2x-4)+5 = (-3) \cdot \sin(-2(x+2))+5$;

$G_{(-3)\cdot\sin(-2x-4)+5}$ entsteht aus $G_{\sin(x)}$ durch Streckung mit dem Faktor 3 in y-Richtung, Spiegelung an der y-Achse, Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in x-Richtung, Spiegelung an der x-Achse (die Spiegelungen haben sich hier gegenseitig auf), Verschiebung um -2 in x-Richtung und um 5 in y-Richtung.

vi) $(-3)\sin(-2x+4)-5 = (-3) \cdot \sin(-2(x-2))-5$;

$G_{(-3)\cdot\sin(-2x+4)-5}$ entsteht aus $G_{\sin(x)}$ durch Streckung mit dem Faktor 3 in y-Richtung, Spiegelung an der y-Achse, Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in x-Richtung, Spiegelung an der x-Achse (die Spiegelungen haben sich hier gegenseitig auf), Verschiebung um 2 in x-Richtung und um -5 in y-Richtung.

vii) $(-3) \cdot \sin(2x-4)-5 = (-3) \cdot \sin(2(x-2))-5$;

$G_{(-3)\cdot\sin(2x-4)-5}$ entsteht aus $G_{\sin(x)}$ durch Streckung mit dem Faktor 3 in y-Richtung, Spiegelung an der y-Achse, Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in x-Richtung, Verschiebung um 2 in x-Richtung und um -5 in y-Richtung.

viii) $3\sin(-2x-4)-5 = 3\sin(-2(x+2))-5$;

$G_{3\sin(-2x-4)-5}$ entsteht aus $G_{\sin(x)}$ durch Streckung mit dem Faktor 3 in y-Richtung, Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in x-Richtung, Spiegelung an der x-Achse, Verschiebung um -2 in x-Richtung und um -5 in y-Richtung.

h) (Wiederholung): $\cos(x-\frac{\pi}{2}) = \underline{\sin(x)}$, $\sin(\underline{x+\frac{\pi}{2}}) = \cos(x)$;

i) $\cos(x) = \sin(x+\frac{pi}{2})$, also entsteht $G_{\cos(x)}$ aus $G_{\sin(x)}$ durch Verschiebung um $-\frac{\pi}{2}$ in x-Richtung.

ii) $\cos(x)+2 = \sin(x+\frac{pi}{2}+2)$; $G_{\cos(x)+2}$ entsteht aus $G_{\sin(x)}$ durch Verschiebung um $-\frac{pi}{2}$ in x-Richtung und um 2 in y-Richtung.

iii) $2 \cdot \cos(x) = 2 \cdot \sin(x+\frac{pi}{2})$; $G_{2\cdot\cos(x)}$ entsteht aus $G_{\sin(x)}$ durch Streckung mit dem Faktor 2 in y-Richtung und druch Verschiebung um $-\frac{pi}{2}$ in x-Richtung.

iv) $\cos(x+2) = \cos(w)$ mit Substitution $w = x+2$; $\cos(w) = \sin(w+\frac{\pi}{2}) = \cos(x+2+\frac{\pi}{2})$; $G_{\cos(x+2)}$ entsteht aus $G_{\sin(x)}$ durch Verschiebung um $-\frac{\pi}{2}-2$ in x-Richtung.

v) $\cos(2\cdot x) = \cos(w) = \sin(w+\frac{\pi}{2}) = \cos(2\cdot x+\frac{\pi}{2}) = \cos(2\cdot(x+\frac{\pi}{4}))$ (Substitution $w = 2x$); $G_{\cos(2\cdot x)}$ entsteht aus $G_{\sin(x)}$ durch Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in x-Richtung, Verschiebung um $-\frac{\pi}{4}$ in x-Richtung.

vi) $\cos(2x-2) = \cos(w) = \sin(w+\frac{\pi}{2}) = \sin(2x-2+\frac{\pi}{2}) = \sin(2(x-1+\frac{\pi}{4})$;
$G_{\cos(2x-2)}$ entsteht aus $G_{\sin(x)}$ durch Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in x-Richtung und druch eine Verschiebung um $1-\frac{\pi}{4}$ in x-Richtung.

vii) $2\cos(2x+2) = 2\sin(w+\frac{\pi}{2}) = 2\sin(2x+2+\frac{\pi}{2}) = 2\sin(2(x+1+\frac{\pi}{2})$;
$G_{2\cos(2x+2)}$ entsteht aus $G_{\sin(x)}$ durch Streckung mit dem Faktor 2 in y-Richtung und durch eine Verschiebung um $-1-\frac{\pi}{2}$ in x-Richtung.

Ende der (T) Aufgaben: **i)** $f_8(x) = 4\sin(2(x-2))+3$: Zuerst Streckung mit dem Faktor 4 in y-Richtung und mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in x-Richtung, dann Verschiebung um 2 nach rechts und um 3 nach oben;

j) $f_{12}(x) = -8\sin(-\pi(x-2)) + 4$: Zuerst Streckung mit dem Faktor 8 in y-Richtung und Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{\pi}$ in x-Richtung, Minuszeichen bei Amplitude und Frequenz heben sich wegen $\sin(-x) = -\sin(x)$ auf, dann Verschiebung um 2 nach rechts und um 4 nach oben;

L) $3 - 2\sin(8x+4) = -2\sin(8(x+0.5)) + 3$; '-': Spiegelung an der x-Achse;
'2': Streckung mit dem Faktor 2 in y-Richtung; '8': Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{8}$ in x-Richtung;
'+0.5': Verschiebung um 0.5 nach links; '3': Verschiebung um 3 nach oben;

m) $f_{13}(x) = -2 - 4\sin(-\pi(x-1))$; Zuerst Streckung mit dem Faktor 4 in y-Richtung und Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{\pi}$ in x-Richtung, Minuszeichen bei Amplitude und Frequenz heben sich wegen $\sin(-x) = -\sin(x)$ auf, dann Verschiebung um 1 nach rechts und um 4 nach oben;

n) Streckung mit dem Faktor 2 in y-Richtung, Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{3}$ in x-Richtung, Spiegelung an der x-Achse, Verschiebung um 5 nach oben, Verschiebung um (-3) nach rechts

o) Streckung mit dem Faktor 3 in y-Richtung, Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{4}$ in x-Richtung, Spiegelung an der y-Achse, Verschiebung um (-5) nach oben, Verschiebung um 2 nach rechts

p) Die Spiegelung von K_f an der x-Achse ergibt den Graph der Funktion $f_1(x) = -3\sin(x)$; Die x-Achse wird bei dieser Abbildung auf die Gerade $x = 2 \cdot 2 = 4$ abgebildet. Die Verschiebung um 4 nach oben ergibt den Funktionsterm $g(x) = -3 \cdot \sin(x) + 4$.

Streckung mit dem Faktor 2 in y-Richtung, Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{3}$ in x-Richtung, Spiegelung an der x-Achse, Verschiebung um 5 nach oben, Verschiebung um (-3) nach rechts

Aufg. 111/290: **a)** $2\sin(x)$; **b)** $\sin(0.5x)$; **c)** $2\sin(4x)$; **d)** $1.5\sin(2x)$; **e)** $0.75\sin(\frac{\pi}{3}x)$;
f) $2\sin(\frac{\pi}{2}x)$; **g)** $-\sin(2x) = \sin(2(x-\pi))$; **h)** $-2\sin(2\pi x)$;
Bei den folgenden Graphen ist die Phasenverschiebung $\neq 0$: **i)** $2\sin(x+1)$; **j)** $\sin(2(x-1))$;
k) $-0.5\sin(0,5(x-3))$; **l)** $-2\sin(\frac{\pi}{2}(x-1))$; **m)** $-\sin(x)+1$; oder $\sin(x-\pi)+1$; **n)** $-2\sin(x)-1$;
o) $\sin(\pi x)+1$; **p)** $-2\sin(\frac{\pi}{3} \cdot x)+1$; **q)** $\sin(x+1)+1$; **r)** $\sin(x-1)-2$; **s)** $\sin(2(x-2))+2$;

t) Der Graph hat den markierten Punkt $(1/-1)$. An diesem Punkt fällt die Funktion (Sd: Abwärtspunkt). Deshalb ist die Amplitude negativ oder es muss um $\frac{1}{2}$ Periode (hier 1) verschoben werden. $f(x) = -2\sin(\pi(x-1)) - 1$; oder $f(x) = 2\sin(\pi x)) - 1$; oder $f(x) = 2\sin(\pi(x-2)) - 1$.

u) $\frac{1}{2}\sin(\frac{2\pi}{3}(x+2))-2$; **v)** $1.5\sin(\frac{4\pi}{3}(x-1))+1$; **w)** $2\sin(0.5(x-2))-0.5$; **x)** $-1.5\sin(\frac{\pi}{4}(x+2))-0.5$;
y) $3\sin(3(x-3))+3$; **z)** $-10\sin(3(x+2))+5$.

ii) Allgemein gilt $a \cdot \sin(b(x-c)) + d = a \cdot \cos(b(x-c) - \frac{\pi}{2}) + d$

Beweis (oBdA mit $a = 1, d = 0$) mit Hilfe der Additionstheoreme $\cos(b(x-c) - \frac{\pi}{2}) = \cos(u - \frac{\pi}{2}) = \cos(u) \cdot \cos(\frac{\pi}{2}) + \sin(u) \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) = \cos(u) \cdot 0 + \sin(u) \cdot 1 = \sin(u) = \sin(b(x-c))$ (qed)

a) $2\cos(x-\frac{\pi}{2})$; **b)** $\cos(0.5x-\frac{\pi}{2})$; **c)** $2\cos(4x-\frac{\pi}{2})$; **d)** $1.5\cos(2x-\frac{\pi}{2})$; **e)** $0.75\cos(\frac{\pi}{3}x-\frac{\pi}{2})$;
f) $2\cos(\frac{\pi}{2}(x-1))$; **g)** $-\cos(2x-\frac{\pi}{2}) = \cos(2(x-\frac{3\pi}{2}))$; **h)** $-2\cos(2\pi(x-0.25))$;
i) $2\cos(x+1-\frac{\pi}{2})$; **j)** $\cos(2(x-1)-\frac{\pi}{2})$; **k)** $-0.5\cos(0.5(x-3)-\frac{\pi}{2})$; **l)** $-2\cos(\frac{\pi}{2}(x-2))$; **m)** $-\cos(x-\frac{\pi}{2})+1$; oder $\cos(x-\frac{3\pi}{2})+1$; **n)** $-2\cos(x-\frac{\pi}{2})-1$; **o)** $\cos(\pi(x-0.5))+1$;
p) $-2\cos(\frac{\pi}{3} \cdot x-\frac{\pi}{2})+1$; **q)** $\cos(x+1-\frac{\pi}{2})+1$; **r)** $\cos(x-1-\frac{\pi}{2})-2$; **s)** $\cos(2(x-2-\frac{\pi}{2}))+2$;
t) $-2\cos(\pi(x-1.5))-1$; **u)** $\frac{1}{2}\cos(\frac{2\pi}{3}(x+2)-\frac{\pi}{2})-2$; **v)** $1.5\cos(\frac{4\pi}{3}(x-1)-\frac{\pi}{2})+1$;
w) $2\cos(0.5(x-2)-\frac{\pi}{2})-0.5$; **x)** $1.5\cos(\frac{\pi}{4}x)-0.5$; **y)** $3\cos(3(x-3)-\frac{\pi}{2})+3$;
z) $-10\cos(3(x+2)-\frac{\pi}{2})+5$.

Aufg. 112/291: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ oder $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Die Schnittpunkte können in 'aufsteigende' und 'absteigende' Schnittpunkte klassifiziert werden. In $[0; 2\pi]$ liegen $\frac{\pi}{6}$ und $\frac{5\pi}{6}$.

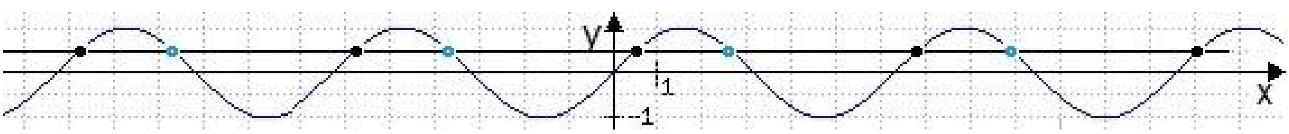


Abb. 302 Das Schaubild von $\sin(x)$ mit $y = 0.5$ geschnitten

e) Algorithmus zur Lösung der Gleichung $\sin(x) = a$ für $\underline{-1 \le} a \underline{\le 1}$: (Abb. 302)

1) Die Gleichung nach x auflösen: $x_1 = \underline{\sin^{-1}(a)}$.

2) x_1 eventuell in π Teile umrechnen $x = \frac{\alpha \cdot 2\pi}{360}$.

3) $x_2 = \underline{\pi - x_1}$.

4) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x = \underline{x_1 + 2k\pi}$ oder $x = \underline{x_2 + 2k\pi},\ k \in \mathbb{Z}\}$

Aufg. 112/292: $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ oder $x = 2\pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. In $[0; 2\pi]$ liegen $\frac{\pi}{3}$ und $\frac{5\pi}{3}$ (Abb. 303).

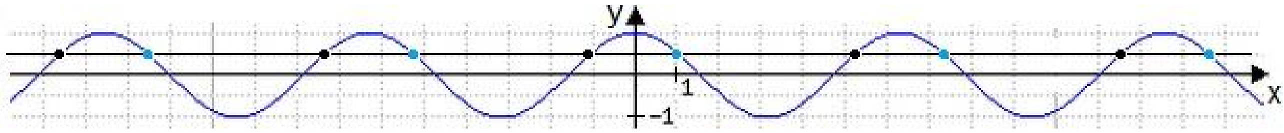


Abb. 303 Das Schaubild von $\cos(x)$ mit $y = 0.5$ geschnitten

Aufg. 112/293:

a) i) $x_1 = \sin^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \pi - x_1 = \frac{3\pi}{4}$, $\mathbb{L} = \{\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ oder $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\}$ $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \in [0; 2\pi]$;

ii) $x_1 = \cos^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = 2\pi - x_1 = \frac{7\pi}{4}$, $\mathbb{L} = \{\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ oder $\frac{7\pi}{4} + 2k\pi\}$ $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \in [0; 2\pi]$;

Es gilt zwar $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ aber die Lösungsmengen sind nicht äqivalent.

b)

i)	$\sin(x) = -1$	$\Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$;
ii)	$\sin(x) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi$ oder $x = \frac{-2\pi}{3} + 2k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$;
iii)	$\sin(x) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi$ oder $x = \frac{-3\pi}{4} + 2k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$;
iv)	$\sin(x) = \frac{-1}{2}$	$\Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi$ oder $x = \frac{-5\pi}{6} + 2k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$;
v)	$\sin(x) = 0$	$\Leftrightarrow x = k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$;

$\mathbb{L} \cap [0; 2\pi]$: i) $\{\frac{3\pi}{2}\}$; ii) $\{\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$; iii) $\{\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$; iv) $\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\}$; v) $\{0; \pi; 2\pi\}$;

Die Aufgabe hat die Struktur $\sin(x) = -a$, wobei a ein Wert aus Formel 35 ist.
Dabei erkennen wir die Formel $\arcsin(x) = \sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}(x)$. (Beweisen Sie!)

Beweis durch die Operation 'sinus' (und $\sin(\sin^{-1}(x)) = x$):

$$\sin(\sin^{-1}(-x)) = \sin(-\sin^{-1}(x)) \stackrel{\sin(-x)=-\sin(x)}{\Longleftrightarrow} -x = -\sin(\sin^{-1}(x)) \Leftrightarrow -x = -x \quad \surd.$$

c)

i)	$\cos(x) = -1$	$\Leftrightarrow x = (2k+1) \cdot \pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$;
ii)	$\cos(x) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ oder $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$;
iii)	$\cos(x) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ oder $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$;
iv)	$\cos(x) = \frac{-1}{2}$	$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ oder $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$;
v)	$\cos(x) = 0$	$\Leftrightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$;

$\mathbb{L} \cap [0; 2\pi]$: i) $\{\pi\}$; ii) $\{\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\}$; iii) $\{\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\}$; iv) $\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$; v) $\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$;

Die Aufgabe hat die Struktur $\cos(x) = -a$, wobei a ein Wert aus Formel 35 ist.
Dabei erkennen wir die Formel $\arccos(x) = \cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}(x)$. (Beweisen Sie!)

Beweis durch die Operation 'cosinus', $\cos(\cos^{-1}(x)) = x$ und mit den Additionstheoremen:

$$\cos(\cos^{-1}(-x)) = \cos(\pi - \cos^{-1}(x)) \stackrel{Addth}{\Longleftrightarrow} -x = \cos(\pi)\cos(\cos^{-1}(x)) + \sin(\pi)\sin(\cos^{-1}(x))$$

$$\Leftrightarrow -x = (-1) \cdot x + 0 \cdot (\pm)\sqrt{1 - x^2} \quad \surd.$$

d) i) $\sin(\frac{x}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \stackrel{w=\frac{x}{2}}{\Longleftrightarrow} \sin(w) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow w_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ oder $w_2 = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$\Leftrightarrow \frac{x_1}{2} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ oder $\frac{x_2}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow x_1 = \frac{2\pi}{3} + 4k\pi$ oder $x_2 = \frac{4\pi}{3} + 4k\pi$, (Periode 4π);

ii) $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ oder $x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, (Periode 2π);

iii) $\sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \overset{w=2x}{\Longleftrightarrow} \sin(w) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow w_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ oder $w_2 = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ **(bei allen Ag aus diesem Teil gleich)**

$\Leftrightarrow 2x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ oder $2x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi$ oder $x_2 = \frac{\pi}{3} + k\pi$, (Periode π);

iv) $\sin(4x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \overset{w=4x}{\Longleftrightarrow} \sin(w) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow w_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ oder $w_2 = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$\Leftrightarrow 4x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ oder $4x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$ oder $x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$, (Periode $\frac{\pi}{2}$);

v) $\sin(-2x) = -\sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \overset{w=2x}{\Longleftrightarrow} \sin(w) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow w_1 = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi$ oder $w_2 = \pi - \frac{-\pi}{3} + 2k\pi$

$\Leftrightarrow 2x_1 = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi$ oder $2x_1 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \quad \Leftrightarrow x_1 = \frac{-\pi}{6} + k\pi$ oder $x_2 = \frac{4\pi}{6} + k\pi$, (Periode π);

d) vi) $\cos(\frac{x}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \overset{w=\frac{x}{2}}{\Longleftrightarrow} \cos(w) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow w_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ oder $w_2 = 2\pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$\Leftrightarrow \frac{x_1}{2} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ oder $\frac{x_2}{2} = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{3} + 4k\pi$ oder $x_2 = \frac{11\pi}{3} + 4k\pi$, (Periode 4π);

vii) $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ oder $x_2 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$, (Periode 2π);

viii) $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \overset{w=2x}{\Longleftrightarrow} \cos(w) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow w_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ oder $w_2 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$ **(bei allen Ag aus den Teilen 6-10 gleich)**

$\Leftrightarrow 2x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ oder $2x_2 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \quad \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{12} + k\pi$ oder $x_2 = \frac{11\pi}{12} + k\pi$, (Periode π);

ix) $\cos(4x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \overset{w=4x}{\Longleftrightarrow} \cos(w) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow w_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ oder $w_2 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$

$\Leftrightarrow 4x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ oder $4x_2 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \quad \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$ oder $x_2 = \frac{11\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$, (Periode $\frac{\pi}{2}$);

x) $\cos(-2x) = \cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{12} + k\pi$ oder $x_2 = \frac{11\pi}{12} + k\pi$, wie bei Teil vii).

e)$_i$ d$_i$) $\mathbb{L} \cap [0; 2\pi] = \{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$; (Periode 4π)
d$_{ii}$) $\mathbb{L} \cap [0; 2\pi] = \{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\}$; (Periode 2π)
d$_{iii}$) $\mathbb{L} \cap [0; 2\pi] = \{\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{8\pi}{6}\}$; (Periode π).
d$_{iv}$) $\mathbb{L} \cap [0; 2\pi] = \{\frac{\pi}{12}, \frac{3\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{9\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{15\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}, \frac{21\pi}{12}\}$; (Periode $\frac{\pi}{2}$).
d$_v$) $\mathbb{L} \cap [0; 2\pi] = \{\frac{4\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\}$, (Periode π);

e$_{ii}$) d$_i$) $\mathbb{L} \cap [0; 4\pi] = \{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$;
d$_{ii}$) $\mathbb{L} \cap [0; 4\pi] = \{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\}$;
d$_{iii}$) $\mathbb{L} \cap [0; 4\pi] = \{\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{9\pi}{6}, \quad \frac{13\pi}{6}, \frac{14\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}, \frac{21\pi}{6}\}$;
d$_{iv}$) $\mathbb{L} \cap [0; 4\pi] = \{\frac{\pi}{12}, \frac{3\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{9\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{15\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}, \frac{21\pi}{12}, \quad \frac{25\pi}{12}, \frac{27\pi}{12}, \frac{31\pi}{12}, \frac{33\pi}{12}, \frac{37\pi}{12}, \frac{39\pi}{12}, \frac{43\pi}{12}, \frac{47\pi}{12}\}$;
d$_v$) $\mathbb{L} \cap [0; 4\pi] = \{\frac{4\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \quad \frac{16\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}, \frac{22\pi}{6}, \frac{23\pi}{6}\}$;

e$_{iii}$) d$_i$) $\mathbb{L} \cap [-\pi; \pi] = \{\frac{2\pi}{3}\}$;
d$_{ii}$) $\mathbb{L} \cap [-\pi; \pi] = \{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\}$;
d$_{iii}$) $\mathbb{L} \cap [-\pi; \pi] = \{\frac{-5\pi}{6}, \frac{-4\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}\}$;
d$_{iv}$) $\mathbb{L} \cap [-\pi; \pi] = \{\frac{-11\pi}{12}, \frac{-9\pi}{12}, \frac{-5\pi}{12}, \frac{-3\pi}{12}, \quad \frac{\pi}{12}, \frac{3\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{9\pi}{12}\}$;
d$_v$) $\mathbb{L} \cap [-\pi; \pi] = \{\frac{-2\pi}{6}, \frac{-\pi}{6}, \quad \frac{4\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\}$;

e$_{iv}$) d$_i$) $\mathbb{L} \cap [-2\pi; 2\pi] = \{\frac{-10\pi}{3}, \frac{-8\pi}{3} \quad \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$;
d$_{ii}$) $\mathbb{L} \cap [-2\pi; 2\pi] = \{\frac{-5\pi}{3}, \frac{-4\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\}$;
d$_{iii}$) $\mathbb{L} \cap [-2\pi; 2\pi] = \{\frac{-11\pi}{6}, \frac{-10\pi}{6}, \frac{-5\pi}{6}, \frac{-4\pi}{6} \quad \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{8\pi}{6}\}$.
d$_{iv}$) $\mathbb{L} \cap [-2\pi; 2\pi] = \{\frac{-23\pi}{12}, \frac{-21\pi}{12}, \frac{-17\pi}{12}, \frac{-15\pi}{12}, \frac{-11\pi}{12}, \frac{-9\pi}{12}, \frac{-5\pi}{12}, \frac{-3\pi}{12},\} \quad \cup$
$\{\frac{\pi}{12}, \frac{3\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{9\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{15\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}, \frac{21\pi}{12}\}$.
d$_v$) $\mathbb{L} \cap [-2\pi; 2\pi] = \{\frac{-8\pi}{6}, \frac{-7\pi}{6}, \frac{-2\pi}{6}, \frac{-\pi}{6}, \quad \frac{4\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\}$;

$e_{vi})$ $d_{vi})$ $\mathbb{L} \cap [0; 2\pi] = \{\frac{\pi}{3}\}$;
$d_{vii})$ $\mathbb{L} \cap [0; 2\pi] = \{\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\}$;
$d_{viii})$ $+ d_x)$ $\mathbb{L} \cap [0; 2\pi] = \{\frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}\}$;
$d_{ix})$ $\mathbb{L} \cap [0; 2\pi] = \{\frac{\pi}{24}, \frac{11\pi}{24}, \frac{13\pi}{24}, \frac{23\pi}{24}, \frac{25\pi}{24}, \frac{35\pi}{24}, \frac{37\pi}{12}, \frac{47\pi}{24}\}$;

$e_{vii})$ $d_{vi})$ $\mathbb{L} \cap [0; 4\pi] = \{\frac{\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}\}$;
$d_{vii})$ $\mathbb{L} \cap [0; 4\pi] = \{\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{23\pi}{6}\}$;
$d_{viii})$ $d_x)$ $\mathbb{L} \cap [0; 4\pi] = \{\frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}, \frac{25\pi}{12}, \frac{35\pi}{12}, \frac{37\pi}{12}, \frac{47\pi}{12}\}$;
$d_{ix})$ $\mathbb{L} \cap [0; 4\pi] = \{\frac{\pi}{24}, \frac{11\pi}{24}, \frac{13\pi}{24}, \frac{23\pi}{24}, \frac{25\pi}{24}, \frac{35\pi}{24}, \frac{37\pi}{12}, \frac{47\pi}{24}\} \cup$
$\{\frac{49\pi}{24}, \frac{59\pi}{24}, \frac{61\pi}{24}, \frac{71\pi}{24}, \frac{73\pi}{24}, \frac{83\pi}{24}, \frac{85\pi}{12}, \frac{95\pi}{24}\}$

$e_{viii})$ $d_i)$ $\mathbb{L} \cap [-\pi; \pi] = \{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\}$;
$d_{ii})$ $\mathbb{L} \cap [-\pi; \pi] = \{\frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\}$;
$d_{viii})$ $+ d_x)$ $\mathbb{L} \cap [-\pi; \pi] = \{\frac{-11\pi}{12}, \frac{-\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\}$;
$d_{ix})$ $\mathbb{L} \cap [-\pi; \pi] = \{\frac{-23\pi}{24}, \frac{-13\pi}{24}, \frac{-11\pi}{24}, \frac{-\pi}{24}, \frac{\pi}{24}, \frac{11\pi}{24}, \frac{13\pi}{24}, \frac{23\pi}{24}\}$;

$e_{ix})$ $d_i)$ $\mathbb{L} \cap [-2\pi; 2\pi] = \{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\}$;
$d_{ii})$ $\mathbb{L} \cap [-2\pi; 2\pi] = \{\frac{-11\pi}{6}, \frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\}$;
$d_{viii})$ $d_x)$ $\mathbb{L} \cap [-2\pi; 2\pi] = \{\frac{-23\pi}{12}, \frac{-13\pi}{12}, \frac{-11\pi}{12}, \frac{-\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}\}$;
$d_{ix})$ $\mathbb{L} \cap [-2\pi; 2\pi] = \{\frac{-47\pi}{24}, \frac{-37\pi}{24}, \frac{-35\pi}{24}, \frac{-25\pi}{24}, \frac{-23\pi}{24}, \frac{-13\pi}{24}, \frac{-11\pi}{12}, \frac{-\pi}{24}\} \cup$
$\{\frac{\pi}{24}, \frac{11\pi}{24}, \frac{13\pi}{24}, \frac{23\pi}{24}, \frac{25\pi}{24}, \frac{35\pi}{24}, \frac{37\pi}{12}, \frac{47\pi}{24}\}$;

f) i) $2\sin(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x) = \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ oder $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$;
ii) $\sin(2x) = 1 \quad \overset{u=2x}{\Longleftrightarrow} \quad \sin(u) = 1 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \overset{u=2x}{\Longleftrightarrow} 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$;
iii) $\sin(x+2) = 1; \quad \overset{u=x+2}{\Longleftrightarrow} \quad \sin(u) = 1 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \overset{u=x+2}{\Longleftrightarrow} x + 2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} - 2 + 2k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$;
iv) $\sin(x) + 2 = 1; \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x) = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$;
v) $\sin(x) = 2$; ist nicht lösbar, weil $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.

$\mathbb{L} \cap [0; 2\pi]$: i) $\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\}$; ii) $\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\}$; iii) $\{\frac{5\pi}{2} - 2\}$; iv) $\{\frac{3\pi}{2}\}$; v) $\{\}$;

g) Alle Funktionen haben Periode π und es wird immer substituiert:

i) $\sin(2x - 4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$: $2x - 4 \to w$: $\sin(w) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow w_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ oder $w_2 = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$; Rücksubstitution $w \to 2x - 4$: $2x_1 - 4 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ oder $2x_2 - 4 = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$
$\Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{8} + 2 + k\pi$ oder $x_2 = \frac{3\pi}{8} + 2 + k\pi$.

ii) $\sin(2x + 4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$: $2x + 4 \to w$: $\sin(w) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow w_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ oder $w_2 = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ (wie bei Teil i); Rücksubstitution $w \to 2x - 4$: $2x_1 + 4 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ oder $2x_2 + 4 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$
$\Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{8} - 2 + k\pi$ oder $x_2 = \frac{3\pi}{8} - 2 + k\pi$ (aus '+2' wurde '−2').

iii) $\sin(-2x + 4) = -\sin(2x - 4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$: $2x - 4 \to w$: $\sin(w) = \frac{-\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow w_1 = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi$ oder $w_2 = \pi - \frac{-\pi}{4} + 2k\pi$; Rücksubstitution $w \to 2x - 4$: $2x_1 - 4 = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi$ oder $2x_2 - 4 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow$ $x_1 = \frac{-\pi}{8} + 2 + k\pi$ oder $x_2 = \frac{5\pi}{8} + 2 + k\pi$.

iv) $\cos(2x - 4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$: $2x - 4 \to w$: $\cos(w) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow w_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ oder $w_2 = 2\pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$; Rücksubstitution $w \to 2x - 4$: $2x_1 - 4 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ oder $2x_2 - 4 = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$
$\Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{8} + 2 + k\pi$ oder $x_2 = \frac{7\pi}{8} + 2 + k\pi$.

$\mathbb{L} \cap [0; 2\pi]$: i) $\{\frac{-\pi}{8} + 2, \frac{\pi}{8} + 2, \frac{3\pi}{8} + 2, \frac{9\pi}{8} + 2\}$; ii) $\{\frac{9\pi}{8} - 2, \frac{11\pi}{8} - 2, \frac{17\pi}{8} - 2, \frac{19\pi}{8} - 2\}$;
iii) $\{\frac{-3\pi}{8} + 2, \frac{-\pi}{8} + 2, \frac{5\pi}{8} + 2, \frac{7\pi}{8} + 2\}$; iv) $\{\frac{-\pi}{8} + 2, \frac{\pi}{8} + 2, \frac{7\pi}{8} + 2, \frac{9\pi}{8} + 2\}$;

h) Alle Aufgaben aus Teil g) mit Substitution $w = \sin(x)$:

i) $\sin^2(x) - 3\sin(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow w^2 - 3w + 2 = 0 \Leftrightarrow (w-1) \cdot (w-2) = 0 \Leftrightarrow w_1 = 1, w_2 = 2$;

Rücksubstitution $\sin(x) = 1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \pi - x_1 = x_1$, $\quad \sin(x) \neq 2$,
$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}\}$, in $[0; 2\pi]$ liegt nur $x = \frac{\pi}{2}$.

ii) $\sin^2(x) + 2\sin(x) = 3 \Leftrightarrow w^2 + 2w - 3 = 0 \Leftrightarrow (w-1) \cdot (w+3) = 0 \Leftrightarrow w_1 = 1, w_2 = -3$;
Rücksubstitution $\sin(x) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$, $(x_2 = \pi - \frac{\pi}{2} = x_1)$, $\quad \sin(x) \neq -3$,
$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}\}$, in $[0; 2\pi]$ liegt nur $x = \frac{\pi}{2}$.

iii) $2\sin^2(x) + 1 = 3\sin(x) \Leftrightarrow 2w^2 - 3w + 1 = 0 \Leftrightarrow 2(w-1) \cdot (w - \frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow w_1 = 1, w_2 = \frac{1}{2}$
Rücksubstitution $\sin(x) = 1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $\quad \sin(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$
$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}\}$. $\mathbb{L} \cap [0; 2\pi] = \{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\}$;

i) i) $x\sin(x) = x \Leftrightarrow x \cdot (\sin(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ oder $x_2 = \sin^{-1}(1) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

ii) $x\sin(x) = \sin(x) \Leftrightarrow (x-1) \cdot \sin(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$ oder $x_2 = \sin^{-1}(0) = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

iii) $x^2\sin(x) - x \cdot \sin(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1) \cdot x \cdot \sin(x) = 0$
$\Leftrightarrow x_1 = \sin^{-1}(0) = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ oder $x_2 = 1, x_3 = 0$. Die Nullstelle $x_3 = 0$ ist doppelt.

iv) $x^2\sin(x) - x \cdot \sin^2(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot \sin(x) \cdot (x - \sin(x)) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \sin^{-1}(0) = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ oder $x_2 = 0$;
$x = \sin(x)$ ist eine transzendente Gleichung. Diese ist trotzdem lösbar: $0 = \sin(0)$, damit ist $x = 0$ eine Lösung. Für $x > 0$ gilt $\sin(x) < x$, für $x < 0$ gilt $\sin(x) > x$; damit ist $x = 0$ der einzige Schnittpunkt und es ist $\mathbb{L} = \{k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}\}$.

$\mathbb{L} \cap [0; 2\pi]$: i) $\{\frac{\pi}{2}\}$; ii) $\{0, \pi, 2\pi\}$; iii) $\{0, 1, \pi, 2\pi\}$; iv) $\{0, \pi, 2\pi\}$;

v-viii) $x \cdot \sin(2nx) = x \overset{x}{\Leftrightarrow} = 0$ oder $x = \frac{\pi}{2n} + k \cdot \frac{\pi}{n}$;

Lösungen im Intervall $[0; 2\pi]$: v) $\mathbb{L} \cap [0; 2\pi] = \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\}$; vi) $\mathbb{L} \cap [0; 2\pi] = \{0, \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}\}$;
vii) $\mathbb{L} \cap [0; 2\pi] = \{0, \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{9\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}, \frac{21\pi}{12}\}$; viii) $\mathbb{L} \cap [0; 2\pi] = \{0, \frac{\pi}{16}, \frac{5\pi}{16}, \frac{9\pi}{16}, \frac{13\pi}{16}, \frac{17\pi}{16}, \frac{21\pi}{16}, \frac{25\pi}{16}, \frac{29\pi}{16}\}$;

j) i) $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$; $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi \in [0; 2\pi]$; ii) (etwa Abi 12) $x = k\pi$, $\quad 0, \pi, 2\pi \in [0; 2\pi]$;

iii) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $\quad \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \in [0; 2\pi]$;

$$\begin{array}{llll} \text{iv)} & \sin(x)(1 - 2\cos(x)) = 0 & \Leftrightarrow \sin(x) = 0 & \text{oder } \cos(x) = \frac{1}{2}; \\ & & \Leftrightarrow x = k\pi & \text{oder } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ oder } x = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi, \\ & \text{aus } [0; 2\pi]: & \{0, \pi, 2\pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}; & \end{array}$$

k) i) $\sin^2(x) = \sin(x) \Leftrightarrow \sin(x) \cdot (\sin(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0$ oder $\sin(x) = 1$

$\Leftrightarrow x_1 = k \cdot \pi$ oder $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$;

ii) $\sin^2(x) = 2\sin(x) \Leftrightarrow \sin(x) \cdot (\sin(x) - 2) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0$ oder $\sin(x) = 2$ (↯)

$\Leftrightarrow x_1 = k \cdot \pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$;

iii) $2\sin^2(x) = \sin(x) \Leftrightarrow \sin(x) \cdot (2\sin(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0$ oder $\sin(x) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x_1 = k \cdot \pi$ oder $x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ oder $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$;

iv) $2\sin^2(x) + \sin(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) \cdot (2\sin(x) + 1) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0$ oder $\sin(x) = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x_1 = k \cdot \pi$ oder $x_2 = \frac{-5\pi}{6} + 2k\pi$ oder $x_3 = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$;

Der Aufgabenteil kann durch auch durch Substitution $w = \sin(x)$ gelöst werden.

$\mathbb{L} \cap [0; 2\pi]$: i) $\{\frac{\pi}{2}\}$; ii) $\{0, \pi, 2\pi\}$; iii) $\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\pi, 2\pi\}$; iv) $\{0, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, 2\pi\}$;

L) i) $\sin^4(x) = \sin^2(x) \Leftrightarrow \sin^2(x) \cdot (\sin^2(x) - 1) = 0$;
Satz vom Nullprodukt: $\sin^2(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 + 2k\pi$ oder $x_2 = \pi - 0 + 2k\pi$ $(\Leftrightarrow x = k\pi)$;
$\sin^2(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = \pm 1$.
Von 1: $x_3 = \sin^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}(+2k\pi)$, $x_4 = \pi - \frac{\pi}{2} = x_3$,

Von -1: $x_5 = \sin^{-1}(-1) = \frac{3\pi}{2}(+2k\pi)$, $x_6 = \pi - \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \hat{=} x_5$ (obwohl $x_5 \neq x_6$ zu sein scheint);
$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{k\cdot\pi}{2}$ für alle $k \in \mathbb{Z}\}$; $\mathbb{L} \cap [0; 2\pi] = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$.

ii) $2\sin^4(x) - \sin^2(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2(x) \cdot (\sin^2(x) - \frac{1}{2}) = 0$; $2 \cdot \sin^2(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = k\pi$;
$\sin^2(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Von $\frac{\sqrt{2}}{2}$: $x_2 = \sin^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $x_3 = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$,
von $\frac{-\sqrt{2}}{2}$: $x_4 = \sin^{-1}(\frac{-\sqrt{2}}{2}) = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi$, $x_5 = \pi - \frac{-\pi}{4} + 2k\pi$,

$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x_1 = k\cdot\pi$ oder $x_2 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ oder $x_3 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ oder $x_4 = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi$ oder $x_5 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}\}$; $\mathbb{L} \cap [0; 2\pi] = \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi\}$.

iii) $4\sin^4(x) = \sin^2(x) \Leftrightarrow 4\sin^2(x) \cdot (\sin^2(x) - \frac{1}{4}) = 0$; $4 \cdot \sin^2(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = k\pi$;
$\sin^2(x) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin(x) = \pm\frac{1}{2}$.
Von $\frac{1}{2}$: $x_2 = \sin^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x_3 = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$,
von $\frac{-1}{2}$: $x_4 = \sin^{-1}(\frac{-1}{2}) = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi$, $x_5 = \pi - \frac{-\pi}{6} + 2k\pi$,

$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x_1 = k\cdot\pi$ oder $x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ oder $x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ oder $x_4 = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi$ oder $x_5 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}\}$; $\mathbb{L} \cap [0; 2\pi] = \{0, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, 2\pi\}$.

iv) $4\cos^4(x) = \cos^2(x) \Leftrightarrow 4\cos^2(x) \cdot (\cos^2(x) - \frac{1}{4}) = 0$; $4 \cdot \cos^2(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$;
$\cos^2(x) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos(x) = \pm\frac{1}{2}$.
Von $\frac{1}{2}$: $x_2 = \cos^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x_3 = 2\pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$,
von $\frac{-1}{2}$: $x_4 = \cos^{-1}(\frac{-1}{2}) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $x_5 = 2\pi - \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$,

$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x_1 = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$ oder $x_2 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ oder $x_3 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ oder $x_4 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ oder $x_5 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}\}$ $\mathbb{L} \cap [0; 2\pi] = \{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\}$.

m i) $4\sin(x) \cdot \cos^2(x) = \sin(x) \Leftrightarrow 4\sin(x) \cdot (\cos^2(x) - \frac{1}{4}) = 0$; $4 \cdot \sin(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = k \cdot \pi$;
$\cos^2(x) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos(x) = \pm\frac{1}{2}$.
Von $\frac{1}{2}$: $x_2 = \cos^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x_3 = 2\pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$,
von $\frac{-1}{2}$: $x_4 = \cos^{-1}(\frac{-1}{2}) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $x_5 = 2\pi - \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$,

$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x_1 = k\cdot\pi$ oder $x_2 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ oder $x_3 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ oder $x_4 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ oder $x_5 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}\}$ oder $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k \cdot \frac{\pi}{3}$ für alle $k \in \mathbb{Z}\}$; $\mathbb{L} \cap [0; 2\pi] = \{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi\}$.

ii) $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ oder $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ oder $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \in [0; 2\pi]$;

Aufg. 113/294: a) Dazu verwende man eine Wertetabelle mit variablem $\underline{k}$. Oft beginnt diese bei $\underline{k} = \underline{-1}$ und endet bei der Frequenz b. Die Anzahl der Lösungen im $[0; 2\pi]$ ist meist $\underline{2} \cdot \underline{b}$. Jeder Wert zwischen 0 und 6.28 gehört zur Lösung.

b) $\mathbb{L} \cap 2\pi = \{\frac{-\pi}{6} - 2 + \pi; \frac{-\pi}{6} - 2 + 2\pi; \frac{2\pi}{3} - 2; \frac{2\pi}{3} - 2 + \pi\}$

Der Rest sollte bei den entsprechenden Aufgabe 112/293j,k,L stehen

Aufg. 113/295: a) $f(x) = 25 \cdot \sin(\frac{\pi}{12}(x-7)) + 30$, $f(9) = 42.5$, $y-$Werte in °.

b) Gegeben seien ein Tiefpunkt $T(x_t; y_t)$ und ein direkt folgendes Maximum $H(x_h; y_h)$ einer allgemeinen Sinuskurve. $a = \frac{y_h - y_t}{2}$, $p = 2(x_h - x_t)$, $b = \frac{\pi}{x_h - x_t}$, $c = \frac{x_t + x_h}{2}$, $d = \frac{y_h + y_t}{2}$.

c) i) $H(2; 7)$ und $T(4; 3)$ und $p > 3$: $a = \frac{7-3}{2} = 2$, $d = \frac{7+3}{2} = 5$, $p = 2(4-2) = 4 > 3$, $b = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, $c = \frac{2+4}{2} = 3 \Rightarrow y = 2 \cdot \sin(\frac{\pi}{2}(x-3)) + 5$;

c) ii) $T_2(2; 3)$ und $H_2(14; 5)$ $a = \frac{5-3}{2} = 1$, $d = \frac{5+3}{2} = 4$, zwischen T_2 und H_2 verlaufen 1.5 Perioden. Damit ist $p = \frac{14-2}{1.5} = 8$, $b = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$, $c = 2 + \frac{8}{4} = 4 \Rightarrow y = \sin(\frac{\pi}{4}(x-4)) + 4$;

d) Die Höchsttemperatur wird immer 2 Std nach dem Sonnenhöchststand angenommen. Damit ist $p = 24$ und 'am frühen Morgen'=2 Uhr. $a = \frac{30-16}{2} = 7$, $d = \frac{30+16}{2} = 23$, $b = \frac{2\pi}{p} = \frac{\pi}{12}$, $c = \frac{2+14}{2} = 8$; $f(x) = 7 \cdot \sin(\frac{\pi}{12}(x-8)) + 23$, $f(10) = 26.5$, $y-$Werte in °C.

e) $a = \frac{4.5-1.5}{2} = 1.5$, $d = \frac{4.5+1.5}{2} = 3$, $p = 2(19-13) = 12$, $b = \frac{2\pi}{p} = \frac{\pi}{6}$,
$c = \frac{19+13}{2} - \frac{p}{2} = 16 - 6 = 10$ (T folgt H, bei c kann 6 addiert oder subtrahiert werden);
$f(x) = 1.5 \cdot \sin(\frac{\pi}{6}(x-10)) + 3$, $f(11) = 3.75$, $y-$Werte in m.

f) $p = 24$, $x_{min} = 3$, $x_{max} = 3 + 12 = 15$, $d = \frac{12+18}{2} = 15$, $a = \frac{18-12}{2} = 3$, $c = \frac{3+15}{2} = 9$, $b = \frac{2\pi}{p} = \frac{\pi}{12}$
$\Rightarrow y = 3\sin(\frac{\pi}{12}(x-9)) + 15$;
$f(19) = 3\sin(\frac{\pi}{12}(19-9)) + 15 = 3\sin(\frac{5\pi}{6}) + 15 = 3 \cdot 0.5 + 15 = 16.5$ (°C).

g) $x =$ Stunde am 4.3. nach 0.00 Uhr; Damit ist $x = -6$ der 3.3. um 18.00 Uhr;
$a = \frac{8-4}{2} = 2$, $d = \frac{8+4}{2} = 6$, $p = 2(12+6) = 36$, $b = \frac{2\pi}{p} = \frac{\pi}{18}$, $c = \frac{12-6}{2} + \frac{p}{2} = 3 + 18 = 21$ (T folgt H);
$y = 2\sin(\frac{\pi}{18}(x-21)) + 6$, $f(0) = 7$ (also $7m$), $f(3) = 6$ (also $6m$) und $f(6) = 5$ (also $5m$).

h) $p = 366$, $c = \frac{173+356}{2} - \frac{366}{2} = 81.5$ (Frühlingspunkt), $a = \frac{16-8}{2} = 4$, $d = \frac{16+8}{2} = 12$;

$$f(x) = 4\sin\left(\frac{2\pi}{366}(x-81.5)\right) + 12;$$

Aufg. 114/296: a) $\sin(x)' = \cos(x)$, $\cos(x)' = -\sin(x)$, $\sin(2x)' = 2\cos(2x)$. (Abb. 304)

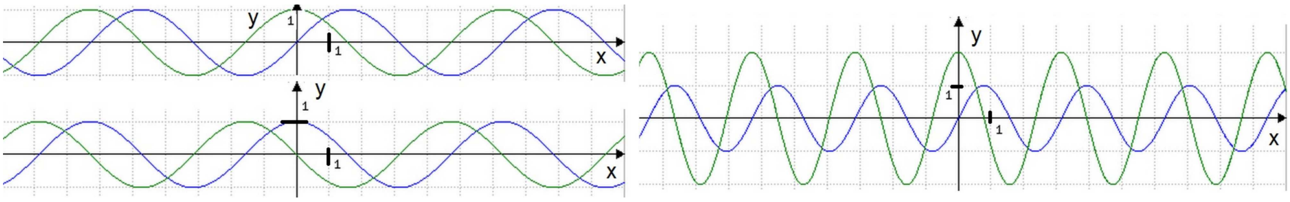


Abb. 304 Zeichnung der Ableitung trigonometrischer Funktionen

b) i) $f'(x) = (2\sin(x) + 5\cos(x) + 2x^2)' = 2\cos(x) - 5\sin(x) + 4x$;

ii) $f'(x) = (3\cos(x) - 1 - 2sin(x))' = -3\sin(x) - 2cos(x)$

Aufg. 114/297: a) $(\sin(x))' = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \cos(x)$.
b) $(\sin(x))' = \cos(x)$, $\overline{OP} = 1$, $\sphericalangle\, EOP = x$, $\overline{OT} = \cos(x)$, $\overline{PT} = \sin(x)$;
c) $\sphericalangle\, EOR' = x + h$, $\overline{R'S} = \sin(x+h)$, $\overline{PQ'} = \sin(x+h) - \sin(x)$;
d) $\overline{PR'} \approx h$, OPt, $\sphericalangle\, RQP = \sphericalangle\, PT = 90°$ und $\sphericalangle\, OPT + \sphericalangle\, RPO + \sphericalangle\, QPR = 180°$, damit ist $\sphericalangle\, QPR = 90° - \sphericalangle\, OPT$ oder $\sphericalangle\, OPT = \sphericalangle\, QRP$ (Winkelsumme im Dreieck ist 180°); $\frac{\overline{OT}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}}$,
e) t ist die Tangente, und damit die bestapproximierende Gerade in P; $\overline{PQ} \approx \sin(x+h) - \sin(x)$, $\overline{PR} \approx h$, $\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} \approx \frac{\cos(x)}{1}$ oder $\cos(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$.

Aufg. 114/298: a) $\sin(0) = 0$, $3 \approx \pi$ damit liegt $\sin(3)$ nahe bei 0, aber $\sin(3) > 0$, da $\sin(1) \approx \sin(2)$, weil aber die Symmetrieachse $x = \frac{\pi}{2}$ (durch den Hochpunkt $H(\frac{\pi}{2};1)$) näher bei 2 als bei 1 liegt, gilt $\sin(1) < \sin(2)$, also ist $\sin(0) < \sin(3) < \sin(1) < \sin(2)$.

b) Aus Symmetriegründen gilt $\cos(1°) = -\cos(179°) = -\cos(181°) = \cos(359°)$.
Damit ist $\cos(1°) + \cos(179°) + \cos(181°) + \cos(359°) = 0$.
Analoges gilt für die Winkel $2°, 178°, 182°, 358°$ ... $k°, (180-k)°, (180+k)°, (360-k)°$ ($k = 1..89$), weshalb sich alles weghebt, bis auf $\cos(90°) + \cos(180°) + \cos(270°) = \cos(180°) = -1$.

c) $\sin(x)$ kann maximal 1 sein., damit ist $f(x) = 5\sin(2x+6) - 3 \leq 5 \cdot 1 - 3 = 2$.

Aufg. 115/299: a) $p = \frac{2\pi}{b} = \frac{\pi}{6}$, Eine Periode dauert $\frac{\pi}{6}$ s.

b) $v'''(t) = (0.4 \cdot \sin(12t) + 1.5)''' = (4.8 \cdot \cos(12t))'' = (-57.6 \cdot \sin(12t))' = -691.2 \cdot \cos(12t)$;

$v'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{6}$ (Maximum) oder $x = \frac{3\pi}{24} + k\frac{\pi}{6}$ (Minimum); $v(\frac{\pi}{24}) = 1.9$, $v(\frac{3\pi}{24}) = 1.1$; die Geschwindigkeit schwankt zwischen 1.1 und $1.9\frac{m}{s}$;

c) $v''(x) = 0$ und $v'''(x) < 0$ für $x = \frac{2\pi}{24} + k\frac{\pi}{6}$, an den Stellen $x = \frac{2\pi}{24} + k\frac{\pi}{6}$ nimmt die Geschwindigkeit am stärksten ab.

d) $s = \bar{v} \cdot 50 \cdot p = 1.5 \cdot 50 \cdot \frac{\pi}{6} = 12.5\pi$; der Schwimmer legt also 12.5π Meter zurück.

e) Wann beginnt ein 2 Sekundenzeitraum währenddessen die mittlere Geschwindigkeit genau 1.5 $\frac{m}{s}$ beträgt.

Aufg. 115/300: $f''(x) = (8 \cdot \sin(\frac{\pi}{12}(x-8.5)) + 21)'' = (\frac{2\pi}{3} \cdot \cos(\frac{\pi}{12}(x-8.5)))' = \frac{-\pi^2}{18} \cdot \sin(\frac{\pi}{12}(x-8.5))$;

a) $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0 \Leftrightarrow H(14.5; 29)$; um 14.30 Uhr ist die Temp. maximal.

$f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0 \Leftrightarrow T(2.5; 13)$; um 2.30 Uhr ist die Temperatur minimal.

b) $f(x) < 17 \Leftrightarrow 0 \leq x < 6.5$ oder $22.5 < x \leq 24$; die Temp. bleibt $6.5 + 1.5 = 8\ h$ unter $17°C$.

c) $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 8.5$ $f'(8.5) = \frac{2\pi}{3}$; der maximale Temperaturanstieg ist $\frac{2\pi}{3}\ \frac{°C}{h}$;

$f'(x) = \frac{2\pi}{3} \cos(\frac{\pi}{12}(x-8.5))$;

d) $2a = 6°C$, $p = 24h$, $g(x) = 3 \cdot \sin(\frac{\pi}{12}(x-12)) + 18 = -3 \cdot \sin(\frac{\pi x}{12}) + 18$;

e) K_{g1} entsteht durch Streckung um 3 in y- Richtung wg $a = 3$, da g mit einem 'Abwärtspunkt' beginnt, entsteht K_{g2} aus K_{g1} durch Spiegelung an der x- Achse (auch eine Verschiebung um 12 nach rechts geht), K_{g3} entsteht aus K_{g2} durch Streckung um $\frac{24}{2\pi}$ in x- Richtung, K_g entsteht aus K_{g3} durch Verschiebung von 18 in y- Richtung. Die Reihenfolge der Abbildungen ist wichtig.

f) $18°C$; dies kann auch mit Integralrechnung $\displaystyle\frac{1}{24} \cdot \int_0^{24} (\sin(\frac{\pi}{12}(x-12)) + 18)\, dx$ berechnet werden.

Aufg. 115/301: a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \cos(\pi \cdot x) = 0 \overset{w=\pi x}{\Longleftrightarrow} 1 = \cos(w) \Leftrightarrow w = 0 + 2k\pi$ (w_2 wird nicht gebraucht) $\overset{RS}{\Longleftrightarrow} \pi x = 0 + 2k\pi \Leftrightarrow x = 2k,\ k \in \mathbb{Z}$;

b) Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{\pi}$ in x- Richtung, Spiegelung an der x- Achse und Verschiebung um 1 nach oben. Die Verschiebung muss am Ende erfolgen.

c) $f(x) = \sin(\pi(x - 0.5)) + 1$.

d) MA: $g'(x) = 0$; $x_h \approx 1, g(1) \approx 0.62$ (GTR: $x_h \approx 0.934$, $g(0.934) \approx 0.607$);

Der höchste Punkt der Bahn hat etwa die Höhe $0.62m$.

e) MA: $g''(x) = 0$; $x_w \approx 0.5, g'(0.5) \approx \frac{0.1}{0.1} = 1$; (GTR: $x_w \approx 0.444$, $g'(0.444) \approx 1.017$);

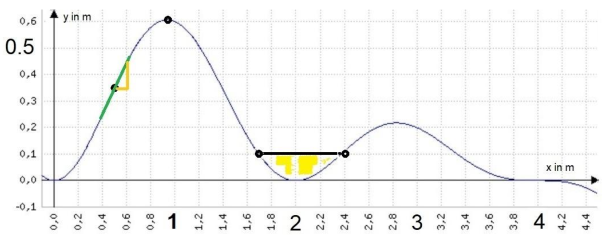
Die größte Steigung ist bei $x \approx 0.5m$ und ist etwa $1\frac{m}{m}$ groß.

f) K_g schneidet $y = 0.1$ in $x_1 \approx 1.7$ und $x_2 \approx 2.4$ (GTR $x_1 \approx 1.692$ und $x_2 \approx 2.374$)

MA: $\int_{x_1}^{x_2}(0.1 - g(x))dx \approx 2.2$ (Kästchen) $= 2.2 \cdot 0.1 \cdot 0.2 = 0.044(m^2)$

$V = 0.044(m^2) \cdot 1.25m = 0.055(m^5) = 55\ l$; (GTR $55.18\ l$). In der Senke sind etwa $55l$ Wasser.

g) $f_{neu}(x)$ hat Periode 1, Mittelwert 0.2, Amplitude -0.2: $y = 0.2 - 0.2\cos(2\pi x)$.



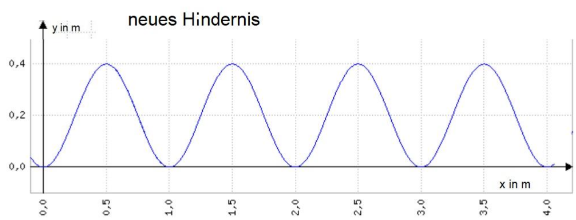


Abb. 305 a) Minigolfbahn

Aufg. 115/302: achten Sie auf die Einheit von $\underline{f(t)}$. a) $f(t) = 85$ für $t = 2$ oder $t = 10$, damit ist die Zuflussrate für $2 < t < 10$ größer als 85 $\frac{m^3}{h}$.

b) $f''(t) = 0$ und $f'(t) < 0$ für $t = 12$; Zum Zeitpunkt 12 nimmt die Zuflussrate an stärksten ab.

c) Sei $F_c'(t) = \frac{600}{\pi} \cdot \frac{\pi}{12} \sin(\frac{\pi}{12} \cdot t) + 60 = f(t)$;

$F_c(t)$ ist die Zuflussmenge in m^3, $f(t)$ ist die momentane Zuflussrate.

d) $F_c(0) = -\frac{600}{\pi} + c = 5000$, damit ist $c = 5000 + \frac{600}{\pi} \approx 5191$;

e) $F_{5191}(24) = 6440 = 5000 + 24 \cdot 60$;

f) $F_0(t) = 6991 \Leftrightarrow t = 30$, nach 30 Stunden sind $6991 m^3$ im Becken.

Aufg. 116/303: (Nur LK) a) $p = \frac{2\pi}{b}$, $p_a = \frac{2\pi}{a}$, $f_a''(x) = (a\sin(ax)+a)'' = (a^2\cos(ax))' = -a^3\sin(ax)$;

$f'(x) = a^2\cos(ax) = 0$ für $ax = \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_h = \frac{\pi}{2a}$,
VZW: $f'(0) = a^2\cos(ax)|_{x=0} = a^2\cos(a\cdot 0) = a^2 > 0$,
$f'(\frac{\pi}{a}) = a^2\cos(a\cdot\frac{\pi}{a}) = a^2\cos(\pi) = -a^2 < 0 \Rightarrow$ WZW $+ \to - \Rightarrow$ Maximum bei $x = \frac{\pi}{2a}$;
Nach UE 10_6: $f''(\frac{\pi}{2a}) = -a^3\sin(a\cdot\frac{\pi}{2a}) = -a^3 < 0$;

$f(\frac{\pi}{2a}) = a\sin(a\cdot\frac{\pi}{2a})+a = 2a \Rightarrow H_a(\frac{\pi}{2a}; 2a)$. Zusatz: $x_t = \frac{2\pi}{a} - \frac{\pi}{2a} = \frac{3\pi}{2a}$, $f''(\frac{3\pi}{2a}) = -a^3\sin(a\frac{3\pi}{2a}) = a^3 > 0$;

b) $H_a(\frac{\pi}{2a}; 2a)$; aus $x = \frac{\pi}{2a}$ und $y = 2a$ folgt durch Elimination des Parameters:

$x = \frac{\pi}{2a} \Leftrightarrow ax = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow a = \frac{\pi}{2x}$ in $y = 2a$ eingesetzt, ergibt
$y = 2a = 2\cdot\frac{\pi}{2x} = \frac{\pi}{x}$ also ist $y = \frac{\pi}{x}$ die Ortskurve; aus $a > 0$ folgt $x > 0$.

c) Nach UE 11_6: $-a^3\sin(ax) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\cdot\pi}{a}$; $f'''(x) = -a^4\cos(ax)$; $f'''(\frac{k\cdot\pi}{a}) = -a^4\cos(a\frac{k\cdot\pi}{a}) = \mp a^4 \neq 0$;
$f(\frac{k\cdot\pi}{a}) = a\sin(a\cdot\frac{k\cdot\pi}{a}) + a = a$; kleinster positiver x-Wert für $k = 1 \Rightarrow W_a(\frac{\pi}{a}; a)$.

d) Nach UE 11_3: Allg Tggl: $y = f'(u)(x-u) + f(u)$;
weil $W_a(\frac{\pi}{a}; a)$ gilt $u = \frac{\pi}{a}$, $f(u) = a$ und $f'(u) = f'(\frac{\pi}{a}) = a^2\cos(a\cdot\frac{\pi}{a}) = -a^2 \Rightarrow$
$y = -a^2(x - \frac{\pi}{a}) + a$; ist die Tangente in $W_a(\frac{\pi}{a}; a)$.

Schnitt x-Achse ($y = 0$) S_x: $0 = -a^2(x-\frac{\pi}{a})+a \Leftrightarrow a = a^2(x-\frac{\pi}{a}) \Leftrightarrow \frac{1}{a} = x - \frac{\pi}{a} \Leftrightarrow x = \frac{1+\pi}{a}$, $S_y(\frac{1+\pi}{a}; 0)$;
S_y: $y = -a^2(0 - \frac{\pi}{a}) + a = a(\pi+1)$; $A = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+\pi}{a}\cdot a(\pi+1) = \frac{(1+\pi)^2}{2}$ (unabhängig von a).

Aufg. 116/304: (Nur LK) a) $f'(x) = (a\cos(x) + a^2)' = -a\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $f''(0) = -a\cos(0) = -a < 0$, $f(0) = a + a^2 \Rightarrow H(0; a^2 + a)$.

b) $f(0) = a\cos(0) + a^2 = a + a^2$; $y = a + a^2$ hat den Wertebereich $y \geq -0.25$.
Also werden alle Punkte $(0/z)$ mit $z < -0.25$ nicht erreicht.

Aufg. 116/305: Beachten Sie auch Formel 61. i) $T(-\frac{\pi}{2}/-2)$, $H(\frac{\pi}{2}/2)$: $d = \frac{2+(-2)}{2} = 0$,
$a = \frac{2-(-2)}{2} = 2$, $c = \frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}}{2} = 0$, $p = 2(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2}) = 2\pi \Rightarrow b = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ $\Rightarrow f(x) = 2\cdot\sin(x)$;

ii) $T(1/-3)$, $H(4/7)$: $d = \frac{7+(-3)}{2} = 2$, $a = \frac{7-(-3)}{2} = 5$, $c = \frac{4+1}{2} = 2.5$,
$p = 2(4-1) = 6 \Rightarrow b = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ $\Rightarrow f(x) = 5\cdot\sin(\frac{\pi}{3}(x-2.5)) + 2$;

iii) $H(4; 6)$, $T(8; 2)$: $d = \frac{2+6}{2} = 4$, $a = \frac{6-2}{2} = 2$ eigentlich (-2), $c = \frac{4+8}{2} = 6$, $p = 2(8-4) = 8 \Rightarrow b = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow f(x) = -2\cdot\sin(\frac{\pi}{4}(x-6))4$; wegen erst H, dann direkt folgend T ist a hier negativ.

b) i) $\sin(x) = 0 \Rightarrow x_1 = \sin^{-1}(0) = 0$, $x_2 = \pi - x_1 = \pi$ aber $\sin(2\pi)$ ist auch =0, damit $\mathbb{L} = \{0; \pi; 2\pi\}$;

ii) $\cos(x) = 0 \Rightarrow x_1 = \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = 2\pi - x_1 = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \mathbb{L} = \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$;

iii) $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x_1 = \sin^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$; $x_2 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$, damit $\mathbb{L} = \{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\}$;

iv) $\cos(x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \cos^{-1}(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$, $x_2 = 2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \mathbb{L} = \{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$;

v) $\sin(x)\cdot\cos(x) = 0$ (im Intervall $[0; 2\pi]$), Satz vom Nullprodukt: $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = \{0; \pi; 2\pi\}$ und $\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\}$ damit $\mathbb{L} = \{0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi\}$;

vi) $\sin^2(x) - \sin(x) = \sin(x)(\sin(x) - 1) = 0$, Satz vom Nullprodukt: $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = \{0; \pi; 2\pi\}$ und $\sin(x) = 1 \Leftrightarrow x = \{\frac{\pi}{2}\}$ damit $\mathbb{L} = \{0; \frac{\pi}{2}; \pi; 2\pi\}$;

c) $2 \cdot \sin(\frac{x}{2})$; $\sin(\pi(x-2))+1$; $-2\sin(\frac{\pi}{3}(x-1))+0.5$; $1.5\sin(2(x+1))-0.5$;

Die Terme beziehen sich auf die markierten Punkte der Schaubilder; andere Terme können auch möglich sein.

d) Spezielle Symmetrie: $\sin(x)$ ist ps zu (0;0), $\Rightarrow \sin(-x) = -\sin(x)$;
$\cos(x)$ ist as zu $x = 0$, $\Rightarrow \cos(-x) = \cos(x)$;
Allgemeiner: Sei $k \in \mathbb{Z}$: $\sin(x)$ ist ps zu $P(k \cdot \pi; 0)$: $\Rightarrow \sin(k \cdot \pi - t) + \sin(k \cdot \pi + t) = 0$;
$\sin(x)$ ist as zu $x = \frac{(2k+1)\cdot\pi}{2}$: $\Rightarrow \sin(\frac{(2k+1)\cdot\pi}{2} - t) = \sin(\frac{(2k+1)\cdot\pi}{2} + t)$;
$\cos(x)$ ist ps zu $P(\frac{(2k+1)\cdot\pi}{2}; 0)$: $\Rightarrow \cos(\frac{(2k+1)\cdot\pi}{2} - t) + \cos(\frac{(2k+1)\cdot\pi}{2} + t) = 0$;
$\cos(x)$ ist as zu $x = k \cdot \pi$: $\Rightarrow \cos(k \cdot \pi - t) = \cos(k \cdot \pi + t)$;

15.5.5 LöVo zu Einheit 5.5 (Gebrochenrationale Funktionen UE 11_4)

Aufg. 116/306: Zeichnung siehe Abschnitt 5.6.9. Funktionswert $\pm\infty$. Falls $q(x_0) = 0$ und $p(x_0) \neq 0$, dann hat $\frac{p(x)}{q(x)}$ die senkrechte Asymptote $x = x_0$.
Die Polstellen bei f_3 und f_4 wechseln das Vorzeichen, bei f_1 und f_2 wechselt das Vorzeichen nicht.

x	-2	-1	-0.1	-0.01	0	0.01	0.1	1	2
$f(x)$	-0.5	-1	-10	-100	↯	100	10	1	0.5

b) i) Eine Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ wobei $p(x)$ und $q(x)$ ganzrationale Funktionen sind, heißt **gebrochenrationale** Funktion. Ihr induzierter Defintionsbereich ist $\{x \in \mathbb{R} | q(x) \neq 0\}$.

ii) Wenn $q(x_0) = 0$ und $p(x_0) \neq 0$, dann hat $f(x)$ bei $x = x_0$ eine Polstelle.

iii) Gilt die Umkehrung auch? Nein: Beispiel $f(x) = \frac{x}{x^2}$ hat bei $x = 0$ eine Polstelle aber auch eine Nullstelle im Zähler; sprich: $f(x)$ geht für x gegen 0 gegen unendlich.

c) $f_1(x) =$ a), $f_2(x) =$ b), $f_3(x) =$ c), $f_4(x) =$ d), $f_5(x) =$ e);

d) a), b), e) (x=0) Pole ohne Vorzeichenwechsel (VZW) c), d), e) ($x \pm$ 2) Pole mit (VZW);

e) Funktionen der Form $f(x) = \frac{1}{(x-x_0)^n}$ ($n \in \mathbb{N}$) haben bei $x = x_0$ einen Pol ohne Vorzeichenwechsel (VZW) $\Leftrightarrow$ n gerade ist; bei einem Pol mit VZW ist n ungerade. Dies gilt analog zu den Nullstellen; haben diese eine gerade Vielfachheit, so wechselt das Vorzeichen nicht.

Aufg. 117/307: *a)* $x = 1$ mit VZW; *b)* $x = 1$ mit VZW; *c)* $x = 5$ ohne VZW; *d)* $x = 1$ und $x = 2$ mit VZW; *e)* $x = 1$ ohne VZW; *f)* $x = 1$ ohne VZW und $x = -1$ mit VZW; *g)* $x = 3$ ohne VZW; *h)* $x = 0; x = -1$ beide ohne VZW und $x = 1$, *i)* $x = 2$ mit VZW; $x = -1$ ohne VZW; *j)* keine;

k) $f(x) = \frac{2x+2}{(x-1)^3(x+1)^2} = \frac{2(x+1)}{(x-1)^3(x+1)^2} = \frac{2}{(x-1)^3(x+1)^1}$ hat die senkrechten Asymptoten $x = -1$ und $x = 1$ beide mit VZW.

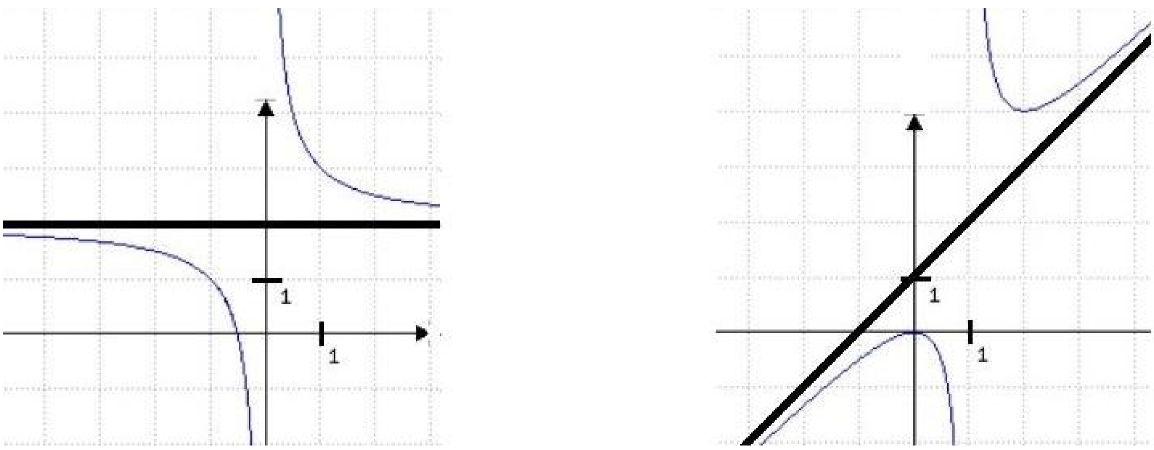


Abb. 306 waagrechte / schiefe Asymptote

Aufg. 117/308: wA = waagrechte Asymptote $y = 2$ ist wA (Abb. 306 links).

b) i) $\frac{2x+1}{x+1} \xrightarrow{x\to\pm\infty} 2 \Rightarrow$ wA $y = 2$; ii) $\frac{3x+1}{2x+1} \xrightarrow{x\to\pm\infty} \frac{3}{2} \Rightarrow$ wA $y = 1.5$;
iii) $\frac{4x+1}{3x+1} \xrightarrow{x\to\pm\infty} \frac{4}{3} \Rightarrow$ wA $y = \frac{4}{3}$; iv) $\frac{5x+1}{4x+1} \xrightarrow{x\to\pm\infty} \frac{5}{4} \Rightarrow$ wA $y = 1.25$;
v) $\frac{(n+1)\cdot x+1}{n\cdot x+1} \xrightarrow{x\to\pm\infty} \frac{n+1}{n}$.

c) i) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1} \xrightarrow{x\to\pm\infty} 1 \Rightarrow$ wA $y = 1$; ii) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-4x+4} \xrightarrow{x\to\pm\infty} 1 \Rightarrow$ wA $y = 1$;
iii) $\frac{x^2+6x+9}{x^2-6x+9} \xrightarrow{x\to\pm\infty} 1 \Rightarrow$ wA $y = 1$; iv) $\frac{x^2+8x+16}{x^2-8x+16} \xrightarrow{x\to\pm\infty} 1 \Rightarrow$ wA $y = 1$;
v) $\frac{x^2+2nx+n^2}{x^2-2nx+n^2} = \frac{(x+n)^2}{(x-n)^2} \xrightarrow{x\to\pm\infty} 1$

d) i) $\frac{x^3+2x^2+3x+4}{5x^3+6x^2+7x+8} \xrightarrow{x\to\pm\infty} \frac{2}{4} \Rightarrow$ wA $y = 0.5$; ii) $\frac{2x^3+3x^2+4x+1}{6x^3+7x^2+8x+5} \xrightarrow{x\to\pm\infty} \frac{2}{6} \Rightarrow$ wA $y = 1/3$;
iii) $\frac{3x^3+4x^2+x+2}{7x^3+8x^2+5x+6} \xrightarrow{x\to\pm\infty} \frac{3}{7} \Rightarrow$ wA $y = 3/7$; iv) $\frac{4x^3+x^2+2x+3}{8x^3+5x^2+6x+7} \xrightarrow{x\to\pm\infty} \frac{4}{8} \Rightarrow$ wA $y = 0.5$;

e) i) $\frac{1}{x^2+1} \xrightarrow{x\to\pm\infty} 0$; ii) $\frac{x}{x^2+1} \xrightarrow{x\to\pm\infty} 0$; iii) $\frac{x^2}{x^2+1} \xrightarrow{x\to\pm\infty} 1$; iv) $\frac{x^3}{x^2+1} \xrightarrow{x\to\pm\infty} \pm\infty$;

f) i) $\frac{x^2+1}{1} \xrightarrow{x\to\pm\infty} \infty$; ii) $\frac{x^2+1}{x} \xrightarrow{x\to\pm\infty} \pm\infty$; iii) $\frac{x^2+1}{x^2} \xrightarrow{x\to\pm\infty} 1$; iv) $\frac{x^2+1}{x^3} \xrightarrow{x\to\pm\infty} 0$;

Schiefe Asymptoten: Seit dem Übergang von G9 auf G8 sind schiefe Asymptoten kein Schulstoff mehr. (Ist damals nicht kein Stoff weggefallen?) Bei den Aufgaben e) und f) sollen hier trotzdem die schiefen Asymptoten angegeben werden.

e iv) $\frac{x^3}{x^2+1} - (x-1) \xrightarrow{x\to\pm\infty} 0$, also ist $y = x - 1$ die schiefe Asymptote.

f) i) $\frac{x^2+1}{1}$ hat die Näherungskurve $x^2 + 1$. Ok, das war simpel.

ii) $\frac{x^2+1}{x}$ hat die schiefe Asymptote $y = x$.

Ag 308 **g)** Die wA von Aufgabe 307 sind: a) $y = 0$; b) $y = 1$; c) $y = 0$; d) $y = 0$; e) $y = 0$; f) $y = 0$; g) $y = 1$; h) $y = 0$; i) $y = 1$; j) $y = 0$; Die wA von Aufgabe 311 sind: a) $y = 1$; b) $y = 1$; c) $y = -1$; d) $y = 1$; e) $y = 1$; f) $y = \frac{1}{2}$; g) $y = 2$; h) $y = 1$; i) $y = 0$; j) $y = 2$; k) $y = 2$; L) $y = 1$; m) $y = 0$; n) $y = 1$; o) $y = 1$;

Sie sehen, dass die waagrechten Asymptoten $y = 0$ (und bei mir auch $y = 1$) sehr oft vorkommen. Waagrechte Asymptote $y = 0$ ist eine Art 'Defaultantwort'.

Ag 308 h) Sei $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + .. + a_0}{b_m x^m + .. + b_0}$ (wobei $grad(p) =$ und $grad(q) =$), gebrochenrational, d.g.:

$grad(p) < grad(q) \Rightarrow K_f$ hat die waagrechte Asymptote $y = 0$,
$grad(p) = grad(q) \Rightarrow K_f$ hat die waagrechte Asymptote $y = \frac{a_n}{b_n}$ $(n = m)$,
$grad(p) = grad(q)+1 \Rightarrow K_f$ hat eine schiefe Asymptote,
$grad(p) > grad(q) + 1 \Rightarrow K_f$ hat eine allgemeine polynomielle Näherungskurve.

Für $grad(p) \leq grad(q)$ gilt $\lim_{n\to-\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{p(x)}{q(x)}$. Gilt dies allgemein für Funktionen?

Nein, z.B. $y = e^x$ hat für $x \to -\infty$ die wA $y = 0$ während $e^x \xrightarrow{x\to\infty} \infty$ geht, aber es gilt tatsächlich für gebrochenrationale Funktionen.

Gibt es Funktionen g der Form $\lim_{n\to-\infty} g \neq \lim_{n\to\infty} g$ also Funktionen mit zwei w. A. ?

Ja, z.B. $y = \frac{1}{1+e^{-x}} \xrightarrow{x\to\infty} 1$, $\frac{1}{1+e^{-x}} \xrightarrow{x\to-\infty} 0$ (siehe Abb. 307)

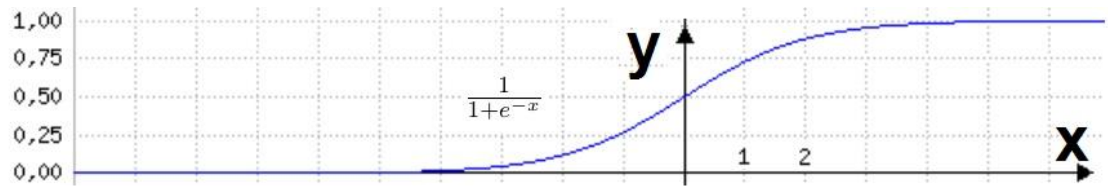


Abb. 307 Graph mit zwei verschiedenen waagrechten Asymptoten

i) Faustregel: $f(x_0) = \underline{\infty} \quad \Rightarrow \quad K_f$ hat die <u>senkrechte</u> Asymptote $\underline{x = x_0}$;
$f(\infty) = c \quad \Rightarrow \quad K_f$ hat die <u>waagrechte</u> Asymptote $\underline{y = c}$.

j) Sei $p(x_1) \neq 0$ und $q(x_1) = 0$, dann hat G_f die <u>senkrechte</u> Asymptote $\underline{x = x_1}$.

Aufg. 117/309: $y = x + 1$ ist schiefe Asymptote (Abb. 306 rechts).

Ag 309: Wertetabelle:

x	2	3	4	5	6	10	100	1000
$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}$	4	4.5	$5.\bar{3}$	6.25	7.2	$11.\bar{1}$	$101.\overline{01}$	$1001.\overline{001}$

Aufg. 118/310: a) Gerade $y = x + 3$;

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	1	2	3	Error	5	6

b) $\bar{f}(1) = 4$: $x^2 + 2x - 3$ kann in Linearfaktoren zerlegt werden:
$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -3, x_2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = (x + 3) \cdot (x - 1) \Rightarrow$
$\frac{x^2+2x-3}{x-1} = \frac{(x+3)\cdot(x-1)}{x-1} = x + 3$ (für $x \neq 1$). Deshalb kann f bei $x = 1$ stetig ergänzt werden.

c) Stetige Ergänzung von f: $\bar{f}(x) := \begin{cases} \frac{x^2+2x-3}{x-1} & \text{für } \underline{x \neq 1} \\ \underline{x + 3|_{x=1} = 4} & \text{für } \underline{x = 1}. \end{cases}$ oder $\bar{f}(x) = x + 3$.

d) Der Definitionsbereich - $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $\mathbb{D}_{\bar{f}} = \mathbb{R}$.

Aufg. 118/311: Vorübungen Ag 33/64 und 65

a) $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2-1} = \frac{(x+3)\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)} = \frac{x+3}{x+1}$ jetzt $x = 1$ eingesetzt: $\frac{1+3}{1+1} = 2$ also $\bar{f}(1) = 2$.

b) $\bar{f}(2) = 5$

c) $f(x) = \frac{4-x^2}{x^2+5x+6} = \frac{(2-x)\cdot(2+x)}{(x+2)\cdot(x+3)} = \frac{2-x}{x+3}$; damit ist $\bar{f}(-2) = \frac{2-(-2)}{(-2)+3} = \frac{4}{1} = 4$;

d) $\bar{f}(4) = 0.5$; $\bar{f}(1) = -1$; e) keine :

e) $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-2x+1} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^2} = \frac{x+2}{x-1}$, kann zwar gekürzt werden, ist aber nicht stetig ergänzbar;

f) $2x^2 + 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = -4 \Rightarrow 2x^2 + 6x - 8 = 2 \cdot (x - 1) \cdot (x + 4)$;

$4x^2 + 8x - 32 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2, x_2 = -4 \Rightarrow 4x^2 + 8x - 32 = 4 \cdot (x - 2) \cdot (x + 4)$;

$\frac{2x^2+6x-8}{4x^2+8x-32} = \frac{2\cdot(x-1)\cdot(x+4)}{4\cdot(x-2)\cdot(x+4)} = \frac{x-1}{2\cdot(x-2)} = \bar{f}$; f wurde bei $x = -4$ stetig ergänzt.

g) $6x^2 - 42x + 60 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2, x_2 = 5 \Rightarrow 6x^2 - 42x + 60 = 6 \cdot (x - 2) \cdot (x - 5)$;

$3x^2 - 9x - 30 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2, x_2 = 5 \Rightarrow 3x^2 - 9x - 30 = 3 \cdot (x + 2) \cdot (x - 5)$;

$\frac{6x^2-42x+60}{3x^2-9x-30} = \frac{6\cdot(x-2)\cdot(x-5)}{3\cdot(x+2)\cdot(x-5)} = \frac{2\cdot(x-2)}{x+2}$; f wurde bei $x = 5$ stetig ergänzt.

h) $x^3 - x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = -3, x_3 = 4 \Rightarrow x^3 - x^2 - 12x = x \cdot (x + 3) \cdot (x - 4)$;

$x^3 - 7x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 4 \Rightarrow x^3 - 7x^2 + 12x = x \cdot (x - 3) \cdot (x - 4)$;

$\frac{x^3-x^2-12x}{x^3-7x^2+12x} = \frac{x\cdot(x+3)\cdot(x-4)}{x\cdot(x-3)\cdot(x-4)} = \frac{x+3}{x-3}$; f wurde bei $x = 0$ und $x = 4$ stetig ergänzt.

i) $2x^2 + 12x + 16 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2, x_2 = -4 \Rightarrow 2x^2 + 12x + 16 = 2 \cdot (x + 2) \cdot (x + 4)$;

$x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -2 \Rightarrow x^3 - 4x = x \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)$;

$\frac{2x^2+12x+16}{x^3-4x} = \frac{2\cdot(x+2)\cdot(x+4)}{x\cdot(x-2)\cdot(x+2)} = \frac{2(x+4)}{x(x-2)}$; f wurde bei $x = -2$ stetig ergänzt.

j) $\bar{f}(-1) = 2$; *k)* $\bar{f}(0) = 2$; *l)* $\bar{f}(1) = 0$; *m)* $\bar{f}(0) = -\frac{1}{4}$; $\bar{f}(-2) = -\frac{1}{8}$; *n)* $\bar{f}(-1) = \frac{2}{3}$; $\bar{f}(3) = 0$.

o) $f(x) = \frac{(x-2)^3(x+3)^4(x-5)^3}{(x-2)^2(x-3)^4(x-5)^3} = \frac{(x-2)(x+3)^4}{(x-3)^4}$ stetig ergänzbar bei $x = 2$: $\bar{f}(2) = \frac{(2-2)(2+3)^4}{(2-3)^4} = 0$ und $x = 5$: $\bar{f}(2) = \frac{(5-2)(5+3)^4}{(5-3)^4} = 768$.

p) $x^4-5x^2+4=0 \Leftrightarrow$ mit $w=x^2$: $w^2-5w^1+4=(w-4)\cdot(w-1) =^{RS} (x^2-4)\cdot(x^2-1) =^{BinF}$ $(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x+1)$ $x^4-x^2=x^2\cdot(x-1)\cdot(x+1)$

$\frac{x^4-5x^2+4}{x^4-x^2}=\frac{(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x+1)}{x^2\cdot(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x^2}$; f wurde bei $x=\pm2$ stetig ergänzt.

p) $x^4-2x^2+1=0 \Leftrightarrow$ mit $w=x^2$: $w^2-2w^1+1=(w-1)^2 =^{RS} (x^2-1)^2 =^{BinF} (x-1)^2\cdot(x+1)^2$

$x^4-2x^3+x^2=x^2\cdot(x-1)^2$,

$\frac{x^4-5x^2+4}{x^4-2x^3+x^2}=\frac{(x-1)^2\cdot(x+1)^2}{x^2\cdot(x-1)^2}=\frac{(x+1)^2}{x^2}$; f wurde bei $x=-1$ stetig ergänzt.

Aufg. 118/312: (1) $\frac{1}{x-2}$; (2) $\frac{1}{(x-2)(x+1)}$; (3) $\frac{x+1}{(x+2)(x-1)}$; (4) $\frac{1}{(x-2)^2}$; a) $\frac{x-1}{(x-2)^2}$;

b) senkrechte Asymptote (sA) $x=-1$, $x=2$, Nst $x=1$; alle mit Vorzeichenwechsel (VZW)

damit ist $f(x)$ (vermutlich) von der Form $f(x)=a\cdot\frac{x-1}{(x+1)(x-2)}$;

weiterhin gilt $f(0)=0.5$ oder $f(0)=0.5=a\cdot\frac{0-1}{(0+1)(0-2)}=0.5\cdot a$ also $a=1$.

c) $\frac{x-1}{x+1}$; d) $\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$; e) $\frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+2)}$; f) $\frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-2)^2(x+2)}$; g) $\frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)^2}$;
h) $\frac{(x-2)(x+1)}{(x-3)(x-1)}$; i) $\frac{x^3}{(x-2)^2(x+2)}$; j) $\frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)^2(x+2)^2}$; k) $x+\frac{1}{x-1}$; l) $x+\frac{2}{(x-1)(x+1)}$; m) $x-1+\frac{1}{(x-1)^2}$;

n) $2((x-1)(x-3)(x+1))/((x-2)*(x+2)^2)$; o) $-(x-3)(x-1)/((x+1)(x-2))$;

p) $-2(x-3)(x-1)^2/((x+1)^2(x-2))$;

Aufg. 118/313: a) $\frac{x-1}{x+1}$: sA: $x=-1$, wA: $y=1$, $N(1;0)$, $P(0;-1)$;

b) $\frac{(x-2)^2}{(x-1)\cdot(x+1)}$: sA: $x=-1$, $x=1$, wA: $y=1$, $N(2;0)$, (doppelt) $P(0;-4)$;

c) $\frac{2(x-1)^2}{(x-2)^2}$: sA: $x=2$, (ohne VZW) wA: $y=2$, $N(1;0)$, (doppelt) $P(0;\frac{1}{2})$;

d) $\frac{(x-2)(x+2)}{(x+3)\cdot(x+1)\cdot(x-1)}$: sA: $x=-3, x=-1, x=1$ (alle mit VZW) wA: $y=0$, $N(\pm2;0)$, $P(0;\frac{4}{3})$;

e) $\frac{(x-2)(x+2)^2}{(x-1)^2\cdot(x+1)}$: sA: $x=1$, (ohne VZW) $x=-1$, wA: $y=1$, $N(-2;0)$, (doppelt) $N(2;0)$, $P(0;-8)$;

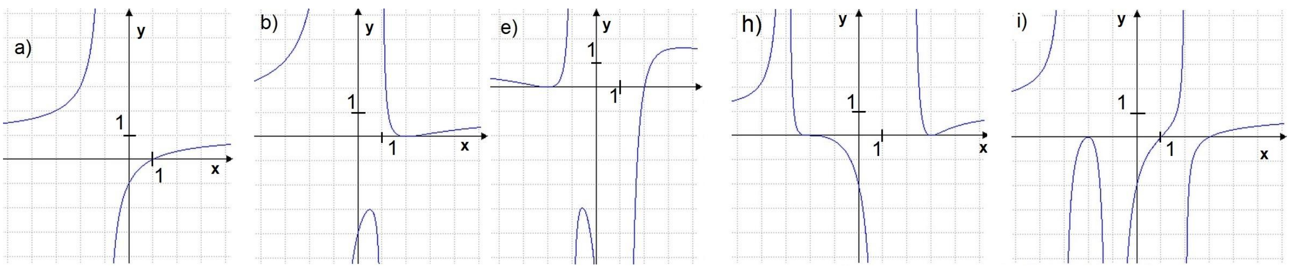
f) $\frac{(x-2)(x+2)^2}{(x+3)^2\cdot(x-3)}$: sA: $x=-3$, (ohne VZW) $x=3$, wA: $y=1$, $N(-2;0)$, (doppelt) $N(2;0)$, $P(0;\frac{8}{9})$;

g) $\frac{2(x-2)^2(x+1)}{(x-1)^2\cdot(x+2)}$: sA: $x=1$, (ohne VZW) $x=-2$, wA: $y=2$, $N(2;0)$, (doppelt) $N(-1;0)$, $P(0;4)$;

h) $\frac{(x-3)^2(x+2)^3}{(x+3)^2(x-2)^2(x-1)}$: sA: $x=2$, (ohne VZW) $x=1$, $x=-3$, wA: $y=1$, $N(3;0)$, (doppelt) $N(3;0)$, (dreifach) $P(0;-2)$;

i) $\frac{(x-1)(x+2)^2(x-3)}{(x+1)^2(x-2)(x+3)}$: sA: $x=-1$, (ohne VZW) $x=2$, $x=-3$, wA: $y=1$, $N(-2;0)$, (doppelt) $N(1;0)$, $N(3;0)$, $P(0;-2)$; (Abb. 308)

j) $\frac{(x-3)^2(x+1)(x-4)}{(x+2)^2\cdot(x-1)^3\cdot2(x-4)}=\frac{(x-3)^2(x+1)}{2(x+2)^2\cdot(x-1)^3}$: sA: $x=-2$, (ohne VZW) $x=1$ (mit VZW), wA: $y=0$, $N(3;0)$, (doppelt) $N(-1;0)$, bei $x=4$ stetig ergänzbar, $P(0;-1.125)$;



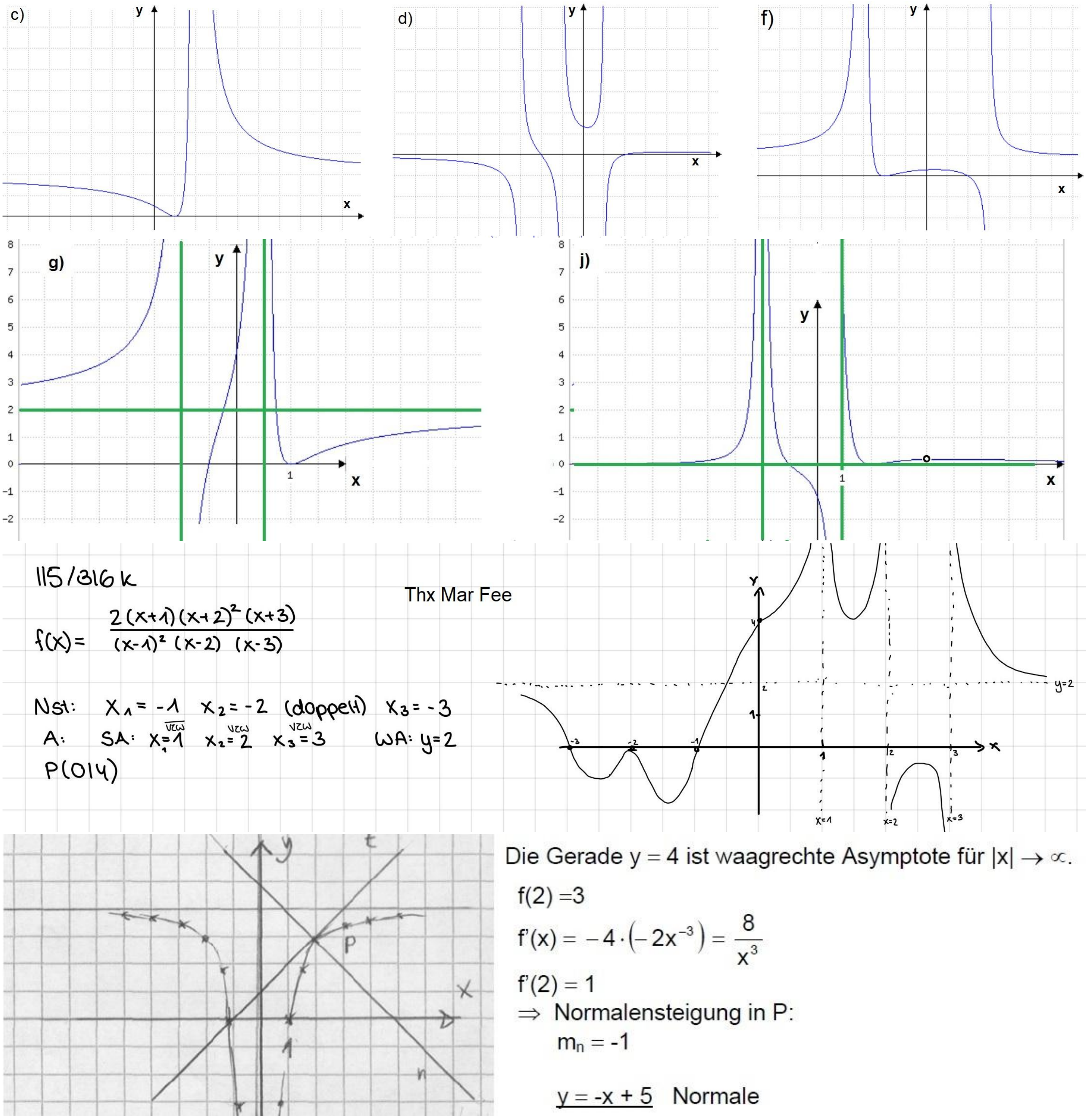


Abb. 308 Zeichnen gebrochenrationaler Funktionsgraphen

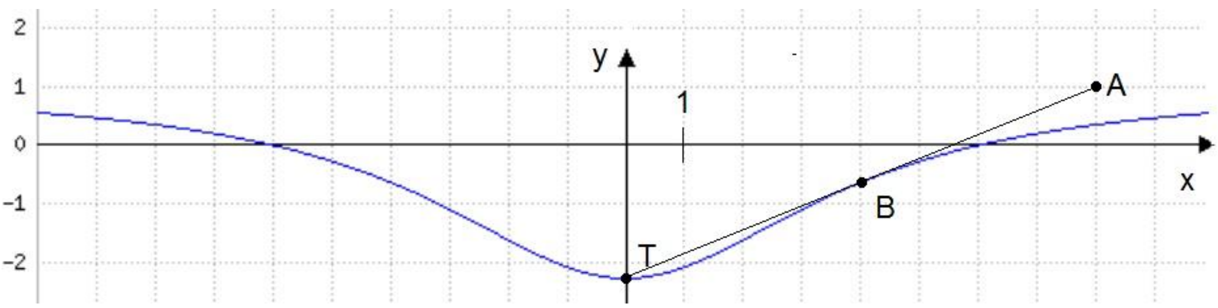


Abb. 309 Tangente durch externe Punkte

Aufg. 118/314: a) Aus $f_t(x_1) = f_t(x_2)$ folgt $2x_1x_2 - 2tx_1 = 2x_1x_2 - 2tx_2$ damit $x_1 = x_2$ $\bar{f} = f^{-1} = \frac{tx}{x-2}$ also $t = 2$.

b), i) falsch, die Graphen von $f(x) = \frac{2}{x-1}$ und $\bar{f}(x) = f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x}$ haben verschiedene senkrechte (und waagrechte) Asymptoten.

ii) richtig, siehe vii); eine senkrechte Asymptote wird bei der Spiegelung an der 1.Winkelhalbierenden zu einer waagrechten und umgekehrt.

c) i) $x = 2$; $y = 2.5$; iii) $g(x)$ ist umkehrbar und die Abbildungen ändern daran nichts. $\frac{5y}{2y-4} = x$ $\xLeftrightarrow{\cdot(2y-4)} 5y = x \cdot (2y-4) \Leftrightarrow 5y = 2xy - 4x \Leftrightarrow 2xy - 5y = 4x \Leftrightarrow y(2x-5) = 4x \Leftrightarrow y = \frac{4x}{2x-5}$.

Aufg. 118/315: $f'(x) = (\frac{x^2-36}{x^2+16})' = \frac{2x(x^2+16)-2x(x^2-36)}{(x^2+16)^2} = \frac{2x^3+32x-2x^3+72x}{(x^2+16)^2} = \frac{104x}{(x^2+16)^2}$;

Der tiefste Punkt des Kanals gilt hier als externer Punkt, weil dort die gesuchte Tangente gar nicht berührt (Abb. 309).

$y = f'(u)(x-u) + f(u) \Leftrightarrow y = \frac{104u}{(u^2+16)^2}(x-u) + \frac{u^2-36}{u^2+16}$; den tiefsten Punkt $T(0; -2.25)$ eingesetzt:

$-2.25 = \frac{104u}{(u^2+16)^2}(0-u) + \frac{u^2-36}{u^2+16} \Leftrightarrow -2.25(u^2+16)^2 = 104u(0-u) + (u^2-36)(u^2+16) \Leftrightarrow -2.25u^4 - 72u^2 - 576 = -104u^2 + u^4 - 20u^2 - 576 \Leftrightarrow u^2(3.25u^2 - 52) \Leftrightarrow u = 0, \pm 4$;

Die Ag wird mit $u = +4$ weitergeführt: $f(4) = -0.625 \Rightarrow B(4; -0.625)$. $f'(4) = \frac{13}{32}$;
Tg: $y = \frac{13}{32}(x-4) - \frac{5}{8}$; $y = 1$: $1 = \frac{13}{32}(x-4) - \frac{5}{8} \Leftrightarrow x = 8; \Rightarrow A(8; 1)$
Das Kind muss also (mind) $8 - 6 = 2m$ vom Ufer entfernt stehen.

Aufg. 118/316: a) K_f geht durch $(5; 95)$, $(20; 56)$; $\frac{5a+b}{5+5} = 95 \Rightarrow 5a + b = 950$,

$\frac{20a+b}{20+5} = 56 \Rightarrow 20a + b = 1400; \Rightarrow a = 30, b = 800 \Rightarrow f(x) = \frac{30x+800}{x+5}$;

b) $f(x) = 40 \Leftrightarrow x = 60$, Ab der 61. PE ist sind die Produktionskosten geringer als 400000 €.

c) $f'(x) = \frac{30(x+5)-(30x+800)}{(x+5)^2} = \frac{-650}{(x+5)^2} < 0$ damit ist f smf für $x \geq 0 \Rightarrow$ die Herstellungskosten sinken.
Bem: Die Quotientenregel ist seit 2012 auf dem Themenfriedhof (LK revived).

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{30x+800}{x+5} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(30x+800)\cdot\frac{1}{x}}{(x+5)\cdot\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{30+\frac{800}{x}}{1+\frac{5}{x}} = 30$;

Langfristig sind mit 300000 € Produktionskosten pro PE zu rechnen.

Aufg. 119/317: a) K_f hat bei Nennernullstellen (die keine Zählernullstellen sind) eine senkrechte Asymptote. $(x^2-16)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 4$, K_f hat die sA $x = -4$ und $x = 4$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 6 \Rightarrow K_f$ hat die wA $y = 6$.

b) Nenner$= (x-4)^2 \cdot (x+4)^2$, die Nennernullstellen sind doppelt, damit wechselt f das Vz nicht.

c) $f'(x) = (6 - 100(x^2-16)^{-2})' = (-2) \cdot (2x) \cdot (-100) \cdot (x^2-16)^{-3} = \frac{400x}{(x^2-16)^3} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Damit kann f höchstens bei $x = 0$ eine Extremstelle haben. $f'(x)$ wechselt bei $x = 0$ das Vorzeichen von $+$ nach $-$, deshalb hat f bei $x = 0$ ein Maximum.

Aufg. 120/318: a) $f(x) = \frac{120}{x^2+20} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 10$; damit ist der Wall $10 - (-10) = 20m$ breit.

b) K_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse $\Leftrightarrow f(-x) = f(x)$;

$f(-x) = \frac{120}{(-x)^2+20} - 1 = \frac{120}{x^2+20} - 1 = f(x)$. Damit hat der Wall einen as Querschnitt.

c) $f''(x) = 0 \Rightarrow x \approx \pm 2.58$; $|f'(\pm 2.58)| \approx 0.87 < 100\%$; Damit bleibt das Gefälle unter 100%.

Aufg. 120/319: $f_2(x) = \frac{4}{x^3+8}$; a) $x^3 + 8 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2 \Rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$;

b) $x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow$ sA $x = -2$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4}{x^3+8} = 0 \Rightarrow$ wA $y = 0$;

c) $(\frac{4}{x^3+8})'' = (\frac{-12x^2}{(x^3+8)^2})' = -\frac{24x\cdot(x^3+8)^2 - 12x^2\cdot 2\cdot 3x^2\cdot(x^3+8)}{(x^3+8)^4} = -\frac{24x\cdot(x^3+8) - 72x^4}{(x^3+8)^3} = \frac{48x^4-192x}{(x^3+8)^3}$;

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 48x^4 - 192x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = \sqrt[3]{4}$; Auf die hinreichende Bedingung kann wg der Voraussetzung 'Das Schaubild K_2 besitzt genau zwei Wendestellen' verzichtet werden.

d) $f_a'(x) = \frac{-12x^2}{(x^3+4a)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow Q_a(0/\frac{1}{a})$; Alle Punkte liegen auf der y-Achse $x = 0$; Der Ursrung ist keiner dieser Punkte.

Aufg. 120/320: a) $f'(t) = \frac{3900000(t^4-10000)}{(t^4+30000)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 10$. Da $t \geq 0$ ist, gilt $x_1 = 10$.
$f(10) = 325$. 10 Stunden nach Beobachtungsbeginn ist die momentane Ankunftsrate 325 $\frac{KFZ}{h}$.

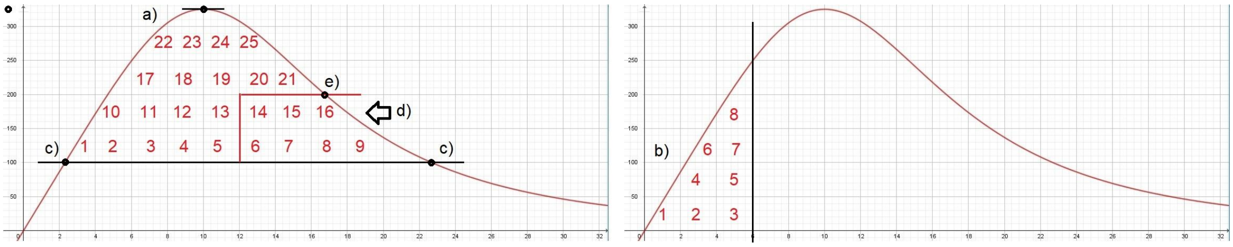


Abb. 310 Stau an der Grenze

Die Aufgabenteile b-d können nicht elementar gerechnet sondern nur aus dem Schaubild abgelesen werden.

b) Ein Rechteck $50\frac{KFZ}{h} \cdot 2h = 100$ KFZ. Gezählt werden 8 Rechtecke also 800 KFZ (GTR: 769).

c) $f(t) = 100$ abgelesen $x_2 \approx 2.3$ oder $x_3 \approx 22.7$. 2.3 h nach Beobachtungsbeginn beginnen sich die KFZ zu stauen; 22.7 h nach Beobachtungsbeginn beginnt sich der Stau aufzulösen.

d) Ein Rechteck entspricht 100 KFZ. Gezählt werden 25 Rechtecke also 2500 KFZ (GTR: 2523).

e) (Geht nur durch ablesen aus dem Schaubild) Gezählt werden jetzt 7 Rechtecke weniger Rechtecke also 1800 KFZ (zum Zeitpunkt 16.8) (GTR: $\int_{2.3}^{12}(f(t)-100)dt + \int_{12}^{16.8}(f(t)-200)dt \approx 1518 + 266 = 1784$).

Aufg. 120/321: a) $f(x) = \frac{30}{(x-4)^2+1} - 3 = 0 \overset{+3 \quad \cdot(x-4)^2+1}{\Longleftrightarrow} 30 = 3 \cdot ((x-4)^2 + 1) \overset{:3 \quad -1}{\Longleftrightarrow}$

$9 = (x-4)^2 \Leftrightarrow \pm 3 = x - 4 \Leftrightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 7$.

waagrechte Asymptote: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{30}{(x-4)^2+1} - 3[= \frac{30}{(\infty-4)^2+1} - 3 = \frac{30}{\infty} - 3] = -3 \Rightarrow$

K_f hat die waagrechte Asymptote $y = -3$.

senkrechte Asymptote: Nenner 0 setzen: $(x-4)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 = -1$ ↯; der Nenner hat keine Nullstelle, damit hat K_f keine senkrechte Asymptote.

Gesucht ist der Lehrer Günter Späth. Er unterrichtete Geschichte am FSG Marbach und rief die FFL ins Leben. Ein Stadion ist noch nicht nach ihm benannt, wohl aber der Siegerpokal der FFL. Für mich ist Herr Späth ein Vorbild, weil ich alterstechnisch mindestens so lange fußballspielen möchte, wie er. Mit über 70 spielt er immer noch beim Mittwochskick.

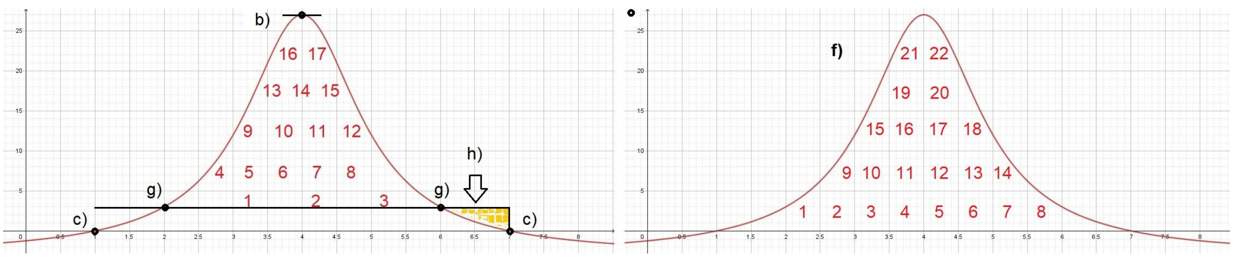


Abb. 311 *Schneegestöber*

b) Es schneit also zwischen 11.00 Uhr und 17.00 Uhr.

c) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-30\cdot 2(x-4)}{((x-4)^2+1)^2} = 0 \xLeftrightarrow{\cdot((x-4)^2+1)^2 \quad :(-30)} 2(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 4.$ $f'(3) = 15,\ f'(5) = -15$
VZW $+ \to - \Rightarrow H(4;27)$.

Um 14.00 Uhr schneit es am stärksten, nämlich 27 $\frac{cm}{h}$.

d) Sei $F(x)$ die Schneehöhe auf dem Rasen, dann ist für $1 \leq x \leq 7$ $F'(x) = f(x)$. Weil $f(x)$ die Scheemenge pro Stunde in $\frac{cm}{h}$ nur im Bereich $f(x) > 0$ beschreibt, ist $F'(x) \geq 0$ und damit $F(x)$ monoton wachsend. Um 17.00 Uhr hört das Schneien auf, deshalb ist ab 17.00 Uhr die Schneehöhe auf der Wiese konstant.

e) $\int_1^4 f(t)dt \approx 28.47$ bedeutet, dass gegen 14.00 Uhr etwa 28.47 cm Schnee auf dem Rasen liegen.

f) Aus Symmetriegründen ist $\int_1^7 f(t)dt = 2\cdot\int_1^4 f(t)dt \approx 2\cdot 28.47 = 56.94$. Die Schneehöhe kann auch als Fläche abgelesen werden. Ein Rechteck steht dann für $5\frac{cm}{h}\cdot 0.5h = 2.5cm$. Gezählt wurden 22 Rechtecke also $22\cdot 2.5 = 55$ cm. Dies bedeutet, dass gegen Ende des Schneegestöbers (=17.00 Uhr also auch gegen 20.00 Uhr) der Schnee etwa $55cm$ hoch auf dem Rasen liegt.

Dachteil

g) $f(x) = \frac{30}{(x-4)^2+1} - 3 = 3 \xLeftrightarrow{+3 \quad \cdot(x-4)^2+1} 30 = 6\cdot((x-4)^2+1) \xLeftrightarrow{:6 \quad -1} 4 = (x-4)^2 \Leftrightarrow$

$x_3 = 2$ und $x_4 = 6$. Zwischen 12.00 Uhr und 16.00 Uhr wächst die Schneehöhe auf dem Dach an. Damit ist um 16.00 Uhr die Schneedecke auf dem Dach maximal.

$\int_2^6 (f(t)-3)dt \approx 17$ Rechtecke $= 17\cdot 2.5 = 42.5$ cm (GTR 42.43).

Die maximale Schneehöhe auf dem Dach ist etwa 42.5 cm.

h) In der Zeit zwischen 16.00 Uhr und 17.00 Uhr schmilzt etwa ein halbes Rechteck (dies sind 1.5 cm; GTR 1.74) Damit ist die Schneehöhe am Ende des Schneegestöbers etwa (GTR: 40.96).

Es dauert dann $40.96/3 \approx 13.65$ Stunden bis der Schnee geschmolzen ist (17+13.56−24=6.56). Der Schnee ist also am nächsten Tag gegen 6.30 Uhr vom Dach weggeschmolzen.

Aufg. 120/322: a) i) $f_1(x) = \frac{2x-2}{x+2} = \frac{2x+4-6}{x+2} = 2 - \frac{6}{x+2}$, $f_1'(x) = (2-6(x+2)^{-1})' = 6(x+2)^{-2} \neq 0$;

M: f_1 ist smw für $x \in (-\infty;-2)$ oder $(-2;\infty)$, die Monotonie geht nicht über die Lücke -2 hinweg.

A: s.A: $x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$, also sind die s.A. $x = -2$ mit VZW; w.A: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_1(x) = 2 \Rightarrow y = 2$ ist w.A.

D: $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}\backslash\{2\}$.

N: $2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$, also $N(1;0)$.

E: keine

S: Es ist keine einfache Symmetrie erkennbar; tatsächlich ist K_{f_1} ps zum Asymptotenschnittpunkt $(-2;2)$ (ohne Beweis) /muss als Minimalanforderung nicht erkannt werden.

S: Stetig: Das ist so eine Frage, denn nach Abschnitt 5.13 ist f_1 auf seinem Definitionsbereich stetig; aber nicht stetig ergänzbar. (Abb. 312)

ii) $f_2(x) = \frac{x^2-4}{x^2-1} = \frac{x^2-1-3}{x^2-1} = 1 - \frac{3}{x^2-1}$, $f_2'(x) = (1-3(x^2-1)^{-1})' = 6x\cdot(x^2-1)^{-2}$;

M: f_2 ist smf für $x \in (-\infty;-1)$ oder $(-1;0)$, die Monotonie geht nicht über die Lücke -1 hinweg.

A: s.A: $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$, also sind die s.A. $x = -1$ oder $x = 1$; beide Asymptoten mit VZW; w.A: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_2(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ ist w.A.

D: $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$, $\mathbb{W} = (-\infty; 1) \cup (4; \infty)$, zwischen $H(0;4)$ und der w.A. werden keine Funktionswerte angenommen.

N: $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$, also $N(\pm 2; 0)$.

E: $6x \cdot (x^2-1)^{-2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ Klass: $f'(-0.5) = -5.\bar{3}$, $f'(0.5) = 5.\bar{3} \Rightarrow H(0;4)$.

S: $f_2(-x) = f_2(x)$; die Funktion ist gerade also ist K_{f_2} achsensymmetrisch (as) zur y-Achse.

S: ja; analog zu $f_1(x)$. (Abb. 312)

iii) $f_3(x) = \frac{4x}{x^2+1} = 4x \cdot (x^2+1)^{-1}$, $f_3'(x) = 4(x^2+1)^{-1} + 4x \cdot (-1) \cdot (2x) \cdot (x^2+1)^{-2}$

M: f_3 ist smf für $x \in [-1; 1]$.

A: s.A: $x^2 + 1 \neq 0 \Rightarrow$ keine s.A. w.A: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_3(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ ist w.A.

D: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{W} = [-2; 2]$. **N:** $x = 0$ also $N(0;0)$.

E: $f_3'(x) = \frac{4}{x^2+1} - \frac{8x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \cdot 0.25(x^2+1)^2\ x^2+1-2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$, $f_3'(-2) = -0.48$, $f_3'(0) = 4$, $f_3'(2) = -0.48 \Rightarrow T(-1;-2)$, $H(1;2)$;

S: $f_3(-x) = -f_3(x)$; die Funktion ist ungerade also ist K_{f_3} punktsymmetrisch (ps) zur y-Achse.

S: Stetig: Ja (selbst nach einfachen Kriterien). (Abb. 312)

iv) $f_4(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$, **M:** f_4 ist smw für $x \in [0; 1)$ außerhalb also für $x \in (-\infty; 0]$ und für $x \in (1; \infty)$ ist f smw.

A: s.A: $(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow$ s.A. $x = 1$ ohne VZW; w.A: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_4(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ ist w.A.

D: $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $\mathbb{W} = [0; \infty)$; **N:** $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ also $N(0;0)$ (doppelt).

E: $f_4'(x) = \frac{2x(x-1)^2 - x^2 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2x(x-1) - 2x^2}{(x-1)^3} = \frac{2x^2 - 2x - 2x^2}{(x-1)^3} = \frac{-2x}{(x-1)^3}$, $f_4'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $f_4'(-1) = -0.25$, $f_4'(0.5) = 8 \Rightarrow T(0;0)$;

S: K_{f_4} ist nicht symmetrisch; **S:** Stetig: siehe Teil a). (Abb. 312)

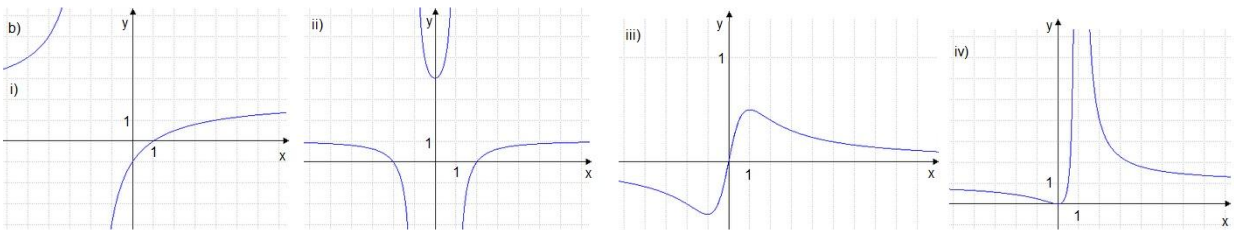


Abb. 312 Gebrochenrationale Funktionen

c) **i)** $P(0;-1)$, $N(1;0)$, s.A: $x = -1$, w.A: $y = 1$, $\frac{x-1}{x+1}$;
ii) $P(0; 0.25)$, $N(\pm 1; 0)$, s.A: $x = -1$, w.A: $y = 1$, $\frac{x^2-1}{x^2-4}$;
iii) $P(0;-3)$, $N_1(-1;0)$, $N_2(3;0)$, s.A: $x = -1$, oVZW w.A: $y = 1$, $\frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^2}$;
iv) $P(0;1)$, $N(1;0)$ (doppelt), s.A: $x = -1$, oVZW w.A: $y = 1$, $\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$.

Erklärung zur Zwillingsaufgabe im Cartoon in Abs 125/5.7.2:

Gesucht ist hier ein Gedicht von Robert Gernhardt. Es heißt 'Deutung eines allegorischen Gemäldes':

Fünf Männer seh ich inhaltsschwer;	wer sind die fünf?	wofür steht wer?
Des ersten Wams strahlt blutigrot;	das ist der Tod	das ist der Tod.
Der zweite hält die Geißel fest;	das ist die Pest	das ist die Pest.
Der dritte sitzt in grauem Kleid;	das ist das Leid	das ist das Leid.

Des vierten Schild trieft giftignaß;	das ist der Haß	das ist der Haß.
Der fünfte bringt stumm Wein herein;	das wird der	Weinreinbringer sein.

Und dieses Gedicht gefällt meiner Frau besonders gut ... ok sie hat auch mich geheitatet .. ok keine weiteren Bemerkungen dazu.

15.6 LöVo zu Kapitel 6: Differenzialrechnung

15.6.1 LöVo zu Einheit 6.1 (Differenzialrechnung UE 10_3) Seite 590-667

Aufg. 137/323: Das Zimmer 1 wird frei und jeder Gast hat immer noch ein Zimmer. Algebraische Interpretation: $\infty + 1 = \infty$.

Aufg. 137/324: a) $a + \infty = \infty$, $a - \infty = -\infty$, $a \cdot \infty = \infty$ (falls $a > 0$), $a \cdot \infty = -\infty$ (falls $a < 0$), $a \cdot \infty =$ undefiniert (falls $a = 0$), $\frac{a}{\infty} = 0$ $\infty + \infty = \infty$, $\infty \cdot \infty = \infty$

b)

x	1	0.1	0.01	0.001	0.0001	0
$\frac{1}{x}$	1	10	100	1000	10000	∞

$\frac{1}{0}$ kann auch $-\infty$ sein. $\frac{0}{0} = 0 \cdot \frac{1}{0} = 0 \cdot \infty$ also undefiniert, $\frac{\infty}{\infty} = \infty \cdot \frac{1}{\infty} = \infty \cdot 0$ also undefiniert, $\infty - \infty$ könnte z.B. $\lim\limits_{x\to\infty} x - 2x$ (also $-\infty$) oder $\lim\limits_{x\to\infty} x - x$ (also 0) sein. Damit ist $\infty - \infty$ undefiniert, 1^∞ ist auch undefiniert - dies wird in Abschnitt 4.2.7 behandelt.

Aufg. 138/325: a) Folgende Antwort wird erwartet: Linda formt ihren Vater so um, dass sie trotzdem gehen darf. Andere Antworten sind aber auch möglich.

Der Begriff limes ist (nach Sd) definiert als

1) Man darf es [eventuell] nicht

2) Man formt es [eventuell] um

3) Man tut es [eventuell] trotzdem

b) $\frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n} \to 2 + \frac{1}{\infty} = 2$, aber $\frac{2n+1}{n} \to \frac{\infty}{\infty}$ geht nicht.

n	1	10	100	1000	10000	...	∞
$\frac{2n+1}{n}$	3	2.1	2.01	2.001	2.0001		2

Aufg. 138/326: a) 1, b) 2, c) -1, d) -3,

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n+1)\cdot\frac{1}{n}}{(2n-1)\cdot\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} = \frac{3+0}{2-0} = 1.5$; f) 1,

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-n^2}{n^2-2n+5} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n-n^2)\cdot\frac{1}{n^2}}{(n^2-2n+5)\cdot\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{2}{n}-1}{1-\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}} = \frac{0-1}{1-0+0} = -1$; i) $\frac{1}{3}$;

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^3\cdot\frac{1}{n^3}}{(2n^3+1)\cdot\frac{1}{n^3}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{2+\frac{1}{n^3}} = \dfrac{3}{2+0} = 1.5$; k) $\frac{-1}{2}$, l) $\frac{-1}{2}$, m) 0,

n) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(5n^4+2n^3+1)\cdot\frac{1}{n^4}}{(2n^4+n^2+4n)\cdot\frac{1}{n^4}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^4}}{2+\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^3}} = \frac{5+0+0}{2+0+0} = 2.5$

o) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(7n^4+2n^3-6n^2+3n-10)\cdot\frac{1}{n^4}}{(4n^4-3n^3+6n^2-40n+100)\cdot\frac{1}{n^4}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7+\frac{2}{n}-\frac{6}{n^2}+\frac{3}{n^3}-\frac{10}{n^4}}{4-\frac{3}{n}+\frac{6}{n^2}-\frac{40}{n^3}+\frac{100}{n^4}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7+0-0+0-0}{4-0+0-0+0} = 1.75.$

p) 1.5; p) 0; q) 0;

Aufg. 138/327: a) 2, b) 3, c) -2, d) 2.

Aufg. 138/328: a) (0.5/285350) und (1/285390). b) $\bar{v} = \frac{f(1)-f(0.5)}{1-0.5} = \frac{285390-285350}{1-0.5} = 80$ km/h (ZPF). c) $\bar{v}$ ist eine mittlere Geschwindigkeit, die Radarfalle versucht aber die Momentangeschwindigkeit zu messen also 'ja'. d) $\bar{v} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

e) Die Durchschnitts- Geschwindigkeit entspricht der Sekantensteigung der Weg-Zeit Funktion.

f) $\bar{v} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$; i) $x_1 = 2,\ f(x_1) = 5,\ x_2 = 3,\ f(x_2) = 7,\ \bar{v} = \frac{7-5}{3-2} = 2$;

ii) $x_1 = 1,\ f(x_1) = 1,\ x_2 = 3,\ f(x_2) = 7,\ \bar{v} = \frac{7-1}{3-1} = 3$;

iii) $x_1 = 0,\ f(x_1) = 0,\ x_2 = 2,\ f(x_2) = 4,\ \bar{v} = \frac{4-0}{2-0} = 2$;

iv) $x_1 = 1,\ f(x_1) = 2,\ x_2 = 5,\ f(x_2) = 30,\ \bar{v} = \frac{30-2}{5-1} = 7$.

v) $\bar{v} = \frac{3^2-(-2)^2}{3-(-2)} = \frac{9-4}{3+2} = 1$; vi) $\bar{v} = \frac{0-(-1)}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$; vii) $\bar{v} = \frac{-27-(-7)}{4-(-1)} = -4$;

g) Die Differenz $f(x+a) - f(x)$ heißt Änderungsrate zum Zeitschritt $\underline{a}$.

h) mÄR $= \frac{f(x+a)-f(x)}{x+a-x} = \frac{f(x+a)-f(x)}{a}$.

Aufg. 139/329: a,b) Sie misst die mittlere Geschwindigkeit zwischen zwei sehr nahen Punkten und interpretiert die als Momentangeschwindigkeit. Dies geschieht durch eine Zeitmessung zwischen zwei nahen Laserstrahlen. Der dritte Strahl macht eine Kontrollmessung. c) Wenn der Abstand =0 wäre. d) $\bar{v} = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x}$; $v(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (auswendig).

e) $f(x+h) = 2(x+h) - 1$; $f(x+h) = (x+h)^2$; $f(x+h) = (x+h)^2 - 6(x+h)$; $f(x+h) = 2 + 3(x+h) - (x+h)^3$;

Aufg. 139/330: a) $\bar{v}_0(2) = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{3-2}{2-0} = 0.5$,

b) Wenn eine Wegzeitfunktion von der Form $y = mx + c$ ist, dann ist die Momentangeschwindigkeit $= \underline{m}$. Es handelt sich also um eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit.

c) Statt der Momentangeschwindigkeit $v(x_0)$ (zum Zeitpunkt x_0) einer Weg-Zeit Funktion $f(x)$ schreiben wir künftig $v(x_0) = f'(x_0)$ (**Ableitungs**funktion) (e: *derived function*).

d) $v(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0.5(x+h)+2-(0.5x+2)}{h} = 0.5$; $v(x) = m$; e) 0; 0.6; 1.2;

Aufg. 139/331:

$$v(x_0) = f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

a) $$\lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x_0+h)}{h} = 2x_0;$$

b) $$\lim_{h\to 0} \frac{10(x_0+h)^2 - 10x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(20x_0+h)}{h} = 20x_0;$$

c) $$\lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 + (x_0+h) - (x_0^2+x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 + x_0 + h - x_0^2 - x_0}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{2x_0h + h^2 + h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x_0+h+1)}{h} = 2x_0 + 1;$$

d) **Beispiel:** Sei $f(x) = x^2 - 3x + 4$: $v(x_0) = m(x_0) = f'(x_0)$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - 3(x_0+h) + 4 - (x^2 - 3x + 4)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - 3x_0 - 3h + 4 - x^2 + 3x - 4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2x_0h + h^2 - 3h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x_0+h-3)}{h} = 2x_0 - 3.$$

e) $$\lim_{h\to 0}\frac{3(x_0+h)^2+4(x_0+h)-(3x_0^2+4x_0)}{h}=$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{3x_0^2+6x_0h+3h^2+4x_0+4h-3x_0^2-4x_0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(6x_0+3h+4)}{h}=6x_0+4.$$

f) $$\lim_{h\to 0}\frac{2(x_0+h)^2+3(x_0+h)+1-(2x_0^2+3x_0+1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{2(x_0^2+2x_0h+h^2)+3x_0+3h+1-2x_0^2-3x_0-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2x_0^2+4x_0h+2h^2+3h-2x_0^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{4x_0h+4h^2+3h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(4x_0+4h+3)}{h}=\lim_{h\to 0}4x_0+4h+3=4x_0+3;$$

g) $$\lim_{h\to 0}\frac{5(x_0+h)-2(x_0+h)^2+3-(5x_0-2x_0^2+3)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{5x_0+5h-2(x_0^2+2x_0h+h^2)+3-5x_0+2x_0^2-3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5h-2x_0^2-4x_0h-2h^2+2x^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{5h-4x_0h-2h^2}{h}\ \lim_{h\to 0}\frac{h(5-4x_0-2h)}{h}=\lim_{h\to 0}5-4x_0-2h=5-4x_0;$$ h) fehlt;

i) $$f'(x_0)=\underline{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}.$$

Für Freaks: Das lim impliziert eine stetige Ergänzung von $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ an der Stelle $h=0$. Das $h=0$ darf nicht direkt h=0 einsetzen

1) Formulieren Sie den Differenzenquotienten mit Limes – setzen Sie aber noch nicht $\underline{h=0}$ ein.
2) Formen Sie den Zähler um, bis $\underline{f(x)}$ verschwindet.
3) Klammern Sie $\underline{h}$ aus (das sollte jetzt gehen).
4) Kürzen Sie $\underline{h}$.
5) Setzen Sie jetzt für $\underline{h=0}$ ein.

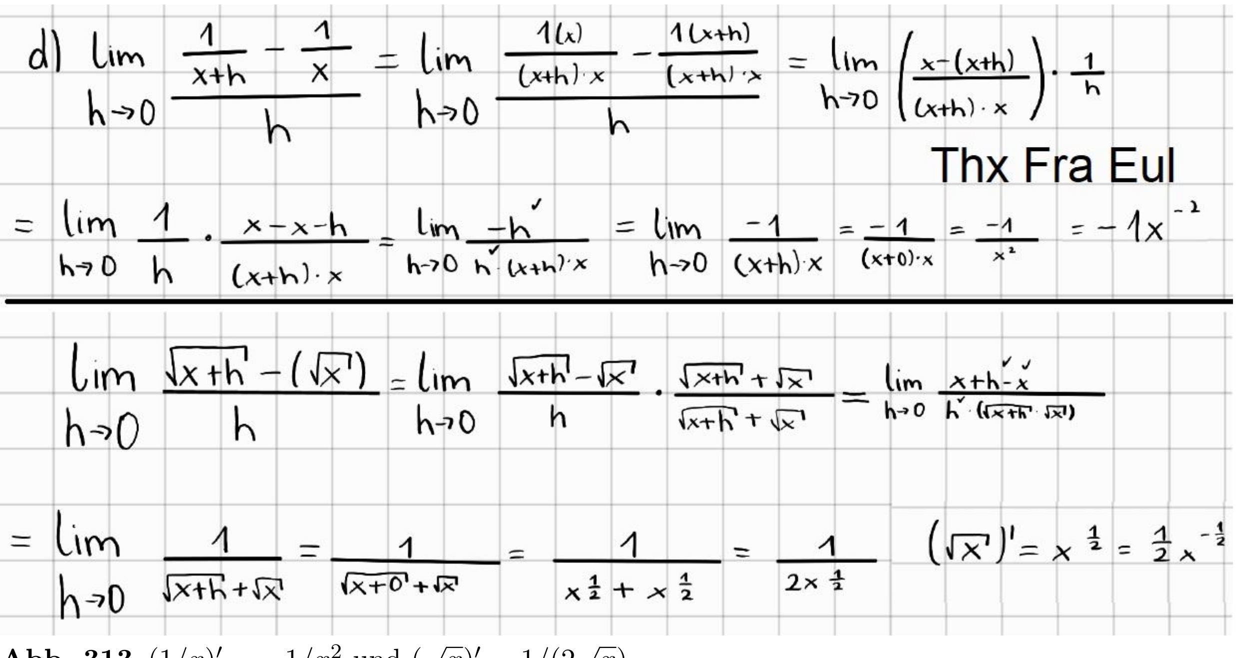


Abb. 313 $(1/x)'=-1/x^2$ und $(\sqrt{x})'=1/(2\sqrt{x})$

j) $$\lim_{h\to 0}\frac{4-(x_0+h)-0.5(x_0+h)^2-(4-x_0-0.5x_0^2)}{h}$$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{4-x_0-h-0.5(x_0^2+2x_0h+h^2)-4+x_0+0.5x_0^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-h-0.5x_0^2-x_0h-0.5h^2+0.5x_0^2}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-h-x_0h-0.5h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h\cdot(-1-x_0-0.5h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} -1-x_0-0.5h = -1-x.$

k) $\lim_{h\to 0} \frac{4(x+h)-2+3(x+h)^2-(4x-2+3x^2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4x+4h-2+3(x^2+2hx+h^2)-4x+2-3x^2}{h}$
$= \lim_{h\to 0} \frac{4h+3x^2+6hx+3h^2-3x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\cdot(4+6x+3h)}{h} = \lim_{h\to 0} 4+6x+3h = 4+6x;$

L) $\lim_{h\to 0} \frac{6-2(x+h)^2+3(x+h)-(6-2x^2+3x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6-2(x^2+2hx+h^2)+3x+3h-6+2x^2-3x}{h}$
$= \lim_{h\to 0} \frac{-2x^2-4hx-2h^2+3h+2x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\cdot(-4x-2h+3)}{h} = \lim_{h\to 0} -4x-2h+3 = -4x+3.$

m) $(3x^2-5x+7)' = 6x-5$, n) $(1-2x^2+4x)' = -4x+4$, o) fehlt; p) $-\frac{1}{x^2}$, q) $\frac{-1}{(x+1)^2}$, r) $\frac{-1}{2(x-1)^2}$, s) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, t) $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

Aufg. 139/332: a) $(x+h)^2 = x^2+2xh+h^2$, $(x+h)^3 = x^3+3x^2h+3xh^2+h^3$, $(x+h)^4 = x^4+4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4$, $(x+h)^5 = x^5+5x^4h+10x^3h^2+10x^2h^3+5xh^4+h^5$;
b) $f_2'(x) = 2x$, $f_3'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h} = \lim_{h\to 0} 3x^2+3xh+h^2 = 3x^2$, $f_4'(x) = 4x^3, f_5'(x) = 5x^4$;
c) $(x^n)' = nx^{n-1}$, $(x^n)' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n-x^n}{h}, = \lim_{h\to 0} \frac{x^n+nx^{n-1}h+h^2(\ldots)-x^n}{h} = nx^{n-1}$.
d) Ja, $(\frac{1}{x})' = (x^{-1})' = -x^{-2}$, $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.
Die exakten Beweise finden Sie in Abschnitt 14.11.2.

Aufg. 139/333: a) i) $(x^3)' = 3x^2$, ii) $(x^2)' = 2x$ iii) $(x)' = (x^1)' = 1x^0 = 1$, iv) $(1)' = (x^0)' = 0\cdot x^{-1} = 0$,
v) $(x^{-1})' = (-1)x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$, vi) $\frac{1}{x^2} = (x^{-2})' = (-2)x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$,
b) $(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = (1/2)x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$,

c) $(\frac{1}{x^3})' = (x^{-3})' = (-3)\cdot x^{-4}$,
d) $\left(\frac{1}{x}\right)^4 = (x^{-4})' = (-4)\cdot x^{-5}$, e) $(\sqrt[3]{x})' = (x^{1/3})' = (1/3)\cdot x^{-2/3}$,
f) $(x\sqrt{x})' = (x^{3/2})' = (3/2)\cdot x^{1/2}$, g) $(\frac{\sqrt{x}}{x})' = (x^{-1/2})' = (-1/2)\cdot x^{-3/2}$,
h) $((\sqrt[5]{x})^3)' = (x^{3/5})' = (3/5)\cdot x^{-2/5}$, i) $(\frac{1}{\sqrt[7]{x}})' = (x^{1/7})' = (1/7)\cdot x^{-6/7}$,
j) $(x^{k-1})' = (k-1)\cdot x^{k-2}$, k) $(x^{-m+6})' = (6-m)\cdot x^{5-m}$, L) $(\frac{1}{x^{k+3}})' = (-k-3)\cdot x^{-k-4}$,

Aufg. 139/334: a) $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$. Die Summe zweier Funktionen ist punktweise definiert.
b+c) $(x^3)' = 3x^2$, $(x^2)' = 2x$, $(x^3+x^2)' = 3x^2+2x$, $(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x)$.
Die Ableitung der Summe ist die Summe der Ableitungen.

$(f+g)'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)+g(x+h)-(f(x)+g(x))}{h}$
$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)+g'(x).$

Der Beweis enthält eine Lücke, weil dieser Stoff nicht mehr im Lehrplan vorgesehen ist. Zum exakten Beweis benötigen Sie noch die Formel aus Abschnitt 4.7.9.

d) i) $(x^4+x^5)' = 4x^3+5x^4$, ii) $(x^7+x^{-2}+x)' = 7x^6-2x^{-3}+1$,
iii) $(\frac{1}{x}+\sqrt{x}+1)' = (x^{-1}+x^{\frac{1}{2}}+x^0)' = (-1)x^{-2}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+0x^{-1} = -x^{-2}+0.5x^{-0.5}$, iv) $3x^2-3x^{-4}+\frac{1}{3}x^{-2/3}$

e) Nein: sei $f(x) = x^2$: $f(x_1+x_2) = (x_1+x_2)^2 \neq x_1^2+x_2^2$ (im Allgemeinen).

Aufg. 140/335: $(x^2)' = 2x$, $(7x^2)' = 14x$, $(a\cdot f)'(x) = a\cdot f'(x)$. $(a\cdot f)'(x) =$
$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(a\cdot f)(x+h)-(a\cdot f)(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{a\cdot f(x+h)-a\cdot f(x)}{h} = a\cdot \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} =$
$a\cdot f'(x)$. Der Beweis enthält (wieder) eine Lücke, weil dieser Stoff nicht mehr im Lehrplan vorgesehen ist. Sie benötigen noch die Formel aus Abschnitt 4.7.9.

Aufg. 140/336: **a)** $f_a'(x) = (x^3 + 2x^2)' = 3x^2 + 4x$; **b)** $f_b'(x) = (x^4 + 2x^3 + 4)' = 4x^3 + 6x^2$;
c) $f_c'(x) = 7x^7 + 4x^4 + x + 10 = 49x^6 + 16x^3 + 1$; **d)** $f_d'(x) = ((x+3)^2)' = (x^2 + 6x + 9)' = 2x + 6$;
e) $f_e'(x) = ((2x+5)^2)' = (4x^2 + 20x + 25)' = 8x + 20$;
f) $f_f'(x) = (\frac{1}{x} + \sqrt{x})' = (x^{-1} + x^{1/2})' = (-1)x^{-2} + 0.5x^{-1/2}$;
g) $f_g(x) = \frac{x+1}{x^3} = \frac{x}{x^3} + \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = x^{-2} + x^{-3}$, $f_g'(x) = (-2)x^{-3} + (-3)x^{-4} = \frac{-2}{x^3} - \frac{3}{x^4}$;
h) $f_h(x) = \frac{x^2+3x-2}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{3x}{x} - \frac{2}{x} = x + 3 - 2 \cdot x^{-1}$, $f_h'(x) = 1 + 0 + (-2)\dot{(} -1)x^{-2} = 1 + 2x^{-2} = 1 + \frac{2}{x^2}$;
i) $f_i(x) = \frac{(2x-3)^2}{x^2} = \frac{4x^2-12x+9}{x^2} = \frac{4x^2}{x^2} - \frac{12x}{x^2} + \frac{9}{x^2} = 4 - \frac{12}{x} + \frac{9}{x^2} = 4 - 12x^{-1} + 9x^{-2}$,
$f_i' = -12 \cdot (-1)x^{-2} + 9 \cdot (-2)x^{-3} = 12x^{-2} - 18 \cdot x^{-3} = \frac{12}{x^2} - \frac{18}{x^3}$;
j) $f_j(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$, $f_j'(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}}$;
k) $f_k(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x}} = x^{2-0.5} = x^{1.5}$, $f_k'(x) = 1.5x^{0.5} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x}$;
l) $f_l'(x) = (\frac{1}{3x} + \sqrt{3x})' = (\frac{1}{3} \cdot x^{-1} + \sqrt{3} \cdot x^{1/2})' = \frac{-1}{3} \cdot x^{-2} + 0.5\sqrt{3} \cdot x^{-1/2}$;
m) $f_m'(x) = (\frac{\sqrt{x}+3}{x})' = (\frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{3}{x})' = (x^{-1/2} + 3 \cdot x^{-1})' = -0.5 \cdot x^{-3/2} - 3 \cdot x^{-2}$;
n) $f_n'(x) = (x \cdot (\sqrt{x} + \frac{1}{x})^2)' = (x \cdot (x + 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})' = (x^2 + 2\sqrt{x} + \frac{1}{x})' = 2x + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} - x^{-2}$;

$f_o(x) = \frac{(2x+3)^2}{\sqrt{2x}} = \frac{4x^2+12x+9}{\sqrt{2}\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4x^2+12x+9}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{4x^2}{x^{0.5}} + \frac{12x}{x^{0.5}} + \frac{9}{x^{0.5}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(4x^{1.5} + 12x^{0.5} + 9x^{-0.5}\right)$;

$f_o'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(6x^{0.5} + 6x^{-0.5} - 4.5x^{-1.5}\right)$.

Aufg. 140/337:

a) $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{0.3 \cdot (x_0+h)^2 - 0.3 \cdot x_0^2}{h}$
$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{0.3 \cdot x_0^2 + 0.6 \cdot x_0 h + 0.3 \cdot h^2 - x_0^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} 0.6 \cdot x_0 + h = 0.6 \cdot x_0$; $s = \dfrac{a}{2}t^2$, $v = a \cdot t$, $s'(t) = v(t)$.

b) $f(x) = k \;\Rightarrow v(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{k-k}{h} = \lim\limits_{h \to 0} 0 = 0$. Beachten Sie, dass **zuerst** $k - k$ und damit der entsprechende Bruch gerechnet wird und erst **danach** $h \to 0$ geht.

c) Wenn eine Wegzeitfunktion von der Form $y = c$ ist, dann ist die Momentangeschwindigkeit $= \underline{0}$. Es handelt sich also um keine (wirkliche) Bewegung.

Aufg. 140/338: a) Die Punkte P und Q liegen auf dem Graph von f, es gilt also $P(x_1; f(x_1))$ und $Q(x_2; f(x_2))$. b) $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$; c) $P \to Q$ und die Sekante wird zur Tangente. Leiten Sie aus der Sekantensteigung die Tangentensteigung her.

d) Die (erste) Ableitung entspricht der Momentangeschwindigkeit und der Tangentensteigung: $f'(x_0) = v(x_0) = m(x_0)$. e) $2, 0, -2$

f) $\alpha = \tan^{-1}(m)$; $y = -x$ hat meines Erachtens nach einen Steigungwinkel von $-45°$. Ich akzeptiere (bei negativen Steigungen) auch einen Winkel von $135°$ (also $\tan^{-1}(m) + 180°$).

g) Eine Funktion $f(x)$ hat an der Stelle x_0 den Steigungswinkel $\alpha = \tan^{-1}(f'(x_0))$;

Aufg. 141/339: a) Die Rutschkurve ist eine Tangente;

b) $f'(x) = (4 - \frac{x^2}{2})' = 0 - 2 \cdot \frac{x^{2-1}}{2} = -x$, $f'(-3) = 3$;

c) Eine Tangente ist nichts weiter, als eine Gerade. Von dieser Tangente sind der Punkt $P(-3; -0.5)$ und die Steigung $= f'(-3) = 3$ bekannt. Damit kann die Tangente mit der PSF $y = m(x - x_0) + y_0$ berechnet werden.

d) es gilt $f'(x) = -x$, die Tgsteigung in Punkt P ist $f'(-3) = 3$, $t(x) = 3(x+3) + 0.5 = 3x + 9.5$;
$t_1(x) = 2(x+2) + 2 = 2x + 6$, $t_2(x) = 1(x+1) + 3.5 = x + 4.5$ und $t_3(x) = -u(x-u) + 4 - \frac{u^2}{2}$;

e) Allgemein geht eine Tangente an den Graph einer Funktion f durch den Punkt $B(u; \underline{f(u)})$ und hat dort die Steigung $\underline{f'(u)}$.

Allgemeine Tggleichung: $y = f'(u) \cdot (x-u) + f(u)$, B der Berührpunkt von f und der Tangente.

f) $f_1'(u) = (u^2)' = 2u$, Tggl: $y = 2u(x-u) + u^2$;

$f_2'(u) = (u^3)' = 3u^2$, Tggl: $y = 3u^2(x-u) + u^3$;

$f_3'(u) = (u^4)' = 4u^3$, Tggl: $y = 4u^3(x-u) + u^4$;

$f_4'(u) = (u^2+3u)' = 2u+3$, Tggl: $y = (2u+3) \cdot (x-u) + u^2 + 3u$;

$f_5'(u) = (u^2-4u+3)' = 2u-4$, Tggl: $y = (2u-4) \cdot (x-u) + u^2 - 4u + 3$;

$f_6'(u) = (3u^2-u+12)' = 6u-1$, Tggl: $y = (6u-1) \cdot (x-u) + 3u^2 - u + 12$;

Aufg. 141/340: a) $y = -2u(x-u) - u^2$, ($u=1$): $y = -2 \cdot 1(x-1) - 1^2 \Leftrightarrow y = -2x+1$;

b) $y = 3u^2(x-u) + u^3$, ($u=1$): $y = 3 \cdot 1^2(x-1) + 1^3 \Leftrightarrow y = 3x-2$;

c) $y = (2u+1)(x-u) + u^2 + u$, ($u=1$): $y = 3(x-1) + 2 \Leftrightarrow y = 3x-1$;

d) $y = (-2u)(x-u) + 2 - u^2$, ($u=-1$): $y = 2(x+1) + 1 \Leftrightarrow y = 2x+3$;

e) $f'(x) = 2x-1$; allg. Tggl: $y = (2u-1) \cdot (x-u) + u^2 - u + 2$;
spezielle Tggl: $y = (2 \cdot 1 - 1) \cdot (x-1) + 1^2 - 1 + 2 \Leftrightarrow y = 1 \cdot (x-1) + 2$;

f) $f'(x) = x+3$; allg. Tggl: $y = (u+3) \cdot (x-u) + 0.5 \cdot u^2 + 3u - 4$;
spezielle Tggl: $y = ((-2)+3) \cdot (x-(-2)) + 0.5 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot (-2) - 4 \Leftrightarrow y = 1 \cdot (x+2) - 8$;

g) $f'(x) = x^2-1$; allg. Tggl: $y = (u^2-1) \cdot (x-u) + \frac{u^3}{3} - x + 1$;
spezielle Tggl: $y = (3^2-1) \cdot (x-3) + \frac{3^3}{3} - 3 + 1; \Leftrightarrow y = 8 \cdot (x-3) + 7$;

Aufg. 141/341: a) $f'(x) = (x^2)' = 2x \overset{!}{=} 2 \Leftrightarrow x = 1$; b) $f'(x) = (x^3)' = 3x^2 \overset{!}{=} 12 \Leftrightarrow x = \pm 2$;
c) $f'(x) = (\frac{x^3}{3} - x)' = x^2 - 1 \overset{!}{=} 8 \Leftrightarrow x = \pm 3$; d) $f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \overset{!}{=} 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{16}$;
e) $f'(x) = (x^4 - 4.5x^2 + 3)' = 4x^3 - 9x \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow x_1 = 0; x_{2,3} = \frac{\pm 3}{2}$.

f) $\pm 2, \pm 3$; g) ± 2; h) 0,1,2

Aufg. 141/342: a) Die Halterung sollte orthogonal zur Rutschfläche sein. Die Fliehkraft oder Zentrifugalkraft wird so abgeleitet.

b) Eine Gerade heißt <u>Normale</u> einer Funktion f im Punkt $B(u; f(u))$, wenn sie durch $\underline{B}$ geht und <u>senkrecht</u> zur Tangente in B ist. c) siehe Ag 581 a)

d) $\tilde{m} = \frac{-1}{m}$; e) i) $y = \frac{-1}{3}(x-2) + 6$; ii) $y = \frac{-1}{4}(x-2) + 4$;

f) Die allgemeine Normalengleichung ist: $y = \dfrac{-1}{f'(u)} \cdot (x-u) + f(u)$.

g) $y = \frac{-1}{3}(x-1) + 1$, $y = \frac{-1}{12}(x-2) + 8$, $y = \frac{-1}{3u^2}(x-u) + u^3$.

Aufg. 141/343: Allg. Tggl: $y = f'(u)(x-u) + f(u)$; Allg. Normgl: $y = \frac{-1}{f'(u)}(x-u) + f(u)$;
$\alpha = \tan^{-1}(m)$ (alle auswendig);
a) $f'(x) = (x)' = 1; f(u) = u, f'(u) = 1$, Tg: $y = 1 \cdot (x-u) + u$ mit $u=0$: $y = 1 \cdot (x-0) + 0 \Leftrightarrow y = x$;
Norm: $y = \frac{-1}{1} \cdot (x-u) + u$ mit $u=0$: $y = -1 \cdot (x-0) + 0 \Leftrightarrow y = -x$; $\alpha = \tan^{-1}(1) = 45°$. Weil die Funktion selbst eine Gerade ist, ist die Tangente 'die Funktion selbst'.

b) $f'(x) = (2x)' = 2; f(u) = 2u, f'(u) = 2$,
Tg: $y = 2 \cdot (x-u) + 2u$ mit $u=1$: $y = 2 \cdot (x-1) + 2 \cdot 1 \Leftrightarrow y = 2x$;
Norm: $y = \frac{-1}{2} \cdot (x-u) + 2u$ mit $u=1$: $y = \frac{-1}{2} \cdot (x-1) + 2 \cdot 1 \Leftrightarrow y = -0.5x + 2.5$; $\alpha = \tan^{-1}(2) \approx 63.43°$.

c) $f'(x) = (x^2 - 6x)' = 2x - 6,\ f(u) = u^2 - 6u, f'(u) = 2u - 6,$
Tg: $y = (2u - 6) \cdot (x - u) + u^2 - 6u$ mit $u = 0$: $y = (2 \cdot 0 - 6) \cdot (x - 0) + 0^2 - 6 \cdot 0 \Leftrightarrow y = -6 \cdot x;$
Norm: $y = \frac{-1}{2u-6} \cdot (x - u) + u^2 - 6u$ mit $u = 0$: $y = \frac{-1}{2 \cdot 0 - 6} \cdot (x - 0) + 0^2 - 6 \cdot 0,$
$\Leftrightarrow y = \frac{1}{6}x;\ \alpha = \tan^{-1}(-6) \approx -80.54°.$

d) $f(1) = (2 \cdot 1 - 1^2) = 1; f'(x) = (2x - x^2)' = 2 - 2x; f'(1) = 2 - 2 \cdot 1 = 0;\ y = 0 \cdot (x - 1) + 1 \Leftrightarrow y \equiv 1,$ (waagrechte Gerade) $\alpha = \tan^{-1}(0) = 0°;$

e) $f'(x) = 3x^2 - 4x,\ t : y = (3u^2 - 4u) \cdot (x - u) + u^3 - 2u^2,\ u = 3,$
$y = (3 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3) \cdot (x - 3) + 3^3 - 2 \cdot 3^2 \Leftrightarrow y = 15 \cdot (x - 3) + 9 \Leftrightarrow y = 15x - 36,\ \alpha = \tan^{-1}(15) \approx 86.19°,$
$n : y = \frac{-1}{3u^2-4u} \cdot (x - u) + u^3 - 2u^2,\ u = 3 : y = \frac{-1}{15} \cdot (x - 3) + 9 \Leftrightarrow y = \frac{-1}{15}x + 9.2;$

f) $f'(x) = 2x - 3x^2,\ t : y = (2u - 3u^2) \cdot (x - u) + 2 + u^2 - u^3,\ u = -1 :$
$y = (2 \cdot (-1) - 3 \cdot (-1)^2) \cdot (x + 1) + 2 + (-1)^2 - (-1)^3 \Leftrightarrow y = -5 \cdot (x + 1) + 4 \Leftrightarrow y = -5x - 1,$
$\alpha = \tan^{-1}(-5) \approx -78.69°,\ n : y = \frac{-1}{2u-3u^2} \cdot (x - u) + 2 + u^2 - u^3,\ u = -1 : y = \frac{-1}{-5} \cdot (x + 1) + 4 \Leftrightarrow$
$y = 0.2x + 4.2;$

g) $f'(x) = (2 \cdot x^{-1})' = -2x^{-2},\ t : y = -2u^{-2} \cdot (x - u) + 2u^{-1},\ u = 2 :$
$y = -2 \cdot 2^{-2} \cdot (x - 2) + 2 \cdot 2^{-1} \Leftrightarrow y = -0.5 \cdot (x - 2) + 1 \Leftrightarrow y = -0.5x + 2,\ \alpha = \tan^{-1}(-0.5) \approx -26.57°,$
$n : y = \frac{-1}{-2u^{-2}} \cdot (x - u) + 2u^{-1},\ u = 2 : y = \frac{-1}{-0.5} \cdot (x - 2) + 1 \Leftrightarrow y = 2x - 3;$

h) $f'(x) = (x \cdot x^{-2} - x^{-2})' = (x^{-1} - x^{-2})' = -x^{-2} + 2 \cdot x^{-3},$
$t : y = (-u^{-2} + 2 \cdot u^{-3}) \cdot (x - u) + u^{-1} - u^{-2},\ u = 1 :$
$y = (-1^{-2} + 2 \cdot 1^{-3}) \cdot (x - 1) + 1^{-1} - 1^{-2} \Leftrightarrow y = (-1 + 2) \cdot (x - 1) + 1 - 1 \Leftrightarrow y = x - 1,\ \alpha = \tan^{-1}(1) = 45°;$
$n : y = \frac{-1}{-u^{-2}+2 \cdot u^{-3}} \cdot (x - u) + u^{-1} + u^{-2},\ u = 1 : y = \frac{-1}{1} \cdot (x - 1) + 0 \Leftrightarrow y = -x + 1;$

i) $f'(x) = (x^{\frac{1}{2}} + 2)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},\ t : y = (\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}) \cdot (x - u) + u^{\frac{1}{2}} + 2,\ u = 4 :$
$y = (\frac{1}{2} \cdot 4^{-\frac{1}{2}}) \cdot (x - 4) + 4^{\frac{1}{2}} + 2 \Leftrightarrow y = 0.25 \cdot (x - 4) + 4 \Leftrightarrow y = 0.25x + 3,\ \alpha = \tan^{-1}(0.25) \approx 14.04°;$
$n : y = \frac{-1}{\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}} \cdot (x - u) + u^{\frac{1}{2}} + 2,\ u = 4 : y = \frac{-1}{0.25} \cdot (x - 4) + 4 \Leftrightarrow y = -4x + 20;$

j) $f'(x) = (\sqrt{x} + 1 - \frac{1}{\sqrt{x}})' = (x^{\frac{1}{2}} + 1 - x^{-\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}},$
$t : y = (\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}) \cdot (x - u) + \sqrt{u} + 1 - \frac{1}{\sqrt{u}},\ u = 1 :$
$y = (\frac{1}{2} \cdot 1^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot 1^{-\frac{3}{2}}) \cdot (x - 1) + \sqrt{1} + 1 - \frac{1}{\sqrt{1}} \Leftrightarrow y = 1 \cdot (x - 1) + 1 \Leftrightarrow y = x,\ \alpha = \tan^{-1}(1) = 45°;$
$n : y = (\frac{-1}{\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}}) \cdot (x - u) + \sqrt{u} + 1 - \frac{1}{\sqrt{u}},\ u = 1 : y = \frac{-1}{1} \cdot (x - 1) + 1 \Leftrightarrow y = -x + 2;$

k) $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$, aber $f'(0) = \infty$, damit ist die Tangente $x = 0$, $\alpha = 90°$; und die Normale $y = 0$.

Aufg. 141/344: $y = -u(x - u) + 4 - \frac{u^2}{2}$, a) i) $(\pm 2/2)$; ii) $V_1(-3/-0,5)$ oder $V_2(-1/3,5)$; iii) $4 = -u(2 - u) + 4 - \frac{u^2}{2} \Leftrightarrow 0 = -2u + u^2 - \frac{u^2}{2} \Leftrightarrow \frac{u^2}{2} - 2u = 0 \Leftrightarrow u = 0$ oder $u = 4$, damit $V_1(0; 4)$ oder $V_2(4; -4)$

b) Die Tangente an f im Berührpunkt $B(u; f(u))$ berechnen wir durch $\underline{y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)}$.

b) Im Punkt $(-2/-8)$ hat das Fahrzeug die Straße verlassen.

Faustregel: Wenn bei einer Aufgabe ein Punkt $P(x_0; y_0)$ auf der Kurve gegeben ist, dann muss x_0 für u eingesetzt werden; wenn ein externer Punkt $P(x_0; y_0)$ gegeben ist, dann muss x_0 für x und y_0 für y eingesetzt werden. Es muss dann nach u aufgelöst werden den x Wert von B zu erhalten.

Im Zweifelsfall setzen Sie x_0 für u ein.

Aufg. 142/345: Formel für die allg. Tggl: $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$,

a) allg. Tggl: $y = 2u \cdot (x - u) + u^2$, $P(0/-1)$ für x und y eingesetzt: $-1 = 2u \cdot (0 - u) + u^2$ nach u auflösen: $u^2 = 1 \Leftrightarrow u_1 = -1, u_2 = 1,\ f(u_1) = 1 \Rightarrow B_1(-1; 1),\ f(u_2) = 1 \Rightarrow B_2(1; 1);$

b) allg. Tggl: $y = 2u \cdot (x - u) + u^2 - 2$, $P(-1/-5)$ für x und y eingesetzt:
$-5 = 2u \cdot (-1-u) + u^2 - 2$ nach u auflösen: $-5 = -2u^2 - 2u + u^2 - 2 \Leftrightarrow u^2 + 2u - 3 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 1, u_2 = -3$,
$f(u_1) = 1^2 - 2 = -1 \Rightarrow B_1(1;-1)$, $f(u_2) = (-3)^2 - 2 = 7 \Rightarrow B_2(-3;7)$;

c) allg. Tggl: $y = (2u - 2) \cdot (x - u) + u^2 - 2u + 2$, $P(2/-2)$ für x und y eingesetzt:
$-2 = (2u-2) \cdot (2-u) + u^2 - 2u + 2$ nach u auflösen: $-2 = 4u - 4 - 2u^2 + 2u + u^2 - 2u + 2 \Leftrightarrow u^2 - 4u = 0 \Leftrightarrow u_1 = 0, u_2 = 4$, $f(u_1) = 2 \Rightarrow B_1(0;2)$, $f(u_2) = 10 \Rightarrow B_2(4;10)$;

d) allg. Tggl: $y = (-2u - 2) \cdot (x - u) - u^2 - 2u + 3$, $P(1/1)$ für x und y eingesetzt:
$1 = (-2u-2) \cdot (1-u) - u^2 - 2u + 3$ nach u auflösen: $1 = -2u - 2 + 2u^2 - 2u - u^2 - 2u + 3 \Leftrightarrow u^2 - 6u = 0 \Leftrightarrow u_1 = 0, u_2 = 2$, $f(u_1) = 3 \Rightarrow B_1(0;3)$, $f(u_2) = -5 \Rightarrow B_2(2;-5)$;

e) $B_1(0|0)$, $B_2(-2|8)$, f) $B_1(4|12)$, $B_2(-2|-2)$, g) $B_1(2|2)$, $B_2(|)$.

Aufg. 142/346: a) $x^2 = -x^2 + 4x - 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0$ $x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{4} = 1$ (doppelter Schnittpunkt) – siehe Abb. 314.

f und g stimmen an der Stelle $x = \underline{1}$ sowohl in den Funktionswerten als auch in den Tangentensteigungen überein. $\Rightarrow f(\underline{1}) = g(\underline{1})$ und $\underline{f'}(\underline{1}) = \underline{g'}(\underline{1})$.

$f(1) = 1^2 = 1 = g(1) = -1^2 + 4 \cdot 1 - 2$; $f'(x) = 2x$, $g'(x) = -2x + 4$, $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2 = g'(1) = -2 \cdot 1 + 4$.

b) Zwei Schaubilder K_f und K_g berühren einander im Punkt $B(u;?) \Leftrightarrow$ die Tangenten von $\underline{f}$ und g in B sind gleich $\Leftrightarrow f(u) = \underline{g(u)}$ und $\underline{f'(u)} = \underline{g'(u)}$.

c) i) $f(x) = x^2, f'(x) = 2x, g(x) = 6x - 9, g'(x) = 6$:
$f(3) = 3^2 = 9 = g(3) = 6 \cdot 3 - 9$, $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6 = g'(2) = 6$, also 'ja';
ii) $f(x) = x^2, f'(x) = 2x, g(x) = 6x, g'(x) = 6$:
$f(3) = 3^2 = 9 \neq g(3) = 6 \cdot 3 = 18$, $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6 = g'(2) = 6$, also 'nein';
iii) $f(x) = x^2, f'(x) = 2x, g(x) = 12 - x, g'(x) = -1$:
$f(3) = 3^2 = 9 = g(3) = 12 - 3$, $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6 \neq g'(2) = -1$, also 'nein';

iv) $f(3) = 3^3 = 27, f'(3) = 3 \cdot 3^2 = 27$, $g(3) = -3^2 + 33 \cdot 3 - 63 = 27$, $g'(3) = -2 \cdot 3 + 33 = 27$,

Aufg. 142/347: **a)** $f(x) = g(x)$; $x^2 = -(x+2)^2 + 2 \Leftrightarrow x^2 = -(x^2 + 4x + 4) + 2 \Leftrightarrow x^2 = -x^2 - 4x - 4 + 2 \Leftrightarrow 2x^2 = -4x - 2 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = -1$ $f(-1) = g(-1) = 1$, $f'(-1) = g'(-1) = -2$, damit berührt K_f K_g in $B(-1;1)$.

a) Ansatz mit $f'(x) = g'(x)$: $2x = -2x - 4 \Leftrightarrow x = -1$ (geht genauso) s.o.

b) Ansatz mit $f'(x) = g'(x)$: $2x + 3 = -2x - 1 \Leftrightarrow x = -1$;

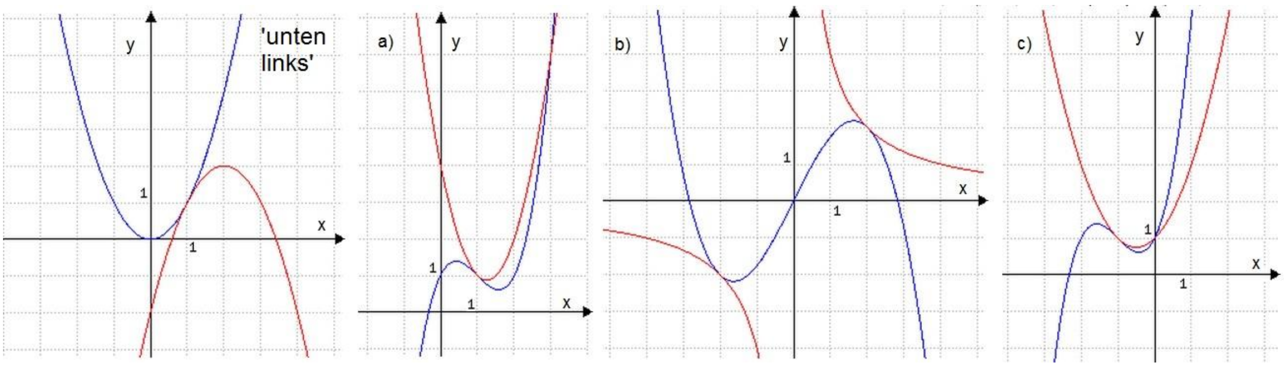


Abb. 314 Einander berührende Funktionsgraphen

$f(-1) = (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 1 = -1 = g(-1) = -1 - (-1)^2 - (-1) = -1 \Rightarrow B(-1/-1)$

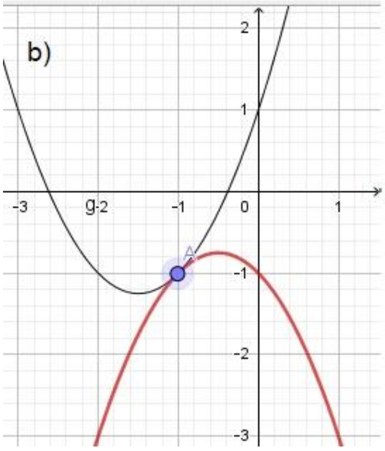


Abb. 315 Einander berührende Parabeln

c) Ansatz mit $f'(x) = g'(x)$: $x + 1 = 2x - 1 \Leftrightarrow x = 2$;

$f(2) = 0.5 \cdot 2^2 + 2 - 4 = g(2) = 2^2 - 2 = 2 \Rightarrow B(2/2)$.

d) Schnittpunkte: $B(1/1)$ und $S(3/7)$, in B sind die Steigungen gleich (beide -1) $\Rightarrow B$ ist Berührpunkt; e) $B_1(-2/-4)$ und $B_2(2/4)$ (biquadratische Gleichung) f) Schnittpunkte: $B(-1/1)$ und $S(0/1)$, in B sind die Steigungen gleich (beide -1) $\Rightarrow B$ ist Berührpunkt;

g) Gleichsetzen: $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^2 - x - 1 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x^2 - 4x + 4) = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ (einfach) $x_2 = 2$ (doppelt);

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$, $f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 + 3 = 3$, $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 3 = 3$, $g'(x) = 2x - 1$, $g'(0) = 2 \cdot 0 - 1 = -1$, $g'(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$.

Weil $f'(0) \neq g'(0)$ liegt bei $x = 0$ ein Schnitt und keine Berührung vor;
weil $f'(2) = g'(2)$ ist $x = 3$ eine Berührstelle: $g(2) = 2^2 - 2 - 1 = 1 \Rightarrow B(2;1)$ mit Steigung $m = 3$.

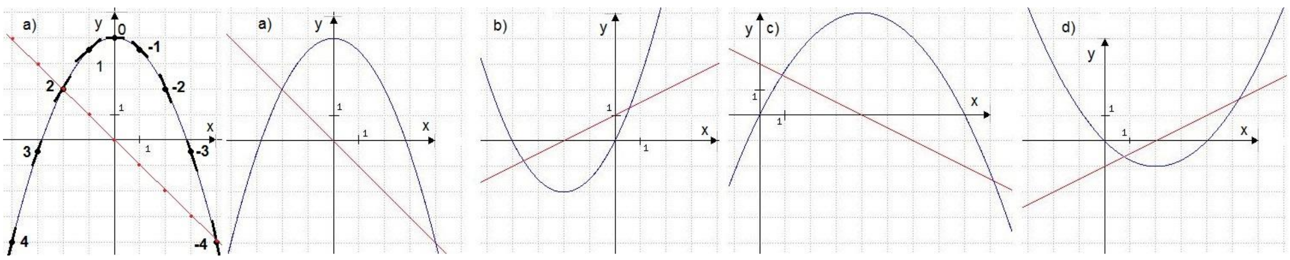
h) $f_a'(x) = x$, $g'(x) = -2x + 3 \Rightarrow -2x + 3 = x \Leftrightarrow x = 1$; $f_a(1) = 0.5 - a = 2 = g(1) \Leftrightarrow a = -1.5$.

i) $f'(x) = (x^2 + 2x + a)' = 2x + 2$, $g'(x) = (-x^2 - 6x) = -2x - 6$, gleichgesetzt:
$2x + 2 = -2x - 6 \Leftrightarrow 4x = -8 \Leftrightarrow x = -2$, $f(-2) = (-2)^2 + 2 \cdot (-2) + a = a$,
$g(-2) = -(-2)^2 - 6(-2) = 8$, $\Rightarrow a = 8$; $B(-2;8)$

j) $f'(x) = (x^2 + 2ax + 2)' = 2x + 2a$ und $g'(x) = (-x^2)' = -2x$, gleichgesetzt:
$2x + 2a = -2x \Leftrightarrow 4x = -2a \Leftrightarrow x = \frac{-a}{2}$ eingesetzt:
$f(\frac{-a}{2}) = (\frac{-a}{2})^2 + 2a(\frac{-a}{2}) + 2 = \frac{a^2}{4} - a^2 + 2 = -\frac{3a^2}{4} + 2$ und $g(\frac{a}{2}) = (-\frac{a}{2})^2 = -\frac{a^2}{4}$, gleichgesetzt: $-\frac{3a^2}{4} + 2 = -\frac{a^2}{4} \Leftrightarrow 2 = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow 4 = a^2 \Leftrightarrow a = \pm 2$; für $a = 2$: $B_1(-1;-1)$, $a = -2$: $B_2(1;-1)$.

k) Wenn ein Berührpunkt gesucht ist, ist es oft ratsam zuerst die Bedingung $\underline{f'(x) = g'(x)}$ nach $\underline{x}$ aufzulösen

Aufg. 142/348: ... die geschätzte Steigung der gezeichneten ... den Punkt (x_0/m) (oder $(x_0/f'(x_0))$) ...



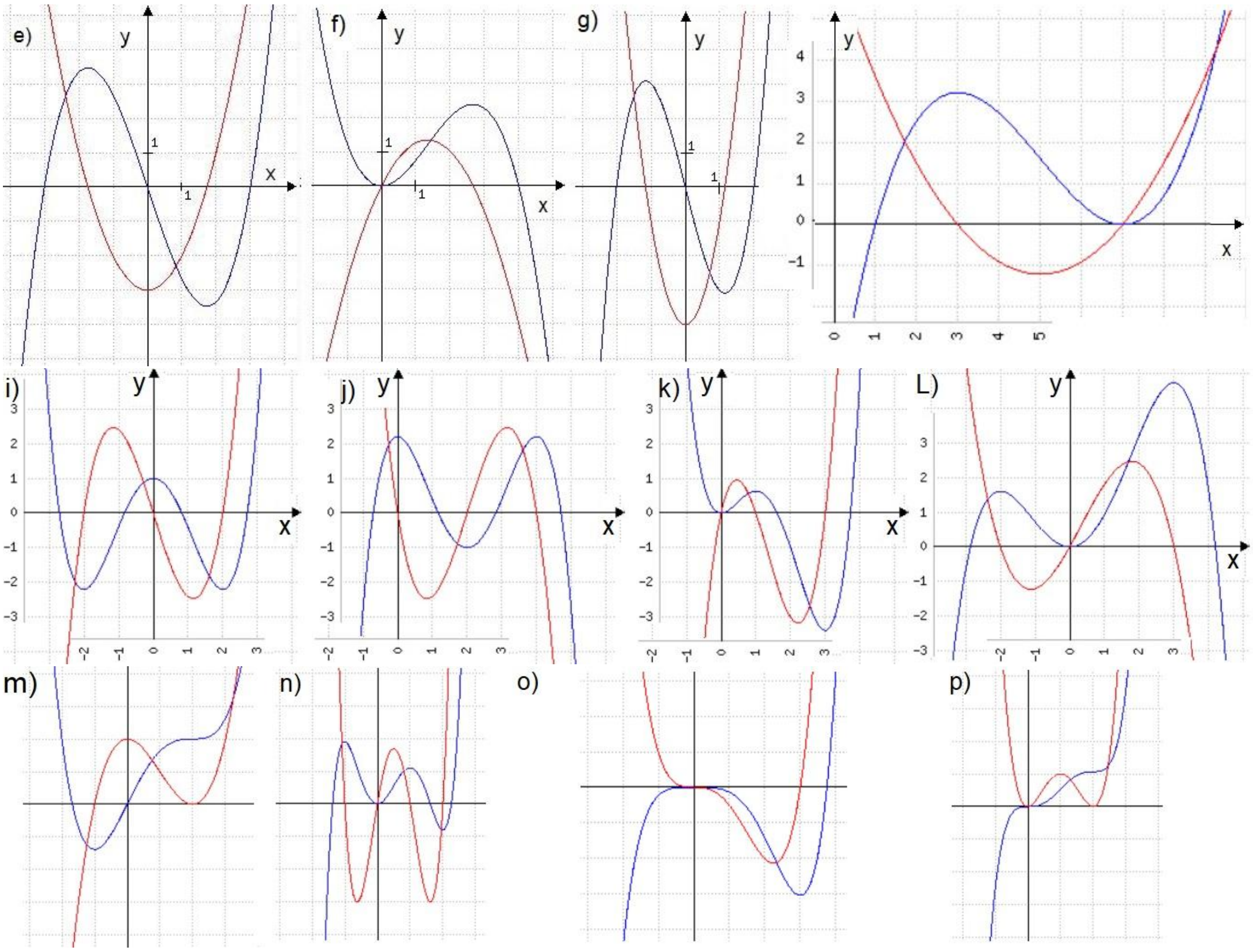


Abb. 316 Schaubilder mit deren Ableitungsfunktionsgraphen

Die Funktionsterme sind: a) $4 - \frac{x^2}{2}$; b) $\frac{1}{2}x(x+4)$; c) $\frac{-1}{4}x(x-8)$; d) $\frac{1}{4}x(x-4)$; e) $x^3 - 4x$; f) $\arctan x$; g) $\frac{2}{x}$; h) $\frac{4}{x^2}$; i) $2x - x^2$; j) $2x - 0.5x^2$; k) $x^2 - 0.25x^3$; L) $x^3 - 4x$; m) $x^2 \cdot 2^x$; (siehe auch Abb. 316) n) $3(x^5/5 - x^4/2 - 1/3x^3 + x^2)$; o) $(x^5/5 - 3x^4/4)/4$; p) $x^5/5 - x^4 + 4/3x^3$;

Aufg. 143/349: Problematische Punkte sind Ecken ($f_a(0)$ und $f_b(\pm 1)$) sowie Punkte mit senkrechter Tangente ($f_c(0)$ und $f_d(\pm 2)$). An den x-Werten dieser Punkte sind $f'_a(x)$ bis $f'_d(x)$ unstetig. $f_c(x)$ und $f_d(x)$ besitzen in den kritischen Punkten sogar eine Tangente (aber eben eine senkrechte Tangente). f heißt bei x_0 differenzierbar $\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existiert (insbesondere endlich ist).

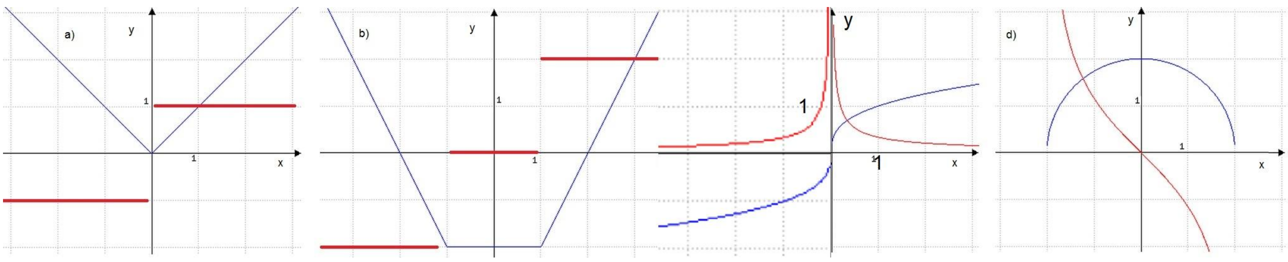


Abb. 317 Schaubilder nicht differenzierbarer Funktionen und deren Ableitungsgraphen (sofern f' definiert ist)

b) $f_a(x) = |x|$, $f_b(x) = |x-1| + |x-1| - 4$, $f_c(x) = \sqrt[3]{x}$ und $f_d(x) = \sqrt{4-x^2}$ (Abb. 317).

Aufg. 143/350: Allgemeine Tangentengleichung: $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$ hier $y = -\frac{u}{2} \cdot (x - u) + 1 - \frac{u^2}{4}$, durch $A(2; 0.25)$ (externer Punkt): $0.25 = -\frac{u}{2} \cdot (2 - u) + 1 - \frac{u^2}{4} \Leftrightarrow -0.75 = -u + \frac{u^2}{2} - \frac{u^2}{4} \Leftrightarrow \frac{u^2}{4} - u + 0.75 = 0 \Leftrightarrow u^2 - 4u + 3 = 0 \Leftrightarrow u_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 5}}{2} \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3$ ($x_2 \notin \mathbb{D}$ sprich: Da hat der Berg schon aufgehört).

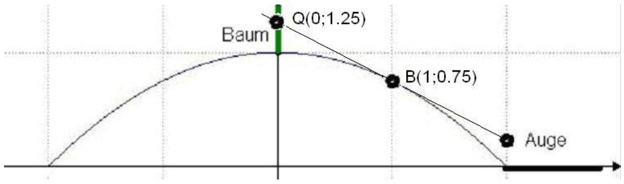


Abb. 318 Tangente durch externe Punkte

Damit ist $B(1; 0.75)$ und $t : y = -\frac{1}{2} \cdot (x - 1) + 0.75$ oder $y = -0.5x + 1.25$ Dies ist der unterste 'Sichtstrahl' des Auges. Er schneidet die $y-$Achse in $Q(0; 1.25)$. Damit muss der Baum mindestens $1.25 - 1 = 0.25$ also 0.25 m hoch sein. (Abb. 318)

$A_2(2|0.0625)$: $B(1.5|0.4375)$ Tg $y = -0.75(x - 1.5) + 0.4375$; $h = 1.5625 - 1 = 0.5625$;

$A_3(4|0.0625)$: $B(0.5|0.9375)$ Tg $y = -0.25(x - 0.5) + 0.9375$; $h = 1.0625 - 1 = 0.0625$;

Aufg. 143/351: a) Die Ortsdurchfahrt entspricht der Geraden $y = \frac{-1}{2}x + \frac{1}{2}$; die allg. Tggl. ist $y = f'(u)(x - u) + f(u)$, $y = (-0.3u^2 - 0.6u + 0.4)(x - u) - 0.1u^3 - 0.3u^2 + 0.4u + 3.2|_{u=-3}$;
$y = (-0.3 \cdot (-3)^2 - 0.6 \cdot (-3) + 0.4)(x + 3) - 0.1 \cdot (-3)^3 - 0.3 \cdot (-3)^2 + 0.4 \cdot (-3) + 3.2 \Leftrightarrow y = \frac{-1}{2}x + \frac{1}{2}$;
damit entspricht die *od* der Tg an K_f für $x = -3$ damit gibt es keinen Knick.

b) Das Schaubild von f ist an der Stelle x_0 parallel zu einer Geraden $g : y = m \cdot x + c \Leftrightarrow f'(x_0) = m$; hier ist speziell $f'(x) = -0.5$ gesucht. $f'(x) = -0.5 \Leftrightarrow -0.3x^2 - 0.6x + 0.4 = -0.5 \Leftrightarrow x_1 = 1$ oder $x_2 = -3$; gesucht sind also die Punkte $A(-3/2)$ und $A_1(1/3.2)$.

c) $P(1/3.6)$ also für $x = 1$ und $y = 3.6$ in die allg. Tggl eingesetzt:

$$\begin{array}{rrcl} & 3.6 & = & (-0.3u^2 - 0.6u + 0.4)(1 - u) - 0.1u^3 - 0.3u^2 + 0.4u + 3.2 \\ \Leftrightarrow & 3.6 & = & -0.3u^2 - 0.6u + 0.4 + 0.3u^3 + 0.6u^2 - 0.4u - 0.1u^3 - 0.3u^2 + 0.4u + 3.2 \\ \Leftrightarrow & 0 & = & 0.2u^3 - 0.6u \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0.2u(u^2 - 3). \end{array}$$

Diese Gleichung wird von $u = 0$ und für $u = \pm\sqrt{3}$ gelöst. Weil der Fahrer von B aus fährt kann also nur die Stelle $x = \sqrt{3}$ gefragt sein, da sich die Stellen 0 und $-\sqrt{3}$ erst nach der Windkraftanlage befinden. Die Blickrichtung ist $y = 0.4x + 3.2$.

Aufg. 144/352: a) Höhe: Der Scheitel der Parabel ist bei $(0; 4.5)$, damit ist der Tunnel 4.5m hoch. $0 = f(x) \Leftrightarrow 0 = 4.5 - \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} = 4.5 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$; damit ist der Stollen 6m breit.

Winkel: Allg Tggl: $y = -u \cdot (x - u) + 4.5 - \frac{u^2}{2}$. Die Tangente in Fußpunkt $(-3; 0)$ ist $(u = -3)$: $y = 3 \cdot (x\text{-}(-3)) + 4.5 - \frac{3^2}{2} \Leftrightarrow y = 3x + 9$; der Steigungswinkel ist $\alpha = \tan^{-1}(m) = \tan^{-1}(3) \approx 71.6°$. Aus Symmetriegründen ist der Winkel im Fußpunkt $(3/0)$ ebenfalls etwa $71.6°$.

b) Die Punkte bester Approximation (Proxima) liegen auf der Normalen durch $(0; 3)$ (externer Punkt); allg. Normalengleichung: $y = \frac{-1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u)$; hier speziell:
$y = \frac{1}{u} \cdot (x - u) + 4.5 - \frac{u^2}{2}$. Die Normale soll durch L(0/3) gehen: $3 = \frac{1}{u} \cdot (0 - u) + 4.5 - \frac{u^2}{2} \Leftrightarrow 3 = -1 + 4.5 - \frac{u^2}{2} \Leftrightarrow -0.5 = -\frac{u^2}{2} \Leftrightarrow 1 = u^2 \Leftrightarrow u = \pm 1$; die sind die x- Werte der Proxima Damit sind die Proxima $(\pm 1/f(1)) = (\pm 1/4)$; Aus Symmetriegründen wählen wir (exemplarisch) $P(1/4)$:

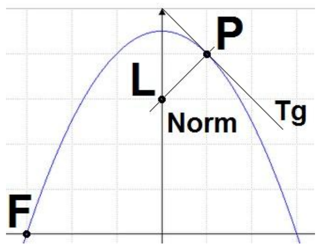


Abb. 319 Stollenaufgabe

Für den Abstand gilt: $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(1 - 0)^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{2}$; $\sqrt{2} < 1.45$ also 'nein, wird nicht eingehalten' (Abb. 319).

Aufg. 144/353: a) n geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

b) $f(-x) = \frac{1}{(-x)^2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4} = f(x)$. Damit ist K_f achsensymmetrisch zur y-Achse.

c) $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2 \Rightarrow N_1(-2;0), N_2(2;0)$; Aus Symmetriegründen liegt der gesuchte Mittelpunkt M auf der $y-Achse$ und nach Teil a) liegt M außerdem auf der Normalen n_1 in N_1 und n_2 in N_2. $f'(x) = (x^{-2} - 0.25)' = (-2) \cdot x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$;

Allgemeine Normalengleichung: $y = \frac{-1}{f'(u)} \cdot (x-u) + f(u)$; also $y = \frac{-1}{\frac{-2}{u^3}} \cdot (x-u) + \frac{1}{u^2} - \frac{1}{4} \Leftrightarrow y = \frac{u^3}{2} \cdot (x-u) + \frac{1}{u^2} - \frac{1}{4}$ mit $u = 2$ gilt $y = \frac{2^3}{2} \cdot (x-2) + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4} \Leftrightarrow y = 4 \cdot (x-2) \Leftrightarrow y = 4x - 8$; M liegt bei $x = 0$ also $M(0;-8)$.

d) Es ist $f'(x) = (b - \frac{a^2}{x^2})' = (b - a^2x^{-2})' = -(-2)a^2x^{-3}$ und $g'(x) = 2x$.

Der Ansatz $f'(x) = g'(x)$ ergibt $2a^2x^{-3} = 2x \overset{\cdot x^3/2}{\Longleftrightarrow} a^2 = x^4$ oder $x = \sqrt{a}$

($-\sqrt{a}$ fällt wegen $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$ also $x > 0$ weg).

$f(\sqrt{a}) = b - \frac{a^2}{(\sqrt{a})^2} = b - a$; $\quad g(\sqrt{a}) = (\sqrt{a})^2 = a$ (weil $a > 0$ ist).

Damit ist $a = b - a$ oder $b = 2a$.

e) $K_{a_1} \cap K_{a_2}$ ergibt: $-a_1x^2 + 2a_1x + 1 = -a_2x^2 + 2a_2x + 1 \Leftrightarrow$

$-a_1x^2 + 2a_1x + a_2x^2 - 2a_2x = 0 \Leftrightarrow -(a_1 - a_2)x^2 + 2(a_1 - a_2)a_1x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0; x_2 = 2$;

$f_a(0) = f_a(2) = 1$; $f'_a(x) = -2ax + 2a$;

Sei $x = 0$: $f'_a(0) = 2a$ Es muss also $2a_1 = \frac{-1}{2a_2}$ gelten, oder $4 \cdot a_1 \cdot a_2 = -1$

Sei $x = 2$: $f'_a(2) = -2a$ Es muss also $-2a_1 = \frac{-1}{-2a_2}$ gelten, oder $4 \cdot a_1 \cdot a_2 = -1$ (wie bei $x = 0$);

f) $S_1(-\frac{1}{2}|-4)$; (nicht orthogonal); $S_2(2|1)$; (orthogonal); g) $S(3|0)$;

Aufg. 144/354: a) $f'_1(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-(x+h)^2 + 2(x+h) - 3 - (-x^2 + 2x - 3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-(x^2 + 2hx + h^2) + 2x + 2h - 3 + x^2 - 2x + 3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2hx - h^2 + 2h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(-2x - h + 2)}{h} = \lim_{h\to 0} -2x - h + 2 = -2x - 0 + 2 = -2x + 2$;

b) Sei $f'_2(x) = (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)' = 3x^2 + 6x + 3$;
allgemeine Tangentengleichung: $y = (3u^2 + 6u + 3) \cdot (x - u) + u^3 + 3u^2 + 3u + 1$;
$u = -1$: $y = (3(-1)^2 + 6(-1) + 3) \cdot (x - (-1)) + (-1)^3 + 3(-1)^2 + 3(-1) + 1 \Leftrightarrow y = 0$;
$u = 1$: $y = (3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 + 3) \cdot (x - 1) + 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \Leftrightarrow y = 12 \cdot (x-1) + 8 \Leftrightarrow y = 12 \cdot x - 4$;

c) $f'_3(x) = (-\frac{x^2}{2} + 2x)' = -x + 2$; allg. Tangentengleichung: $y = (-u+2) \cdot (x-u) - \frac{u^2}{2} + 2u$;
$P(3;6)$ (für x und y)eingesetzt: $3 = (-u+2) \cdot (3-u) - \frac{u^2}{2} + 2u \Leftrightarrow 6 = 6 - 5u + u^2 - \frac{u^2}{2} + 2u \Leftrightarrow \frac{u^2}{2} - 3u = 0 \Leftrightarrow u_1 = 0; u_2 = 6$;

damit sind die Berührpunkte $B_1(0; f_3(0)) = B_1(0;0)$ und $B_2(6; f_3(6)) = B_1(6;-6)$;

t_1 für $u = 0: y = (-0+2) \cdot (x-0) - \frac{0^2}{2} + 2 \cdot 0 \Leftrightarrow y = 2x$
t_2 für $u = 6: y = (-6+2) \cdot (x-6) - \frac{6^2}{2} + 2 \cdot 6 \Leftrightarrow y = -4(x-6) - 6 \Leftrightarrow y = -4x + 18$;

d) $y = -2x + 4$ hat Steigung -2, damit muss $f'_3(x) = -x + 2 = -2$ sein, also $x = 4 \Rightarrow B_3(4; f_3(4)) = B_3(4;0)$.

e) $f(x) \cap g(x)$: $-x^2 + 2x = x^2 - 6x + 8 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (doppelter Schnittpunkt weist auf Berührung hin). $f'(2) = -2x + 2|_{x=2} = 2$, $g'(2) = 2x - 6|_{x=2} = -2$ damit ist Berührung nachgewiesen. Die Tangente im Berührpunkt ist $y = -2(x-2) + 0$ also $y = -2x + 4$.

15.6.2 LöVo zu Einheit 6.2 (Extremwerte UE 10_6)

Aufg. 145/355: (Abb. 320)

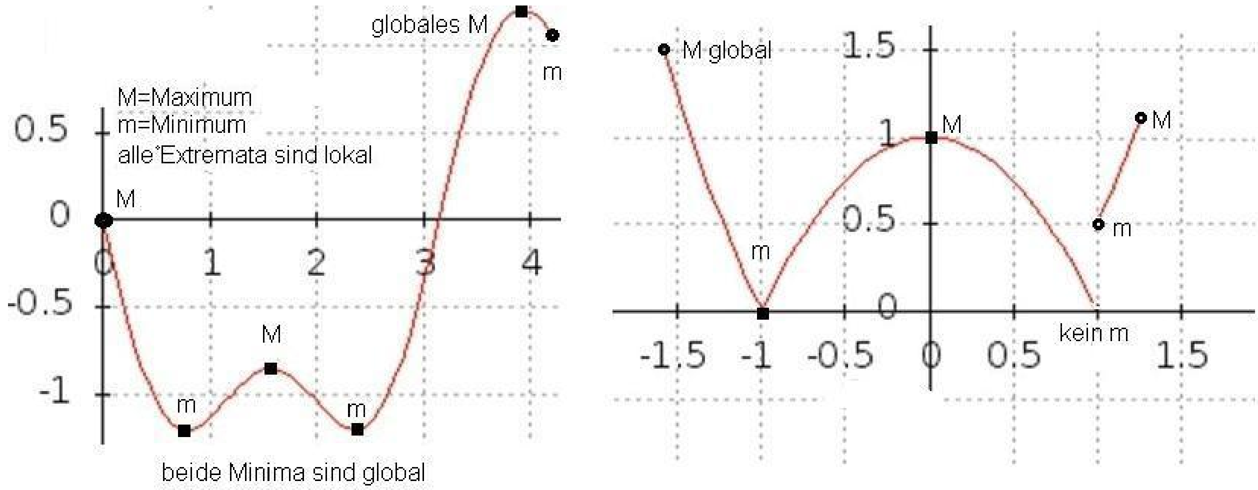


Abb. 320 Funktionsgraphen mit verschiedenenen Extrempunkten

b) Jedes globale Extremum ist auch lokal.
c+d) Extrema werden eingeteilt in innere Extrema mit $f'(x) = 0$ (Tipp: Tangente), Randextrema und Extrema an nicht differenzierbaren Stellen (diese werden künftig nicht weiter betrachtet).

Aufg. 145/356: **a)** $f'(x) = (x^2 - 2x)' = 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1,\ y = f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1,\ E(1; -1);$

Klassifikation (aus Ag 357):

x	0	1	2
$f'(x) = 2x - 2$	-2	0	2

VZW $- \to +$ bei $x = 1 \Rightarrow$ Minimum;

b) $f'(x) = (2x - 0.5x^2)' = 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2,\ f(1) = 2 \cdot 2 - 0.5 \cdot 2^2 = 2,\ E(2; 2);$

Klassifikation (aus Ag 357):

x	0	2	4
$f'(x) = 2 - x$	2	0	-2

VZW $+ \to -$ bei $x = 2 \Rightarrow$ Maximum;

c) $f'(x) = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1,\ f(1) = -2,\ f(-1) = 2,\ E_1(1; -2),\ E_2(-1; 2);$

Klass.:

x	-2	-1	0	1	2
$f'(x) = 3x^2 - 3$	9	0	-3	0	9

VZW $+ \to -$ bei $x = -1 \Rightarrow$ Maximum;
VZW $- \to +$ bei $x = 1 \Rightarrow$ Minimum;

d) $f'(x) = (x^2 - \frac{x^3}{3})' = 2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = 2,\ y = f(0) = 0,\ y = f(2) = 2^2 - 2^3/3 = \frac{4}{3},$ $E_1(0; 0),\ E_2(2; \frac{4}{3});$

Klass.:

x	-1	0	1	2	3
$f'(x) = 2x - x^2$	-3	0	1	0	-3

VZW $- \to +$ bei $x = 0 \Rightarrow$ Minimum;
VZW $+ \to -$ bei $x = 2 \Rightarrow$ Maximum;

e) $f'(x) = (2x^2 - \frac{x^4}{4})' = 4x - x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = \pm 2,\ f(\pm 2) = 2 \cdot (\pm 2)^2 - \frac{(\pm 2)^4}{4} = 4,\ E_1(-2; 4),$ $E_2(0; 0),\ E_3(2; 4);$

Klass.:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x) = 4x - x^3$	15	0	-3	0	3	0	-15

VZW $- \to +$ bei $x = \pm 2 \Rightarrow$ Maximum;
VZW $+ \to -$ bei $x = 0 \Rightarrow$ Minimum;

f) $f'(x) = (\frac{x^4}{8} - 0.5x^3)' = 0.5x^3 - 1.5x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = 3,\ f(0) = 0,\ f(3) = -3.375,\ E_1(0; 0)$ (wir zeigen später, dass E_1 doch kein Extremum ist), $E_2(3; -3.375)$.

Klass.:

x	-1	0	1	3	4
$f'(x) = 0.5x^3 - 1.5x^2$	-2	0	-1	0	8

Kein VZW bei $x = 0 \Rightarrow$ kein Extremum;
VZW bei $x = 3$ $- \to + \Rightarrow$ Minimum;

g) a) $\leftrightarrow$ 1), b) $\leftrightarrow$ 6), c) $\leftrightarrow$ 2), d) $\leftrightarrow$ 3), e) $\leftrightarrow$ 4), f) $\leftrightarrow$ 5).

h) Maximum $H(-3|0)$; Minimum $T(-1|-\frac{4}{3})$;

i) Maximum $H_1(-1|0.25)$; Minima $T_1(-2|0)$, $T_2(0|0)$;

j) Maximum $H(-3|32.4)$; Minimum $T(3|-32.4)$;
(0|0) hat zwar eine waagrechte Tangente ist aber (später) kein Extremum.

k) Maximum $H_1(0|0)$; Minima $T_1(-2|-\frac{16}{3})$, $T_2(2|-\frac{16}{3})$;

Aufg. 145/357: Wenn $f'(x)$ bei x_0 das Vorzeichen von $-$ nach $+$ wechselt, dann hat K_f bei $x = x_0$ ein Minimum; ein Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ bei x_1 bedeutet $HP(x_1; f(x_1))$.

Aufg. 145/358: a) $f'(x) = 3x^2$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, aber $f'(-1) = 3 > 0$ und $f'(1) = 3 > 0$, K_f hat keine Extrempunkte. b) Ein Terrassenpunkt ist ein Punkt des Schaubildes mit waagrechter Tangente, der weder Hoch- noch Tief-Punkt ist, also insbesondere bei x_0 keinen Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung hat.

Aufg. 145/359: Wertetabelle von $f'(x)$.

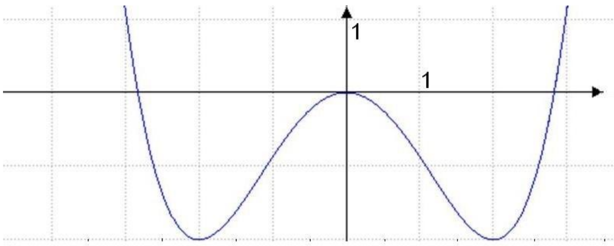
a) $x^2 - 12x$,: $S(6; -36)$; b) $4x - x^2$,: $S(2; 4)$;

zu Teil c:

x	-3	-2	0	2	3
$f'(x) = 3x^2 - 12$	15	0	-12	0	9

zu Teil e:

x	-1	0	1	2	3	4
$f'(x) = 4x^3 - 12x^2$	-16	0	-8	-16	0	64



Zusatz zum Algorithmus: Hier ist n=3 (3 Extremstellen)

z_i (später)	z_0	x_1	z_1	x_2	z_2	x_3	z_3
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	1.125	- 2	-0.875	0	-0.875	- 2	1.125
f'(x)	-7.5	0	1.5	0	-1.5	0	7.5

Abb. 321 Klassifikation von Extremstellen mit Hilfe von $f'(x)$

c) Bei $x = -2$ wechselt das Vorzeichen von $+$ nach $-$ (Hochpunkt) und bei $x = 2$ wechselt das Vorzeichen von $-$ nach $+$ (Tiefpunkt) $\Rightarrow H(-1; 2)$, $T(1; -2)$; (Abb. 321)
d) $27x - x^3$,: $T(-3; -54); H(3; 54)$;

e) kein Vorzeichenwechsel bei $x = 0$; hier liegt kein Extremum sondern ein Terrassenpunkt vor: Terrasse$(0; 0)$, $T(-3; -27)$;
g) $T(-2; -6)$, $H(0; 10)$, $T(3; -37.25)$;
h) Terrasse$(-1; 0.75)$, $T(2; -6)$,
i) $H(-3; 14.4)$, $T(-1; -5.8\bar{6})$, $H(1; 5.8\bar{6})$, $T(3; -14.4)$,
j) Terrasse$(0; 0)$ und Terrasse$(2; 3.2)$;
k) $H(-2; -3.2)$, $T(-1; -7.6)$, $H(1; 7.6)$, $T(2; 3.2)$;

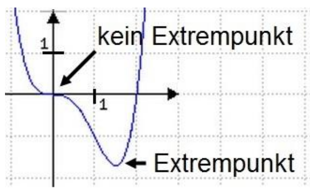


Abb. 322 Ein Terrassenpunkt

f) $(x^4 - 8x^2 + 8)' = 4x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2$

x	- 3	-2	-1	0	1	2	3
$f_b'(x) = 4x^3 - 16x$	-60	0	12	0	-12	0	60
VZW		$- \to +$		$+ \to -$		$- \to +$	
Klass.		Min		Max		Min	

$f(-2) = (-2)^4 - 8 \cdot (-2)^2 + 8 = 16 - 32 + 8 = -8$, $f(0) = 0^4 - 8 \cdot 0^2 + 8 = 8$,

$f(2) = 2^4 - 8 \cdot 2^2 + 8 = 16 - 32 + 8 = -8$ $\Rightarrow T(-2; -8)$, $H(0; 8)$, $T(2; -8)$;

L) $\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - 2x^3$: $H(-2; 5.6)$; Terrasse$(0; 0)$, $T(3; -25.65)$

m) $\frac{x^4}{2} - 4x^3 + 9x^2$: $T(0; 0)$; Terrasse$(3; 13.5)$,
n) $f_j'(x) = (0.6x^5 - 4x^3)' = 3x^4 - 12x^2 = 3x^2(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2,$

x	- 3	-2	-1	0	1	2	3
$f_j'(x) = 3x^4 - 12x^2$	135	0	-9	0	-9	0	135
VZW		$+ \to -$		keiner		$- \to +$	
Klass.		Max		Terr		Min	

$f(-2) = 0.6 \cdot (-2)^5 - 4 \cdot (-2)^3 = 12.8,\quad f(0) = 0.6x^5 - 4x^3 = 0,\quad f(2) = 0.6 \cdot 2^5 - 4 \cdot 2^3 = -12.8$

$\Rightarrow H(-2; 12.8)$, Terrasse$(0; 0)$, $T(2; -12.8)$,

o) $T(-5; -714.29)$, $H(-3; -685.03)$, Terrasse$(0; 0)$, $T(3; -685.03)$, $H(5; 714.29)$. (Abb.322)

p) $T(-4; -2048)$, $H(0; 0)$, $T(4; -2048)$,

q) $5.6\frac{x^5}{5} - x^7$: $T(-2; -51.2)$; Terrasse$(0; 0)$, $T(2; 51.2)$;

r) $T(-2; -13.7)$; H$(0; 0)$, $T(3; -221.3)$; (die $y-$Werte der Tiefpunkte sind gerundet).

Zur Klassifikation werden teilweise auch Werte außerhalb des $\mathbb{D}$ Definitionsbereiches eingesetzt.

s) $f_l'(x) = (\sin(x))' = \cos(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2},\ x_2 = 2\pi - x_1 = \frac{3\pi}{2}$,
$\cos(0) = 1 > 0, \cos(\pi) = -1 < 0, \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow HP(\frac{\pi}{2}; 1)$;
$\cos(\pi) = -1 < 0, \cos(2\pi) = 1 > 0, \sin(\frac{3\pi}{2}) = -1 \Rightarrow TP(\frac{3\pi}{2}; -1)$;

t) $f_m'(x) = (\cos(x))' = -\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\sin^{-1}(0) = 0,\ x_2 = \pi - x_1 = \pi$ aber auch $x_3 = x_1 + 2\pi = 2\pi$,
$-\sin(\frac{-\pi}{2}) = 1 > 0, -\sin(\frac{\pi}{2}) = -1 < 0, \cos(0) = 1 \Rightarrow HP(0; 1)$;
$-\sin(\frac{\pi}{2}) = -1 < 0, -\sin(\frac{3\pi}{2}) = 1 > 0, \cos(\pi) = -1 \Rightarrow TP(\pi; -1)$;
$-\sin(\frac{3\pi}{2}) = 1 > 0, -\sin(\frac{5\pi}{2}) = -1 < 0, \cos(2\pi) = 1 \Rightarrow HP(2\pi; 1)$;

u) $f_n'(x) = (\sin(\frac{1}{2}x))' = \frac{1}{2}\cos(\frac{1}{2}x)$;
Substitution: $w = \frac{1}{2}x$: $\frac{1}{2}\cos(w) = 0 \Leftrightarrow w_1 = \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}, w_2 = 2\pi - w_1 = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$,
Rücksubstitution: $\frac{1}{2}x = w$: $\frac{1}{2}x_1 = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x_1 = \pi$, $\frac{1}{2}x_2 = \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow x_2 = 3\pi \notin \mathbb{D}$;

Klassifikation: $f_n'(0) = \frac{1}{2}\cos(\frac{1}{2} \cdot 0) = 0.5 > 0$, $f_n'(2\pi) = \frac{1}{2}\cos(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi) = -0.5 < 0 \Rightarrow$ Maximum $f_n(\pi) = \sin(\frac{1}{2} \cdot \pi) = 1 \Rightarrow H(\pi; 1)$.

v) $f_n'(x) = (\sin(2x))' = 2\cos(2x) = 0$, sei $w = 2x \Leftrightarrow w_1 = \cos^{-1}(0) \Rightarrow w_1 = \frac{\pi}{2}(+2k\pi)$, $w_2 = 2\pi - w_1 = \frac{3\pi}{2}(+2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$
Rücksubstitution: $w_1 = 2x = \frac{\pi}{2}(+2k\pi) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}(+k\pi); x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{5\pi}{4}$;
$w_2 = 2x = \frac{3\pi}{2}(+2k\pi) \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4}(+k\pi); x_3 = \frac{3\pi}{4}, x_4 = \frac{7\pi}{4}$;

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{6\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{8\pi}{4}$	
$f(x) = \sin(2x)$		1		-1		1		1		Funktionswert
$f'(x) = 2\cos(2x)$	2	0	-2	0	2	0	-2	0	2	Klassifikation
Extrempkt		$H(\frac{\pi}{4}; 1)$		$T(\frac{3\pi}{4}; -1)$		$H(\frac{5\pi}{4}; 1)$		$T(\frac{7\pi}{4}; -1)$		

Aufg. 146/360: **a)** siehe Abb. 323 **b)** Auf ein Maximum folgt immer ein Maximum und umgekehrt.

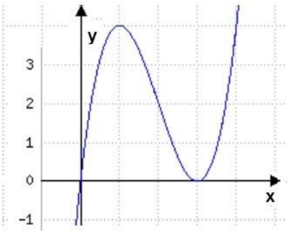
c) $f_1'(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x^2 - 1) \cdot (x + 3)$

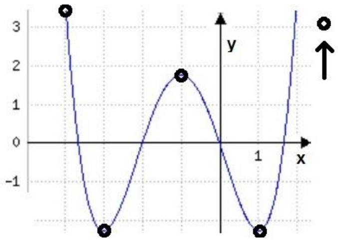
$f_2'(x) = -0.1 \cdot x^3 - 0.3 \cdot x^2 + 0.4 \cdot x + 1.2 = -0.1(x^2 - 4) \cdot (x + 3)$

Beide Bew. mit Polynomdivision oder sogar Punktprobe;

d) (Ag 360)	a	x_1	x_2	x_3	b
x	-4	-3	-1	1	3
$f_1(x)$	4	-2.25	1.75	-2.25	33.75
	R, M, l	i, m, g	i, M, l	i, m, g	R, M, g

d) (Ag 360)	a	x_1	x_2	x_3	b
x	-4	-3	-2	2	3
$f_2(x)$	-1.6	-1.125	-1.2	2	0.675
	R, m, g	i, M, l	i, m, l	i, M, g	R, m, l





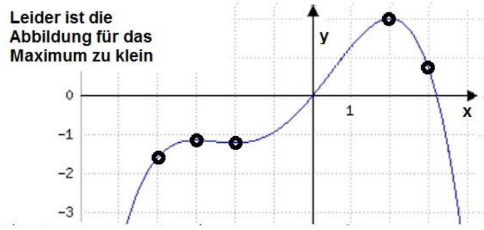


Abb. 323 Eingezeichnete Extremata $\frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{x^2}{2} - 3x$ $-0.025 \cdot x^4 - 0.1 \cdot x^3 + 0.2 \cdot x^2 + 1.2 \cdot x$

e) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ oder $x = 3$.

Wir betrachten folgende Wertetabelle:

x	-1	0	1	2	3	4
$x^3 - 6x^2 + 9x$	-16	0	4	2	0	4

$R_l(-1; 16)$ ist das globale Minimum (auch ein Lokales), $H(1; 4)$ ist ein globales Maximum (auch ein Lokales), $T(3; 0)$ ist ein lokales Minimum, $R_r(4; 4)$ ist ein globales Maximum (auch ein Lokales). Die Randwerte müssen also auch untersucht werden.

Aufg. 146/361: Jedes globale Extremum ist gleichzeitig ein lokales Extremum; R_l = Rand links.
a) $R_l(-1; 3)$ lokales Minimum, $H(0; 4)$ globales Maximum, $R_r(2; 0)$ globales Minimum;
b) $f_b'(x) = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$; $f(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2) = -2$,

x	-2	-1	0	1	3
$f_b'(x) = 3x^2 - 3$	9	0	-3	0	24
VZW		$+ \to -$		$- \to +$	
Klass.		Max		Min	
$f_b(x) = x^3 - 3x$	-2	2	0	-2	18

$R_l(-2; -2)$ globales Minimum, $H(-1; 2)$ lokales Maximum, $T(1; -2)$ globales Minimum, $R_r(3; 18)$ globales Maximum;
c) $R_l(0; 0)$ lokales Minimum, $T(1; -2)$ globales Minimum, $R_r(4; 52)$ globales Maximum;
d) $R_l(-1; -7)$ lokales Minimum, $H(0; 0)$ globales Maximum, $R_r(2; -16)$ globales Minimum;
e) $R_l(-1; 1.25)$ globales Maximum, $T(3; -6.75)$ globales Minimum, $R_r(4; 0)$ lokales Maximum;
f) $R_l(-1; 15.5)$ globales Maximum, $T(3; -40.5)$ globales Minimum, $R_r(4; -32)$ lokales Maxi;
g) $H(-2; 22)$ lokales Maximum, $T(3; -40.5)$ lokales Minimum, $f_g(x)$ hat keine globalen Extrema.

h) $f_h'(x) = (0.75x^4 - x^3 - 3x^2)' = 3x^3 - 3x^2 - 6x = 3x(x^2 - x - 2) = 3x(x-2)(x+1)$ (MNF + LFZ).
Damit gilt $f_h'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 0$.

Klassifikation (Min/Max):

x	-2	-1	-0.5	0	1	2	3
$f_h'(x)$	-24	0	≈ 1.875	0	-6	0	36
$f_h'(x)$	$-$	Min	$+$	Max	$-$	Min	$+$

Klassifikation (global):

x	-3	-1	0	2	3
$f_h'(x)$	60.75	-1.25	0	-8	6.75
$f_h'(x)$	glob. Max	lok. Min	lok. Max	glob. Min	lok. Max

Aufg. 146/362: a) $f_1'(x) = (\frac{x^3}{3} + 1x^2)' = x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = -2$.
VZW: $f_1'(-3) = 3$, $f_1'(-1) = -1$, $f_1'(1) = 3 \Rightarrow$ Max $x = -2$, Min $x = 0$;

$f_2'(x) = (\frac{x^3}{3} + 2x^2)' = x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = -4$.
VZW: $f_2'(-5) = 5$, $f_2'(-1) = -3$, $f_2'(1) = 5 \Rightarrow$ Max $x = -4$, Min $x = 0$;

$f'_3(x) = (\frac{x^3}{3} + 3x^2)' = x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = -6$.
VZW: $f'_2(-7) = 7$, $f'_2(-1) = -5$, $f'_2(1) = 7 \Rightarrow$ Max $x = -6$, Min $x = 0$;

$f'_{-1}(x) = (\frac{x^3}{3} - x^2)' = x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = 2$.
VZW: $f'_{-1}(-1) = 3$, $f'_{-1}(1) = -1$, $f'_{-1}(3) = 3 \Rightarrow$ Max $x = 0$, Min $x = 2$;

$f'_{-2}(x) = (\frac{x^3}{3} - 2x^2)' = x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = 4$.
VZW: $f'_{-2}(-1) = 5$, $f'_{-2}(1) = -3$, $f'_{-2}(5) = 5 \Rightarrow$ Max $x = 0$, Min $x = 4$;

b) $f'_t(x) = (\frac{x^3}{3} + tx^2)' = x^2 + 2tx = x(x + 2t) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = -2t$.
VZW: $f'_t(\text{-}3t) = (\text{-}3t)^2 + 2t(\text{-}3t) = 9t^2 - 6t^2 = 3t^2$, $f'_t(\text{-}t) = (\text{-}t)^2 + 2t(\text{-}t) = \text{-}t^2$, $f'_t(t) = t^2 + 2t \cdot t = 3t^2$,

für $t > 0$ Max $x = -2t$, Min $x = 0$,

für $t < 0$ Min $x = -2t$, Max $x = 0$; beachten Sie dabei, dass hier $-2t > 0$ ist.

$t = 0$: Keine Extrema.

Aufg. 146/363: a) Weg-Zeit-Gesetz: $s = \frac{a}{2} \cdot t^2$; Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz: $v = a \cdot t$;

b) $f'(x)$ deuten wir als die Momentangeschwindigkeit. Die zweite Ableitung $f''(x)$ ist die momentane Beschleunigung wird als momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit angesehen.

c) Im Auto gibt es den Tachometer, der die Momentangeschwindigkeit anzeigt. Ein Gerät zum Messen der Momentanbeschleunigung hingegen gibt es (in meinem Auto) nicht. Dennoch kann die Beschleunigung durch Erfahrungen wie ‚es drückt mich in den Sitz' beschrieben werden: Je schneller man beschleunigt, desto mehr drückt es mich in den Sitz (Popometer) bzw. wenn die Geschwindigkeit konstant ist, zieht es mich nirgendwo hin. Bremsen kann als negative Beschleunigung (es zieht mich vom Sitz weg) gedeutet werden. d) (Abb. 324)

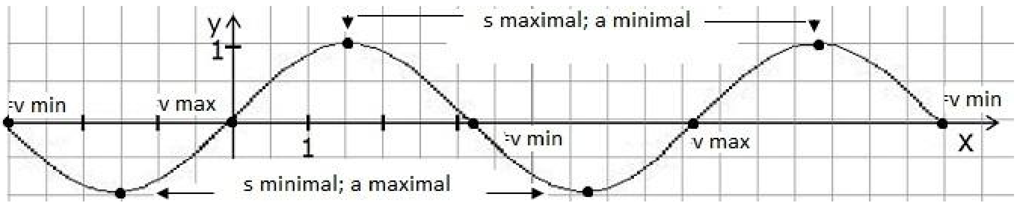


Abb. 324 s-t Diagramm - mathematisches Pendel

Aufg. 147/364: Die Lösungsvorschläge enthalten eine Orientierung bei Entfernungen und Geschwindigkeiten. Dies bedeutet, dass die Bewegung vorwärts und rückwärts interpretiert werden kann. Die Distanzen haben immer die Einheit km, die Geschwindigkeiten die Einheit km/h. Wenn $f(a) = f(b)$ handelt es sich um einen Rundweg.

a) $f(x) = 4x - x^2$; $v(x) = f'(x) = 4 - 2x$; $a(x) = f''(x) = -2$;

i) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$; $f(2) = 4$ maximale Entfernung; Randwerte: $f(0) = f(4) = 0$ (also Rundweg);

ii) $v'(x) \neq 0$; Randwerte: $v(0) = 4$; $v(4) = -4$.

b) $f(x) = x^3 - 3x$; $v(x) = f'(x) = 3x^2 - 3$; $a(x) = f''(x) = 6x$;

i) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$; $f(-1) = 2$ maximale Entfernung; $f(1) = -2$ 'minimale' Entfernung; Randwerte: $f(-\sqrt{3}) = f(\sqrt{3}) = 0$ (also Rundweg);

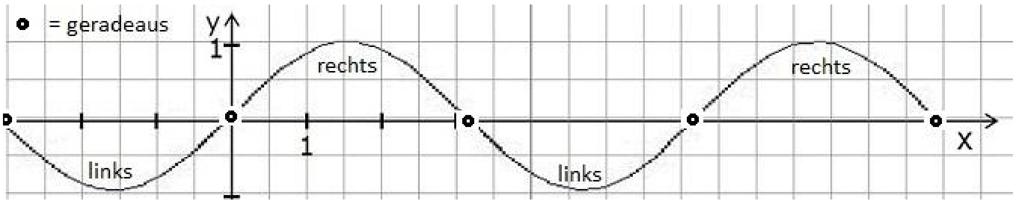
ii) $v'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $v(0) = -3$; Randwerte: $v(-\sqrt{3}) = v(\sqrt{3}) = 6$.

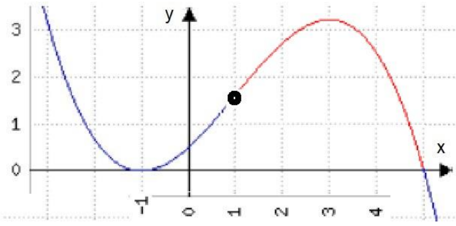
c) $f(x) = 0.125x^4 - 12x^2$; $v(x) = 0.5x^3 - 6x$; $a(x) = 1.5x^2 - 6$;

i) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{12}$ oder $x = 0$; $f(\pm\sqrt{12}) = -18$ $f(\pm\sqrt{24}) = f(0) = 0$;

ii) $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$; $v(-2) = 8$; $v(2) = -8$; Randwerte: $v(\pm\sqrt{24}) = \pm\sqrt{864} = \pm 12\sqrt{6}$ (das ist natürlich kein Spaziergang mehr).

Aufg. 147/365: (Abb. 325)





x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	3.2	0.7	0	0.5	1.6	2.7	3.2	2.5	0
f'(x)	-3.6	-1.5	0	0.9	1.2	0.9	0	-1.5	-3.6
f''(x)	2.4	1.8	1.2	0.6	0	-0.6	-1.2	-1.8	-2.4
R/L	L	L	L	L	gerade	R	R	R	R

Abb. 325 Klassifikation von Extrempunkten mit der zweiten Ableitung (Teile b+c)

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow P(x_0; f(x_0))$ liegt in einer Linkskurve. Hochpunkte liegen immer in Rechtskurven, Tiefpunkte in Linkskurven. Damit gilt $(f''(x_0) < 0$ und $f'(x_0) = 0) \Rightarrow P$ ist Hochpunkt
und $(f''(x_0) > 0$ und $f'(x_0) = 0) \Rightarrow P$ ist Tiefpunkt.

e) $f''(x_0) > 0 \Rightarrow P(x_0; f(x_0))$ liegt in einer <u>Links</u>kurve; $f''(x_0) < 0 \Rightarrow P(x_0; f(x_0))$ liegt in einer <u>Rechts</u>kurve.

f) Sei $P(x_0; f(x_0))$ ein Punkt mit waagrechter Tangente also $\underline{f'(x_0) = 0}$ und sei i) $f''(x_0) > 0$, dann ist P ein <u>Tief</u>punkt oder ii) $f''(x_0) > 0$, dann ist P ein <u>Hoch</u>punkt **(Formel 71)** .

g) $f''(x) = (x^3 - 6x^2 + 9x)'' = (3x^2 - 12x + 9)' = 6x - 12$;

$3x^2 - 12x + 9 = 0 \overset{:3}{\Leftrightarrow} x^2 - 4x + 3 = 0 \overset{MNF}{\Longleftrightarrow} x_1 = 1, x_2 = 3$. $f''(1) = 6 \cdot 1 - 12 = -6 \Rightarrow$ Maximum bei $x = 1$, $f''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 6 \Rightarrow$ Minimum bei $x = 3$.

g) Verallgemeinert: i-iv: $f_n(x) = x(x - 3n)^2$, $n \geq 1$. Maximum bei $x = n$, Minimum bei $x = 3n$.

v) Maximum bei $x = -3$, Minimum bei $x = -1$. vi) Maximum bei $x = -3$, Minimum bei $x = -1$.
vii) Maximum bei $x = 0$, Minimum bei $x = 2$. viii) Maximum bei $x = -1$, Minimum bei $x = 1$.

<u>S. 144 Nr. 368 h) iv)</u>

$f(x) = 6x^7 - 14x^6$

$f'(x) = 42x^6 - 84x^5$

$f''(x) = 252x^5 - 420x^4$

Exstremstellen: $f'(x) = 0$

$42x^6 - 84x^5 = 0$

$x^5 \cdot (42x - 84) = 0$ → NP $x_1 = 0$

$x_2 = 2$

$f''(0) = 0 \rightarrow$ nicht ausreichend

$\left.\begin{array}{l} f'(-1) = 126 \\ f'(1) = -42 \end{array}\right\}$ VZW von + nach − also HP(0/0)

$f''(2) = 1344 > 0$ also TP(2/−128)

Thx Jan

h) Verallgemeinert: $f_n(x) = (n - 14x^n - 2nx^{n-1}$, $3 \leq n \leq 6$, der Graph von f heisse G_f.

Für gerades n hat G_f im Ursprung einen Terrassenpunkt und bei $x = 2$ ein Minimum; für ungerades n hat G_f im Ursprung einen Hochpunkt und ebenfalls bei $x = 2$ ein Minimum.

Die Klassifikation an der Stelle $x = 0$ kann für $n > 3$ nur mit Hilfe eines Vorzeichenwechsels von $f'(x)$ gemacht werden.

Klassifikation der Extremstellen von Ag 145/359:

a) $f_a''(x) = (x^3 - 3x)'' = (3x^2 - 3)' = 6x$; $f''(-1) = -6$ (Maximum), $f''(1) = 6$ (Minimum).

b) $f_b''(x) = (x^4 - 8x^2 + 8)'' = (4x^3 - 16x)' = 12x^2 - 16$;
$f''(-2) = 32$ (Minimum), $f''(0) = -16$ (Maximum), $f''(3) = 32$ (Minimum).

c) $f_c''(x) = (0.75x^4 - x^3 - 9x^2 + 10)'' = (3x^3 - 3x^2 - 18x)' = 9x^2 - 6x - 18$;
$f''(-2) = 30$ (Minimum), $f''(0) = -18$ (Maximum), $f''(3) = 45$ (Minimum).

d) $f_d''(x) = (0.6x^5 - 5x^3 + 12x)'' = (3x^4 - 15x^2 + 12)' = 12x^3 - 30x$; $f''(-2) = -36$ (Maximum), $f''(-1) = 18$ (Minimum), $f''(1) = -18$ (Maximum), $f''(2) = 36$ (Minimum).

e) $f_e''(x) = (x^4 - 4x^3)'' = (4x^3 - 12x^2)' = 12x^2 - 24x$; $f''(-3) = -180$ (Maximum),
$f''(0) = 0$ (Klassifikation schlägt fehl - tatsächlich ist es eine Terrassenstelle).

f) $f_f''(x) = (0.6x^5 - 3x^4 + 4x^3)'' = (3x^4 - 12x^3 + 12x^2)' = 12x^3 - 36x^2 + 24x$;
$f''(0) = 0 = f''(2)$ (Klassifikation schlägt komplett fehl - tatsächlich sind es Terrassenstellen).

g) $f_g''(x) = (x^6 - 24x^4)'' = (6x^5 - 96x^3)' = 30x^4 - 288x^2$; $f''(-4) = 3072$ (Minimum), $f''(0) = 0$ (Klassifikation schlägt fehl - tatsächlich ist es ein Maximum), $f''(4) = 3072$ (Minimum).

h) $f_h''(x) = (\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} - 2x)'' = (x^3 - 3x - 2)' = 3x^2 - 3$; $f''(-1) = 0$ (Klassifikation schlägt fehl - tatsächlich ist es eine Terrasse), $f''(2) = 9$ (Minimum).

i) $f_i''(x) = (\frac{x^5}{5} - \frac{10x^3}{3} + 9x)'' = (x^4 - 10x^2 + 9)' = 4x^3 - 20x$; $f''(-3) = -48$ (Maximum), $f''(-1) = 16$ (Minimum), $f''(1) = -16$ (Maximum), $f''(3) = 48$ (Minimum).

j) $f_j''(x) = (0.6x^5 - 4x^3)'' = (3x^4 - 12x^2)' = 12x^3 - 24x$; $f''(-2) = -48$ (Maximum), $f''(0) = 0$ (Klassifikation schlägt fehl - tatsächlich ist es eine Terrasse), $f''(2) = -48$ (Minimum).

k) $f_k(x) = (-\frac{x^7}{7} + \frac{34x^5}{5} - 75x^3)'' = (-x^6 + 34x^4 - 225x^2)' = -6x^5 + 136x^3 - 450x$; $f''(-5) = 4000$ (Minimum), $f''(-3) = -864$ (Maximum), $f''(0) = 0$ (Klassifikation schlägt fehl - tatsächlich ist es eine Terrasse), $f''(3) = 864$ (Minimum), $f''(5) = -4000$ (Maximum).

L) $f_l''(x) = (\sin(x))'' = (\cos(x))' = -\sin(x)$; $f''(\frac{\pi}{2}) = -1$ (Maximum), $f''(\frac{3\pi}{2}) = 1$ (Minimum).

m) $f_m''(x) = (\cos(x))'' = (-\sin(x))' = -\cos(x)$; $f''(0) = -1$ (Maximum), $f''(\pi) = 1$ (Minimum), $f''(2\pi) = -1$ (Maximum).

n) $f_n''(x) = (\sin(\frac{x}{2}))'' = (\frac{1}{2}\cos(\frac{x}{2}))' = \frac{-1}{4}\sin(\frac{x}{2})$; $f''(\pi) = -0.25$ (Maximum).

o) $f_o''(x) = (\sin(2x))'' = (2\cos(2x))' = -4\sin(2x)$; $f''(\frac{\pi}{4}) = -1$ (Maximum), $f''(\frac{3\pi}{4}) = 1$ (Minimum), $f''(\frac{5\pi}{4}) = -1$ (Maximum), $f''(\frac{7\pi}{4}) = 1$ (Minimum).

Aufg. 147/366: a) Es gilt: „Wenn es regnet, dann ist die Straße nass.“ Die Umkehrung des Satzes gilt aber nicht - es könnte aufgehört haben zu regnen, die Straße ist aber noch nicht getrocknet. Dialog 1: Die Straße ist nass. Dialog 2: Es ist nicht sicher, dass es regnet.

b) $R \Rightarrow N$, dann heißt N notwendig für R und R hinreichend für N. Es gilt ($f'(x_0) = 0$ und $f'(x_0) < 0$) $\Rightarrow f$ hat bei x_0 ein Maximum $\Rightarrow f'(x_0) = 0$. Damit ist ($f'(x_0) = 0$ und $f'(x_0) < 0$) hinreichend für Maximum und $f'(x_0) = 0$ (nur) notwendig (Minimum analog).

c) $\underline{f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) \neq 0} \Rightarrow K_f$ hat einen Extrempunkt $E(x_0; f(x_0)) \Rightarrow \underline{f'(x_0) = 0}$.

d) $f'(x) = \left(x^2 \cdot (2 - x^2)\right)' = \left(2x^2 - x^4\right)' = 4x - 4x^3$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = \pm 1$.

x	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2
$f'(x)$	24	0	-1.5	0	1.5	0	-24
		$H_1(-1;1)$		$T(0;0)$		$H_2(1;1)$	

$f''(x) = 4 - 12x^2$; $f''(-1) = -8 \Rightarrow H_1(-1;1)$, $f''(0) = 4 \Rightarrow T(0;0)$, $f''(-1) = 8 \Rightarrow H_2(1;1)$.

e) $f''(x) = (0.8x^5 - 2x^4)'' = (4x^4 - 8x^3)' = 16x^4 - 24x^3$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^4 - 8x^3 = 0 \Leftrightarrow 4x^(x-2) = 0$ $\Leftrightarrow x_1 = 0$ oder $x_2 = 2$; $f''(2) = 64 > 0$ Minimum; $f''(0) = 0$ so nicht entscheidbar: Wertetabelle

x	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	12	0	-4	0	108
		$H(0;0)$		$T(2;-6.4)$	

f) aus Ag 145/359 $f_a''(x) = (x^3 - 12x)'' = (3x^2 - 12)' = 6x$;
$f_a''(-2) = -12 \Rightarrow$ Maximum; $f_a''(2) = 12 \Rightarrow$ Minimum

$f_b''(x) = (x^4 - 8x^2 + 8)'' = (4x^3 - 16x)' = 12x^2 - 16$
$f_b''(-2) = 32 \Rightarrow$ Minimum; $f_b''(0) = -16 \Rightarrow$ Maximum; $f_b''(2) = 32 \Rightarrow$ Minimum;

$f_c''(x) = (0.75x^4 - x^3 - 9x^2 + 10)'' = (3x^3 - 3x^2 - 18x)' = 9x^2 - 6x - 18$
$f_c''(-2) = 81 \Rightarrow$ Minimum; $f_c''(0) = -18 \Rightarrow$ Maximum; $f_c''(3) = 45 \Rightarrow$ Minimum;

$f_d''(x) = (0.6x^5 - 5x^3 + 12x)'' = (3x^4 - 15x^2 + 12)' = 12x^3 - 30x$
$f_d''(-2) = -36 \Rightarrow$ Maximum; $f_d''(-1) = 18 \Rightarrow$ Minimum; $f_d''(1) = -18 \Rightarrow$ Maximum;
$f_d''(2) = 36 \Rightarrow$ Minimum;

$f_e''(x) = (x^4 - 4x^3)'' = (4x^3 - 12x^2)' = 12x^2 - 24x$
$f_e''(-3) = 180 \Rightarrow$ Minimum; $f_e''(0) = 0 \Rightarrow$ keine Klassifikation möglich (hier Terrasse);

$f_f''(x) = (0.6x^5 - 3x^4 + 4x^3)'' = (3x^4 - 12x^3 + 12x^2)' = 12x^3 - 36x^2 + 24x$
$f_f''(0) = 0$ und $f_f''(2) = 0 \Rightarrow$ keine Klassifikation möglich (hier beides Terrasse);

$f_g''(x) = (x^6 - 24x^4)'' = (6x^5 - 96x^3)' = 30x^4 - 288x^2$
$f_g''(-4) = 3072 \Rightarrow$ Minimum; $f_g''(0) = 0 \Rightarrow$ keine Klassifikation möglich (hier Maximum);
$f_g''(4) = 3072 \Rightarrow$ Minimum;

$f_h''(x) = (\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} - 2x)'' = (x^3 - 3x - 2)' = 3x^2 - 3$
$f_h''(-1) = 0 \Rightarrow$ keine Klassifikation möglich (hier Terrasse); $f_h''(2) = 9 \Rightarrow$ Minimum;

$f_i''(x) = (\frac{x^5}{5} - \frac{10x^3}{3} + 9x)'' = (x^4 - 10x^2 + 9)' = 4x^3 - 20x$
$f_i''(-3) = -48 \Rightarrow$ Maximum; $f_i''(-1) = 16 \Rightarrow$ Minimum; $f_i''(1) = -16 \Rightarrow$ Maximum;
$f_i''(3) = 48 \Rightarrow$ Minimum;

$f_j''(x) = (0.6x^5 - 4x^3)'' = (3x^4 - 12x^2)' = 12x^3 - 24x$
$f_j''(-2) = -48 \Rightarrow$ Maximum; $f_j''(0) = 0 \Rightarrow$ keine Klassifikation möglich (hier Terrasse);
$f_j''(2) = 48 \Rightarrow$ Minimum;

$f_k''(x) = (-\frac{x^7}{7} + \frac{34x^5}{5} - 75x^3)'' = (-x^6 + 34x^4 - 225x^2)' = -6x^5 + 136x^3 - 450x$
$f_k''(-5) = 4000 \Rightarrow$ Minimum; $f_k''(-3) = -864 \Rightarrow$ Maximum;
$f_k''(0) = 0 \Rightarrow$ keine Klassifikation möglich (hier Terrasse);
$f_k''(3) = 864 \Rightarrow$ Minimum; $f_k''(5) = -4000 \Rightarrow$ Maximum;

ab hier ist $\mathbb{D} = [0; 2\pi]$

$f_l''(x) = (\sin(x))'' = (\cos(x))' = -\sin(x)$
$f_l''(\frac{\pi}{2}) = -1 \Rightarrow$ Maximum; $f_l''(\frac{3\pi}{2}) = 1 \Rightarrow$ Minimum;

$f_m''(x) = (\cos(x))'' = (-\sin(x))' = -\cos(x)$
$f_m''(0) = -1 \Rightarrow$ Maximum; $f_m''(\pi) = 1 \Rightarrow$ Minimum; $f_m''(2\pi) = -1 \Rightarrow$ Maximum;

$f_n''(x) = (\sin(\frac{x}{2}))'' = (\frac{1}{2}\cos(\frac{x}{2}))' = -\frac{1}{4}\sin(\frac{x}{2})$
$f_n''(\pi) = -0.25 \Rightarrow$ Maximum;

$f_o''(x) = (\sin(2x))'' = (2\cos(2x))' = -4\sin(2x)$
$f_o''(\frac{\pi}{4}) = -4 \Rightarrow$ Maximum; $f_o''(\frac{3\pi}{4}) = 4 \Rightarrow$ Minimum; $f_o''(\frac{5\pi}{4}) = -4 \Rightarrow$ Maximum;
$f_o''(\frac{7\pi}{4}) = 4 \Rightarrow$ Minimum;

Aufg. 148/367: a) B ist notwendig und hinreichend für A; b) B ist notwendig für A; c) B ist hinreichend für A; d) B ist notwendig für A, (jedes Parallelogramm ist ein Trapez); e) weder noch.

Aufg. 148/368: a) Ein Punkt $(x_0, f(x_0))$, bei welchem eine Linkskurve in eine Rechtskurve (oder umgekehrt) übergeht, heißt Wendepunkt. Hier gilt $\underline{f''(x_0)} = \underline{0}$ (falls f zwei mal differenzierbar ist).

iii') Ein Wendepunkt ist ein Punkt mit extremaler Steigung. Hier gilt $\underline{f''(x)}=\underline{0}$. Logisch, denn wenn die Steigung $\underline{f'(x)}$ extremal ist, muss deren Ableitung $\underline{f''(x)}$ =0 sein.

b) $f''(x) = (x^3+9x^2+24x)'' = (3x^2+18x+24)' = 6x+18 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -3$; $f''(-4) = -2$ (Rechtskurve), $f''(-2) = 2$ (Linkskurve). K_f wechselt bei $x = -3$ von einer Rechtskurve in eine Linkskurve.

$f'(x) = 3x^2 + 18x + 24 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 8 = 0 x_2 = -4, x_3 = -2$; $f(-4) = -16$ und $f''(-4) = -2$ (Rechtsk.) $\Rightarrow H(-4/-16)$ $f(-2) = -20$ und $f''(-2) = 2$ (Linksk.) $\Rightarrow T(-2/-20)$.

c) $f''(x) = (x(x-3)^2)'' = (x^3 - 6x^2 + 9x)'' = (3x^2 - 12x + 9)' = 6x - 12$.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ oder $x = 3$; $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$; $H(1;4)$, $W(2;2)$, $T(3;0)$.

c) $f_n(x) = \frac{x^4}{16} - n \cdot \frac{x^3}{4}$: $W_1(0;0)$; $f_n(2n) = \frac{(2n)^4}{16} - n \cdot \frac{(2n)^3}{4} = -n^4$, $W_2(2n;-n^4)$.

f) $(x^3 - 6x^2)'' = (3x^2 - 12x)' = 6x - 12$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 4$; $f(0) = 0$, $f''(0) = -12 < 0 \Rightarrow H(0;0)$ (Rechtskurve), $f(4) = -32$, $f''(4) = 12 > 0 \Rightarrow T(4;-32)$ (Linkskurve); $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 2$; K_f wechselt bei $x_3 = 2$ von einer Rechtskurve in eine Linkskurve.

g) Erklären Sie den Unterschied zwischen einem Wendepunkt maximaler (Typ $\underline{-x^3}$) und minimaler Steigung (Typ $\underline{x^3}$).

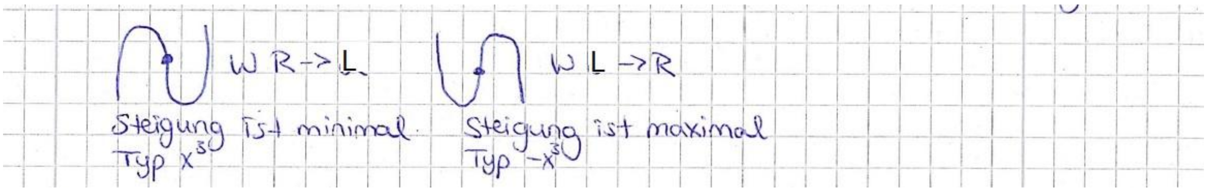


Abb. 326 Typisierung Wendepunkte

h) Bem.: Der Wendepunkt liegt in der Mitte der Extrempunkte. Dies gilt für alle kubischen Funktionen. Beweis siehe Ag 107/279.

Aufg. 148/369: a) Der Graph einer differenzierbaren Funktion f heißt linksgekrümmt $\Leftrightarrow f'$ ist smw. Sei (f zwei mal stetig differenzierbar und) $\underline{f''(x_0) < 0}$, dann liegt $P(x_0; f(x_0))$ in einer Rechtskurve. Das Vorzeichen von $\underline{f''(x)}$ entscheidet also über die Kurvenkrümmungsrichtung.

b) Damit gilt für Wendepunkte $W(x_1; f(x_1))$: $\underline{f''(x)}$ wechselt bei $\underline{x_1}$ das Vorzeichen.

c) Ein solches Kriterium kennen wir bereits von den Extremwerten. Tatsächlich sind Wendestellen Extremstellen von $\underline{f'(x)}$.

d) Sei $\underline{f''(x_0) = 0}$ und $\underline{f'''(x_0) > 0}$ oder $\underline{f'''(x_0) < 0}$ (also $\underline{f'''(x_0) \neq 0}$) $\Rightarrow K_f$ hat bei x_0 einen Wendepunkt $\underline{W(x_0; f(x_0))}$.

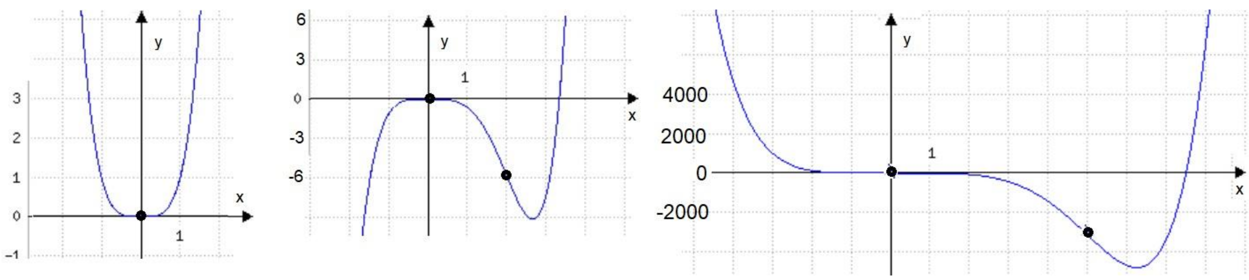


Abb. 327 x^4, $0.3x^5 - x^4$, $0.4x^6 - 3x^5$

e) $f'''(x)=(\frac{x^4}{4}-6x^2)'''=(x^3-12x)''=(3x^2-12)'=6x$; $f''(x)=3x^2-12=0 \Leftrightarrow x=\pm 2$;
$f(-2)=-20$, $f'''(-2)=-12\neq 0 \Rightarrow W_1(-2;-20)$; $f(2)=-20$, $f'''(2)=12\neq 0 \Rightarrow W_2(2;-20)$;

f) $f_1(x)=x^3-4.5x^2$: $W(1.5;-6.75)$; $f_2(x)=0.25x^4-0.5x^3-9x^2$: $W(-2;-28)$; $W(3;-74.25)$
$f_3(x)=0.25x^4+x^3-12x^2$: $W(-4;-192)$; $W(2;-36)$ $f_4(x)=0.1x^6-1.25x^4+6x^2$: $W(\pm 2;10.4)$; $W(\pm 1;4.85)$

$f_5''(x)=(x^4+x)''=(4x^3+1)'=12x^2=0 \Leftrightarrow x_1=0$
(x_1 ist eine doppelte Nullstelle von $f_5''(x)$ - vermutlich hat $f''(x)$ keinen VZW).
$f_5'''(x)=(12x^2)'=24x$, $f_5'''(0)=0$ damit muss der Wendepunkt mit Hilfe eines VZW von $f''(x)$ verifiziert werden:
$f_5''(-1)=13$ (Linkskurve), $f_5''(1)=13$ (Linkskurve) kein VZW, damit handelt es sich um keinen Wendepunkt; hierbei handelt es sich um einen Flachpunkt.

$f_6''(x)=(0.3x^5-x^4)''=(1.5x^4-4x^3)'=6x^3-12x^2=6x^2(x-2)=0 \Leftrightarrow x_1=0, x_2=2$
(x_1 ist eine doppelte Nullstelle von $f_6''(x)$ - vermutlich hat $f''(x)$ keinen VZW).
$f_6'''(x)=(6x^3-12x^2)'=18x^2-24x$, $f_6'''(2)=24\neq 0 \Rightarrow W(2;-6.4)$.
$f_6'''(0)=0$ damit muss der Wendepunkt mit Hilfe eines VZW von $f''(x)$ verifiziert werden:
$f_6''(-1)=-18$ (Rechtskurve), $f_2''(1)=-6$ (Rechtskurve) kein VZW, damit handelt es sich um keinen Wendepunkt; hierbei handelt es sich um einen Flachpunkt.

$f_7''(x)=(0.4x^6-3x^5)''=(2.4x^5-15x^4)'=12x^4-60x^3=12x^3(x-5) \Leftrightarrow x_1=0, x_2=5$
(x_1 ist eine dreifache Nullstelle von $f_7''(x)$ - vermutlich hat $f''(x)$ einen VZW).
$f_7'''(x)=(12x^4-60x^3)'=48x^3-180x^2$, $f_7'''(5)=-1875\neq 0 \Rightarrow W(5;-3125)$. $f_7'''(0)=0$
damit muss der Wendepunkt mit Hilfe eines VZW von $f_7''(x)$ verifiziert werden: $f_7''(-1)=72$ (Linkskurve), $f_7''(1)=-48$ (Rechtskurve), VZW, damit handelt es sich um einen Wendepunkt.

g) Verallgemeinert: $f_n(x)=\frac{x^4}{2}-(n-2)\cdot x^3+3(n-3)\cdot x^2$, $f_n'(x)=2x^3-3(n-2)\cdot x^2+6(n-3)\cdot x$,
$f_n''(x)=6x^2-6(n-2)\cdot x+6(n-3)=6\cdot(x-1)\cdot(x-(n-3))$, Wendestellen $n-3$ und 1.
G_f ist zwischen $n-3$ und 1 (oder zwischen 1 und $n-3$) eine Rechtkurve.

$f_n(1)=0.5-(n-2)+3(n-3)=2n-6.5$;

$f_n(n-3)=0.5(n-3)^4-n\cdot(n-3)^3+3(n-3)\cdot(n-3)^2=-0.5n^4+6n^3-27n^2+54n-40.5$;

Wendepunkte für ($n\neq 4$): $W_1(1;2n-6.5)$; $W_2(n-3;-0.5n^4+6n^3-27n^2+54n-40.5)$;

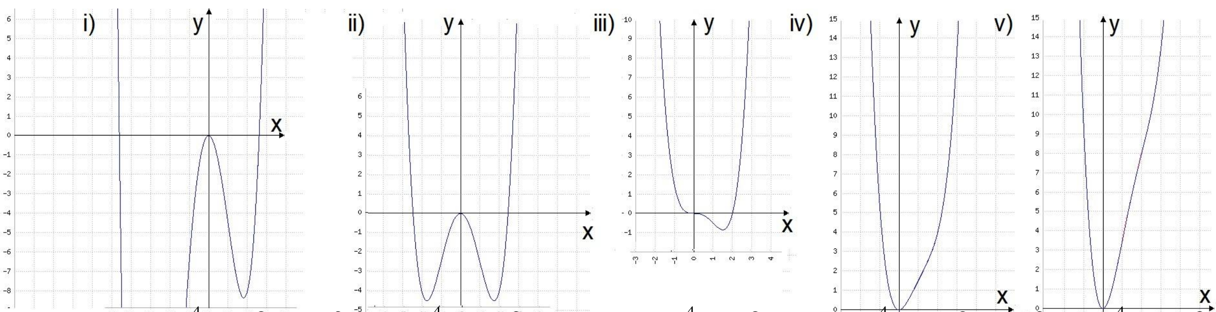


Abb. 328 i) $\frac{x^4}{2}+x^3-6x^2$, ii) $\frac{x^4}{2}-3x^2$, iii) $\frac{x^4}{2}-x^3$, iv) $\frac{x^4}{2}-2x^3+3x^2$, v) $\frac{x^4}{2}-3x^3+6x^2$

Für $n=4$ hat G_f keinen Wendepunkt: $f_2''(1)=0$, $f_2''(0)=6=f_2''(2)$ also hat $f''(x)$ keinen Vorzeichenwechsel. Genau in diesem Falle ist G_f komplett eine Linkskurve.

Sonderinfos aus den Abbildungen: Für $n=2$ ist G_f achsensymmetrisch zur y-Achse. Für $n=3$ hat G_f einen Terrassenpunkt. Für $n=4$ berührt G_f in $P(1;1.5)$ seine Tangente vierfach. Für $n<3$ hat G_f drei Extrempunkte; Für $n\geq 4$ hat G_f nur einen Extrempunkt $T(0;0)$.

Aufg. 148/370: Die allgemeine Tangentengleichung: $y=f'(u)\cdot(x-u)+f(u)$; WT=Wendetangente:

a) $W(-1;2)$, RK für $x<-1$; WT: $y=(3u^2+6u)\cdot(x-u)+u^3+3u^2$ mit $u=-1$:
$y=(3(-1)^2+6(-1))\cdot(x-(-1))+(-1)^3+3(-1)^2 \Leftrightarrow y=(-3)\cdot(x+1)+2 \Leftrightarrow y=-3x-1$;

b) $W(\pm 1; -5)$, RK für $-1 < x < 1$; WT: $y = (4u^3 - 12u) \cdot (x - u) + u^4 - 6u^2$ mit $u = \pm 1$:

$u = -1:\quad y = (4 \cdot (-1)^3 - 12(-1)) \cdot (x - (-1)) + (-1)^4 - 6 \cdot (-1)^2 \Leftrightarrow y = 8 \cdot (x + 1) - 5$
$\Leftrightarrow y = 8x + 3;$

$u = 1:\quad y = (4 \cdot 1^3 - 12 \cdot 1) \cdot (x - 1) + 1^4 - 6 \cdot 1^2 \Leftrightarrow y = (-8) \cdot (x - 1) - 5$
$\Leftrightarrow y = -8x + 3;$

c) $f_c'''(x) = (\frac{x^4}{2} - 4x^3 + 9x^2)''' = (2x^3 - 12x^2 + 18x)'' = (6x^2 - 24x + 18)' = 12x - 24;$
$f''(x) = 6x^2 - 24x + 18 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1; x_2 = 3;$
$f(1) = 5.5,\ f''(1) - 12 \neq 0 \Rightarrow W_1(1; 5.5),$ $f(3) = 13.5,\ f''(3)12 \neq 0 \Rightarrow W_2(3; 13.5),$
K_f is eine Rechtskurve für $1 < x < 3$, weil dort $f''(x) < 0$ ist, sonst ist K_f eine Linkskurve;

WT: $y = (2u^3 - 12u^2 + 18u) \cdot (x - u) + \frac{u^4}{2} - 4u^3 + 9u^2$ mit $u = 1$, $u = 3$:

$u = 1:\quad y = (2 \cdot 1^3 - 12 \cdot 1^2 + 18 \cdot 1) \cdot (x - 1) + \frac{1^4}{2} - 4 \cdot 1^3 + 9 \cdot 1^2 \Leftrightarrow y = 8 \cdot (x - 1) + 5.5$
$\Leftrightarrow y = 8x - 2.5;$

$u = 3:\quad y = (2 \cdot 3^3 - 12 \cdot 3^2 + 18 \cdot 3) \cdot (x - 3) + \frac{3^4}{2} - 4 \cdot 3^3 + 9 \cdot 3^2 \Leftrightarrow y = 0 \cdot (x - 3) + 13.5$
$\Leftrightarrow y = 13.5;$

d) $W_{1,2}(\pm 3; \mp 56.7)$, $W_3(0; 0)$, RK für $x < -3$ oder $0 < x < 3$;

WT: $y = (\frac{5u^4}{10} - 9u^2) \cdot (x - u) + \frac{u^5}{10} - 3u^3$ mit $u = \pm 3$:

$u = -3:\quad y = (\frac{5 \cdot (-3)^4}{10} - 9 \cdot (-3)^2) \cdot (x - (-3)) + \frac{(-3)^5}{10} - 3 \cdot (-3)^3 \Leftrightarrow y = -40.5 \cdot (x + 3) + 56.7$
$\Leftrightarrow y = -40.5x - 64.8;$

$u = 3:\quad y = (\frac{5 \cdot 3^4}{10} - 9 \cdot 3^2) \cdot (x - 3) + \frac{3^5}{10} - 3 \cdot 3^3 \Leftrightarrow y = -40.5 \cdot (x - 3) - 56.7$
$\Leftrightarrow y = -40.5x + 64.8;$

e) $f'(x) = (x^3 \cdot (\frac{4}{3} - \frac{x^2}{5}))' = (\frac{4}{3}x^3 - \frac{x^5}{5})' = 4x^2 - x^4$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = \pm 2$;

$f''(x) = 8x - 4x^3$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	-45	0	3	0	3	0	-45
	$-$	$T(-2; -4.3)$	$+$	$W(0; 0)$	$+$	$H(2; 4.3)$	$-$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 8x - 4x^3 = 4x(2 - x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = \pm\sqrt{2}$.

$f'''(x) = (8x - 4x^3)' = 8 - 12x^2$; $f'''(0) = 8 > 0 \Rightarrow$ Wendestelle mit minimaler Steigung;

$f'''(\pm\sqrt{2}) = -16 < 0 \Rightarrow$ Wendestelle mit maximaler Steigung;

$g'(x) = (x^4 \cdot (6 - x^2))' = (6x^4 - x^6)' = 24x^3 - 6x^5$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = \pm 2$ (schon wieder); $g''(x) = 72x^2 - 30x^4$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g'(x)$	810	0	-18	0	18	0	-810
	$+$	$H_1(-2; 32)$	$-$	$T(0; 0)$	$+$	$H_2(2; 32)$	$-$

g nur zwei Wendepunkte $W_1(-\sqrt{2.4}; 20.736)$, $W_2(\sqrt{2.4}; 20.736)$.

e) $f_t'''(x) = (\frac{x^3}{t} + 3tx^2)''' = (\frac{3x^2}{t} + 6tx)'' = (\frac{6x}{t} + 6t)' = \frac{6}{t} (\neq 0)$,
$f'(x) = \frac{6x}{t} + 6t = 0 \Leftrightarrow 6x + 6t^2 = 0 \Leftrightarrow x = -t^2, (x < 0\,!)$;
$f_t(-t^2) = \frac{(-t^2)^3}{t} + 3t \cdot (-t^2)^2 = \frac{-t^6}{t} + 3t \cdot t^4 = -t^5 + 3t^5 = 2t^5$
$\Rightarrow W(-t^2; 2t^5)$ ohne (0;0);
EdP: $x = -t^2 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{-x}$, $y = 2t^5 = 2(\pm\sqrt{-x})^5 = \pm(-x)^{2.5}$
(ähnlich einer Neilschen Parabel). (Abb. 629/343 und 329)

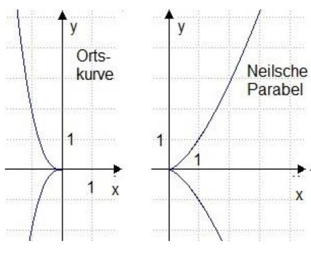


Abb. 329 Ortskurve und Neilsche Parabel

f) **Die Funktionen 1 bis 6:**

$f_n(x) = -x^3 + 3(n-2)x^2$; $f_n'(x) = -3x^2 + 6(n-2)x$; $f_n''(x) = -6x + 6(n-2)$;

G_f (der Graph von f) hat im Ursprung eine doppelte (für $n = 2$ eine dreifache) Nullstelle.
Für $n < 2$ ist (0;0) ein Hochpunkt, für $n > 2$ ist (0;0) ein Tiefpunkt.
Der Globalverlauf ist immer vom Typ (= der Selbe wie bei) $-x^3$.

$f_n''(x) = -6x + 6(n-2) \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow x = n - 2;$ $\quad f_n'''(x) = -6$; (Wendestellen verifiziert);

Wendetangente: $y = f_n'(n-2) \cdot (x - (n-2)) + f_n(n-2)$.

$\Leftrightarrow y = \big(-3(n-2)^2 + 6(n-2) \cdot (n-2)\big) \cdot (x - (n-2)) - (n-2)^3 + 3(n-2) \cdot (n-2)^2$

$\Leftrightarrow y = (3(n-2)^2) \cdot (x - (n-2)) + 2(n-2)^3$

$\Leftrightarrow y = 3(n-2)^2 x - 3(n-2)^3 + 2(n-2)^3$

$\Leftrightarrow y = 3(n-2)^2 x - (n-2)^3$

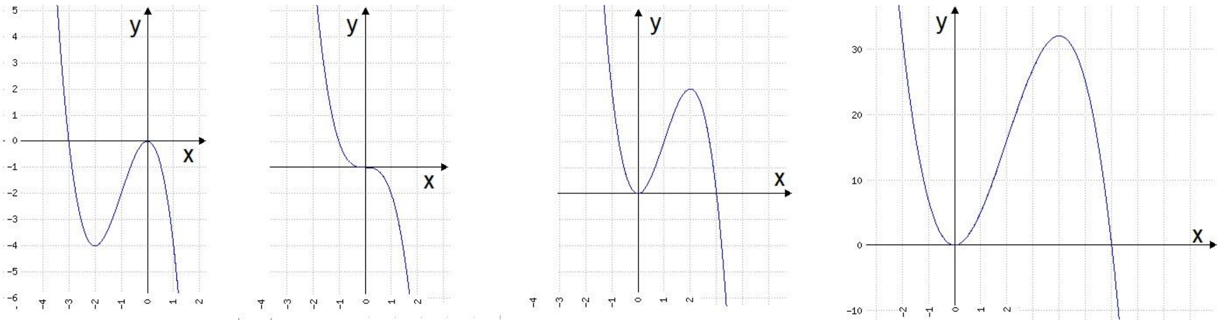


Abb. 330 i) $-x^3 - 3x^2$; ii) $-x^3$; iii) $-x^3 + 3x^2$; iv) $-x^3 + 6x^2$;

Die ersten 6 Tangenten sind:

i) $y = -3x + 1$; ii) $y = 0$; iii) $y = 3x - 1$; iv) $y = 12x - 8$; v) $y = 27x - 27$;

vi) $y = 48x - 64$;

Die Funktionen 7-11 beziehen sich auf $f_1(x) = -x^3 - 3x^2$ mit Tangente $y = -3x + 1$.

$f_7(x) = x^3 + 3x^2$, G_1 + die Tangente wurden an der x-Achse gespiegelt; $W_7(1;2)$, $f'(1) = 3$,
Tg: $y = 3(x-1) + 2 = 3x - 1$; $m_7 = m_1; c_7 = -c_1$.

$f_8(x) = -x^3 - 3x^2$, G_1 + Tg wurden an der y-Achse gespiegelt; $W_8(-1;-2)$, $f'(-1) = 3$,
Tg: $y = 3(x+1) - 2 = 3x + 1$; $m_8 = -m_1; c_8 = c_1$.

$f_9(x) = -2x^3 - 6x^2$, G_1 + Tg wurden in y-Richtung mit Streckfaktor 2 gestreckt; $W_9(-1;-4)$, $f'(1) = 6$, Tg: $y = 6(x+1) - 4 = 6x + 2$; $m_9 = 2m_1; c_9 = 2c_1$.

$f_{10}(x) = -\frac{x^3}{8} + \frac{3x^2}{4}$, G_1 + Tg wurden in y-Richtung mit Streckfaktor 2 gestreckt; $W_{10}(2;2)$, $f'(2) = 1.5$,
Tg: $y = 1.5(x-2) + 2 = 1.5x + 1$; $m_{10} = \frac{1}{2}m_1; c_{10} = c_1$.

$f_{11}(x) = -\frac{x^3}{4} + \frac{3x^2}{2}$, G_1 + Tg wurden zentrisch mit Streckfaktor 2 und Zentrum (0;0) gestreckt; aus der impliziten Form $\frac{y}{2} = f_1(\frac{x}{2})$ oder $\frac{y}{2} = -(\frac{x}{2})^3 - 3(\frac{x}{2})^2$; $W_{11}(2;4)$, $f'(2) = 3$,
Tg: $y = 3(x-2) + 4 = 3x - 2$; $m_{11} = m_1(!)$; $c_{11} = 2c_1$.

Aufg. 149/371: a) Sei $f(x) = a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$, dann ist $f''(x) = 12a_4 \cdot x^2 + 6a_3 \cdot x + 2a_2$. $f''(x)$ ist vom Grad 2 kann also maximal zwei Nullstellen haben. K_f hat also maximal zwei Wendepunkte.

Der Satz 'Der Graph einer Funktion f hat einen Wendepunkt' besagt, dass dieser micht (mit $f'''(x)$) verifiziert werden muss. b) $W(2|\frac{2}{3})$; c) $W(1|-2)$; $y = 2x - 4$.

Beginn Funktionaler Zusammenhang: Siehe Aufgabe 91/220 (Klasse 8) LöVo auf Seite 538

Aufg. 149/372: C liegt auf dem Graph von f.

a) $A_a(u) = u \cdot (8 - 2u),\ \mathbb{D} = [0;4],\ u_{max} =,\ A_{max} = 8,\ A(0) = A(4) = 0;$
b) $A_b(u) = u \cdot (6 - 0.5u),\ \mathbb{D} = [0;12],\ u_{max} = 6,\ A_{max} = 18, A(0) = A(12) = 0;$
c) $A_c(u) = u \cdot (6u - u^2),\ \mathbb{D} = [0;6],\ u_{max} = 4,\ A_{max} = 32,\ A(0) = A(6) = 0;$
d) $A_d(u) = u \cdot (u^2(4 - u)),\ \mathbb{D} = [0;4],\ u_{max} = 3,\ A_{max} = 27,\ A(0) = A(4) = 0;$

Es ist Zufall, dass die Randwerte bei den Ag 372a) bis Ag 372d) =0 sind.

e) Der Graph einer Fktn $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ ist die Menge aller Punkte der Form $(u|f(u))$ für alle $u \in \mathbb{D}$.

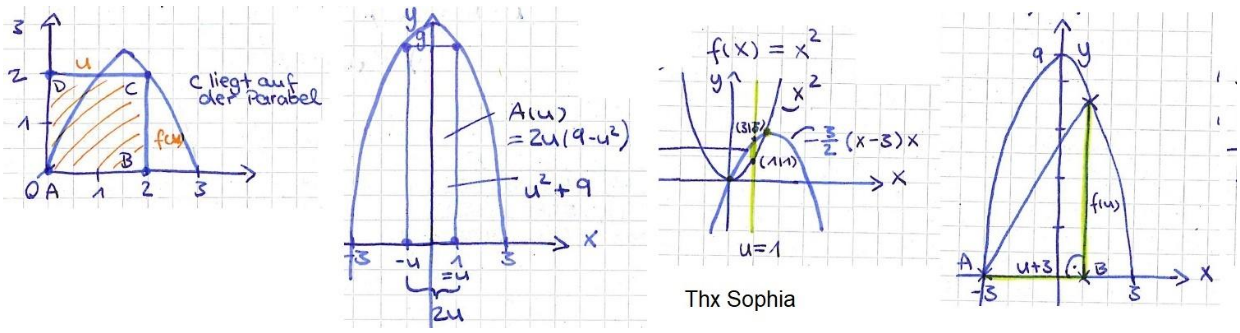


Abb. 331 Bilder zu der Aufgabe 149/372 c sowie zur Aufgabe 149/374 Teile a,b,c

Aufg. 149/373: a) Stellen Sie die Zielfunktion $z(u)$ **mit Definitionsbereich** $[a;b]$ (evtl. mit Nebenbedingung) auf. Dies darf mit Hilfe einer Zeichnung passieren. Die Zielfunktion ist das, was in der Aufgabe maximal oder minimal werden soll.

Schätzung von Sd: Wer keine Zielfunktion findet kann $z(u) = u \cdot f(u)$ versuchen.

b) Setzen Sie (wenn nötig) die Nebenbedingung in die Zielfunktion ein.

Lösen Sie dazu die Nebenbedingung nach einer Variablen auf.

c) Berechnen Sie die Stellen $z'(u) = 0$; es kann mehrere Stellen dieser Art geben.

d) Klassifizieren Sie diese Extremwerte mit Hilfe eines Vorzeichenwechsels der ersten Ableitung; $+$ nach $-$ $\Rightarrow$ Maximum; $-$ nach $+$ $\Rightarrow$ Minimum. Die Klassifikation mit $z''(u)$ geht auch.

e) Kandidaten für das globale Extremum sind alle lokalen Extrema und die Randwerte a und b. Die globalen Extrema werden mit Hilfe einer Wertetabelle von $z(u)$ ermittelt.

Aufg. 149/374: a) Die Zielfunktionen heißen hier $A(u)$ bzw. $U(u)$. C und D liegen auf dem Schaubild von f.

$A(u) = 2u \cdot (9 - u^2)$. $u_0 = \sqrt{3}$, $A(u_0) = 12$; $U(u) = 2 \cdot (2u + 9 - u^2)$, $u_0 = 1$, $U(u_0) = 20$;

b) $x_{max} = 0,9; d(x_{max}) = 2,025;$
c) $A(u) = \frac{1}{2} \cdot (3 + u) \cdot (9 - u^2)$, $\mathbb{D} = [-3;3]$, $A(-3) = A(3) = 0.\quad u_{max} = 1,\ A_{max} = 16.$

Sei $g(u)$ ist die Grundseite abhängig von u.
$g(-3) = 0$; $g(-2) = 1$; $g(-1) = 2$; $g(0) = 3$; $g(1) = 4$; $g(2) = 5$; $g(3) = 6$; $g(u) = u + 3$;

Aufg. 149/375: a) Eine Hausecke liegt auf der Funktion $f(x) = \frac{-1}{2} \cdot x + 4$. Verifizieren Sie $A_2 = 2 \cdot 3 = 6$, $A_4 = 8$, $A_6 = 6$ und

$$A_u = u \cdot f(u) = u \cdot (\frac{-1}{2} \cdot u + 4) = z(u) \qquad u \in [0,8] = \mathbb{D}.$$

Wir bilden $z'(u) = (\frac{-u^2}{2} + 4u)' = -u + 4$. $z'(u) = 0 \Leftrightarrow u = 4$. $z'(3) = 1$ und $z'(5) = -1$. Der Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$ ist ein hinreichendes Kriterium für „Maximum“ Kandidaten für das (globale) Maximum sind also der Hochpunkt ($u = 4$), sowie die Randwerte ($u = 0$ und $u = 8$). Das globale Maximum kann aus folgender Tabelle abgelesen werden:

u	$a = 0$	$u_0 = 4$	$b = 8$
$z(u)$	$z(a) = \frac{-0^2}{2} + 4 \cdot 0 = 0$	$z(u_0) = \frac{-4^2}{2} + 4 \cdot 4 = 8$	$z(b) = 0$

Hans sollte also als Seitenlängen für sein Haus $u_0 = 4$ und $f(u_0) = 2$ wählen. Als Maximalfläche ergibt sich $z(u_0) = 8$. **Bemerkung:** Es gibt noch eine zweite potentielle Lage für eine maximale Fläche – siehe Aufgabenteil b ii). (Abb. 333)

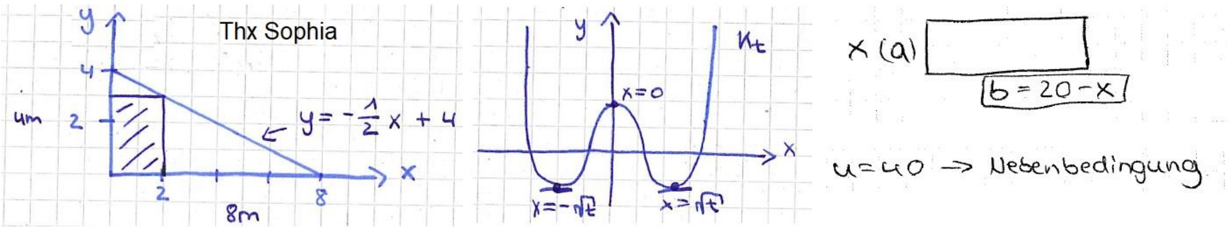


Abb. 332 Bilder zu der Aufgabe 149/375

b) i) NB: Gerade durch (0; 60) und (80; 0) berechnen: $y = 60 - \frac{3}{4}x$ (mit $x = u, y = b$), ZF: $z(u) = u \cdot b = u \cdot (60 - \frac{3}{4}u)$, $u_0 = 40$, $b_0 = 30$, $A_0 = 1200$; ii) Bei dieser Lösung schneiden sich die Straßen AC und BC im Punkt C. $\overline{AB} = \sqrt{60^2 + 80^2} = 100$. $\Delta(A, B, C)$ ist zum $\Delta(A, H, C)$ ähnlich; Streckfaktor $\frac{60}{100} = 0.6$ $\overline{AH} = 0.6 \cdot 60 = 36$, $\overline{CH} = 0.6 \cdot 80 = 48$. Gerade (Straße) $\overline{AC}$: $y = \frac{4}{3}x$, $\overline{CB}$: $y = \frac{-3}{4}(x - 100)$, schneide $y = u$ mit $\overline{AC}$: $u = \frac{4}{3}x \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}u \Rightarrow S_1(\frac{3}{4}u; u)$ und $y = u$ mit $\overline{CB}$: $u = \frac{-3}{4}(x - 100) \Leftrightarrow x = 100 - \frac{4}{3}u$ $\Rightarrow S_2(100 - \frac{4}{3}u; u)$.

Die Ecken des Hauses sind: $D(\frac{3}{4}u; 0), E(100 - \frac{4}{3}u; 0), S_2(100 - \frac{4}{3}u; u), S_1(\frac{3}{4}u; u)$.
Damit ist $z(u) = (100 - \frac{4}{3}u - \frac{3}{4}u) \cdot u$, $u_0 = 24, b_0 = 50, A_0 = 1200$.

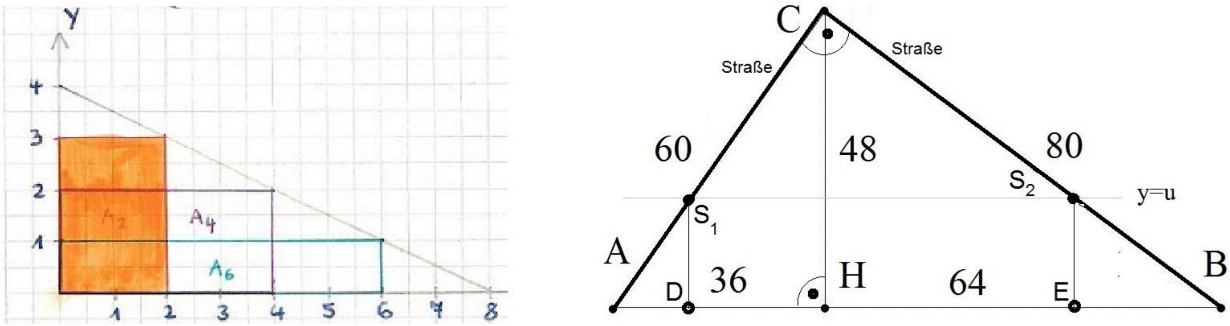


Abb. 333 Extremwertaufgabe mit dreieckigem Grundstück

Aufg. 150/376: a) i) NB: Volumen: $5 \cdot u \cdot b = 45 \Leftrightarrow b = \frac{9}{u}$, ZF: (Oberfläche) $z(u) = 2 \cdot (5u + 5b + ub) = 2 \cdot (5u + \frac{45}{u} + 9)$, $\mathbb{D} = [0; \infty)$, $u_0 = b_0 = 3$;

ii) NB: Volumen: $5 \cdot u \cdot b = 60 \Leftrightarrow b = \frac{12}{u}$, ZF: (Oberfläche) $z = 2 \cdot h \cdot b + 3 \cdot l \cdot b + 4 \cdot l \cdot h = 2 \cdot \frac{60}{5u} \cdot u + 3 \cdot 5 \cdot u + 4 \cdot 5 \cdot \frac{60}{5u}$ $= 24 + 15u + \frac{240}{u}$ $z'(u) = 15 - \frac{240}{u^2} = 15 - 240 \cdot u^{-2} = 0 \Leftrightarrow u = (\pm)4$; $h = 3$; $\mathbb{D} = [0; \infty)$.

b) NB: Oberfläche: $2 \cdot (2ub + u^2) = 24 \Leftrightarrow b = \frac{12 - u^2}{2u}$, ZF: (Volumen) $z(u) = u^2 \cdot b = u^2 \cdot \frac{12 - u^2}{2u} = 6u - 0.5u^3$, $\mathbb{D} = [0; \sqrt{12}]$, $u_0 = b_0 = 2$, $V_0 = 8$;

c) NB:(Umfang) $2u + 2b + \pi u = 10 \Leftrightarrow b = 5 - u - \frac{\pi}{2}u$, ZF: $z(u) = 2u \cdot b + \frac{\pi}{2}u^2 = 2u \cdot (5 - u - \frac{\pi}{2}u) + \frac{\pi}{2}u^2$, $\mathbb{D} = [0; 2.8]$, $u_0 = \frac{10}{4 + \pi} \approx 1.4$, $A_0 \approx 7$;

d) NB:(Umfang) $2u + 2b + \pi u = 6 \Leftrightarrow b = 3 - u - \frac{\pi}{2}u$, ZF: $z(u) = 2u \cdot b + \frac{\pi}{2}u^2 = 2u \cdot (3 - u - \frac{\pi}{2}u) + \frac{\pi}{2}u^2$, $\mathbb{D} = [0; 1.68]$, $u_0 \approx 0.84$, $A_0 \approx 2.52$;

Aufg. 150/377: a) Nebenbedingung: $U = 12 = 2a + 2b \Leftrightarrow b = \frac{12 - 2a}{2}$; Zielfunktion $A = a \cdot b = a \cdot (6 - a)$; $\mathbb{D} = (0; 6)$, $A'(a) = (6a - a^2)' = 6 - 2a \Leftrightarrow a = 3$; VZW: $A'(2) = 6 - 2 \cdot 2 = 2$, $A'(4) = 6 - 2 \cdot 4 = -2$ $\Rightarrow$ Maximum Randwerte: $A(0) = A(6) = 0$, $A(3) = 3 \cdot (6 - 3) = 9$.

b) Die Variable der Zielfunktion ist r. $V = \pi r^2 \cdot h$, $O = 2(2r)^2 + 2\pi r \cdot h$,
$8r^2 - 6\pi r^2$ ist der Abfall; $1000 = \pi r^2 \cdot h \Leftrightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$ in O eingesetzt:
$O(r) = 8r^2 + 2\pi r \cdot \frac{1000}{\pi r^2} \Leftrightarrow O(r) = 8r^2 + 2000 \cdot r^{-1}$,

$O'(r) = 16r - 2000 \cdot r^{-2} = 0 \Leftrightarrow 16r^3 = 2000 \Leftrightarrow r^3 = 125 \Leftrightarrow r = 5$;
VZU: $O'(4) = -61, O'(5) = 0, O'(6) = 40.\bar{4}$, VZW $- \to +$ Minimum,
Randwerte: $r = 0$, $(h = 0) \Leftrightarrow r = \infty$:
$O(0) = 8 \cdot 0^2 + 2000 \cdot 0^{-1} = \infty$, $O(5) = 8 \cdot 5^2 + 2000 \cdot 5^{-1} = 600$, $O(\infty) = 8 \cdot \infty^2 + 2000 \cdot \infty^{-1} = \infty$;
Bei $r = 5$ cm ist die minimale Oberfläche: $600cm^2$; hier ist $h = \frac{1000}{\pi \cdot 5^2} = \frac{40}{\pi} \approx 12.73$cm.

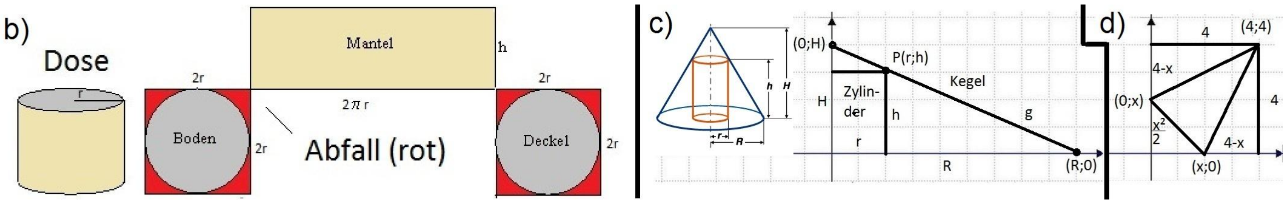


Abb. 334 Diverse Minimax Aufgaben

c) Der Kegelmantel erzeugt eine Gerade g durch die Punkte $(0; H)$ und $(R; 0)$: (Abb. 334)
$g : y = \frac{-H}{R}x + H$. Sei $r > 0$ der Grundkreisradius $\mathbb{D} = (0; R)$ und $h >$ die Höhe des Zylinders, dann gilt (Nebenbedingung) $h = \frac{-H}{R}r + H$, weil $P(r; h)$ auf g liegt.
Damit ist $V(r) = \pi r^2 \cdot h$ (Zielfunktion) und $V(r) = \pi r^2 \cdot (\frac{-H}{R}r + H) = \frac{-\pi r^3 H}{R} + \pi r^2 H$;
$V'(r) = \frac{-3\pi r^2 H}{R} + 2\pi r H = 0 \Leftrightarrow \pi r H(\frac{-3r}{R} + 2) = 0 \Leftrightarrow r = 0 \notin \mathbb{D}$ oder $r = \frac{2R}{3} \in \mathbb{D}$.
VZU: $V'(\frac{R}{3}) = \pi \frac{R}{3} H(\frac{-3\frac{R}{3}}{R} + 2) = \pi \frac{R}{3} H(-1 + 2) = \frac{\pi H R}{3} > 0$;
$V'(R) = \pi R H(\frac{-3R}{R} + 2) = \pi R H \cdot (-1) = -\pi H R < 0$; $\Rightarrow$ Maximum.
Randwerte: $V(0) = \pi 0^2 \cdot (\frac{-H}{R} \cdot 0 + H) = 0$, $V(R) = \pi R^2 \cdot (\frac{-H}{R} \cdot R + H) = 0$,
$V(\frac{2R}{3}) = \pi \frac{2R}{3}^2 \cdot (\frac{-H}{R} \cdot \frac{2R}{3} + H) = \pi 4 \frac{R^2}{9} \cdot (-\frac{2H}{3} + H) = \pi \frac{4R^2 \cdot H}{27}$;
Falls $R = 3, H = 6$: $r_{\max} = \frac{2}{3}R = 2, h = \frac{-6}{3} \cdot 2 + 6 = 2 \Rightarrow V(2) = \pi 2^2 \cdot 2 = 8\pi$.

d) Gesucht ist die Sternformation 'Sommerdreieck' bestehend aus den Sternen A=Atair (Sternbild des Adler) D=Deneb (Sternbild des Schwan) und W=Wega (Sternbild der Leier), welches in unseren Breiten vor allem im Sommer (in klaren Nächten) zu sehen ist.

$A(x)$ =Quadrat $-$ 3 Dreiecke $=16 - 4 \cdot (4 - x) - \frac{x^2}{2}$; $A'(x) = (16 - 16 + 4x - \frac{x^2}{2})' = 4 - x \Leftrightarrow x = 4$ (Randextremum), Rand: $A(0) = 16 - 16 = 0$; $A(4) = 16 - 4 \cdot (4 - 4) - \frac{4^2}{2} = 8$ (Maximum). Allerdings zählt bei dieser Aufgabe die 4 nicht zum Definitionsbereich. Streng genommen hat damit die Zielfunktion kein Maximum und damit hätte die Aufgabe keine Lösung.

Aufg. 150/378: a) $\sqrt{115}$ ist die größte mögliche Wurzel. $\sqrt{f(x)}$ ist maximal $\Leftrightarrow$ $f(x)$ ist maximal. Es genügt also bei einer Zielfunktion der Form $z(u) = \sqrt{f(u)}$, $f'(u) = 0$ zu betrachten. Die Zielfunktion wird bei dieser Aufgabe ohne Wurzel angegeben. b) NB: $2u + 2b = 40$, ZF: $z(u) = u \cdot b = u \cdot (20 - u)$, $u_0 = 10, b_0 = 10$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}$; c) Sei $P(p_1; p_2)$, dann ist $z(u) = (u - p_1)^2 + (f(u) - p_2)^2$; i) $P(1; 1.5)$, $d(P, Q) = \sqrt{5}$; ii) $P(2.2; 7.4)$, $d(P, Q) = \sqrt{9.8}$; iii) $P(1; 1)$, $d(P, Q) = \sqrt{5}$; iv) $P(1; 1)$, $d(P, Q) = \sqrt{5}$;

Aufg. 150/379: a) Der Graph einer streng monoton wachsenden Funktion geht immer aufwärts.

b) Eine Funktion f heißt **streng monoton wachsend** $\Leftrightarrow (x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) < f(x_2))$.

Eine Funktion f heißt **monoton wachsend** $\Leftrightarrow (x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) \leq f(x_2))$.

c) Abbildungen a), b), e): ja; c), d): nein;

d) $f'(x) > 0 \to f$ smw. Die Rückrichtung gilt nicht - siehe später.

Funktionen mit Extremstellen sind nicht monoton.

Im Abitur gab es (bisher) nur strenge Monotonie!

e) Der Graph einer streng monoton wachsende Funktion geht immer abwärts. Eine Funktion f heißt **streng monoton fallend** $\Leftrightarrow (x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) > f(x_2))$, eine Funktion f heißt **monoton fallend** $\Leftrightarrow (x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) \geq f(x_2))$, $f'(x) < 0 \to f$ smf.

Aufg. 150/380: a) $f_a'(x) = -3 < 0 \Rightarrow f$ ist smf; b) $f_d'(x) = 2x$, $f_d'(-1) = -2 < 0$ und $f_d'(1) = 2 > 0$ nicht monoton;
c) $f_b'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \Rightarrow f$ ist smw;
d) $f_c'(x) = -5x^4 - 6x^2 - 3 \leq -3 < 0 \Rightarrow f$ ist smw
e) $f_e'(x) = 3x^2 - 3$, $f_e'(-2) = 9 > 0$ und $f_e'(0) = -3 < 0$ nicht monoton;
f) $f_f'(x) = (x^3 + 2x^2)' = 3x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \frac{-4}{3}$, $f_f'(-2) = 4 > 0$, $f_f'(-1) = -1 < 0$ und $f_f'(1) = 7 > 0$ nicht monoton;
g) $f_h'(x) = x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > 0 \Rightarrow f$ ist smw;
h) $f'(x) = -x^2 + 4x - 5 = -(x-2)^2 - 1 < 0$ smf; i) $f'(x) = x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2+1)^2 > 0$ smw;
j) $f'(x) = x^6 + 4x^3 + 4.5 = (x^3 + 2)^2 + 0.5 > 0$ smw;

k) i) $f_1'(x) = 3x^2 - 12$ hat die Nullstellen $\pm 2 \Rightarrow$ nicht monoton.
ii) $f_2'(x) = 3x^2 - 3$ hat die Nullstellen $\pm 1 \Rightarrow$ nicht monoton.
iii) $f_3'(x) = 3x^2 + 3 \geq 0 \Rightarrow$ streng monoton wachsend.
iv) $f_4'(x) = 3x^2 + 12 \geq 0 \Rightarrow$ streng monoton wachsend.

v) $f_5'(x) = -3x^2 - 12 \leq 0 \Rightarrow$ streng monoton fallend.
vi) $f_6'(x) = -3x^2 - 3 \leq 0 \Rightarrow$ streng monoton fallend.
vii) $f_7'(x) = 3x^2 + 3$ hat die Nullstellen $\pm 1 \Rightarrow$ nicht monoton.
viii) $f_8'(x) = 3x^2 + 12$ hat die Nullstellen $\pm 2 \Rightarrow$ nicht monoton.

L) i) Extrempunkte: $T_1(-2; -1.6)$, $T_2(2; -1.6)$, $H(0; 0)$; Damit ist $f_1(x)$ nicht monoton.

ii) Extrempunkt: $T(0; 0)$; Damit ist $f_2(x)$ nicht monoton.

iii) Extrempunkt: $T(0; 0)$; Damit ist $f_3(x)$ nicht monoton.

iv) Extrempunkt: Terrasse $T(0; 0)$; (Terrassen sind streng monoton), aber $T(6; -43.2)$ Damit ist $f_3(x)$ nicht monoton.

m) Zeigen Sie: Ganzrationale Funktionen vierten (geraden) Grades ($> \underline{0}$ können nicht monoton sein.

Sei $f(x)$ von geradem Grad (größer 0), dann ist $f'(x)$ von ungeradem Grad und es gilt: Entweder gilt $f'(x) \xrightarrow{x \to \infty} \infty$ und $f'(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$ oder es gilt $f'(x) \xrightarrow{x \to \infty} -\infty$ und $f'(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$. (Nach dem Zwischenwertsatz) hat $f'(x)$ mindestens eine Nullstelle x_0 mit Vorzeichenwechsel. Also hat $f(x)$ ein Extremum bei x_0.

Aufg. 151/381: a) Ja, $f(x) = x^3$ ist smw $\to$ 6.3.14.

b) f ist mw aber nicht smw $\Rightarrow$ es gibt $x_1 < x_2$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Damit ist $(x_1; x_2)$ das gesuchte Intervall: Beweis durch Widerspruch: Annahme: Es gibt ein $x_0 \in (x_1; x_2)$ mit $f(x_0) \neq f(x_1)$ (oBdA) $f(x_0) < f(x_1)$, dann ist $x_0 < x_2$ und $f(x_0) > f(x_2)$ im Widerspruch zu monoton wachsend.

c) (i) gilt nicht - Gegenbeispiel $f(x) = x^3$, (ja, x^3 ist smw), (iii) gilt nur wenn (i) und (ii) gelten (also gilt (iii) nicht). (ii) ist der Monotoniesatz. Wir beweisen (ii) indirekt, d.h.

$$(*) \qquad f \text{ ist auf } (a;b) \textbf{ nicht} \text{ streng monoton wachsend} \Rightarrow f'(x) \not> 0 \text{ für ein } x_0 \in (a;b)$$

d) Innere Extrempunkte zerstören die Monotonie, Terrassenpunkte hingegen nicht.

e) $\frac{1}{x}$ ist nicht smf, obwohl $f'(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{D}$ ist. Der Monotoniesatz ist für $f(x) = \frac{1}{x}$ nicht anwendbar, weil dieser als $\mathbb{D}$ ein Intervall vorschreibt. $\mathbb{D} = (-\infty; 0)$ wäre ok - in diesem Bereich ist f auch smf.

f) a) $x^3 + x - 1$, b) $2x + 2$, c) $x^3 - 3x$, d) $4x - x^2$, e) $-x^3 - 2x + 2$, f) x^3, g) $\frac{1}{x}$.

g) Eine Funktion f heißt umkehrbar (injektiv) $\Leftrightarrow x_1 \neq x_2 \Rightarrow \underline{f(x_1) \neq f(x_2)}$.

h) Sei f streng monoton wachsend, und sei $x_1 < x_2$, dann ist indbesondere $x_1 \neq x_2$ und $f(x_1) < f(x_2)$ also $f(x_1) \neq f(x_2)$. Damit folgt aus der strengen Monotonie die Injektivität (aber nicht umgekehrt): $f(x) = \frac{1}{x}$ ist injektiv aber nicht monoton. Wer Probleme damit hat, dass $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist, kann die Funktion um $f(0) = 0$ erweitern.

i) Eine Kurve K_f heißt Linkskurve $\Leftrightarrow$ $f'(x)$ ist streng monoton wachsend (smw). Wenn $f''(x) > 0$ ist, so ist K_f eine Linkskurve.

$f(x) = x^4$ ist an der Stelle $x = 0$ eine Linkskurve.

Aufg. 151/382: a) $f(x) = (x+1)\cdot(x-2)^2 = (x^2-4x+4)\cdot(x+1) = x^3-4x^2+4x+x^2-4x+4 = x^3-3x^2+4$; $f'(x) = 3x^2-6x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$; $f'(1) = -3$; im Intervall $\mathbb{D} = (0;2)$ hat $f'(x)$ nur negatives Vorzeichen (und $\mathbb{D}$ ist zusammenhängend, f diffbar) $\Rightarrow$ f ist smf.
b) Gefälle: $f'(x)$ maximal: $(f'(x))' = (3x^2-6x)' = 6x-6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ VZW: $f''(0) = -6$, $f''(1) = 0$, $f''(2) = 6$ $(+ \to -)$ Minimum, es ist ja auch die stärkste Abnahme gefragt.
Randwerte: $f'(0) = 0$, $f'(1) = -3$, $f''(2) = 0$ stärkstes Gefälle bei $x = 1$.
c) Steigung$=m(x) = f'(x)$; also muss $f'(x)$ maximal sein also $m'(x) = 0$.
$m(x) = (12x^2 - x^3)' = 24x - 3x^2$; $m'(x) = 24 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 4$. $m'(3) = 6$, $m'(5) = -6$; VZW: $+ \to -$ Maximum. f steigt bei $x = 4$ am stärksten und hat dort Steigung $m(4) = 24\cdot 4 - 3\cdot 4^2 = 48$.

$m' = (f_2'(x))' = ((\frac{4}{3}x^3 - 0.1x^5)')' = (4x^2 - 0.5x^4)' = 8x - 2x^3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2$; $\mathbb{D} = x \in (-\infty, \infty)$

Klassifikation:		z_1	x_1	z_2	x_2	z_3	x_3	z_4
	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
	$f_2''(x)$	30	0	-6	0	6	0	-30
		+	Max	-	Min	+	Max	-

Klassifikation (2):		a	x_1	x_2	x_3	b
	x	-∞	-2	0	2	-∞
	$f_2''(x)$	$-\infty$	8	0	8	$-\infty$
		Min,g, R	Max,g,i	Min,l,i	Max,g,i	Min,g, R

ii) Maximale Steigung: $(g'(x))' = ((\frac{-x^4+6x^3}{12})')' = (\frac{-4x^3+18x^2}{12})' = -x^2+3x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0; x_2 = 3;$

	z_1	x_1	z_2	x_2	z_3
x	-1	0	1	3	4
$g''(x)$	-4	0	2	0	-4

	a	x_1	x_2	b
x	$-\infty$	0	3	∞
$g'(x)$	∞	0	4.5	$-\infty$

$x = 0$: lokales Minimum;
$x = 3$: lokales Maximum;

Aufg. 151/383:

x	-6	-2	-1	-1/2	0	1/2	1	2	6
sign(x)	-1	-1	-1	-1	0	1	1	1	1

b) sign(x) ist nicht stetig. $\lim\limits_{x\to 0; x<0} \text{sign}(x) = -1 \neq \text{sign}(0) = 0 \neq \lim\limits_{x\to 0; x>0} \text{sign}(x) = 1$;

c+d) sign(0.1) = sign(0.01) = sign(0.001) = 1, $\lim\limits_{x\to 3; x<3} x^2 = 3^2 = \lim\limits_{x\to 3; x>3} x^2 = 9$;

e) f ist stetig bei x_0 $\Leftrightarrow$ linksseitiger Limes $\underline{\lim\limits_{x\to 0; x<x_0} f(x)}$ $\underline{= \text{rechtsseitiger Limes} \lim\limits_{x\to 0; x<x_0} f(x)}$ $\underline{= f(x_0) \text{ (Funktionswert)}}$. (Abb. 335)

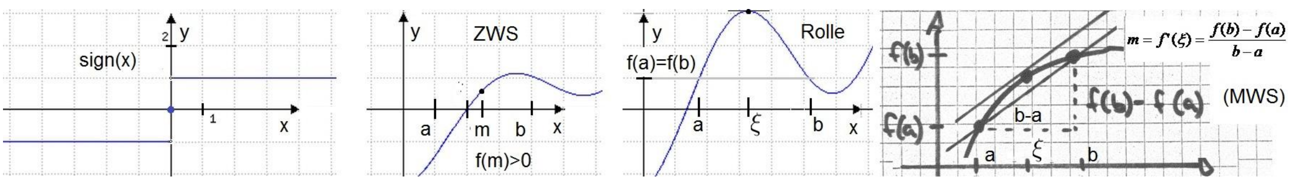


Abb. 335 Der Beweis des Monotoniesatzes: sign(x), ZWS, Rolle, MWS

Aufg. 151/384: **a)** $|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$ **b)** i) An einer Nahtstelle x_n (hier immer x_1) ist eine Funktion $f(x)$ aus zwei (oder mehr) Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ zusammengesetzt.

ii) g: $g_1(x)$ =-$3x-1$, $g_2(x) = x^2 - x$, x_1 =-1; h: $h_1(x) = 0.25 \cdot x^3$, $h_2(x) = 3x - 4$, $x_1 = 2$;

d) $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = 2x + t$, $x_1 = 1$; e) $f_1(x) = x + t$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$, $x_1 = 1$;

f) $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = -x^2 + 8x + t$, $x_1 = 2$; g) $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = \frac{x+t}{4}$, $x_1 = 4$;

iii) $g_1(-1) = -3 \cdot (-1) - 1 = 2 = g_2(-1) = (-1)^2 - (-1)$;

$g_1'(x) = -3$, $g_2'(x) = 2x - 1$, $g_2'(-1) = 2 \cdot (-1) - 1 = -3 = g_1'(-1)$;

$h_1(2) = 0.25 \cdot 2^3 = 2 = h_2(2) = 3 \cdot 2 - 4$;

$h_1'(x) = 0.75x^2$, $h_2'(x) = 3 = h_2'(2) = h_1'(2) = 0.75 \cdot 2^2$;

c) f ist stetig bei $x_0 \Leftrightarrow \underline{f_1(x_0) = f_2(x_0)}$ und f ist differenzierbar bei $x_0 \Leftrightarrow f$ ist <u>stetig</u> bei x_0 und $\underline{f_1'(x_0) = f_2'(x_0)}$. **d)** $t = -2$, $f_1(1) = 1 = f_2(1)$, $f_1'(1) = 2 = f_2'(1)$,

e) $f_1(x) = x + t$, $f_2(x) = \frac{1}{x}, x_0 = 1$, $f_1(1) = 1 + t$, $f_2(1) = \frac{1}{1} = 1$,
$f_1(1) = 1 + t = \frac{1}{1} = f_2(1) \Leftrightarrow 1 + t = 1 \Leftrightarrow t = 0$; Damit ist f für $t = 0$ stetig;
$f_1'(x) = 1$, $f_2'(x) = (x^{-1})' = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$; $f_1'(1) = 1 \neq f_2'(1) = \frac{-1}{1^2} = -1$,
damit ist f bei $x = 1$ nicht differenzierbar. Schaubild: Abb. 336.

f) $t = -8$, $f_1(2) = 4 = f_2(2)$, $f_1'(2) = 4 = f_2'(2)$, **g)** $t = 4$, $f_1(4) = 2 = f_2(4)$, $f_1'(4) = \frac{1}{4} = f_2'(4)$.

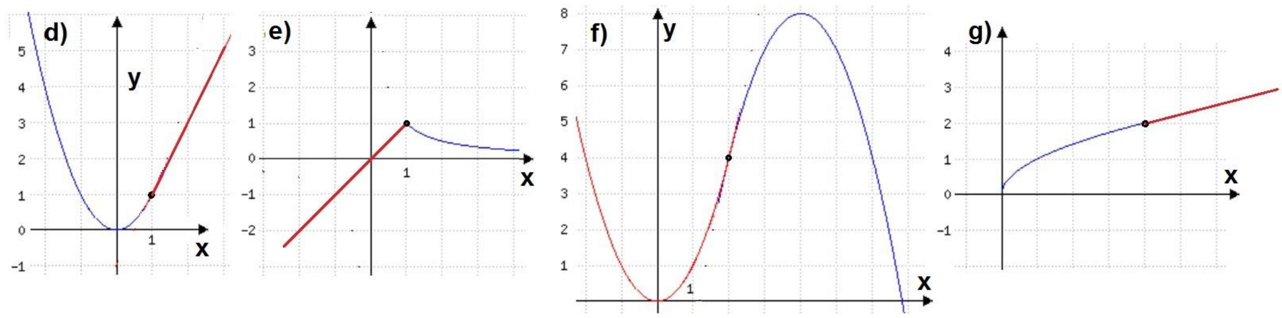


Abb. 336 Schaubilder der (stetigen) Zusammengesetzten Funktionen

h) $a = 4$; $b = -4$; Nahtstelle: 2; $f_1(x) = x^2$; $f_2(x) = ax + b$;

149/387 h) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leq 2 \\ a \cdot x + b & \text{für } x > 2 \end{cases}$ $f_1(2) = 4$ $f_1'(x) = 2x$ Thx Mar Fee

$f_2(2) = 2a + b$ $f_2'(x) = a$

Nahtstelle $x = 2$

Stetigkeitsbedingung:

$f_2(2) = f_1(2) \Rightarrow ax + b \rightarrow 2a + b = 2^2 \Leftrightarrow 2a + b = 4 \Rightarrow 2 \cdot 4 + b \Rightarrow b = -4$

$f_2'(2) = f_1'(2) \Rightarrow a|_{x=2} = 2x|_{x=2} \Leftrightarrow a = 2 \cdot 2 = 4 \Rightarrow a = 4$

Für $a = 4$ und $b = -4$ ist $f(x)$ (an der Nahtstelle) differenzierbar

i) $a = 2$; $b = -4$; Nahtstelle: 2; $f_1(x) = x^3 - 3x^2$; $f_2(x) = (x - a)^2 + b$;

j) $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ für } x \leq a \\ b \cdot x + a \text{ für } x > a \end{cases}$ Thx Van Bau

Ableitung: $f_1'(x) = 2x$

$f_2'(x) = b$

$f_1(a) = a^2 = f_2(a) = b \cdot a + a \Rightarrow a^2 = b \cdot a + a$

$f_1'(a) = 2a = b = f_2'(a)$

$a^2 = b \cdot a + a$

$2a = b$ einsetzen: $a^2 = 2a \cdot a + a \rightarrow a^2 + a = 0$

$\rightarrow a(a+1) = 0$ (Satz vom Nullprodukt)

$\rightarrow a_1 = 0 \Rightarrow b = 0$

$\rightarrow a_2 = -1 \Rightarrow b = -2$

j) $a = -1$ oder 0; $b = -2$ oder 0; Nahtstelle: a; $f_1(x) = x^2$; $f_2(x) = bx + a$;

Aufg. 152/385: a) $f(a_1) = -2,\ f(b_1) = 2,\ f(x)$ hat im Intervall $[a_1; b_1]$ (mindestens) eine Nullstelle. b) $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = f(1) = -1$ also liegt die Nullstelle zwischen $\frac{a_1+b_1}{2}$ und b_1. c) $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2},\ b_2 = b_2$, Die linke Grenze hat einen negativen Funktionswert, die rechte Grenze einen positiven. d) $\frac{a_2+b_2}{2},\ f(\frac{a_2+b_2}{2}) = f(1.5) = 0.25 \Rightarrow a_3 = a_2 = 1$ und $b_3 = \frac{a_2+b_2}{2} = 1.5$; e) $f(x) = x^2 - 3$;

f) $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = f(1.5) = -0.75 \quad \Rightarrow a_2 = \frac{a_1+b_1}{2} = 1.5$ und $b_2 = b_1 = 2$,
$f(\frac{a_2+b_2}{2}) = f(1.75) = 0.0625 \quad \Rightarrow a_3 = a_2 = 1.5$ und $b_3 = \frac{a_2+b_2}{2} = 1.75$,
$f(\frac{a_3+b_3}{2}) = f(1.625) = -0.3594 \quad \Rightarrow a_4 = \frac{a_3+b_3}{2} = 1.625$ und $b_4 = b_3 = 1.75$.

Aufg. 152/386: a) f hat zwischen a und b (mindestens) eine Nullstelle.

b) $i-$ter Schritt:
1) Fall: $f(\frac{a_i+b_i}{2}) = 0$: Eine Nullstelle ist $\frac{a_i+b_i}{2}$ – wir haben eine Nst gefunden.
2) Fall: $f(\frac{a_i+b_i}{2}) > 0$: Eine Nullstelle liegt rechts von $\frac{a_i+b_i}{2}$ – definiere jetzt $a_{i+1} = \frac{a_i+b_i}{2}$ und $b_{i+1} = b_i$.
3) Fall: $f(\frac{a_i+b_i}{2}) < 0$: Eine Nullstelle liegt links von $\frac{a_i+b_i}{2}$ – definiere jetzt $a_{i+1} = a_i$ und $b_{i+1} = \frac{a_i+b_i}{2}$.
So entstehten zwei Folgen a_n und b_n, mit $|b_n - a_n| = \frac{b_1-a_1}{2^{n-1}}$.
Zusatz: b_n und a_n konvergieren in vollständigen Räumen siehe Abschnitt 4.9.1.

c) Es entstehen zwei Folgen a_n und b_n, mit $f(a_n) \leq 0$ und $f(b_n) \underline{\geq 0}$. Wenn a_n gegen x_0 geht, dann geht b_n (auch) gegen $\underline{0}$.

d) $\frac{1}{n}$ ist ≥ 0, für alle n. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \underline{0}$. Aus $b_n > 0$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \underline{\geq} 0$.

e) $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} a_n)$ (f ist stetig) $= f(x_0) \leq 0$;
$\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} b_n)$ (f ist stetig) $= f(x_0) \geq 0$;
Weil $f(x_0) \leq 0$ und $f(x_0) \geq 0$ folgt $f(x_0) = 0$. (Abb. 335)

f) Sei $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, dann ist $a \neq 0$ (Grad 4) $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$ ist (wg $a \neq 0$) vom Grad 3.

Sei $a > 0$, dann gilt $f'(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$ und $f'(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$ und

sei $a < 0$, dann gilt $f'(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$ und $f'(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$,
damit hat $f'(x)$ nach dem Zwischenwertsatz (mindestens) eine Nullstelle;

Damit hat jede ganzrationale Funktion 3 Grades eine Nullstelle; analoges gilt für ganzrationale Funktionen ungeraden Grades.

Aufg. 152/387: f hat sicher (mindestens) einen Extremwert $-$ f' hat (mindestens) eine Nullstelle: f' ist stetig und $f'(a) < 0$ und $f'(b) > 0$ hat nach dem ZWS (mindestens) eine Nullstelle, die mit Weierstraß (konstruktiv) gefunden werden kann. Die Idee von Weierstraß impliziert auch, dass f' einen VZW hat (damit Extrempunkt). (Abb. 335)

Aufg. 153/388: a) Es gibt eine $\xi \in [a;b]$ mit $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Es gilt $g(a) = f(a) = g(b)$, damit ist die Voraussetzung für Rolle erfüllt und es gibt eine Stelle ξ mit $g'(\xi) = 0$. $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, also ist $f'(\xi) = g'(\xi) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (siehe auch Kapitel 14.14). (Abb. 335)

b) Es gilt $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ oder $2\xi = \frac{f(5)-f(1)}{5-1} = \frac{5^2-1^2}{4} = 6$ also ist $\xi = 3$.

Aufg. 153/389: a) Negation: Wenn die Straße nicht nass ist, dann regnet es auch nicht (oder $\bar{N} \Rightarrow \bar{R}$).
b) Negation des Monotoniesatzes: f nicht smw. $\Rightarrow f'(x) \not> 0$.
c) f smw $\Leftrightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$; f nicht smw $\Leftrightarrow$ es gibt $x_1 < x_2$ mit $f(x_1) \geq f(x_2)$;
d) Wenden Sie auf eine Funktion, die nicht smw ist, den Mittelwertsatz an.
Wählen Sie $x_1 < x_2$ mit $f(x_1) \geq f(x_2)$, dann gibt es eine Zwischenstelle ξ mit
$f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq 0$; weil der Zähler ≤ 0, der Nenner aber > 0 ist. Damit ist $f'(x)$ nicht > 0.

Aufg. 153/390: a) Eine Asymptote ist eine Näherungsgerade. Bei senkrechten Asymptoten $x = x_0$ ist der Funktionswert $\pm\infty$ oder $f(x_0) = \pm\infty$. Waagrechte Asymptoten $y = y_0$ sind die Grenzwerte (auch Näherungswerte) für $x \to \pm\infty$. Diese Asymptoten können vom Funktionsgraphen erreicht werden, müssen es aber nicht.

b) Der Term der gebrochenrationalen Funktion ist $f(x) = 2 + \frac{1}{x+1}$; K_f hat die senkrechte Asymptote $x = -1$ und die waagrechte Asymptote $y = 2$.

Der Term der Exponentialfunktion ist $f(x) = 2.718^x$; K_f hat die waagrechte Asymptote $y = 0$.

Der Term der Logarithmusfunktion ist $f(x) = 2.3 \cdot \log(x)$; K_f hat die senkrechte Asymptote $x = 0$.

Die Terme sind bei dieser Aufgabe nicht gefragt worden.

c) Wenn Sie nach einer Asymptote gefragt werden und keine Ahnung haben antworten Sie waagrechte Asymptote $y = 0$.

Aufg. 153/391: (a-c Provisorium) (Abb. 337)

a) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$

f(x) ist punktsymmetrisch zum Wendepunkt W(-2/-2)

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x^3 + 6x^2 + 9x\right) = \pm\infty$

$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9$; $f''(x) = 6x + 12$; $f'''(x) = 6$

$P_{x_1}(0;\,0)$ $P_{x_2}(-3;\,0)$

$P_{Max}(-3;\,0)$ $P_{Min}(-1;\,-4)$

$D(f) = R$

$P_W(-2;\,-2)$

b) $g(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3$

$g'(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2$; $g''(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x$; $g'''(x) = 3x - 3$

$D(g) = \mathbb{R}$

keine Symmetrie

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3\right) = +\infty$

$P_{x_1}(0; 0)$ $P_{x_2}(4; 0)$

$P_{Min}\left(3; -\frac{27}{8}\right) \approx (3; -3{,}38)$

$P_{W_1}(0; 0)$ $P_{W_2}(2; -2)$

Abb. 337 Provisorium Madness

c) **N:** $h(x) = x^4/4 - 2x^2 + 1.75 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ oder $x = \pm\sqrt{7}$.
E: $h'(x) = x^3 - 4x = x(x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = \pm 2$; $H(0/1.75)$, $T_{1,2}(\pm 2/-2.25)$,
(W): $h''(x) = 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4/3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $W_{1,2}(\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}/-\frac{17}{36})$;
S: $h(x)$ ist gerade, also ist K_h achsensymmetrisch zur y-Achse; **S:** $i(x)$ ist stetig;
M: $h(x)$ ist smw für $-2 \le x \le 0$ und für $x \ge 2$; **A:** $h(x) \xrightarrow{x\to\pm\infty} \infty$; **D:** $\mathbb{D} = \mathbb{R}$; $\mathbb{W} = \{y|y \ge -2.5\}$;

d) **N:** $i(x) = \frac{x^6}{6} - x^4 = \frac{x^4}{6}(x^2 - 6) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = \pm\sqrt{6} \Rightarrow N_1(-\sqrt{6}/0)$, $N_2(0/0)$ (vierfach), $N_3(\sqrt{6}/0)$. **E:** $i'(x) = x^5 - 4x^3 = x^3(x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = \pm 2$; Klassifikation:

	-3	-2	-1	0	1	2	3
$i'(x)$	-135	0	3	0	-3	0	135
Klass.	-	TP	+	HP	-	TP	+

	-2	0	2
$i(x)$	$-5.\bar{3}$	0	$-5.\bar{3}$
	TP(-2/$-5.\bar{3}$)	HP(0/0)	TP(2/$-5.\bar{3}$)

M: $i(x)$ ist smw für $-2 \le x \le 0$ und für $x \ge 2$; **A:** $i(x) \xrightarrow{x\to\pm\infty} \infty$; **D:** $\mathbb{D} = \mathbb{R}$; $\mathbb{W} = \{y|y \ge -5.\bar{3}\}$;
S: $i(x)$ ist eine gerade Funktion $\Rightarrow K_i$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse. **S:** $i(x)$ ist stetig.

Aufg. 154/392: a) $f_3(x) = x^3 - 3x$ **N:** $x^3 - 3x = x\cdot(x^2 - 3) = 0$ (SvN) $\Leftrightarrow x = 0$ oder $x = \pm\sqrt{3}$; $\Rightarrow N_{1,2}(\pm\sqrt{3}; 0); N_3(0; 0)$; **E:** $(x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x_{4,5} = \pm 1$,

$f_3(-1) = (-1)^3 - 3\cdot(-1) = 2$,
$f_3(1) = 1^3 - 3\cdot 1 = -2$,

x	-2	-1	0	1	2
$f'(x)$	9	0	-3	0	9
	$+$	$HP(-1; 2)$	$-$	$TP(1; -2)$	$+$

E(W): Ab Klasse 11: $(x^3 - 3x)'' = 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0; f'''(0) = 6 \neq 0 \Leftrightarrow W(0, 0)$ (Wendepunkt);

M: f_3 ist smw für $x \le -1$ oder für $x \ge 1$; im Bereich $-1 \le x \le 1$ ist f_3 smf;

A: Leitkoeffizient x^3 bedeutet: $f_3 \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$ und $f_3 \xrightarrow{x\to\infty} \infty$;

D: $\mathbb{D} = \mathbb{W} = \mathbb{R}$, da ein kubisches Polynom vorliegt.

S: f ist ungerade, damit ist K_f punktsymmetrisch zum Ursprung; **S:** Stetigkeit: Ja.

b) N: $x^3 - tx = x\cdot(x^2 - t) = 0$ (SvN) $\Leftrightarrow x = 0$ oder $x = \pm\sqrt{t}$; $\Rightarrow N_{1,2}(\pm\sqrt{t}; 0); N_3(0; 0)$;

E: $(x^3 - tx)' = 3x^2 - t = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{t}{3} \Leftrightarrow x_{4,5} = \pm\sqrt{\frac{t}{3}}$,

$f_t(-\sqrt{\frac{t}{3}}) = (\sqrt{\frac{t}{3}})^3 - t\cdot(\sqrt{\frac{t}{3}}) = \frac{t^{1.5}}{3\sqrt{3}} - \frac{t^{1.5}}{\sqrt{3}} = \frac{t^{1.5}}{\sqrt{3}}(\frac{1}{3} - 1) = \frac{-2t\cdot\sqrt{t}}{3\sqrt{3}}$, $f_t(\sqrt{\frac{t}{3}}) = .. = \frac{2t\cdot\sqrt{t}}{3\sqrt{3}}$;

$f'(-\sqrt{t}) = 3(-\sqrt{t})^2 - t = 2t$,
$f'(\sqrt{t}) = 3(\sqrt{t})^2 - t = 2t$;

x	$-\sqrt{t}$	$-\sqrt{\frac{t}{3}}$	0	$\sqrt{\frac{t}{3}}$	$\sqrt{t}$
$f'(x)$	2t	0	$-t$	0	2t
	$+$	$HP(-\sqrt{\frac{t}{3}}; \frac{2t^{1.5}}{3\sqrt{3}})$	$-$	$TP(\sqrt{\frac{t}{3}}; \frac{-2t^{1.5}}{3\sqrt{3}})$	$+$

M: f_t ist smw für $x \le -\sqrt{\frac{t}{3}}$ oder für $x \ge \sqrt{\frac{t}{3}}$; im Bereich $-\sqrt{\frac{t}{3}} \le x \le \sqrt{\frac{t}{3}}$ ist f_t smf;

E(W), **A**, **D** und **S S** sind exakt gleich wie im Teil a.

c) Das große Problem bei dieser Aufgabe ist das Vorzeichen der Ortskurve (Hochpunkte); für $x < 0$ ist $y > 0$ und umgekehrt.

Hochpunkte: $x = -\sqrt{\frac{t}{3}} \Leftrightarrow -x = \sqrt{\frac{t}{3}} \Rightarrow x^2 = \frac{t}{3} \Rightarrow t = 3x^2$ $(t > 0, x < 0)$,
$y = \frac{2t\cdot\sqrt{t}}{3\sqrt{3}} = \frac{2\cdot 3x^2\cdot(-x)}{3} = y = -2x^3$, $(x < 0, y > 0)$;

Tiefpunkte: $x = \sqrt{\frac{t}{3}} \Rightarrow x^2 = \frac{t}{3} \Rightarrow t = 3x^2$ $(t > 0, x > 0)$,
$y = \frac{-2t\cdot\sqrt{t}}{3\sqrt{3}} = \frac{-2\cdot 3x^2\cdot x}{3} = y = -2x^3$, $(x > 0, y < 0)$;

Damit ist die Ortskurve $y = -2x^3$ $(x \neq 0)$;

Aufg. 154/393: T =Terrasse(npunkt); M=Maximum; m=Minimum;

a)	h)	c)
$M: x = 1$; $m: x = 3$;	$f_1'(x) = (x-1)(x-3)$	$B_1 = (-\infty, 1] \cup [3, \infty)$
$T: x = -1$; $m: x = 1$;	$f_2'(x) = (x-1)(x+1)^2$	$B_2 = [1, \infty)$
$M: x = 0$; $m: x = 2$;	$f_3'(x) = x^3(x-2)$	$B_3 = (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$
$T: x = -2$; $T: x = 2$;	$f_4'(x) = 0.125(x-2)^2(x+2)^2$	$B_4 = (-\infty, \infty)$
$m: x = -1$; $T: x = 1$;	$f_5'(x) = (x-1)^2(x+1)^3$	$B_5 = [-1, \infty)$
$m: x = -1$; $T: x = 0$; $M: x = 1$; $m: x = 2$;	$f_6'(x) = (x-1)(x-2)(x+1)x^2$	$B_6 = [-1, 1] \cup [2, \infty)$
$M: x = -1$; $m: x = 1$;	$f_7'(x) = (x-1)^3(x+1)^3$	$B_7 = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
$T: x = -1$; $m: x = 0$; $M: x = 1$;	$f_8'(x) = -(x-1)x(x+1)^2$	$B_8 = [0, 1]$
$T: x = 0$;	$f_9'(x) = x^2 \cdot 2^x$	$B_9 = (-\infty, \infty)$

b) $f_1(0) < f_1(1)$, $f_2(0) > f_2(1)$, $f_3(0) > f_3(1)$, $f_4(0) < f_4(1)$, $f_5(0) < f_5(1)$,
$f_6(0) < f_6(1)$, $f_7(0) > f_7(1)$, $f_8(0) < f_8(1)$, $f_9(0) < f_9(1)$;

d) Die Nullstellen von $f_i(x)$ sind nicht eindeutig bestimmbar. Bsp: Wenn $f'(x) = 2x$ ist, kann $f(x) = x^2$ (Nullstelle $x = 0$) $f(x) = x^2 + 1$ (keine Nullstellen) oder $f(x) = x^2 - 1$ (Nullstellen $x = \pm 1$) sein. $f(x) = x^2 + c$ kann so verschoben werden, dass jede beliebige Nullstelle möglich ist.

e) Die angegebenen Funktionsterme für $f_i(x)$ sind nur exemplarisch und NICHT eindeutig.

$f_1(x) = \frac{x^3-6x^2+9x}{3} - 2$ $\quad f_2(x) = \frac{3x^4+4x^3-6x^2-12x}{12} - 2$ $\quad f_3(x) = \frac{2x^5-5x^4}{10} - 3$

$f_4(x) = \frac{3x^5-40x^3+240x}{120} - 2.5$ $\quad f_5(x) = \frac{5x^6+6x^5-15x^4-20x^3+15x^2+30x}{30} - 2$ $\quad f_6(x) = \frac{10x^6-24x^5-15x^4+40x^3}{60} - 2$

$f_7(x) = \frac{5x^7-21x^5+35x^3-35x}{35} - 2$ $\quad f_8(x) = -\frac{12x^5+15x^4-20x^3-30x^2}{60} + 2$ $\quad f_9(x) = \frac{((\ln(2))^2x^2-2\ln(2)x+2)\cdot 2^x}{\ln^3(2)}$

f) i) $x = 2$; ii) $x = -1, x = \frac{1}{3}$; iii) $x = 1.5$; iv) $x = \pm 2, x = 0$; v) $x = 0.2$;

vi) $x \approx -0.73, x \approx 0.66$, $x = 0, x \approx 1.67$; vii) $x = 0$; viii) $x = -1, x \approx -0.39, x \approx 0.64$,

ix) $x = -2$, $x = 0$; Schreiben Sie 3 NEW versetzt übereinander
Ein Extremwert bei $f(x)$ entspricht einer Nullstelle bei $f'(x)$; Eine Wendestelle bei $f(x)$ entspricht einem Extremwert bei $f'(x)$ und die entspricht einer Nullstelle bei $f''(x)$; (Abb. 338)

$f(x)$	N	E	W		
$f'(x)$		N	E	W	
$f''(x)$			N	E	W

Abb. 338 Die NEW-Regel

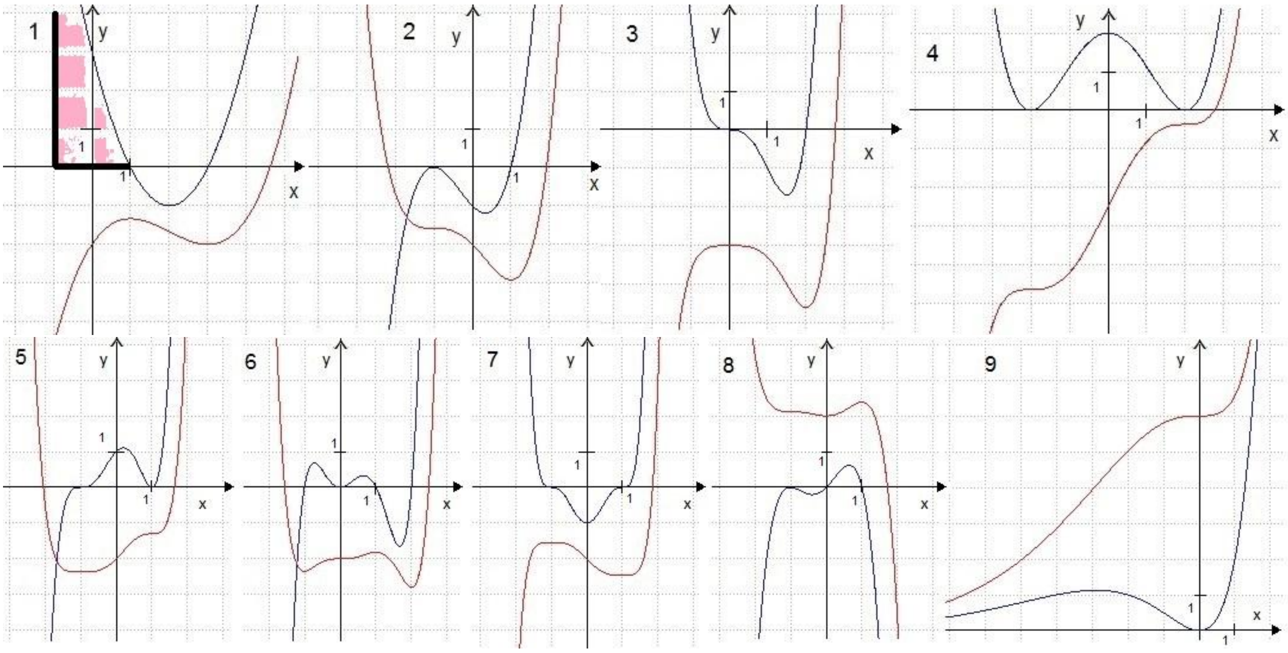


Abb. 339 Analyse von Ableitungsfunktionen

Bemerkung: Funktionen sind in Terrassenpunkten streng monoton! → 6.3.14 (Abb. 339)

g) $f(1) - f(-1)$ ist die von K_f, der x-Achse und den Geraden $x = -1$ und $x = 1$ eingeschlossene Fläche. Hier ist $f(-1) = 0$ also ist $f(1)$ diese Fläche. Diese Fläche bekommen wir durch 'Kästchen zählen'.

1) ≈ 7 Kästchen (exakt $f(1) = 6.\bar{6}$); 2) ≈ 1.5 Kästchen unter der x-Achse; (exakt $f(1) = -1.\bar{3}$);

3) ≈ +0.5-0.5=0 Kästchen (exakt $f(1) = 0.4$); 4) ≈ 3.5 Kästchen (exakt $f(1) = 3.8\bar{3}$);

5) ≈ 1 Kästchen (exakt $f(1) = 1.0\bar{6}$); 6) ≈ 0.5 Kästchen (exakt $f(1) = 0.5\bar{3}$);

7) ≈ -1 Kästchen (exakt $f(1) = \frac{-32}{35} \approx -0.914$); 8) ≈ -0.1+0.5 Kästchen (exakt $f(1) = 0.2\bar{6}$);

9) ≈ 1 Kästchen ($f(1) \approx 0.766$);

Aufg. 154/394: Durch eine Wertetabelle stellen wir fest, dass eine Nst zwischen $\underline{1}$ und $\underline{2}$ ist.

a) allg Tangentengleichung: $y = f'(u)(x-u) + f(u)$ hier ist $u = 2$ und $f(u) = u^2 - 2, f'(u) = 2u$.

$y = 2u(x-u) + u^2 - 2 \Leftrightarrow y = 4(x-2) + 2 = 4x - 6$. $4x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1.5$.

$x_1 = \underline{1.5}$ liegt (viel) n<u>äher</u> an der Nullstelle von f als $x_0 = 2$.

b) $y = 2u(x-u) + u^2 - 2$ mit $u = 1.5$: $y = 2 \cdot 1.5(x - 1.5) + 1.5^2 - 2 \Leftrightarrow y = 3(x-1.5) + 0.25$.

$0 = 3(x-1.5) + 0.25 \Leftrightarrow x_2 = \frac{17}{12} = 1.41\bar{6}$.

$0 = 2 \cdot \frac{17}{12}(x - \frac{17}{12}) + (\frac{17}{12})^2 - 2 \Leftrightarrow x_3 = \frac{611}{432} \approx 1.414351852$; $1.414351852 - \sqrt{2} \approx 0.0001383$.

Es entsteht eine r<u>ekursive</u> F<u>olge</u>, die gegen $\underline{\sqrt{2}}$ geht.

c) $y = 2u(x-u) + u^2 - 2$ mit $u = -4$: $y = 2 \cdot (-4)(x - (-4)) + (-4)^2 - 2 \Leftrightarrow y = (-8)(x+4) + 14 \Leftrightarrow y = -8x - 18 \Rightarrow 0 = -8x - 18 \Leftrightarrow x_1 = -2.25$.

$y = 2 \cdot (-2.25)(x - (-2.25)) + (-2.25)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = \frac{-113}{72} \approx -1.57$.

$y = 2 \cdot \frac{-113}{72}(x - \frac{-113}{72}) + (\frac{-113}{72})^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x_3 \approx -1.4219$.

d) $y = f'(u)(x-u) + f(u) \to 0 = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n) \Leftrightarrow -f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n) \xLeftrightarrow{\text{falls} f'(x_n) \neq 0} x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x$ mit $x = x_{n+1}$ ist $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

e) Beweisen Sie die Formel mit dem Banachschen Fixpunkt Satz.

Setze $x_{n+1} = x_n = g$ in das Bildungsgesetz $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ ein:

$g = g - \frac{f(g)}{f'(g)} \overset{-g}{\Longleftrightarrow} 0 = -\frac{f(g)}{f'(g)} \overset{\cdot f'(g)}{\Longleftrightarrow} f(g) = 0$, damit ist g eine Nullstelle und das Verfahren hat Nullstellen von f als Grenzwerte.

f) Für $x_0 > 0$ geht x_n gegen $\sqrt{2}$, für $x_0 < 0$ geht x_n gegen $-\sqrt{2}$.

g) die unterstrichenen Stellen sind sicher richtig.

i) $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - x_n - 4}{2x_n - 1}$:

n	0	1	2	3	4	5	6
x_n	1	5	3.2222222222	2.641723356	$\underline{2}.5630533138$	$\underline{2.56}15533585$	$\underline{2.56155}28128$

$g \approx 2.5616$ (oder für $x_0 < 0.5 : -1.5616$);

g) ii) $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n - 1}{3x_n^2 - 1}$:

n	0	1	2	3	4	5
x_n	1	$\underline{1}.5$	$\underline{1}.347826087$	$\underline{1.3}25200399$	$\underline{1.324}718174$	$\underline{1.32471}79572$

$g \approx 1.3247$

g) iii) $x_{n+1} = x_n - \frac{1+1/x_n}{-1/x_n^2}$:

n	0	1	2	3	4	5
x_n	1	3	15	255	65535	4294967295

konvergiert nicht obwohl die Nst $x = -1$ offensichtlich ist.

g) iv) $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n + e^{x_n}}{1 + e^{x_n}}$:

n	0	1	2	3	4	5
x_n	1	0	-0.5	$\underline{-0.5}663111218$	$\underline{-0.567}1433029$	$\underline{-0.56714}34285$

$g \approx -0.56714$

g) v) $x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - 1)\cdot e^{x_n} - \frac{1}{2}}{x_n \cdot e^{x_n}}$:

n	0	1	2	3	4
x_n	1	$\underline{1}.1839398443$	$\underline{1.1}578367635$	$\underline{1.157}1854529$	$\underline{1.157185}0572$

$g \approx 1.1572$

iv) $f(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 2$ $x_0 = 0{,}25$

$f'(x) = 3x^2 - 10x - 4$

Thx: N. Kubalik

$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 5x_n^2 - 4x_n + 2}{3x_n^2 - 10x_n - 4}$

n	0	1	2	3
x_n	0,25	0,361	0,35427	0,3542486894

$\Rightarrow g \approx 0{,}35425$

v) $f(x) = x^3 - 2x + 2$ $x_0 = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 2$

GTR: Die Nullstelle liegt etwa bei x = -1.7693

Thx: A f I S

$x_1 = 0 - \frac{f(0)}{f'(0)} = 0 - \frac{2}{-2} = 1$

$x_2 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{1}{1} = 0$

$\Rightarrow \infty$ mal 1 und 0

$\boxed{\text{Trotz Nullstelle kein Wert } g \text{ 3:}}$

viii) Bestimme π mithilfe des Newtonverfahrens. (6 Nachkommastellen)

Thx: Nowa Kochana

$\Rightarrow f(\pi) = 0$ $\Rightarrow$ Funktion suchen

$\sin(\pi) = 0$ $\Rightarrow$ 1 von vielen Möglichkeiten

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\sin(x_n)}{\cos(x_n)} \qquad \frac{\sin(x_n)}{\cos(x_n)} = \tan(x_n)$$

$$= x_n - \tan(x_n)$$

Wertetabelle für Startwertermittlung:

x	2	3	4
$\sin(x)$	0,909	0,141	−0,757

Nullstelle zwischen 3 und 4 $\Rightarrow x_0 = 3$ Startwert

$$x_1 = x_0 - \frac{\sin(x_0)}{\cos(x_0)}$$

$$= 3 - \frac{\sin(3)}{\cos(3)} \approx 3{,}1425465$$

$$x_2 = x_1 - \frac{\sin(x_1)}{\cos(x_1)} \approx 3{,}1415926 \approx 3{,}141593$$

$$x_3 = x_2 - \frac{\sin(x_2)}{\cos(x_2)} \approx 3{,}1415926 \approx 3{,}141593$$

keine Veränderung

$$\pi = 3{,}141593$$

ix) Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^x - x^e$ $(\mathbb{D} = \mathbb{R}^+)$

Thx Nicole K.

$\Rightarrow f'(x) = e^x - e \cdot x^{e-1}$ $x_0 = 2$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad x_1 = 2 - \frac{e^2 - 2^e}{e^2 - e \cdot 2^{e-1}} = 2{,}51962$$

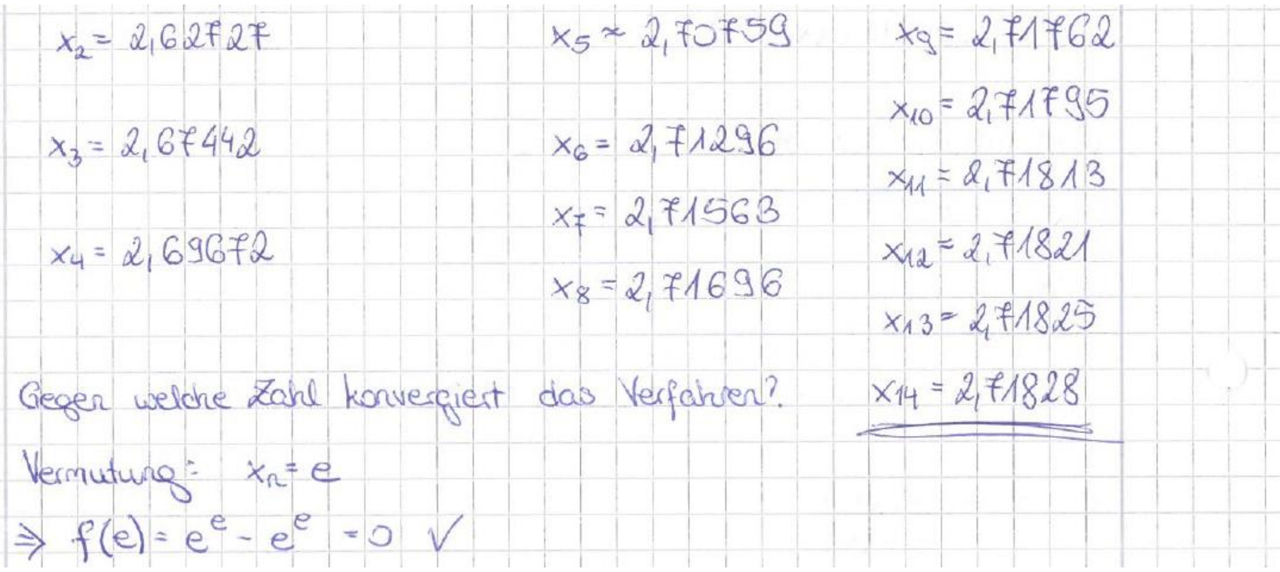


Abb. 340 Newtonverfahren: Ag 154/394g; Lösungen von Nowa Kochana

Aufg. 155/395: a) $f(x) = x^2 + bx + c$; $6 = (-2)^2 + b \cdot (-2) + c$; $-6 = 1^2 + b \cdot (1) + c$; $y = x^2 - 3x - 4$;

b) Nach unten offen heißt, dass der Funktionsterm von der Form $f(x) = -x^2 + bx + c$ ist.
$(-2; -7)$ eingesetzt: $-7 = -(-2)^2 + b \cdot (-2) + c \quad \Leftrightarrow -7 = -4 - 2b + c \quad \Leftrightarrow c = 2b - 3$;
$(-1; -2)$ eingesetzt: $-2 = -(-1)^2 + b \cdot (-1) + c \quad \Leftrightarrow -2 = -1 - b + c \quad \Leftrightarrow c = b - 1$;
gleichgesetzt: $b - 1 = 2b - 3 \Leftrightarrow b = 2, c = b - 1 = 2 - 1 = 1 \Rightarrow y = -x^2 + 2x + 1$;

c) $f(x) = ax^2 + bx + c$,
$$\begin{array}{llll} f(0) = 0 & \Rightarrow 0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow & c = 0, & \\ f(1) = -2 & \Rightarrow -2 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \Rightarrow & -2 = a + b, & \\ f(2) = 0 & \Rightarrow 0 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \Rightarrow & 0 = 4a + 2b, & \Rightarrow f(x) = 2x^2 - 4x; \end{array}$$

d) $f'(x) = 2x + b$, $\quad f'(3) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 3 + b = 0 \Leftrightarrow b = -6$;
$f(x) = x^2 + bx + c$, $\quad f(2) = 0 \Leftrightarrow 2^2 + b \cdot 2 + c = 0 \Leftrightarrow 4 - 6 \cdot 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = 8$
$\Rightarrow f(x) = x^2 - 6x + 8$;

e) $f'(x) = -2x + b$, $\quad f'(2) = 0 \Leftrightarrow -2 \cdot 2 + b = 0 \Leftrightarrow b = 4$;
$f(x) = -x^2 + bx + c$, $\quad f(-2) = -16 \Leftrightarrow -(-2)^2 + b \cdot (-2) + c = -16 \Leftrightarrow -4 - 2 \cdot 4 + c = -16$
$\Leftrightarrow c = 4 \quad \Rightarrow f(x) = -x^2 + 4x - 4$;

f) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$,
$$\begin{array}{lll} f(0) = 0 & \Rightarrow 0 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d \Rightarrow & d = 0, \\ f'(0) = 0 & \Rightarrow 0 = 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c \Rightarrow & c = 0, \\ f(4) = 4 & \Rightarrow 4 = a \cdot 4^3 + b \cdot 4^2 \Rightarrow & 4 = 64a + 16b, \\ f'(4) = 0 & \Rightarrow 0 = 3a \cdot 4^2 + 2b \cdot 4 \Rightarrow & 0 = 48a + 8b \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2; \end{array}$$

g) $f(x) = ax^3 + cx$,
$$\begin{array}{lll} f(2) = 0 & \Rightarrow 0 = a \cdot 2^3 + c \cdot 2 \Rightarrow & 0 = 8a + 2c, \\ f(4) = 24 & \Rightarrow 24 = a \cdot 4^3 + c \cdot 4 \Rightarrow & 24 = 64a + 4c \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x; \end{array}$$

h) $f(x) = ax^4 + cx^2 + e$,
$$\begin{array}{lll} f(0) = 0 & \Rightarrow 0 = a \cdot 0^4 + c \cdot 0^2 + e \Rightarrow & e = 0, \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} f(2)=0 & \Rightarrow 0=a\cdot 2^4+c\cdot 2^2 \Rightarrow & 0=16a+4c, \\ f(4)=-24 & \Rightarrow -24=a\cdot 4^4+c\cdot 4^2 \Rightarrow & -24=256a+16c \Rightarrow\ f(x)=-\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{2}x^2. \end{array}$$

i) $f(x)=x^3+6x^2-4$; j) $f(x)=0.5\cdot(x-4)\cdot(x-1)\cdot(x+1)+2=0.5x^3-2x^2-0.5x+4$; k) $f(x)=0.25\cdot x\cdot(x-2)\cdot(x-4)$;

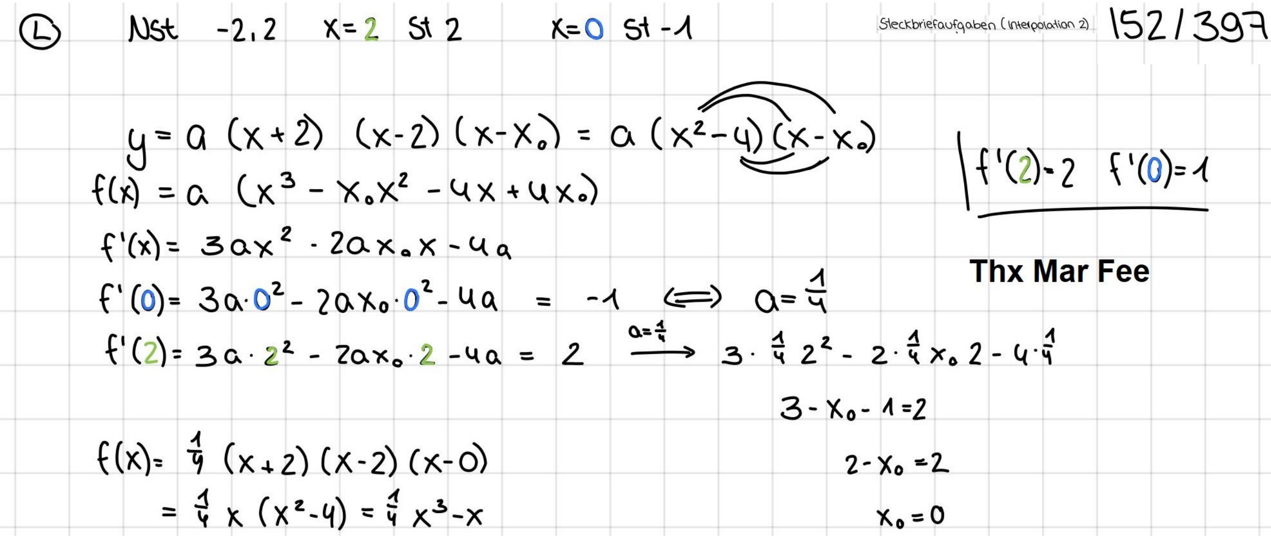


Abb. 341 Interpolation mit vielen Nullstellen (zur Zeit Teil L)

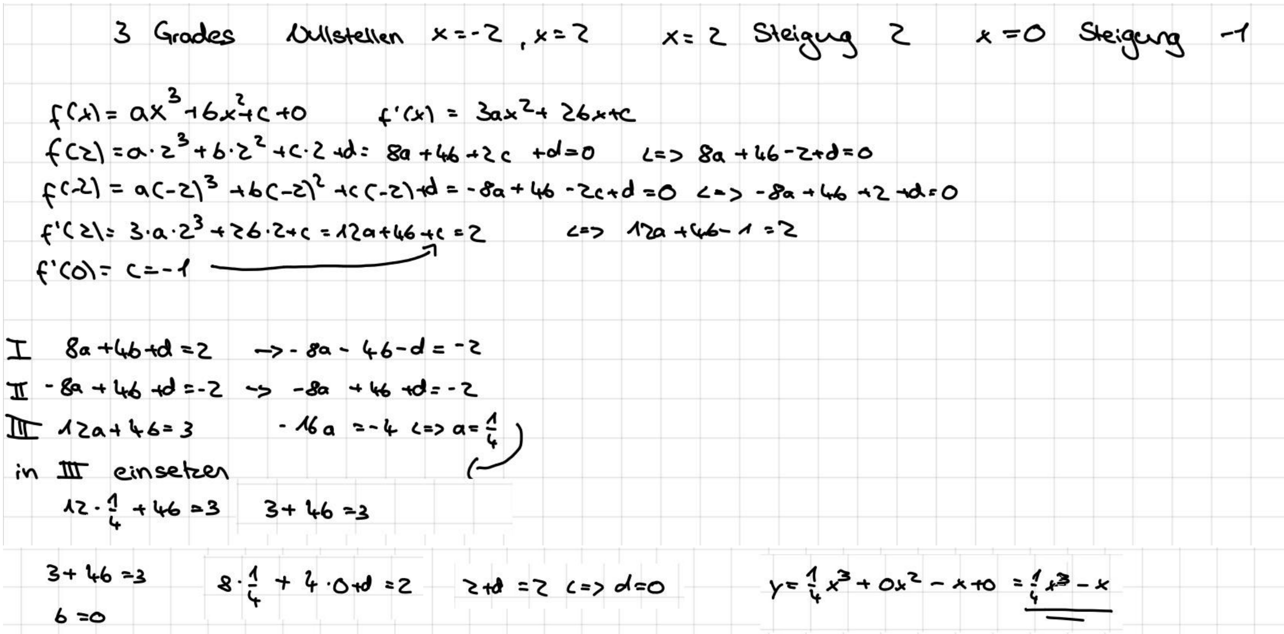


Abb. 342 Interpolation mit vielen Nullstellen (zur Zeit Teil L) andere Variante

L) $f(x)=0.25\cdot(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x-1)$; m) $f(x)=0.25\cdot(x-3)\cdot(x-1)\cdot(x+1)$;

n) $2x^3-5x^2$; o) $-2x^3+3x^2$;

Aufg. 156/396: a) $p_1(x)=\frac{1-0}{x_1-x_2}(x-x_2)=\frac{x-x_2}{x_1-x_2}$, $p_2(x)=\frac{1-0}{x_2-x_1}(x-x_1)=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$, b) $f(x_1)=y_1\cdot p_1(x_1)+y_2\cdot p_2(x_1)=y_1\cdot 1+y_2\cdot 0=y_1$; c) $p_1(x)=\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{x-x_3}{x_1-x_3}$; d) $p_2(x_1)=0$, $p_2(x_2)=1$ und $p_2(x_3)=0$, $p_3(x_1)=0$, $p_3(x_2)=0$ und $p_3(x_3)=1$, $p_2(x)=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{x-x_3}{x_2-x_3}$, $p_3(x)=\frac{x-x_1}{x_3-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_3-x_2}$; e) $f(x)=y_1\cdot p_1(x)+y_2\cdot p_2(x)+y_3\cdot p_3(x)$.

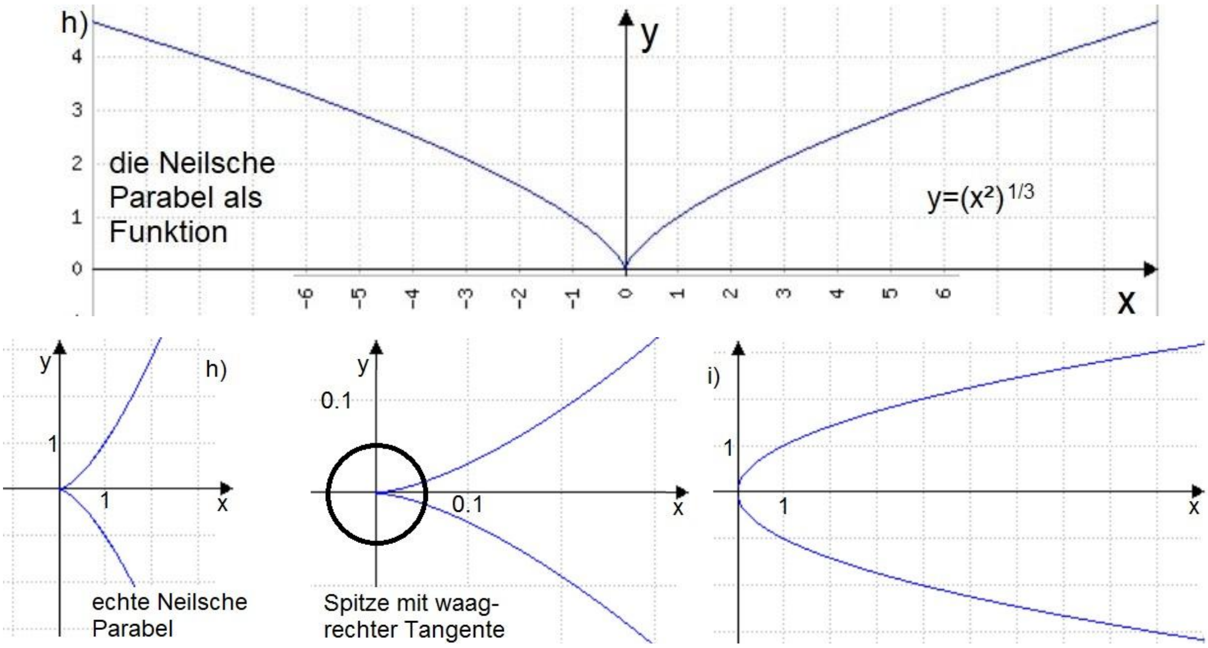


Abb. 343 Die Neilsche Parabel

Aufg. 156/397: $t \in R$ gilt dabei als <u>konstant</u>.

a) $f'(x) = (20x^2)' = 40x$, $f'(x) = (tx^2)' = 2tx$; $f'(x) = (tx^3)' = 3tx^2$, $f'(x) = (tx^4)' = 4tx^3$, $f'(x) = (tx^{20})' = 20tx^{19}$, $f'(x) = (tx^k)' = ktx^{k-1}$,

b) $f'(x) = (tx^2 + 4x + 3t)' = 2tx + 4$, $f'(x) = (t^2x^3 + x^2 + 3t^2)' = 3t^2x^2 + 2x$, $f'(x) = (tx^3 + t^2x^2 + t^3x + t^4)' = 3tx^2 + 2t^2x + t^3$,

c) $f'(x) = (tx^4 + 2x^2 + t^3 + t^2x)' = 4tx^3 + 4x + t^2$, $f'(x) = (x^2 - 2tx + t^2 + t)' = 2x - 2t$, $f'(x) = (x^3 - (2x - t)^2)' = (x^3 - 4x^2 + 4tx - t^2)' = 3x^2 - 8x + 4t$, $f'(x) = (tx^{2t-1})' = t(2t - 1)x^{2t-2}$.

Bemerkung: Bei jeder der folgenden Aufgaben werden die y-Werte der kritischen Punkte berechnet. Eine Ortskurve (sogar in expliziter Form) erhalten Sie auch, wenn Sie den x- Wert (x_t) der kritischen Punkte ausrechnen, davon die Umkehrfunktion bilden (sprich nach t auflösen) und das Ergebnis für das t in $f_t(x)$ einsetzen.

Aufg. 156/398: c) Elimination des Parameters:
$t = x-1$ in $y = 2t$ eingesetzt, ergibt $y = 2(x-1)$.
(Abb. 344)

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
$x(t)$	-2	-1	0	1	2	3	4
$y(t)$	-6	-4	-2	0	2	4	6

Aufg. 156/399: (Ortskurven)
a) $\frac{x}{2}$; b) $2x + 4$; c) $2x + 3$;

d) $x = 3t + 2 \Leftrightarrow t = \frac{x-2}{3}$ in $y = t^2$: eingesetzt:
$y = \left(\frac{x-2}{3}\right)^2$;

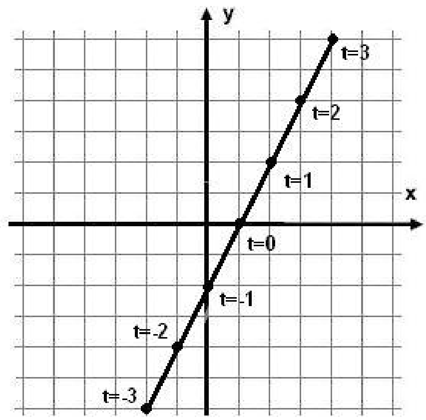


Abb. 344 Gerade in Parameterform (EdP)

e) $x(t) = 0.5t-1 \Leftrightarrow x+1 = 0.5t \Leftrightarrow t = 2x+2 \Rightarrow y(t) = \frac{t^2}{2}-1 = \frac{(2x+2)^2}{2}-1 = \frac{4x^2+8x+4}{2}-1 = 2x^2+4x+1$;

f) $x(t) = \frac{t}{3}+2 \Leftrightarrow x-2 = \frac{t}{3} \Leftrightarrow 3x-6 = t \Rightarrow y(t) = t^3-t = (3x-6)^3-(3x-6) = 3^3 \cdot (x-2)^3-3x+6 = 27 \cdot (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) - 3x + 6 = 27x^3 - 162x^2 + 321x - 210$;

g) $2x$(ohne $(0/0)$) h) $\pm\sqrt{x^3}$ $(x \geq 0)$. i) $x = t^2$, $y = t \Rightarrow x = y^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{x}$; (Abb. 343)

Aufg. 156/400: $x_s = \frac{-b}{2a}$ bzw. Scheitelform $y = a(x-x_s)^2 + y_s$:

a) $f_t(x) = (x-t)^2 + t$: $S(t;t)$; $x = t, y = t = x \Rightarrow$ Ortskurve $y = x$;

b) $f_t(x) = x^2 - 6tx + 9t^2 + 3t + 2$: $S(3t; 3t+2)$; $x = 3t, y = 3t + 2 = x + 2 \Rightarrow$ Ortskurve $y = x + 2$;

c) $f_t(x) = x^2 + 2tx + t^2 - t$: $x_s = \frac{-2t}{2} = -t$, $y_s = f_t(-t) = (-t)^2 + 2t\cdot(-t) + t^2 - t = -t$, $x = -t = y$ $\Rightarrow$ Ortskurve $y = x$;

d) $f_t(x) = tx^2 - 2x + 1$ $(t \neq 0)$: $x_s = \frac{2}{2t} = \frac{1}{t}$, $y_s = f_t(\frac{1}{t}) = t(\frac{1}{t})^2 - 2\cdot(\frac{1}{t}) + 1 = 1 - \frac{1}{t}$ $x = \frac{1}{t}$ in $y = 1 - \frac{1}{t}$ $\Rightarrow$ Ortskurve $y = 1 - x$, ohne (0;1), weil $-2x + 1$ keinen Scheitel hat. (Abb. 345)

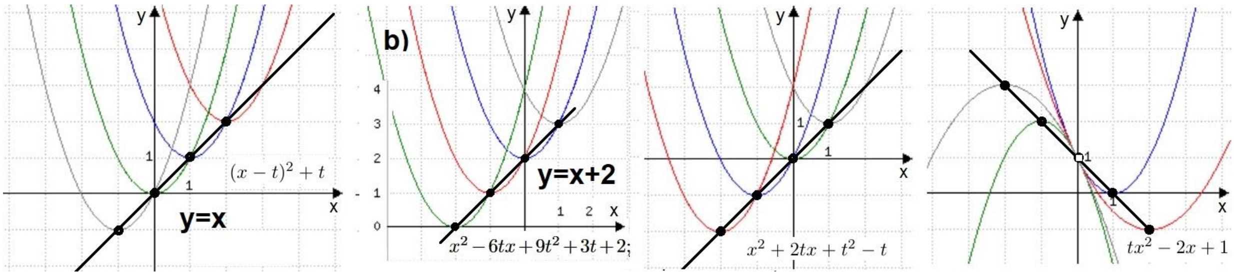


Abb. 345 Ortskurven von Scheiteln

e) x- Wert vom Scheitel: $f_t'(x) = (x^2 - 2tx)' = 2x - 2t = 0 \xLeftrightarrow{+2t,:2} x = t$;

y- Wert vom Scheitel: $f_t(t) = t^2 - 2t\cdot t = -t^2$; $\Rightarrow S(t; -t^2)$;

EdP $x = t$ in $y = -t^2$ ergibt als Ortskurve $y = -x^2$.

f) $f_t(x) = x^2 - 4tx$; $S(2t| - 18t^2)$; Ortskurve: $y = -9/2x^2$;

g) $f_t(x) = 2x^2 - 12tx$; $S(3t| - 18t^2)$; Ortskurve: $y = -2x^2$;

h) $f_t(x) = -x^2 + tx$; $S(-t/2|t^2/4)$; Ortskurve: $y = x^2$;

i) $f_t(x) = tx^2 - 2x + 5$; $S(1/t|5 - t^{-2})$; Ortskurve: $y = 5 - x^2$ ohne $(0/5)$;

j) $tx^2 + x + 2$: $x_s = \frac{-1}{2t}$ $f(\frac{-1}{2t}) = t(\frac{-1}{2t})^2 + (\frac{-1}{2t}) + 2 = \frac{1}{4t} + \frac{-1}{2t} + 2 = \frac{-1}{4t} + 2 \Rightarrow S(\frac{-1}{2t}; \frac{-1}{4t} + 2)$;

k) $x = \frac{-1}{2t} \Leftrightarrow t = \frac{-1}{2x} \Rightarrow y = \frac{-1}{4\cdot\frac{-1}{2x}} + 2 = \frac{2x}{4} + 2 = \frac{x}{2} + 2$ (ohne (0;2));

Aufg. 156/401: **1)** Setzen Sie $f_t'(x)$ $\underline{=0}$ und lösen Sie nach $\underline{x}$ auf (Algebra!)
2) Berechnen Sie den $\underline{y}$-Wert des Extrempunktes und klassifizieren Sie gegebenenfalls.
3) Der x- Wert des Extrempunktes sei $g(t)$; er ist also eine Funktion von $\underline{t}$. Lösen Sie $g(t)$ nach $\underline{t}$ auf und setzen Sie dies in $y = f(g(t))$ ein (Elimination des Parameters).

Bemerkung: Tatsächlich kann der Schritt 2 weggelassen werden; dann muss nur $\underline{t = g^{-1}(x)}$ für $\underline{t}$ in $f_t(x)$ eingesetzt werden. Das $\underline{x}$ bleibt dann unberührt.

Aufg. 156/402: a) $f_t'(x) = (3tx^2 - x^3)' = 6tx - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Minimum) oder $x = 2t$ (Maximum); $f_t(2t) = 3t\cdot(2t)^2 - (2t)^3 = 3t\cdot 4t^2 - 8t^3 = 4t^3 \Rightarrow y = 4(\frac{x}{2})^3 \Rightarrow g(x) = \frac{x^3}{2}$.

b) $f_t'(x) = (-x^3 - 12tx - 36t^2x)' = (-x^3 - 12tx^2 - 36t^2x)' = -3x^2 - 24tx - 36t^2 = 0 \Leftrightarrow x = -6t$ (Minimum) oder $x = -2t$ (Maximum); $f_t(-2t) = -(-2t)\cdot((-2t) + 6t)^2 = 2t\cdot(4t)^2 = 32t^3$ mit $t = \frac{-x}{2}$ ergibt sich $g(x) = -4x^3$.

c) $f_t'(x) = (x^4 - 2tx^3 + t^2\cdot x^2)' = 4x^3 - 6tx^2 + 2t^2\cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = t$ (Minimum) oder $x = \frac{t}{2}$ (Maximum); $f_t(\frac{t}{2}) = (\frac{t}{2})^2\cdot(\frac{t}{2} - t)^2 = \frac{t^2}{4}\cdot\frac{t^2}{4} = \frac{t^4}{16}$, $t = 2x \Rightarrow y = \frac{(2x)^4}{16} \Rightarrow g(x) = x^4$.

t gilt dabei als konstant.

d) $f'(x) = 3x^2 - 3t^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm t, f(\pm t) = \mp 2t^3,\ \ f''(\pm t) = \pm 6t.$
Sei $t > 0$, dann gilt $f_a''(t) = 6t > 0 \Rightarrow H(-t; 2t^3)$ und $T(t; -2t^3)$;
sei $t < 0$, dann gilt $f_a''(t) = 6t < 0 \Rightarrow H(t; -2t^3)$ und $T(-t; 2t^3)$; beachten Sie dabei, dass für $t < 0$ gilt: $t < -t$ und $-2t^3 > 0$. Sei $t = 0$, dann ist $f_a(x) = x^3$ und x^3 hat keine Extrempunkte.

$E(\pm t; \mp 2t^3)$ $(t > 0) \Leftrightarrow x = t$, $y = -2t^3$ $(t \neq 0)$, Elimination des Parameters (EdP): $y = -2x^3$, $x \neq 0$;

e) $f'(x) = 3x^2 - 3t = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{t}$, (für $t \geq 0$) $f(\pm\sqrt{t}) = \mp 2(\sqrt{t})^3$, $f''(\pm\sqrt{t}) = \pm 6\sqrt{t}$.
Sei $t > 0$, dann gilt $f''(\sqrt{t}) = 6\sqrt{t} > 0 \Rightarrow H(-\sqrt{t}; 2(\sqrt{t})^3)$ und $T(\sqrt{t}; -2(\sqrt{t})^3)$;
sei $t \leq 0$, dann hat f keine Extrempunkte.

$E(\pm\sqrt{t}; \mp 2(\sqrt{t})^3)$, Fall $x > 0$: $x = \sqrt{t}$, $y = -2(\sqrt{t})^3)$, Fall $x < 0$: $x = -\sqrt{t}$, $y = 2(\sqrt{t})^3)$,
EdP: $y = -2x^3$, $x \neq 0$;

f) $f'(x) = 3x^2 - 6tx = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2t,\ f(0) = 0,\ f(2t) = -4t^3,\ f''(x) = 6x - 6t,$
Sei $t > 0$, dann gilt $f''(0) = -6t < 0 \Rightarrow H(0; 0)$ und $f''(2t) = 6t > 0 \Rightarrow T(2t; -4t^3)$;
sei $t < 0$, dann gilt $f_c''(0) = -6t > 0 \Rightarrow T(0; 0)$ und $f''(2t) = 6t < 0 \Rightarrow H(2t; -4t^3)$;
sei $t = 0$, dann ist $f_c(x) = x^3$ und x^3 hat keine Extrempunkte.

$E(2t; -4t^3)$, EdP: $x = 2t \Leftrightarrow t = \frac{x}{2}$, $y = -4t^3 = -4\left(\frac{x}{2}\right)^3 \Rightarrow y = -\frac{x^3}{2}$, $x \neq 0$;

g) $f'(x) = 3tx^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{t}}$ (für $t \geq 0$), $f(\pm\frac{1}{\sqrt{t}}) = \mp\frac{2}{\sqrt{t}}$, $f''(\pm\frac{1}{\sqrt{t}}) = \pm\frac{6}{\sqrt{t}}$.
Sei $t > 0$, dann gilt $f''(\frac{1}{\sqrt{t}}) = \frac{6}{\sqrt{t}} > 0 \Rightarrow H(-\frac{1}{\sqrt{t}}; \frac{2}{\sqrt{t}})$ und $T(\frac{1}{\sqrt{t}}; -\frac{2}{\sqrt{t}})$;
sei $t \leq 0$, dann hat f keine Extrempunkte.

$E(\pm\frac{1}{\sqrt{t}}; \mp\frac{2}{\sqrt{t}})$, Fall $x < 0$: $x = -\frac{1}{\sqrt{t}}$, $y = \frac{2}{\sqrt{t}}$, Fall $x > 0$: $x = \frac{1}{\sqrt{t}}$, $y = -\frac{2}{\sqrt{t}}$, EdP: $y = -2x$, $x \neq 0$;

h) $f'(x) = (\frac{1}{x} + \frac{t}{x^2})' = (x^{-1} + t \cdot x^{-2})' = -x^{-2} - 2t \cdot x^{-3} = 0 \Leftrightarrow x + 2t = 0 \Leftrightarrow x = -2t$; $f(-2t) = \frac{(-2t)+t}{(-2t)^2} = \frac{-t}{4t^2} = \frac{-1}{4t}$; $f'(-3t) = -(-3t)^{-2} - 2t \cdot (-3t)^{-3} = \frac{-1}{9t^2} + \frac{2t}{27t^3} = \frac{-3}{27t^2} + \frac{2}{27t^2} = \frac{-1}{27t^2} < 0$; $f'(-t) = -(-t)^{-2} - 2t \cdot (-t)^{-3} = \frac{-1}{t^2} + \frac{2t}{t^3} = \frac{1}{t^2} > 0$; Für $t > 0$ hat $f(x)$ ein Minimum; für $t < 0$ ist $-t > -3t$ also hat $f(x)$ für $t < 0$ ein Maximum: $E(-2t; \frac{-1}{4t})$.

EdP: $x = -2t \Leftrightarrow t = \frac{-x}{2}$ in $y = \frac{-1}{4t}$ eingesetzt: $y = \frac{-1}{4 \cdot \frac{-x}{2}} = \frac{1}{2x}$.

i) $f'(x) = (2\sqrt{x} - tx)' = \frac{2}{2\sqrt{x}} - t$; $\frac{2}{2\sqrt{x}} - t = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = t \Leftrightarrow \frac{1}{t} = \sqrt{x} \Rightarrow \frac{1}{t^2} = x$;
Probe (obligatorisch): $f'(\frac{1}{t^2}) = \frac{2}{2\sqrt{\frac{1}{t^2}}} - t = \frac{1}{\frac{1}{t}} - t = 0\surd$;
links: $f'(\frac{0.25}{t^2}) = \frac{1}{\sqrt{\frac{0.25}{t^2}}} - t = \frac{1}{\frac{0.5}{t}} - t = 2t - t = t > 0$,
rechts: $f'(\frac{4}{t^2}) = \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{t^2}}} - t = \frac{1}{\frac{4}{t}} - t = \frac{t}{2} - t = -\frac{t}{2} < 0 \Rightarrow$ Minimum.

$f_f(\frac{1}{t^2}) = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{t^2}} - t \cdot \frac{1}{t^2} = 2 \cdot \frac{1}{t} - \frac{1}{t} = \frac{1}{t}$. $T(\frac{1}{t^2}; \frac{1}{t})$;
EdP: $x = \frac{1}{t^2} \Leftrightarrow t = (\pm)\frac{1}{\sqrt{x}}$ $(t > 0)$, $y = \frac{1}{t} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \sqrt{x}$.

Aufg. 157/403: a) $f_t''(x) = (x^3 - 3tx^2)'' = (3x^2 - 2tx)' = 6x - 6t = 0 \Leftrightarrow x = t$, $f'''(x) = 6 \neq 0$, $f_t(t) = t^3 - 3t \cdot t^2 = -2t^3 \Rightarrow W(t; -2t^3)$; EdP (Elimination des Parameters): $y = -2t^3 = -2x^3$, $(x = t)$.

b) $f_t''(x) = (6x^2 - tx^3)'' = (12x - 3tx^2)' = 12 - 6tx = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{t}$, $f'''(x) = -6t \neq 0$, falls $t \neq 0$.
$f_t(\frac{2}{t}) = 6 \cdot (\frac{2}{t})^2 - t \cdot (\frac{2}{t})^3 = 6 \cdot \frac{4}{t^2} - t \cdot \frac{8}{t^3} = \frac{24}{t^2} - \frac{8}{t^2} = \frac{16}{t^2} \Rightarrow W(\frac{2}{t}; \frac{16}{t^2})$, $(t \neq 0)$;
EdP: $x = \frac{2}{t} \Leftrightarrow t = \frac{2}{x}$ in $y = \frac{16}{t^2} = \frac{16}{(\frac{2}{x})^2} = \frac{16}{\frac{4}{x^2}} = 4x^2$, $(x \neq 0)$.

c) $f_t'''(x) = (\frac{t^2x^4}{16} + \frac{tx^3}{2})''' = (\frac{t^2x^3}{4} + \frac{3tx^2}{2})'' = (\frac{3t^2x^2}{4} + 3tx)' = \frac{3t^2x}{2} + 3t$,
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3t^2x^2}{4} + 3tx = 0 \Leftrightarrow tx \cdot (\frac{3tx}{4} + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $\frac{3tx}{4} + 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{tx}{4} = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-4}{t}$;
$f'''(0) = 3t \neq 0$ da $t > 0$; $f'''(\frac{-4}{t}) = \frac{3t^2 \cdot \frac{-4}{t}}{2} + 3t = \frac{-12t}{2} + 3t = -3t \neq 0$ da $t > 0$;

$f_t(x) = \frac{t^2 \cdot (\frac{-4}{t})^4}{16} + \frac{t \cdot (\frac{-4}{t})^3}{2} = \frac{t^2 \cdot \frac{256}{t^4}}{16} + \frac{t \cdot \frac{-64}{t^3}}{2} = \frac{16}{t^2} - \frac{32}{t^2} = \frac{-16}{t^2} \Rightarrow W(\frac{-4}{t}; \frac{-16}{t^2})$.
EdP: $x = \frac{-4}{t} \Leftrightarrow t = \frac{-4}{x}$, $y = \frac{-16}{t^2} = \frac{-16}{(\frac{-4}{x})^2} = \frac{-16}{\frac{16}{x^2}} = -x^2$ $(x \le 0)$, $W_2(0;0)$ ist auch ein WP.

d) $f_t'''(x) = (x^{-1} - tx^{-2})''' = (-x^{-2} + 2tx^{-3})'' = (2x^{-3} - 6tx^{-4})' = -6x^{-4} + 24tx^{-5}$,
$f''(x) = 0 = 2x^{-3} - 6tx^{-4} \Leftrightarrow 0 = 2x - 6t \Leftrightarrow x = 3t$; $f_t(3t) = (3t)^{-1} - t(3t)^{-2} = \frac{1}{3t} - \frac{1}{9t} = \frac{2}{9t}$,
$f'''(3t) = -6 \cdot (3t)^{-4} + 24t \cdot (3t)^{-5} = \frac{2}{81t^4} \neq 0$, $(t \neq 0)$;

EdP: $x = 3t \Leftrightarrow t = \frac{x}{3}$, $y = \frac{2}{9t} = \frac{2}{9 \cdot \frac{x}{3}} = \frac{2}{3x}$ $(x \neq 0)$.

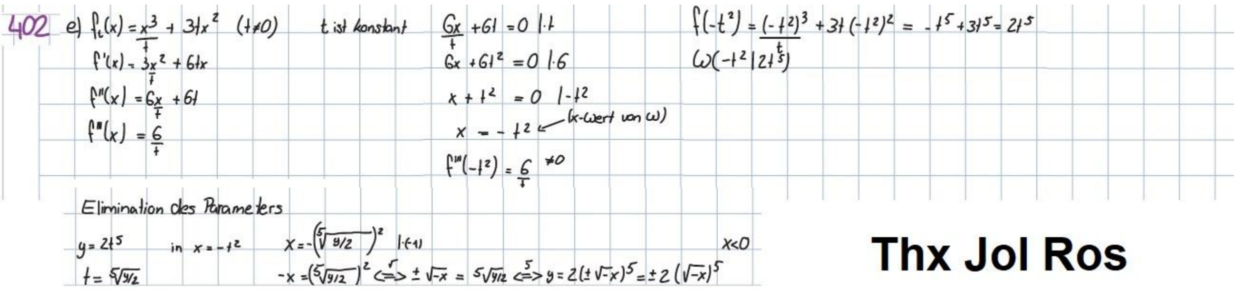


Abb. 346 LöVo zur Ortskurve

Aufg. 157/404: a+b) $f_t''(x) = \left(2t^4x^2 - \frac{x^4}{4}\right)'' = \left(4t^4x - x^3\right)' = 4t^4 - 3x^2$;

$f_t''(x) = 0 \Leftrightarrow 4t^4x - x^3 = -x(x^2 - 4t^4) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = \pm 2t^2$.

$f_t''(\pm 2t^2) = 4t^4 - 3(\pm 2t^2)^2 = 4t^4 - 12t^4 = -8t^4 < 0$ (Maximum).

Wichtig: Bitte so im Abi notieren: $\underline{2t^2 = 8 \Rightarrow t = \pm 2 \Rightarrow \text{(wegen } t > 0) \; t = 2.}$

c) $f_t''(x) = (\frac{x^3}{3} - t^2x)'' = (x^2 - t^2)' = 2x$. $f_t'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm t$;

$f(\pm t) = \frac{(\pm t)^3}{3} - t^2(\pm t) = \mp\frac{2t^3}{3}$; $f''(\pm t) = \pm 2t$ oder $0 < f'(-2t) = 3t^2 = f'(2t)$, $f'(0) = -t^2 < 0$

$\Rightarrow H(-t; \frac{2t^3}{3}), T(t; \frac{-2t^3}{3})$; $d = \sqrt{(2t)^2 + (\frac{4t^3}{3})^2} = \sqrt{1332}$. (quadriert; dies ist unproblematisch, weil alles > 0 ist) $(2t)^2 + (\frac{4t^3}{3})^2 = 1332 \Leftrightarrow 4t^2 + \frac{16t^6}{9} = 1332 \Leftrightarrow 4t^6 - 9t^2 - 2997 = 0$; Diese Gleichung kann nur näherungsweise gelöst werden (das müssen Sie im LK selber erkennen). Dies geht mit zB. Intervallschachtelung oder mit dem Newtonverfahren. Wir wählen $t_0 = 2$ und $t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_n)}$:

$t_1 \approx 5.79371253$	$t_2 \approx 4.848521893$	$t_3 \approx 4.089299295$	$t_4 \approx 3.520911027$	$t_5 \approx 3.17176123$
$t_6 \approx 3.042953354$	$t_7 \approx 3.027598167$	$t_8 \approx 3.027399392$	$t_9 \approx 3.027399359$	$t_9 \approx t_{10} \approx t_n$

damit ist $t \approx 3.027399359$; diese Ergebnis ist auch mit dem GTR approximierbar $(t > 0)$.

d) i) $(x^4 - 2tx^2 + 8t)' = 4x^3 - 4tx = 4x(x^2 - t) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_{2,3} = \pm\sqrt{t}$.

$f_t''(x) = (x^4 - 2tx^2 + 8t)'' = 12x^2 - 4t$;

$f_t''(0) = -4t < 0$ (Maximum); $f_t''(\pm\sqrt{t}) = 8t < 0$ (Minimum);

$f_t(\pm\sqrt{t}) = (\pm\sqrt{t})^4 - 2t(\pm\sqrt{t})^2 + 8t = 8t - t^2$.

Aus Symmetriegründen sind die y-Werte beider Tiefpunkte gleich. $8t - t^2$ ist für $t = 4$ maximal.

ii) $f_1(x) = x^4 - 2x^2 + 8$ mit $f_2(x) = x^4 - 4x^2 + 16$ gleichgesetzt:

$x^4 - 2x^2 + 8 = x^4 - 4x^2 + 16 \xLeftrightarrow{-x^4+4x^2-8} 2x^2 = 8 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 2$;

$f_t(\pm 2) = (\pm 2)^4 - 2t(\pm 2)^2 + 8t = 16$ unabhängig von t;

damit sind $T_{1,2}(\pm 2; 16)$ gemeinsame Punkte.

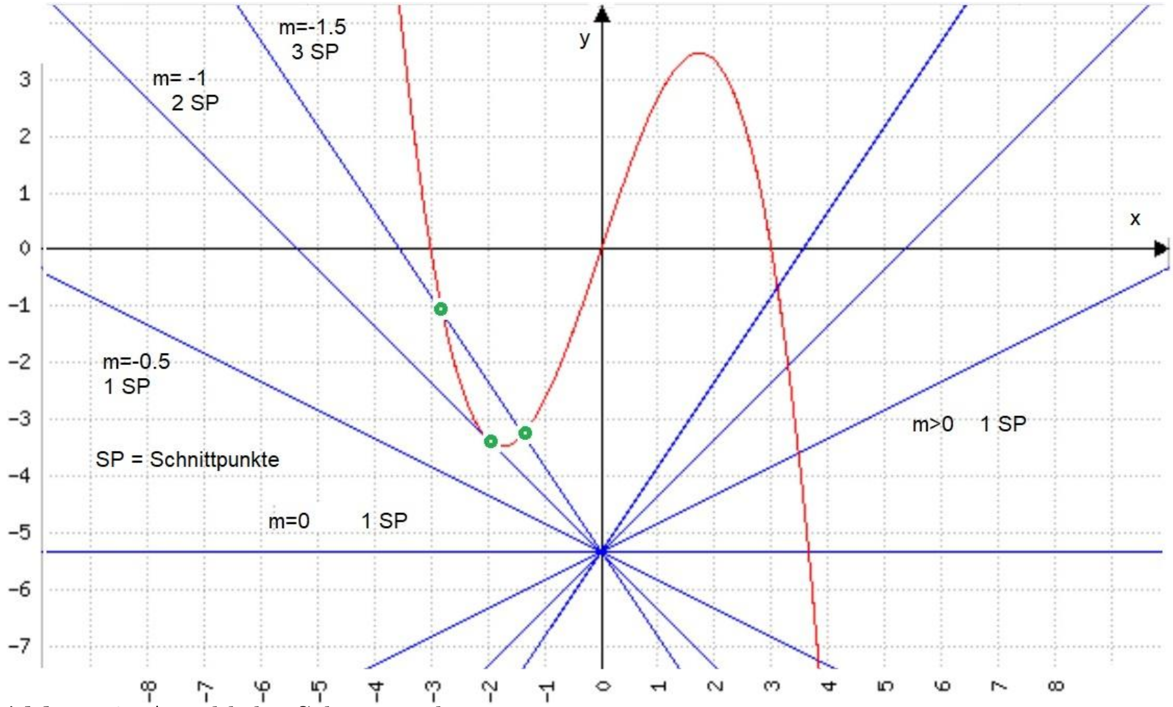


Abb. 347 Anzahl der Schnittpunkte

e) i) $f_a'(x) = \frac{3}{a} \cdot x^2 - 1 = 0 \overset{+1 \cdot \frac{a}{3}}{\Longleftrightarrow} x^2 = \frac{a}{3}$. Diese Gleichung ist nur lösbar, für $a > 0$.

Damit geht f für $x \to$ gegen ∞ (Abb. 2)

ii) Sei $a > 0$: $x = \pm\sqrt{\frac{a}{3}} = 3 \Rightarrow \frac{a}{3} = 3^2 \Leftrightarrow a = 27$.

Probe: $\pm\sqrt{\frac{27}{3}} = 3$ im + Fall $\surd$. $\quad f_a''(x) = \frac{6}{a} \cdot x$; $\quad f_{27}''(3) = \frac{6}{27} \cdot 3 = \frac{2}{3} \neq 0$;

f) M: f ist nicht monoton; für $x \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$ smw, für $x \notin (-\sqrt{3}; \sqrt{3})$ smf;
A: f ist vom Typ $-x^3$: $f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$ und $f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -\infty$;
D: $\mathbb{D} = \mathbb{W} = \mathbb{R}$ (f ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades)
N: $N_{1,2}(\pm 3|0)$ und $N_3(0|0)$;
E: $T(-\sqrt{3}| - \sqrt{12})$, $H(\sqrt{3}|\sqrt{12})$ (und $W(0|0)$);
S: f ist ungerade, also ps zu $(0|0)$;
S: Polynome sind immer stetig

ii) $f''(x) = (3x - \frac{x^3}{3})'' = (3 - x^2)' = -2x$, $\quad f(-2) = \frac{-10}{3} = g(-2)$; $f'(-2) = -1 = g'(-2)$;

$\Rightarrow g$ ist Tg an f bei $x = -2$.

iii) $m = -1$: 2 Lösungen; $m < -1$: 3 Lösungen; $m > -1$: 1 Lösung siehe Abb. 633/347

Aufg. 157/405: a) Sei G_f das Schaubild von f und sei $G_{f'}$ das Schaubild von f';
$f'(x) = -0.008(x+2)^2(x-5)^3$. i) Falsch: Wenn G_f einen Tiefpunkt bei $x = -2$ haben sollte, müsste dort das $G_{f'}$ einen Vorzeichenwechsel aufweisen, was nicht der Fall ist. ii) Wahr: Die Wendestellen von f sind gleichzeitig Extermstellen von f'. f' besitzt zwei Extremstellen im angegebenen Bereich. iii) Wahr: Im Schnittpunkt von $G_{f'}$ mit der $y-$Achse ist der Wert 4 ablesbar.
Damit gilt: $f'(0) = 4 > 1$. Demnach ist die Aussage wahr. iv) Falsch: Das Schaubild von f' verläuft im Intervall $[0; 5]$ im ersten Quadranten. Die Werte von f' sind also positiv. Das wiederum impliziert das monotone Wachsen von f in diesem Bereich.

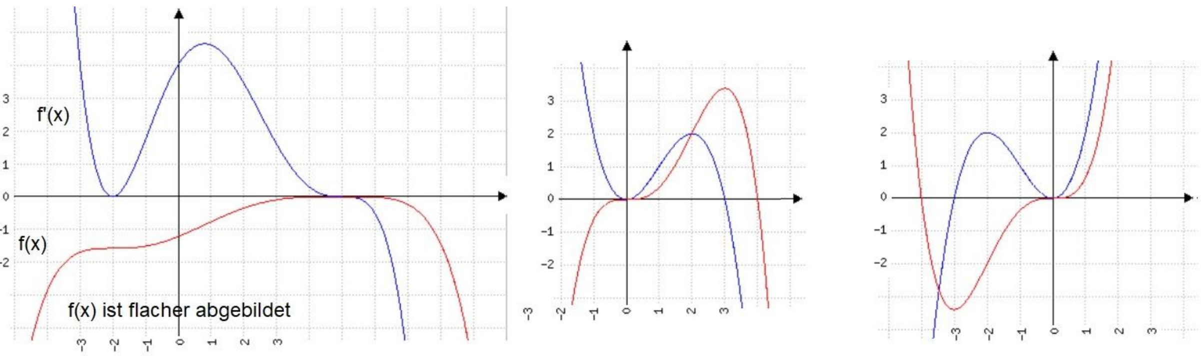


Abb. 348 a) $f'(x)$, $f(x)$ im Abi 2006 b) $f'(x)$, $f(x)$ Abi 2007 c) $f'(x)$, $f(x)$ Abi 2015

Ein mögliches $f(x)$ ist $-\dfrac{(x-5)^4\left(10x^2+68x+145\right)}{7500}$.

b) Ein mögliches $f(x)$ ist $f(x) = -\dfrac{(x-4)\,x^3}{8}$; $f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^2(x-3)$.

i) Monotonie: Für $x < 3$ ist f monoton steigend, weil f' dort größer als Null ist. Für $x > 3$ ist f monoton fallend, weil f' dort kleiner als Null ist. **ii)** f' muss eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel aufweisen um Extremstelle von f zu sein. Das ist nur an der Stelle $x = 3$ der Fall.
iii) Wendestellen: Wenn f' lokale Extremstellen besitzt, hat f an diesen Stellen Wendestellen. Das ist der Fall bei $x = 0$ und $x = 2$. **iv)** Mögliches Schaubild von f siehe Abbildung 634/348b.

c) Ein mögliches $f(x)$ ist $f(x) = \dfrac{(x+4)\,x^3}{8}$; $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot (x+3)$

Der Graph gehört zur Ableitungsfunktion f'. Dann ist die Aussage **i)** wahr, weil der Graph an der Stelle $x = -3$ null ist und ein VZW von minus nach plus vorliegt. **ii)** wahr, weil im Intervall $]-2; -1[$ die Ableitungsfunktion positiv und f damit streng monoton wachsend ist. Deshalb gilt $f(-2) < f(-1)$. **iii)** falsch, weil $f''(-2) = 0$ und $f'(-2) = 2$ gilt und demnach $f''(-2) + f'(-2) = 2 > 1$ gilt. **iv)** wahr, weil der Graph von f' mindestens zwei Extrempunkte hat. Deshalb muss der Grad von f' mindestens 3 und damit der Grad von f mindestens 4 sein.

Bei den Aufgabeteilen a,b,c stellte G'_f eine ganzrationale Funktion dar, deren Nullstellen alle im Schaubild erkennbar sind. Berechnen Sie den Funktionsterm von $f'(x)$.

d) Nach der Scheitelform gilt: $f(x) = a \cdot (x+1)^2 - 4$, mit $f(2) = a \cdot (2+1)^2 - 4 = 5$ folgt $a = 1$ und damit $f(x) = (x+1)^2 - 4 = x^2 + 2x - 3$. Ohne Scheitelform müsste man ein 3×3 LGS lösen, was hier nicht (unbedingt) bekannt ist.

e) $f''(x) = (\frac{-x^3}{6} + x^2 - x)'' = (\frac{-x^2}{2} + 2x - 1)' = -x + 2$. Für das Auffinden der Wendestelle muss die zweite Ableitung null gesetzt werden. also $x = 2$. Für die Gleichung der Tangente gilt $y = f'(2)(x-2) + f(2) = (-2+4-1)(x-2) + \frac{-2^3}{6} + 2^2 - 2 = (x-2) + \frac{2}{3}$. Damit lautet die Gleichung der Wendetangente $y = x - \frac{4}{3}$.

f) **i)** Die Aussage ist falsch, denn es gibt Funktionen, die eine Nullstelle, aber keine Extremstelle haben. Ein Standardbeispiel ist $f(x) = x^3$. **ii)** Die Aussage ist wahr, weil die Ableitung einer Funktion vierten Grades eine Funktion dritten Grades ist, die wiederum mindestens eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel besitzt. Damit hat die Funktion vierten Grades eine Extremstelle.

LöVo **g)** $f(x) = -0.1(x+3)^2(x-3)$; $f(x) = -0.1x^3 - 0.3x^2 + 0.9x + 2.7$;
$f'(x) = -0.3x^2 - 0.6x + 0.9$; $f''(x) = -0.6x - 0.6$;

Charakteristische Punkte: Schnittpunkte mit der x-Achse $N_{Ost}(3|0)$ (nicht im Definitionsbereich) und $N_{West}(-3|0)$; Extrempunkte $H(1|3.2)$ und $T(3|0)$. Wendepunkt $W(-1|1.6)$. Das Schaubild finden Sie in Abb. 635/349a.

i) Stelle mit steilster Steigung im Osten: Die Steigung wird beschrieben durch die erste Ableitung von f. Die steilste Steigung befindet sich in einer der Extremstellen von f'. Bei der Funktion f handelt es sich dabei um die Wendestelle.
Aus $f''(x) = 0$ folgt $f''(x) = -0.6x - 0.6 = 0 \Leftrightarrow x = -1$; als steilste Stelle im Osten. Die Steigung des Schaubildes von f in diesem Punkt beträgt $f'(-1) = -0.3 \cdot (-1)^2 - 0.6 \cdot (-1) + 0.9 = 1.2$;

ii) Stelle mit gleicher Steigung im Westen: Da f im Westen im Vergleich zum Osten ein anderes Krümmungsverhalten hat, erhält man die Stelle im Westen durch die Lösung der Gleichung $f'(x) = -m = -1.2$, demnach $f'(x) = -1.2 \Leftrightarrow x \approx -3.828$ oder $x \approx 1.828$. (exakt $x = -1 \pm \sqrt{8}$).

iii) Staumauer: $f(x) = 2.7 \Leftrightarrow -0.1x^3 - 0.3x^2 + 0.9x + 2.7 = 2.7 \Leftrightarrow -0.1x^3 - 0.3x^2 + 0.9x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = -1.5 \pm \sqrt{11.25}$. Hier sind die Stellen $x \approx -4.854$ und $x = 0$ relevant; Breite im Schaubild $= 0 - 4.854 = 4.854$. Damit ist die Staumauer etwa 485.4 m breit.

iv) Mindesthöhe des Gerüstes, Fall 1 (nur der Ort): Bei der geringsten Höhe des Gerüstes tangiert der Sonnenstrahl das Schaubild von f im Berührpunkt B. Als mathematische Aufgabe ergibt sich demnach die Ermittlung der Tangente t an K durch den tiefsten Punkt T. Als Tangentengleichung im Punkt $B(u/f(u))$ ergibt sich nach $y = f'(u)(x - u) + f(u)$ für

$y = (-0.3u^2 - 0.6u + 0.9)(x - u) - 0.1u^3 - 0.3u^2 + 0.9u + 2.7$ durch den externen Punkt $T(-3|0)$: $0 = (-0.3u^2 - 0.6u + 0.9)(-3 - u) - 0.1u^3 - 0.3u^2 + 0.9u + 2.7 = 0.2 \cdot u^3 + 1.2 \cdot u^2 + 1.8u \Leftrightarrow u_{1,2} = -3, u_3 = 0$. Damit ist $B(0|2.7)$ und die gesuchte Tangente $y = 0.9x + 2.7$. An der Stelle $x = 1$ ist $t(1) = 3.6$ und $t(1) - f(1) = 3.6 - 3.2 = 0.4$. Also muss der Spiegel 40 m über dem Hochpunkt angebracht werden oder das Gerüst muss mindestens 40 m hoch sein.

v) Höhe des Gerüstes für die gesamte Ausleuchtung des Tals: Bei der Mindesthöhe des Gerüstes wird das Gebiet zwischen Dorf und Wendepunkt W von K nicht ausgeleuchtet. Dieses wird ausgeleuchtet, wenn die Spitze des Gerüstes oberhalb der Tangente im Wendepunkt W liegt. Für die Tangentengleichung an K in W ergibt sich mit $f(-1) = 1.6$ und $f'(-1) = 1.2$ die Gleichung $t_2 : y = 1.6(x + 1) + 1.2 = 1.6x + 2.8$. Also Die Spitze des Gerüstes liegt im Punkt $R(1|t_2(1))$, also $R(1|4.4)$. Die Differenz der y-Werte von R und H $(t_2(1) - f(1) = 4.4 - 3.2 = 1.2)$ ergibt 1.2. Die erforderliche Gerüsthöhe für die gesamte Ausleuchtung des Tals beträgt 120m.

h) i) $H(2; 5.2)$: Höhe des höchsten Punktes 52m. Die tiefste Stelle des Sees liegt auf einer Höhe von rund 36 m, die Wasserhöhe damit auf 44 m.

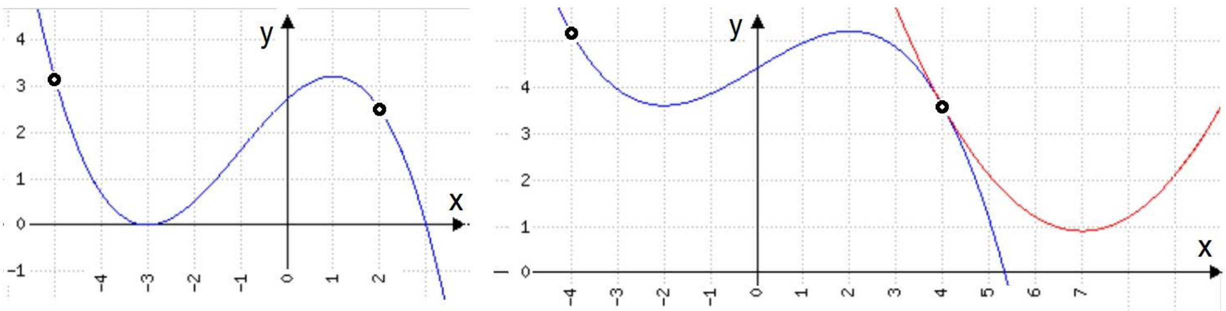


Abb. 349 a) $f(x)$ im Abi 2008 b) $f(x)$ im Abi 2016 mit Fortführung

ii) $T(-2; 3.6)$ an seiner tiefsten Stelle 8 m tief: Dam it sind die x Werte mit $f(x) = 4.4$ gesucht. Dies gilt bei $x = 0$ oder oder $x = \pm\sqrt{12}$. Breite etwa 35m.

iii) Die Hangneigung erhält man aus dem Tangens der Ableitung an der steilsten Stelle, also dem Maximum der Ableitung. Steilste Stelle des Profils: $x = 0$: $f'(0) = 0.6 > \tan(30°) \approx 0.577$. Damit herrscht an dieser Stelle tatsächlich Erdrutschgefahr.

iv) Funktionsanpassung mit Parabel: Eine Parabel zweiter Ordnung hat die Gleichung
$g(x) = ax^2 + bx + c$. Es gilt $f(4) = 3.6$ und $f'(4) = -1.8$.
Damit gilt $g(x) = ax^2 - (1.8 + 8a)x + 10.8 + 16a$ und $a = 0.3$; $S(7; 0.9)$. Höhe 90m.

i) i) Die Mitte des Laderaums entspricht der Stelle $x = 0$ mit $f(0) = 0$. Die Höhe ist dann der Wert von f an der Stelle $x = 5$ (bzw. $x = -5$) und hat jeweils den Wert $5[m]$. ii) Die Breite in $3m$ Höhe erhält man über den Ansatz $f(x) = 3$ mit den Lösungen $x = \pm\sqrt[4]{375} \approx \pm 4.4$. Damit beträgt die Breite rund $8.8m$.

iii) Die Neigung kleiner 5% bedeutet eine Steigung $f(x) = \frac{4x^3}{125}$ kleiner als 0.05. $\frac{4x^3}{125} = 0.05 \Leftrightarrow x^3 = \frac{25}{16} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{25}{16}} \approx 1.16$. Der Ansatz $f'(x) = 0.05$ bzw. $f'(x) < 0.05$ liefert also den Wert $x \approx 1.16$. Im Bereich bis $1.6m$ rechts von der Nullstelle ist die Neigung kleiner als 5% und aus Symmetriegründen natürlich auch links der Nullstelle bis hin zu $x = -1.16$. Zusammenfassend: $-1.16 < x < 1.16$.

iv) $P(4|f(4))) = P(4|\frac{256}{125}) = P(4|2.048)$. $f'(4) = \frac{4}{125}x^3|_{x=4} = 2.048$. Die Steigung der Normale $m_n = \frac{-1}{m_T} = \frac{-1}{2.048} \approx 0.488$. Die Normale ist von der Form $y = \frac{-1}{2.048}(x-4) + 2.048$ Deren Nullstellen sind $0 = \frac{-1}{2.048}(x-4) + 2.048 \overset{\cdot 2.048}{\Longleftrightarrow} x - 4 = 2.048^2 \overset{+4}{\Longleftrightarrow} x = 2.048^2 + 4 \approx 8.19$. Aus Symmetriegründen ist der Abstand der Stützen $2 \cdot 8.19 = 16.39$ (m).

v) Für die Berechnung des Volumens des Laderaums benötigt man die Querschnittsfläche des Kahns. Diese erhält man im gegebenen Bereich Differenz des Rechtecks und dem Flächeninhalt unter der Kurve Damit lässt sich das Volumen (in m^3) ermitteln:

$A = 5 \cdot 10 - \int_{-5}^{5} \frac{x^4}{125} dx = 50 - \left[\frac{x^5}{625}\right]_{-5}^{5} = 50 - (5 - (-5)) = 40$. $V = 40 \cdot 50 = 2000m^3$.

Aufg. 158/406: a) $f'(x) = (0.6x^5 - 4x^3)' = 3x^4 - 12x^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2$; Klassifikation über Wertetabelle:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	135	0	-9	0	-9	0	135
Klass.	+	Max.	−	Ter.	−	Min	+

x	-3	-2	(0)	2	2.5
$f(x)$	-37	12.8	(0)	-12.8	≈ -3.9
Klass.	gl. Min	gl. Max	Ter.	lok. Min	lok. Max

b) **M:** f ist smw für $x \in [-2; 2]$ sonst smf, **A:** $f \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$, $f \xrightarrow{x \to \infty} \infty$, **D:** $\mathbb{D} = \mathbb{W} = \mathbb{R}$,

N: $N(\pm\sqrt{\frac{20}{3}})$ oder $(0; 0)$, **E:** $H(-2; 12.8)$, Terr.$(0; 0)$, $T(2; -12.8)$, (W$(\pm\sqrt{2}; \mp\sqrt{62.72})$),
S: $f(-x) = -f(x) \Rightarrow K_f$ ist ps zum Ursprung, **S:** Stetig: Ja.

c) $f_t'(x) = (x^2 - 4tx + 2)' = 2x - 4t = 0 \Leftrightarrow x = 2t$, $f_t(2t) = (2t)^2 - 4t(2t) + 2 = -4t^2 + 2$,

Klassifikation: $t > 0$:

	t	$2t$	$3t$
$f'(t)$	$-2t$	0	$2t$
	−	Min	+

$t < 0$:

	$3t$	$2t$	t
$f'(t)$	$-2t$	0	$2t$
	+	Min	−

$t = 0$: $x^2 + 2$ hat ebenfalls einen TP; andere Argumentation: Alle Funktionen sind nach oben offene Parabeln. $T(2t; -4t^2 + 2)$, Ortskurve $t = \frac{x}{2}$ in $y = -4t^2 + 2$: $y = -4(\frac{x}{2})^2 + 2 = -x^2 + 2$.

$g_t(x) = -x^2 - 6tx - 9t^2$, $g_t'(x) = -2x - 6t = 0 \Leftrightarrow x = -3t$, $g_t(-3t) = -(-3t)^2 - 6t \cdot (-3t) - 9t^2 = 0$. Alle Funktionen sind nach unten offene Normalparabeln; damit sind alle Extrema Hochpunkte: $H(-3t; 0)$. $\Rightarrow x = -3t; y = 0$. Die Ortskurve ist $y = 0$ (alle Scheitel liegen auf der x-Achse).

d) $p(x) = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0, p'(x) = 3a_3 \cdot x^2 + 2a_2 \cdot x + a_1$.

$p(0) = 0 = a_3 \cdot 0^3 + a_2 \cdot 0^2 + a_1 \cdot 0 + a_0 \Leftrightarrow a_0 = 0$,

$p'(0) = 0 = 3a_3 \cdot 0^2 + 2a_2 \cdot 0 + a_1 \Leftrightarrow a_1 = 0 \Rightarrow \quad p(x) = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2$,

$p'(2) = 3a_3 \cdot 2^2 + 2a_2 \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow 12a_3 + 4a_2 = 0$ (I),

$p(1) = -1 = a_3 \cdot 1^3 + a_2 \cdot 1^2 \Leftrightarrow a_3 + a_2 = -1$. $a_3 = -1 - a_2$ in (I) eingesetzt:

$12(-1-a_2)+4a_2=0 \Leftrightarrow -12-12a_2+4a_2=0 \Leftrightarrow a_2=-1.5 \Leftrightarrow a_3=-1+1.5=0.5$

$\Rightarrow p(x)=0.5\cdot x^3-1.5\cdot x^2$.

e) Wst = Wendestelle, Terrasse= Wst mit waagrechter Tangente (oft als Sattel bezeichnet);

i) $f'(x)=(x-3)(x+1)$, Max bei $x=-1$, Wst bei $x=1$, Min bei $x=3$, f ist smw für $x\le -1$ oder $x\ge 3$; **ii)** $f'(x)=-(x-2)^2$, Wst bei $x=1$ (Terrasse), f für alle reellen x smf;

iii) $f'(x)=(x-2)^2(x+1)$, Min bei $x=-1$, Wst bei $x=0$, und $x=2$ (Terrasse), f ist smw für $x\ge -1$; **iv)** $f'(x)=-(x-1)^3$, Max bei $x=1$ (Flachpunkt), f ist smw für $x\le 1$;

v) $f'(x)=(x-3)(x-1)^2(x+1)$; Max bei $x=-1$, Wst bei $x=-\frac{1}{2}$, $x=-\frac{1}{2}$ (exakt bei $1-\sqrt{2}$), $x=1$ (Terrasse), $x=\frac{5}{2}$ (exakt bei $1+\sqrt{2}$), f ist smw für $x\le -1$ oder $x\ge 3$;

f) $y=0$ und es gilt $f(6)=-648$, $f'(6)=-216$ und $f''(6)=0$. Damit ist die zweite Wendetangente $y=-216(x-6)-648$.

Aufg. 159/407: a) Sei 1 die Seitenlänge des Quadrates; $A(0;0)$; $B(1;0)$; $C(1;1)$; $D(0;1)$; AM_{BC} ist $y=1/2x$; BD ist $y=1-x$; $S(2/3;1/3)$; Damit ist $AS=2SM_{BC}$ also 2:1 (350)

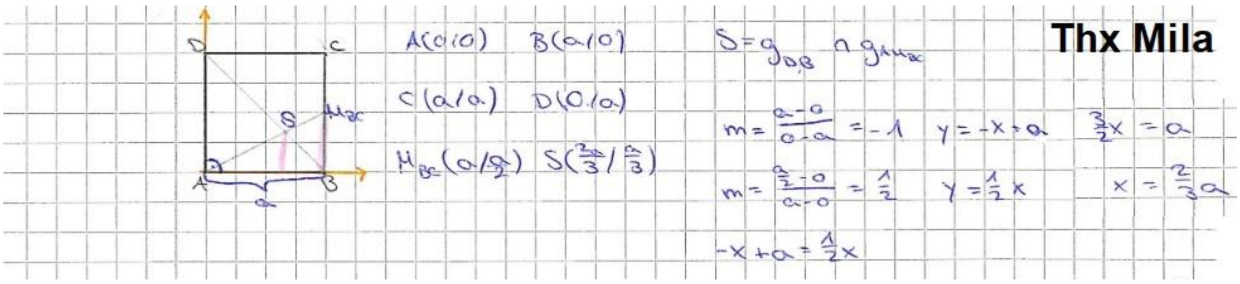


Abb. 350 Einfaches Beispiel: Unelegante Mathematik

b+c) fehlen noch

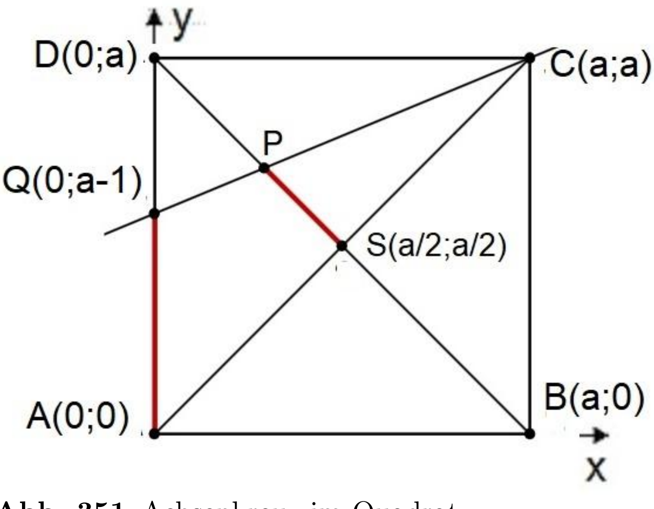


Abb. 351 Achsenkreuz im Quadrat zu Ag 159/407 →

d) Sei a die Seitenlänge des Quadrates $ABCD$. Wir legen ein Achsenkreuz (Abb 637/351) in die Zeichnung und sei (oBdA; also ohne Beschränkung der Allgemeinheit) $DQ=1$ (hier könnte man auch eine zweite Variable einführen). Es gilt $g_{AC}: y=x$; $g_{BD}: y=a-x$; $g_{QC}: y=\frac{1}{a}x+a-1$. $g_{BD}\cap g_{QC}$: $a-x=\frac{1}{a}x+a-1 \xLeftrightarrow{+1+x-a} 1=\frac{1}{a}x+x \Leftrightarrow 1=\frac{a+1}{a}x \Leftrightarrow x=\frac{a}{a+1}$; $y=a-\frac{a}{a+1}=\frac{a^2}{a+1}$; Dies bedeutet: $P(\frac{a}{a+1};\frac{a^2}{a+1})$.

$PD=\sqrt{(\frac{a}{a+1}-0)^2+(\frac{a^2}{a+1}-a)^2}\overset{!}{=}1 \Leftrightarrow \sqrt{(\frac{a}{a+1})^2+(\frac{-a}{a+1})^2}=1 \Leftrightarrow \sqrt{2(\frac{a}{a+1})^2}=1 \xLeftrightarrow{(\text{alles}>0)}$ $\frac{a}{a+1}=\frac{1}{\sqrt{2}} \xLeftrightarrow{\cdot(a+1)\ \cdot\sqrt{2}} \sqrt{2}a=a+1 \Leftrightarrow a=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1.$ $QA=a-1=\sqrt{2}$;

$PS = \sqrt{(\frac{a}{a+1} - \frac{a}{2})^2 + (\frac{a^2}{a+1} - \frac{a}{2})^2} \overset{a=\sqrt{2}+1}{=\!=\!=\!=} \sqrt{(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+2} - \frac{\sqrt{2}+1}{2})^2 + (\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{\sqrt{2}+2} - \frac{\sqrt{2}+1}{2})^2} = ... = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (qed).

15.6.3 LöVo zu Einheit 6.3 (Wendepunkte; UE 11_2)

Aufg. 159/408: a) Die Potenzregel gilt nur für Funktionen der Form $f(x) = x^n$.

$$b{+}c) \qquad (2^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{2^{x+h} - 2^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2^x \cdot 2^h - 2^x}{h} = \lim_{h\to 0} 2^x \cdot \frac{2^h - 1}{h} = 2^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{2^h - 1}{h}$$

Damit ist $(2^x)' = 2^x\cdot$ Konstante (wir nennen diese $k(2)$) damit gilt $(2^x)' = 2^x \cdot k(2)$; $k(2) \approx 0.69$;

d) $(3^x)' = 3^x \cdot k(3)$ mit $k(3) \approx 1.1$ und $(4^x)' = 4^x \cdot k(4)$ mit $k(4) \approx 1.39$.

Aufg. 160/409: a) In Aufgabe 408 haben wir gezeigt, dass $(a^x)' = \underline{k(a) \cdot a^x}$ ist, wobei $k(a)$ konstant also unabhängig von x ist. Es ist wünschenswert das a zu finden, für welches $k(a) = \underline{1}$ also $(a^x)' = \underline{a^x}$ gilt (dieses $'a'$ nennen wir $'e'$ nach Leonhard Euler). Weil $k(2) \approx \underline{0.69}$ und $k(3) \approx \underline{1.1}$ gilt, ist $\underline{2} < e < \underline{3}$.
$1 = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^h - 1}{h}$. Sei $h = \frac{1}{n}$, dann geht für $h \to 0$ n gegen ∞.

$$1 \approx \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{n} \approx e^{\frac{1}{n}} - 1 \;\Leftrightarrow\; 1 + \frac{1}{n} \approx e^{\frac{1}{n}} \;\Leftrightarrow\; \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx e$$

b) $(e^x)' = \underline{e^x}$ (auswendig). (Abb. 353)

Aufg. 160/410:

Funktion	$f_4(x) = x \cdot e^{-x}$	$f_2(x) = e^{-x}$	$f_3(x) = x \cdot e^x$	$f_5(x) = x^2 \cdot e^x$	$f_1(x) = e^x$
Asymptote	$y = 0$	$y = 0$	$y = 0$	$y = 0$	$y = 0$
Asy-Richtung	$x \to \infty$	$x \to \infty$	$x \to -\infty$	$x \to -\infty$	$x \to -\infty$
Nullstelle	$x = 0$	keine	$x = 0$	$x = 0$	keine
Vielfachheit	einfach		einfach	doppelt	
Zuordnung	Abb. e	Abb. d	Abb. c	Abb. b	Abb. a

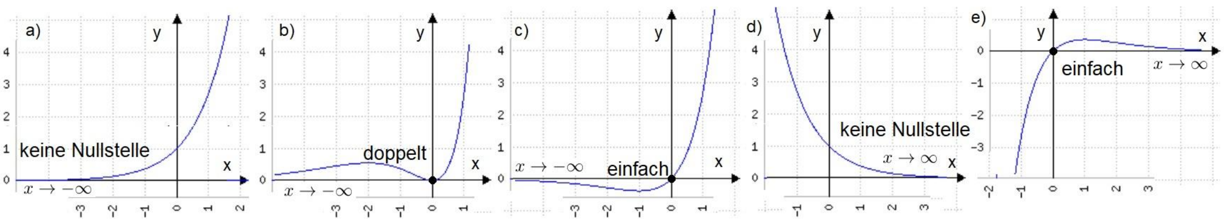


Abb. 352 *Schaubilder von e-Funktionen*

Aufg. 160/411: a) $x = \log(5) = \frac{\ln 5}{\ln 10}$; $x = \frac{\ln 5}{\ln 7}$; $x = \ln 5$. b) Sei $a \underline{> 0}$, dann gilt $e^x = a \Leftrightarrow \underline{x = \ln(a)}$.

c) $\ln(x) = k(a)$: $\ln(2) \approx 0.69 \approx k(2)$; $\ln(3) \approx 1.1 \approx k(3)$; $\ln(4) \approx 1.39 \approx k(4)$; siehe Ag 408.

d) $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$; $\ln(a^n) = n \cdot \ln(a)$; $\ln(a + b)$ ist nicht veränderbar; $a, b, n > 0$.

Ausdrücke in eckigen Klammern [ ] sind 'rot' also im Abitur nicht erlaubt.

[$\ln(-1)$] ist nicht definiert, weil $e^x > 0$ ist; [$\ln(0) = -\infty$], weil [$e^{-\infty} = 0$] ist; $\ln(1) = 0$, weil $e^0 = 1$ ist; $\ln(e) = 1$, weil $e^1 = e$ ist; [$\ln(\infty) = \infty$], weil [$e^\infty = \infty$] ist.

e) i) $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln(3)$, ii) $e^x = e \Leftrightarrow x = \ln(e) = 1$, iii) $e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2)$,
iv) $e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln(1) = 0$, v) + vi) $e^x > 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \emptyset = \{\}$

vii) $e^x + 4 = e \Leftrightarrow e^x = e - 4 < 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \emptyset = \{\}$,

viii) $4e^x = e \Leftrightarrow e^x = \frac{e}{4} \Leftrightarrow x = \ln(\frac{e}{4}) = \ln(e) - \ln(4) = 1 - \ln(4) \approx -0.4$,

ix) $\frac{e^x}{4} = e \Leftrightarrow x = \ln(4e) = \ln(4) + 1 \approx 2.4$,

x) $e^{x+4} = e \Leftrightarrow x + 4 = \ln(e) = 1 \Leftrightarrow x = -3$,

xi) $e^{4x} = e \Leftrightarrow 4x = \ln(e) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$,

xii) $(e^x)^4 = e, e^x = \pm\sqrt[4]{e}$ weil aber $e^x > 0$ ist, entfällt die negative Lösung.
$e^x = \sqrt[4]{e} \Leftrightarrow x = \ln(e^{0.25}) = \frac{1}{4}$,
Die Formel $(e^x)^4 = e^{4x}$ hätte problemlos angewendet werden dürfen (die Basis $e > 0$).

f) i) $e^{-2x} = e^2 \Leftrightarrow -2x = \ln(e^2) = 2 \Leftrightarrow x = -1$, Exponentenvergleich geht auch, $e^{-2x} = \frac{1}{e^{2x}}$;

ii) $(e^{-x})^2 = e^{-2x} = e^2 \Leftrightarrow x = -1$, (die Basis ist positiv);

iii) $e^{2x} = e^{-2} \Leftrightarrow x = -1$ (Exponentenvergleich geht auch)

iv) $e^{2x} \neq -e^2$, da $e^{2x} > 0$ ist. $\mathbb{L} = \{\} = \emptyset$;

v) Die Crazyaufgabe:

Beachte: für negative Basen gilt das Potenzgesetz $(a^n)^m = a^{n \cdot m} = (a^m)^n$ nicht (unbedingt).

$((-e)^x)^2 = e^2 \Leftrightarrow (-e)^x = \pm\sqrt{e^2} = \pm e$. 1. Fall x ist gerade $(-e)^x = e^x > 0$ damit kommt nur $e^x = e$ oder $x = 1$ (Widerspruch, da x gerade).

2. Fall x ist ungerade $(-e)^x = -e^x < 0$ damit kommt nur $-e^x = -e \leftrightarrow x = 1$ in Frage $\Rightarrow \mathbb{L}\{1\}$.

g) i) $e^{x+3} = e^{4x} \overset{\ln(.)}{\Longleftrightarrow} x + 3 = 4x \Leftrightarrow x = 1$

ii) $e^{(x+3)^2} = e^{(4x)^2} \overset{\ln(.)}{\Longleftrightarrow} (x+3)^2 = (4x)^2 \Leftrightarrow x + 3 = \pm 4x \Leftrightarrow x = 1$ oder $x + 3 = -4x$ oder $x = 0.6$.

iii) $e^{(x+3)^3} = e^{(4x)^3} \overset{\ln(.)}{\Longleftrightarrow} (x+3)^3 = (4x)^3 \overset{\sqrt[3]{\cdot}}{\Longleftrightarrow} x + 3 = \pm 4x \Leftrightarrow x = 1$.

iv) $e^{\sqrt{x+3}} = e^{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = \sqrt{4x} \Leftrightarrow x + 3 = 4x \Leftrightarrow x = 1$; Probe: $\surd$.

Vorübung i) $x^4 + 2 = 3x^2 \overset{x}{\Leftrightarrow}_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, $x_{3,4} = \pm 1$, ii) $x^6 + 2 = 3x^3 \overset{x}{\Leftrightarrow}_1 = \sqrt[3]{2}$, $x_2 = 1$, wg 'hoch 3' kein plus/minus. iii) $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$, iv) $(e^x)^2 = e^{2 \cdot x}$;

h) i) $e^{2x} + 2 = 3e^x$, Substitution $e^x = w$, $e^{2x} = (e^x)^2 = w^2$: $w^2 + 3 = 2w \Leftrightarrow w^2 - 2w + 3 = 0 = (w-1) \cdot (w-3) \Leftrightarrow w_1 = 1, w_2 = 3$, Rücksubstitution $w = e^x$: $x_1 = \ln(1) = 0$, $x_2 = \ln(3)$;

ii) $e^{2x} + 2e^x = 3 \to (w = e^x)\ w^2 + 2w - 3 = 0 = (w+3) \cdot (w-1) \Leftrightarrow w_1 = 1, w_2 = -3$, Rücksubstitution $w = e^x$: $x_1 = \ln(1) = 0$, $e^x = -3$ kein Beitrag, weil $e^x > 0$.

iii) $2e^{2x} + 1 = 3e^x \to (w = e^x)\ 2w^2 - 3w + 1 = 0 = 2(w-1) \cdot (w - \frac{1}{2}) \Leftrightarrow w_1 = 1, w_2 = \frac{1}{2}$, Rücksubstitution $w = e^x$: $x_1 = \ln(1) = 0$, $e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \ln(\frac{1}{2}) = -\ln(2)$.

iv) $2e^{2x} + 3e^x + 1 = 0 \to (w = e^x)\ 2w^2 + 3w + 1 = 0 = 2(w+1) \cdot (w + \frac{1}{2}) \Leftrightarrow w_1 = -1, w_2 = -\frac{1}{2}$, Rücksubstitution $w = e^x$: Beide Lösungen haben keinen Beitrag, weil $e^x > 0$; $\mathbb{L} = \{\} = \emptyset$.

i) i) Substitution $w = e^x$: $w^2 - w - 6 = 0 \Leftrightarrow w_1 = 3$; $w_2 = -2$; $\Leftrightarrow x = \ln(3)$.

ii) $x = \ln(3)$, Multiplikation mit e^x ändert die Lösungsmenge nicht.

iii) Die Änderung von '-' nach '+' ändert das Vorzeichen der w_i: $w_1 = -3$; $w_2 = 2$; damit ist $x = \ln(2)$.

j) i) Substitution $w = e^x$: $w^2 - 6w + 8 = 0 \Leftrightarrow w_1 = 2, w_2 = 4 \Rightarrow x_1 = \ln(2), x_2 = \ln(4)$;
ii) Substitution $w = e^{-x}$: $\Rightarrow$ s.o. $w_1 = 2, w_2 = 4 \Rightarrow x_1 = \ln(\frac{1}{2}) = -\ln(2), x_2 = -\ln(4)$;

iii) $w_1 = 1, w_2 = 2, w_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \ln(2), \ln(0)$ geht nicht; iv) $w = e^{-x}$: $w_1 = 1, w_2 = 2, w_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -\ln(2), \ln(0)$ geht nicht;

v) $1 - e^{-x} - 2e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - e^x - 2 = 0 \xrightarrow{e^x = w} w^2 - w - 2 = 0 \Leftrightarrow w_1 = -1, w_2 = 2$
$\xrightarrow{w = e^x} x_2 = \ln(2)\ e^x = -1$: kein Beitrag. $\mathbb{L} = \{\ln(2)\}$.

vi) $1 - e^x - 2e^{2x} = 0, \xrightarrow{e^x=w} 1 - w - 2w^2 = 0 \Leftrightarrow w_1 = -1, w_2 = \frac{1}{2}$
$\xrightarrow{w=e^x} x_2 = \ln(2)$ $e^x = -1$: kein Beitrag. $\mathbb{L} = \{-\ln(2)\}$.

Erkenntnis: Sei $\ln(y)$ die Lösung der Gleichung mit e^x, dann ist $-\ln(y)$ oder $\ln(\frac{1}{y})$ eine Lösung der Gleichung bei welcher statt e^x e^{-x} steht.

k) i) $e^x + e^{-x} = 2 \overset{\cdot e^x}{\Longleftrightarrow} e^{2x} + 1 = 2e^x$ Substitution $e^x = w$: $w^2 - 2w + 1 = 0 \Leftrightarrow w = 1$ (BinF) Rücksubstitution $e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln(1) = 0$.

ii) $e^x + 2e^{-x} = 1 \overset{\cdot e^x}{\Longleftrightarrow} e^{2x} + 2 = e^x$ Substitution $e^x = w$: $w^2 + w + 2 = 0 \Leftrightarrow w_1 = 1, w_2 = -2$ (MNF) Rücksubstitution $e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln(1) = 0$, $e^x \neq -2$ (kein Beitrag); $\mathbb{L} = \{0\}$.

iii) $e^x - 2e^{-x} = 1 \overset{\cdot e^x}{\Longleftrightarrow} e^{2x} - 2 = e^x$ Substitution $e^x = w$: $w^2 - w + 2 = 0 \Leftrightarrow w_1 = -1, w_2 = 2$ (MNF) Rücksubstitution $e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2)$, $e^x \neq -1$ (kein Beitrag); $\mathbb{L} = \{\ln(2)\}$.

iv) $2e^x = e^{-x} + 1 \overset{\cdot e^x}{\Longleftrightarrow} 2e^{2x} - e^x - 1$ Substitution $e^x = w$: $2w^2 - w - 1 = 0 \Leftrightarrow w_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2 \cdot 2} w_1 = 1, w_2 = \frac{-1}{2}$ Rücksubstitution $e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln(1) = 0$, $e^x \neq -1/2$ (kein Beitrag); $\mathbb{L} = \{1\}$.

L) i) $e^{2x} - 5 \cdot e^x + 4 = 0$, Substitution: $e^x = w, e^{2x} = w^2$:
$w^2 - 5w + 4 = 0 \Rightarrow w_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$ $w_1 = 1$, $w_2 = 4$;
Rücksubstitution: $\Rightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln(1) = 0$, $e^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln(4)$;

ii) $e^{4x} - 5 \cdot e^{2x} + 4 = 0$, Substitution: $e^{2x} = w, e^{4x} = w^2$:
$w^2 - 5w + 4 = 0 \Rightarrow w_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$ $w_1 = 1$, $w_2 = 4$;
Rücksubstitution: $\Rightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow 2x = \ln(1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
$e^{2x} = 4 \Leftrightarrow 2x = \ln(4) = 2\ln(2) \Leftrightarrow x = \ln(2)$ $\Rightarrow \mathbb{L} = \{0;\ \ln(4)/2\}$;

iii) $\mathbb{L} = \{0;\ \ln(4)/3\}$.

Verallgemeinert: $e^{2nx} - 5 \cdot e^{nx} + 4 = 0$ hat $\mathbb{L} = \{0;\ \ln(4)/n\}$.

m) i) $e^{2x} - 6 \cdot e^x + 5 = 0$; Substitution: $e^x = w, e^{2x} = w^2$: $w^2 - 6w + 5 = 0$
$\Rightarrow w_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2}$ $w_1 = 1$, $w_2 = 5$;
Rücksubstitution: $\Rightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln(1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $e^x = 5 \Leftrightarrow x = \ln(5) \Rightarrow \mathbb{L} = \{0;\ \ln(5)\}$;

ii) $e^x - 6 \cdot e^{0.5x} + 5 = 0$; Substitution: $e^{0.5x} = w, e^x = w^2$: $w^2 - 6w + 5 = 0$
$\Rightarrow w_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2}$ $w_1 = 1$, $w_2 = 5$;
Rücksubstitution: $\Rightarrow e^{0.5x} = 1 \Leftrightarrow 0.5x = \ln(1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
$e^{0.5x} = 5 \Leftrightarrow 0.5x = \ln(5) \Leftrightarrow x = 2 \cdot \ln(5)$ $\Rightarrow \mathbb{L} = \{0;\ 2\ln(5)\}$.

iii) $e^{0.5x} - 6 \cdot e^{0.25x} + 5 = 0$; Substitution: $e^{0.25x} = w, e^{0.5x} = w^2$: $w^2 - 6w + 5 = 0$
$\Rightarrow w_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2}$ $w_1 = 1$, $w_2 = 5$;
Rücksubstitution: $\Rightarrow e^{0.25x} = 1 \Leftrightarrow 0.25x = \ln(1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
$e^{0.25x} = 5 \Leftrightarrow 0.25x = \ln(5) \Leftrightarrow x = 4 \cdot \ln(5)$ $\Rightarrow \mathbb{L} = \{0;\ 4\ln(5)\}$.

Verallgemeinert: $e^{\frac{2}{n} \cdot x} - 6 \cdot e^{\frac{1}{n} \cdot x} + 5 = 0$ hat $\mathbb{L} = \{0;\ n \cdot \ln(5)\}$.

n) i) $(2x^2 - 8) \cdot (e^{2x} - 9) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 8 = 0$ oder $e^{2x} - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4$ oder $2x = \ln(9)$
$\Leftrightarrow x = \pm 2$ oder $x = \frac{\ln(9)}{2} = \ln(3) \Rightarrow \mathbb{L} = \{-2, \ln(3), 2\}$;

ii) $(3x^2 - 3^3) \cdot (e^{3x} - 3^3) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3^3 = 0$ oder $e^{3x} - 3^3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3^2$ oder $3x = \ln(3^3)$
$\Leftrightarrow x = \pm 3$ oder $x = \frac{\ln(3)}{3} = \ln(3) \Rightarrow \mathbb{L} = \{-3, \ln(3), 3\}$;

iii) $(4x^2 - 4^3) \cdot (e^{4x} - 3^4) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4^3 = 0$ oder $e^{4x} - 3^4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4^2$ oder $4x = \ln(3^4)$
$\Leftrightarrow x = \pm 4$ oder $x = \frac{\ln(3)}{4} = \ln(3) \Rightarrow \mathbb{L} = \{-4, \ln(3), 4\}$;

o) i) $x \cdot e^x = x \Leftrightarrow x \cdot e^x - x = x \cdot (e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0$ oder $x = 0$ $\mathbb{L} = \{0\}$.

ii) $\cos(x) \cdot e^x = \cos(x) \Leftrightarrow \cos(x) \cdot (e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ oder $x = 0$.

iii) $\ln(x) \cdot e^x = \ln(x) \Leftrightarrow \ln(x) \cdot (e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ oder $x = 0$.

iv) $e^x \cdot e^x = e^x \Leftrightarrow= e^x \cdot (e^x - 1) = 0$; $(e^x \neq 0) \Leftrightarrow x = 0$.

p) i) $x^2 \cdot e^x - 4x \cdot e^x = (x^2 - 4x) \cdot e^x = 0 \overset{SvN}{\Longleftrightarrow} x^2 - 4x = x(x-4) = 0 \overset{SvN}{\Longleftrightarrow} x_1 = 0, x_2 = 4$;

ii) $x \cdot e^{-x} + \frac{5}{e^x} = x \cdot e^{-x} + 5 \cdot e^{-x} = (x+5) \cdot e^{-x} = 0 \overset{SvN}{\Longleftrightarrow} x = -5$;

iii) $10 \cdot e^{-0.5x} - 5x \cdot e^{-0.5x} = 5 \cdot e^{-0.5x}(2 - x) = 0 \overset{SvN}{\Longleftrightarrow} x = 2$;

q) i) $e^{2x-4} = 1 \Leftrightarrow 2x - 4 = \ln(1) = 0 \Leftrightarrow x = 2$; ii) $e^{2x+4} = 1 \Leftrightarrow 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$;
iii) $e^{-2x+4} = 1 \Leftrightarrow -2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$; iv) $e^{-2x-4} = 1 \Leftrightarrow -2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$;
v) $2e^{-x} - 4 = 1 \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = -\ln(2.5) = \ln(2) - \ln(5)$;

r) i) $e^{x+1} - e^x = 1 \overset{1.PG}{\Longleftrightarrow} e^x \cdot e - e^x = 1 \Leftrightarrow e^x \cdot (e-1) = 1$
$\overset{:(e-1)}{\Longleftrightarrow} e^x = \frac{1}{e-1} \overset{\ln(.)}{\Longleftrightarrow} x = \ln(\frac{1}{e-1}) = -\ln(e-1)$.

ii) und iv) $x = -\ln(e-1)$;

iii) $e^{x+3} - e^{x+2} = e^2 \overset{1.PG}{\Longleftrightarrow} e^x \cdot e^3 - e^x \cdot e^2 = e^2 \Leftrightarrow e^x \cdot (e^3 - e^2) = e^2$
$\overset{:(e^3-e^2)}{\Longleftrightarrow} e^x = \frac{e^2}{e^3-e^2} = \frac{e^2}{e^2(e-1)} = \frac{1}{e-1} \overset{\ln(.)}{\Longleftrightarrow} x = \ln(\frac{1}{e-1}) = -\ln(e-1)$,

Multiplikation oder Division mit e ändert die Lösungsmenge nicht.

s) i) $(e^x - \frac{1}{e}) \cdot (e^{3x} - e^{2x}) = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{e}$ oder $e^{3x} - e^{2x} = 0 \Leftrightarrow x = \ln(\frac{1}{e})$ oder $e^{2x}(e^x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$ oder $x = 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \{-1, 0\}$;

ii) $e^{2x} - (1+e)e^x + e = 0 \xrightarrow{e^x=w} w^2 - (1+e) \cdot w + e = 0 \Leftrightarrow w_1 = 1, w_2 = e$
$\xrightarrow{w=e^x} x_1 = \ln(1) = 0, x_2 = \ln(e) = 1$. $\mathbb{L} = \{0, 1\}$.

iii) $e^{2x} - e^{1+x} - e^{2+x} + e^3 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - (e+e^2) \cdot e^x + e^3 = 0 \xrightarrow{e^x=w} w^2 - (e+e^2) \cdot w + e^3 = 0 \Leftrightarrow w_1 = e, w_2 = e^2$
$\xrightarrow{w=e^x} x_1 = \ln(e) = 1, x_2 = \ln(e^2) = 2$. $\mathbb{L} = \{1, 2\}$.

t) Lösungs in eckigen Klammern $[\![,]\!]$ sind im Abi verboten bzw. auf der Tafel rot.
Übrigens: $\sqrt[3]{-8} = -2$: Beweis: $(-2)^3 = -8$ und der TR sagt es auch + siehe http://minus2.slt.biz

i) $a^x = 1$, 1. Fall $a = 1$: $1^x = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$;
2. Fall $a > 0, a \neq 1$: $a^x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\ln(1)}{\ln(a)} = 0$; damit ist $\mathbb{L} = \{0\}$.
3. Fall $a = 0$: $0^x = 0$ für alle $x \neq 0$, 0^0 ist nicht definiert; damit ist $\mathbb{L} = \emptyset = \{\}$ (leer).
4. Fall $a < 0$: a^x ist nur für ganze x definiert; $a^0 = 1$ für alle $a < 0$ und $a^x \neq 1$ für alle $0 \neq x \in \mathbb{Z}$; damit ist $\mathbb{L} = \{0\}$.

ii) $a^x = 0$, 1. Fall $a > 1$: $a^x = 0$ $[\![\Leftrightarrow \frac{\ln(0)}{\ln(a)} = -\infty]\!]$; ist unlösbar, damit ist $\mathbb{L} = \emptyset = \{\}$.
2. Fall $a = 1$: $1^x = 1 \neq 0$; ist unlösbar, damit ist $\mathbb{L} = \emptyset = \{\}$.
3. Fall $0 < a < 1$: $a^x = 0$ $[\![\Leftrightarrow x = \frac{\ln(0)}{\ln(a)} = +\infty]\!]$ $(\ln(a) < 0)$; ist unlösbar, damit ist $\mathbb{L} = \emptyset = \{\}$.
4. Fall $a = 0$: $0^x = 0$ für alle $x \neq 0$, 0^0 ist nicht definiert;
damit ist $\mathbb{L} = \mathbb{R} \backslash \{0\} = (-\infty; 0) \cup (0; \infty) =]-\infty; 0[\cup]0; \infty[$.
5. Fall $a < 0$: $[\![a^x = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\ln(0)}{\ln(|a|)} = \pm\infty]\!]$ ohne weitere Argumentation $\mathbb{L} = \{\}$.

iii) $a^x = a$, 1. Fall $a = 1$: $1^x = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$;
2. Fall $a > 0, a \neq 1$: $a^x = a \Leftrightarrow x = \frac{\ln(a)}{\ln(a)} = 1$; damit ist $\mathbb{L} = \{1\}$.
3. Fall $a = 0$: $0^x = 0$ für alle $x \neq 0$, 0^0 ist nicht definiert; damit ist $\mathbb{L} =]-\infty; 0[\cup]0; \infty[$.
4. Fall $a < 0, a \neq -1$: $a^x = a$; $x = \pm\frac{\ln|a|}{\ln(|a|)} = \pm 1$, $a^1 = a$; $a^{-1} = \frac{1}{a} \neq a$ damit ist $\mathbb{L} = \{1\}$.
5. Fall $a = -1$: $a^x = a$; $a^1 = a$; $(-1)^{-1} = \frac{1}{-1} = -1 = a$ damit ist $\mathbb{L} = \{\pm 1\}$.

iv) $x^a = 1$, 1. Fall $a \neq 0$: $x = \sqrt[a]{1} = 1^{1/a} = 1$, damit ist $\mathbb{L} = \{1\}$.
2. Fall $a = 0$: $x^0 = 1$ für $x \neq 0$; damit ist $\mathbb{L} =]-\infty; 0[\cup]0; \infty[$.

v) $x^a = 0$, 1. Fall $a > 0$: $x = \sqrt[a]{0} = 0^{1/a} = 0$, damit ist $\mathbb{L} = \{0\}$.
2. Fall $a = 0$: Falls $x \neq 0$ ist $x^0 = 1 \neq 0$; 0^0 ist nicht definiert, damit ist $\mathbb{L} = \{\}$.
3. Fall $a < 0$: $[\![x = 0^{-1/a} = \frac{1}{0^{1/a}} = \pm\infty]\!]$, damit ist $\mathbb{L} = \{\}$.

vi) $x^a = a$, 1. Fall $a > 0$: $x = \sqrt[a]{a}$ und $x = \pm\sqrt[a]{a}$, falls $a \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ gerade ist.
2. Fall $a = 0$: s.o. $x^0 \neq 0$.
3. Fall $a < 0$: $x = \sqrt[a]{a}$ ist nur für ungerades $a \in \mathbb{N}$ definiert.

Aufg. 160/412: a) $k = e^{\ln(k)}$; b) $y = 2^x = 1 \cdot e^{\ln(2)\cdot x}$;
c) $q = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{-2.4}{100} = 0.976$, $y = 100 \cdot e^{\ln(0.976)\cdot x}$, x in Jahren, y in mg;
d) $q = 1 + \frac{-30}{100} = 0.7$, $y = 100 \cdot e^{\ln(0.7)\cdot x}$, x in Stunden, y in mg;
e) $q = 1 + \frac{-15}{100} = 0.85$, $y = 50 \cdot e^{\ln(0.85)\cdot \frac{x}{2}}$, x in Stunden, y in mg;
Durch das $\frac{x}{2}$ werden die 'zwei Stunden' modelliert.
f) $y = m_0 \cdot e^{\ln(0.36)\cdot x}$, m_0 = Startmasse, x in Tagen, y in mg;
g) $\frac{c}{2} = c \cdot e^{kx} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{kx} (c > 0) \Leftrightarrow \ln(\frac{1}{2}) = kx \Leftrightarrow x_H = \frac{-\ln(2)}{k}$.

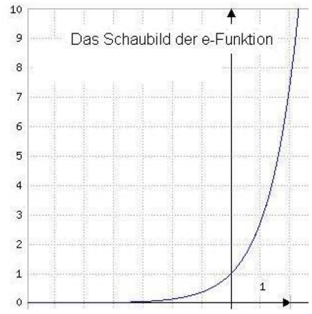


Abb. 353 Das Schaubild der e Funktion

zu c) $x_H = \frac{-\ln(2)}{k} = \frac{-\ln(2)}{\ln(0.976)} \approx 28.53$ (Jahre); zu d) $x_H = \frac{-\ln(2)}{\ln(0.7)} \approx 1.94$ (Stunden);

zu e) $x_H = 2 \cdot \frac{-\ln(2)}{\ln(0.85)} \approx 8.53$ (Stunden); zu f) $x_H = \frac{-\ln(2)}{\ln(0.36)} \approx 0.68$ (Tage);

h) Die Halbwertszeit x_H eines Zerfalls $y = c \cdot e^{kx}$ ist unabhängig vom Startwert $\underline{c}$: $x_H = \underline{x = \frac{-\ln(2)}{k}}$.
$y = c \cdot e^{\ln(0.25)\cdot x}$ hat HWZ $x_H = \frac{-\ln(2)}{\ln(0.25)} = 0.5$ Zeiteinheiten.

Aufg. 161/413: Geben Sie die waagrechten Asymptoten von $f(x) = e^x$ an (Abb. 353).
$e^x \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ und $e^{-x} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ Damit hat e^x für $x \to -\infty$ die waagrechte Asymptote $y = 0$. e^x hat keine senkrechten Asymptoten, weil $\lim_{x\to x_0} |e^x| < \infty$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$.

a) $y = 1$ $(x \to -\infty)$, *b)* $y = 2$ $(x \to \infty)$, *c)* $y = 0$ $(x \to -\infty)$,
d) $y = 0$ $(x \to -\infty)$, *e)* $y = 0$ $(x \to \infty)$, *f)* $y = 0$ $(x \to \infty)$,
g) $y = x$ $(x \to -\infty)$, *h)* $y = 3x + 5$ $(x \to \infty)$, *i, j)* keine,
k) $y = 0$ und $y = 1$ $(x \to \pm\infty)$, *L)* $y = 0$ und $y = 1$ $(x \to \pm\infty)$
m) $y = 0$ und $y = 2$ $(x \to \pm\infty)$ und $x = 1$.

m) Die e- Funktion dominiert alle Polynome: $\lim_{x\to\infty} x^{100} \cdot e^{-x} = \underline{0}$ und $x^{100} - e^x \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} \underline{-\infty}$.

n) Setze für e^x, bzw. $e^{-x} = \underline{0}$ und berechne den entstehenden Term.

o) K_f um c nach links verschoben ergibt das Schaubild von $h(x) = e^{x-c} = e^x \cdot e^{-c}$ Damit entspricht eine Verschiebung um $\binom{c}{0}$ einer Streckung von e^{-c} in y-Richtung. Es muss also gelten: $a = 1$; $b = e^{-c} > 0$.

Aufg. 161/414: a) Innere Funktionen nenne ich $g(x)$. Die innere Funktion ist die Antwort auf die Frage: „Was wird zuerst gemacht?“ $g_1(x) = 4x + 5$, $f_1(g_1) = \sin(g_1)$; $g_2(x) = 3x - 2$, $f_2(g_2) = \cos(g_2)$; $g_3(x) = x^2$, $f_3(g_3) = \sin(g_3)$; $g_4(x) = x^2 - 6x + 3$, $f_4(g_4) = g_4^5$.

b) Die innere Funktion ist immer das, was zuerst berechnet wird.

Aufg. 161/415: Grundkurs: $f(ax + b))' = a \cdot f'(ax + b)$.

Leistungskurs: $f(g(x))' = g'(x) \cdot f'(g)$ oder $(f(g(x))'^x = g'^x(x) \cdot f'^g(g(x))$.
$g_3(x) = 3x + 5$, $f_3(x) = \sqrt{g_3}$; $\quad g_4(x) = \frac{1}{x^4 - x^2}$, $f_4(x) = \frac{1}{g_4}$.

Aufg. 161/416: a) $g(x) = 2x + 1, f(g) = \sin(g), g' = 2, f'^g = \cos(g)$, $(\sin(2x+1))' = \underline{2 \cdot \cos(2x+1)}$;

b) $g(x) = 1 - 3x, f(g) = \cos(g)$, $g' = -3$, $f'^g = -\sin(g)$, $(\cos(1-3x))' = \underline{3 \cdot \sin(1-3x)}$;

c) $g(x) = 4x - 5, f(g) = e^g$, $g' = 4$, $f'^g = e^g$, $(e^{4x-5})' = \underline{4 \cdot e^{4x-5}}$;

d) $g(x) = 4 - 2x, f(g) = e^g$, $g' = -2$, $f'^g = e^g$, $(e^{4-2x})' = \underline{(-2) \cdot e^{4-2x}}$;

e) $g(x) = x - 7, f(g) = g^3$, $g' = 1$, $f'^g = 3g^2$, $((x-7)^3)' = \underline{3 \cdot (x-7)^2}$;

f) $g(x) = 3x - 2, f(g) = g^7$, $g' = 3$, $f'^g = 7g^6$, $((3x-2)^7)' = \underline{21 \cdot (3x-2)^6}$;

g) $g(x) = 4x + 6, f(g) = \sqrt{g}$, $g' = 4$, $f'^g = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(\sqrt{4x+6})' = \underline{\frac{2}{\sqrt{4x+6}}}$;

h) $g(x) = 3x + 4, g' = 3, f(g) = \sqrt[3]{g}$, $f'^g(g) = \frac{1}{3} \cdot g^{-\frac{2}{3}}$, $(\sqrt[3]{3x+4})' = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot (3x+4)^{-\frac{2}{3}} = \underline{(3x+4)^{-\frac{2}{3}}}$;

i) $g(x) = 3x - 4, g' = 3, f(g) = g^{-1}$, $f'^g(g) = -g^{-2}$, $(\frac{1}{3x-4})' = \underline{-3 \cdot (3x-4)^{-2}}$;

j) $g(x) = 3 - 4x, g' = -4, f(g) = g^{-2}$, $f'^g(g) = -2g^{-3}$, $(\frac{1}{(3-4x)^2})' = \underline{8 \cdot (3-4x)^{-3}}$;

k) $g_1(x) = 3x + 1, g_2(x) = 7x - 2$, $f_1(g_1) = g_1^4, f_2(g_2) = g_2^{-3}$,
$g_1'(x) = 3, g_2'(x) = 7$, $f_1'(g_1) = 4g_1^3, f_2'(g_2) = (-3)g_2^{-4}$,
$f'(x) = ((3x+1)^4 - (7x-2)^{-3})' = 3 \cdot 4(3x+1)^3 - 7 \cdot (-3)(7x-2)^{-4}$; (GK)

L) $g(x) = 2x^2 + 7x, g' = 4x + 7 f(g) = g^4$, $f'^g(g) = 4 \cdot g^3$, $((2x^2+7x)^4)' = \underline{4 \cdot (4x+7) \cdot (2x^2+7x)^3}$;

m) $g(x) = \sin(x), g' = \cos(x), f(g) = e^g$, $f'^g(g) = e^g$, $(e^{\sin(x)})' = \underline{\cos(x) \cdot e^{\sin(x)}}$;

n) $g(x) = \sqrt{x}, g' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, f(g) = \cos(g)$, $f'^g(g) = -\sin(g)$, $(\cos(\sqrt{x}))' = \underline{\frac{-\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}}$;

o) $g(x) = \sin(x), g' = \cos(x), f(g) = \sqrt[4]{g}$, $f'^g(g) = \frac{1}{4} \cdot g^{-\frac{3}{4}}$, $(\sqrt[4]{\sin(x)})' = \underline{\frac{\cos(x)}{4} \cdot (\sin(x))^{-\frac{3}{4}}}$;

p) $g(x) = x^2 + 2x - 1$, $f(g) = 3e^g$, $g'(x) = 2x + 2$, $f'(g) = 3e^g$,
$f'(x) = (3e^{x^2+2x-1})' = (2x+2) \cdot 3e^g = (2x+2) \cdot 3e^{x^2+2x-1}$;

q) $g(x) = x^2$, $f(g) = 4\cos(g)$, $g'(x) = 2x$, $f'(g) = -4\sin(g)$,
$f'(x) = (4\cos(x^2))' = (2x) \cdot (-4\sin(g)) = (2x) \cdot (-4\sin(x^2)) = -8x\sin(x^2)$;

r) $g(x) = e^x + x$, $f(g) = 12\sin(g)$, $g'(x) = e^x + 1$, $f'(g) = 12\cos(g)$,
$f'(x) = (12\sin(e^x + x))' = (e^x + 1) \cdot 12\cos(g) = (e^x + 1) \cdot 12\cos(e^x + x)$;

s) $g(x) = \cos(x)$, $f(g) = 101e^g$, $g'(x) = -\sin(x)$, $f'(g) = 101e^g$,
$f'(x) = (-\sin(x)) \cdot 101e^g = (-\sin(x)) \cdot 101e^{\cos(x)}$;

t) $g(x) = 3x^2 + 2x + 7$, $f(g) = \frac{6}{g} = 6g^{-1}, g'(x) = 6x + 2$, $f'(g) = -6g^{-2}$,
$f'(x) = \left(\frac{6}{3x^2+2x+7}\right)' = (6x+2) \cdot (-6)g^{-2} = (6x+2) \cdot (-6)(3x^2+2x+7)^{-2}$;

u) $g(x) = 2x + \frac{2}{x}$, $f(g) = g^3$, $g'(x) = 2 - 2x^{-2}$, $f'(g) = 3g^2$,
$f'(x) = ((2x + \frac{2}{x})^3)' = (2 - 2x^{-2}) \cdot 3g^2 = (2 - 2x^{-2}) \cdot 3(2x + \frac{2}{x})^2$;

v) $(e^{2x-x^2})' = (2-2x) \cdot e^{2x-x^2}$; w) $(e^{5-x^3})' = -3x^2 \cdot e^{5-x^3}$;

x) $(\left(e^{4-4x+x^2}\right)^2)' = \left(e^{8-8x+2x^2}\right)' = (-8+4x) \cdot e^{8-8x+2x^2}$;

y) $(e^{2x-4} \cdot e^{x^2-4})' = (e^{x^2+2x-8})' = (2x+2) \cdot e^{x^2+2x-8}$;

z) i) Bis zum Tod bleibt die Temperatur konstant. Nach dem Tod fällt die Temperatur anfangs schnell und dann immer langsamer. Der Grenzwert für $t \to \infty$ ist 5°C. Bem: Dies ist der Verlauf eines beschränktes Wachstums Ag 201/505.

ii) K_f geht durch die Punkte $P_0(0|23)$, $P_1(1|18.5)$. Der $\lim_{t\to\infty} a + c \cdot e^{kt}$ muss 5°C sein, damit ist $a = 5$ und $k < 0$. $f(0) = 5 + c \cdot e^{k\cdot 0} = 23 \overset{-5}{\Longleftrightarrow} c = 18$;

$f(1) = 5 + 18 \cdot e^k = 18.5 \overset{-5,:18}{\Longleftrightarrow} e^k = \frac{13.5}{18} \Leftrightarrow k = \ln\left(\frac{13.5}{18}\right) = \ln(0.75)$.

Damit ist $f(t) \approx 5 + 18 \cdot e^{-0.288t}$.

iii) Der Mord passierte vermutlich, als die Leiche noch seine Normaltemperatur 37°C hatte.

$37 = 5 + 18 \cdot e^{\ln(0.75)t} \overset{-5,:18}{\Longleftrightarrow} \frac{32}{18} = e^{t\cdot\ln(0.75)} \overset{\ln .\ ,\ :\ln(0.75)}{\Longleftrightarrow} t = \frac{\ln(\frac{16}{9})}{\ln(0.75)} = \frac{\ln((\frac{4}{3})^2)}{\ln(\frac{3}{4})} = -2.$

also etwa 2 Stunden vor Eintreffen des Mediziners also gegen 12.00 Uhr ist der Mord geschehen.

iv) $f'(t) = (a + c \cdot e^{kt})' = c \cdot k \cdot e^{kt} = k \cdot (a + c \cdot e^{kt} - a) = k \cdot (f(t) - a)$.

v) $f'(t) \approx (5 + 18 \cdot e^{-0.288t})' = -5.184 \cdot e^{-0.288t} < 0$ damit ist f streng monoton fallend.

Aufg. 162/417: **Beweis:** (erst mit der Physikerregel) $f'^x = \frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} = f'^g \cdot g'^x$; jetzt ausführlicher:

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0}\right) && \text{Definition von } f' \\
&= \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right) && \text{Erweitern von } g(x) - g(x_0)\ (= dg) \\
&= \lim_{g\to g_0} \frac{f(g) - f(g_0)}{g - g_0} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} && \text{Satz 4.7.9 und } g = g(x), g_0 = g(x_0) + \text{mit} \\
&= f'^g(g(x_0)) \cdot g'^x(x_0) && x \to x_0 \text{ geht } g \to g_0 \text{ da } g(x) \text{ stetig ist.}
\end{aligned}$$

Aufg. 162/418: a) Kettenr.; $f(x) = \sin(\sqrt{x^2 - 3x})$, $h(x) = x^2 - 3x$, $g(h) = \sqrt{h}$, $f(g) = \sin(g)$;
b) $f'(x) = (2x - 3) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-3x}} \cdot \cos(\sqrt{x^2 - 3x})$; $f(g(h(x)))'^x = h'^x \cdot g'^h \cdot f'^g$;
c) i) $(\sin(\cos(x^2)))' = 2x \cdot (-\sin(x^2)) \cdot \cos(\cos(x^2))$;

ii) $h = 2x + 1$, $g = \sin(h)$, $f = e^g$, $h' = 2$, $g'^h = \cos(h)$, $f'^g = e^g$,
$(e^{\sin(2x+1)})' = 2 \cdot \cos(2x + 1) \cdot e^{\sin(2x+1)}$;

iii) $h = 3x + 4$, $g = \sqrt{h}$, $f = \sin(g)$, $h' = 3$, $g'^h = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$, $f'^g = \sin(g)$,
$(\sin(\sqrt{3x + 4}))' = 3 \cdot \frac{1}{2\cdot\sqrt{3x+4}} \cdot \cos(\sqrt{3x + 4})$;

iv) $h = 1 - 2x$, $g = \cos(h)$, $f = g^2$, $h' = -2$, $g'^h = -\sin(h)$, $f'^g = 2 \cdot g$,
$(\cos^2(1 - 2x))' = 2 \cdot \sin(1 - 2x) \cdot 2\cos(1 - 2x)$;

v) $(\sqrt{e^{4x-6}})' = 2 \cdot e^{2x-3}$; vi) $((e^{x^2} + \sin(x^2))^3)' = 6x \cdot \left(\cos\left(x^2\right) + \mathrm{e}^{x^2}\right)\left(\sin\left(x^2\right) + \mathrm{e}^{x^2}\right)^2$;

vii) $f(x) = \left(\frac{1}{2x+1} - e^{2x+1} + \cos(2x + 1)\right)^{-3}$, $f(x) = -\dfrac{3\left(-2\sin\left(2x+1\right) - 2\mathrm{e}^{2x+1} - \frac{2}{(2x+1)^2}\right)}{\left(\cos\left(2x+1\right) - \mathrm{e}^{2x+1} + \frac{1}{2x+1}\right)^4}$.

Aufg. 162/419: $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$.

Aufg. 162/420: **a)** i) $f(x) = x \cdot e^x$, $u = x, u' = 1; v = e^x, v'(x) = e^x$; $f'(x) = u'v + uv' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (x + 1)e^x$.

ii) $((x + 1)e^x)' = (x + 2)e^x$, iii) $((x + 2)e^x)' = (x + 3)e^x$,

Verallgemeinerung: $((x + n)e^x)' = (x + n + 1)e^x$ oder $(x \cdot e^x)'^{(n)} = (x + n)e^x$.

b) i) $((3-x^2)\cdot e^x)' = -2x\cdot e^x + (3-x^2)\cdot e^x = (3-2x-x^2)\cdot e^x$,
ii) $((3-x^2)\cdot\sin(x))' = -2x\cdot\sin(x) + (3-x^2)\cdot\cos(x)$,
iii) $((3-x^2)\cdot\sqrt{x})' = -2x\cdot\sqrt{x} + (3-x^2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = -2x^{1.5} + \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{x^{1.5}}{2} = -2.5x^{1.5} + \frac{3}{2\sqrt{x}}$;

c) i) $((e^x-1)\cdot(e^x+1))' = e^x\cdot(e^x+1) + (e^x-1)\cdot e^x = 2e^{2x}$; beachten Sie: $e^x\cdot e^x = e^{2x}$
ii) und iii) $f'(x) = 2e^{2x}$, nach der 3. BinF $((e^x-a)\cdot(e^x+a))' = (e^{2x}-a^2)' = 2e^{2x}$;

d) i) $(x\cdot e^{-x})' = e^{-x} + x\cdot(-1)\cdot e^{-x} = (-1)\cdot(x-1)\cdot e^{-x}$

ii) $((x-1)\cdot e^{-x})' = -(x-2)\cdot e^{-x}$, iii) $((x-2)\cdot e^{-x})' = -(x-3)\cdot e^{-x}$,

iv) $((x-3)\cdot e^{-x})' = -(x-4)\cdot e^{-x}$,

Verallgemeinerung: $((x-n)e^{-x})' = -(x-(n+1))e^{-x}$ oder $(x\cdot e^{-x})'^{(n)} = (-1)^n\cdot(x-n)e^{-x}$.

e): i) $((2x-4)\cdot e^{4x+2})' = 2\cdot e^{4x+2} + (2x-4)\cdot 4e^{4x+2} = (8x-14)\cdot e^{4x+2}$:

i) $(8x-14)\cdot e^{4x+2}$, ii) $(12x-13)\cdot e^{4x+2}$, iii) $(16x-12)\cdot e^{4x+2}$;

Verallgemeinerung: $((nx-4)\cdot e^{4x+2})' = (4nx-16+n))\cdot e^{4x+2}$

f): i) $((6x-3)e^{1-2x})' = 6e^{1-2x} - 2\cdot(6x-3)e^{1-2x} = (-12x+12)e^{1-2x}$;

i) $-3(4x-4)e^{1-2x}$, ii) $-3(6x-5)e^{1-3x}$, iii) $-3(8x-6)e^{1-4x}$,

Verallgemeinerung: $((6x-3)e^{1-nx})' = -3(2nx-(n+2))e^{1-nx}$,

g) i) $(x\cdot e^{ax+b})' = (ax+1)\cdot e^{ax+b}$, ii) $((ax+1)\cdot e^{ax+b})' = a(ax+2)\cdot e^{ax+b}$,
iii) $((ax+2)\cdot e^{ax+b})' = a(ax+3)\cdot e^{ax+b}$,

Verallgemeinerung: $((ax+n)e^{ax+b})' = a(ax+n+1)e^{ax+b}$ oder $(x\cdot e^{ax+b})'^{(n)} = a^{n-1}(ax+n)e^x$.

h) i) $f'(x) = (xe^{2x})' = (2x+1)\cdot e^{2x}$, ii) $f'(x) = (x\sin(2x))' = \sin(2x) + 2x\cos(2x)$,

iii) $f'(x) = (x\cos(2x))' = \cos(2x) - 2x\sin(2x)$; iv) $f'(x) = (x\sqrt{2x})' = (\sqrt{2}\cdot x^{1.5})' = \sqrt{2}\cdot 1.5\cdot\sqrt{x}$;

i) ii) $(e^{x^2}\cdot\sin(x^2))' = 2x\cdot e^{x^2}\cdot\sin(x^2) + e^{x^2}\cdot 2x\cdot\cos(x^2) = 2x\cdot e^{x^2}\cdot(\sin(x^2)+\cos(x^2))$;

i) $(e^x\cdot\sin(x))' = e^x\cdot(\sin(x)+\cos(x))$, iii) $(e^{x^3}\cdot\sin(x^3))' = 3\cdot x^2\cdot e^{x^3}\cdot(\sin(x^3)+\cos(x^3))$;

Verallgemeinert: $(e^{x^n}\cdot\sin(x^n))' = n\cdot x^{n-1}\cdot e^{x^n}\cdot(\sin(x^n)+\cos(x^n))$;

j) i) $(\sin(x)\cdot\cos(x))' = -(\sin^2(x)-\cos^2(x))$, ii) $(\sin(x^2)\cdot\cos(x^2))' = -2\cdot x\cdot(\sin^2(x^2)-\cos^2(x^2))$,

iii) $(\sin(x^3)\cdot\cos(x^3))' = -3\cdot x^2\cdot(\sin^2(x^3)-\cos^2(x^3))$,
$(\sin(x^4)\cdot\cos(x^4))' = -4\cdot x^3\cdot(\sin^2(x^4)-\cos^2(x^4))$,

Verallgemeinerung: $(\sin(x^n)\cdot\cos(x^n))' = -n\cdot x^{n-1}\cdot(\sin^2(x^n)-\cos^2(x^n))$;

k) i) $(e^x\cdot\frac{1}{x})' = e^x\cdot\frac{1}{x} + e^x\cdot(-1)\cdot x^{-2} = \frac{(x-1)\cdot e^x}{x^2}$,

ii) $(e^x\cdot\frac{1}{x+1})' = \frac{x\cdot e^x}{(x+1)^2}$, iii) $(e^x\cdot\frac{1}{x+2})' = \frac{(x+1)\cdot e^x}{(x+2)^2}$, iv) $(e^x\cdot\frac{1}{x+3})' = \frac{(x+2)\cdot e^x}{(x+3)^2}$;

Verallgemeinert: $(e^x\cdot\frac{1}{x+n})' = \frac{(x+n-1)\cdot e^x}{(x+n)^2}$;

L) i) $(\sin(x)\cdot\frac{1}{\cos(x)})' = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + 1 = \frac{1}{\cos^2(x)}$, ii) $(\cos(x)\cdot\frac{1}{\sin(x)})' = \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} - 1$,

iii) $(\frac{1}{\sin(x)}\cdot\frac{1}{\cos(x)})' = \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{\cos^2(x)}$, siehe j) i): $(\sin(x)\cdot\cos(x))' = \cos^2(x) - \sin^2(x)$;

m) i) $(e^{2x+x^2}\cdot\cos(x^2-2x+3))' = (2+2x)e^{2x+x^2}\cdot\cos(x^2-2x+3) - (2x-2)e^{2x+x^2}\cdot\sin(x^2-2x+3)$;

ii) $f'(x) = ((x^2+3x)^2\cdot e^{2x+1})' = 2\cdot(2x+3)\cdot(x^2+3x)\cdot e^{2x+1} + (x^2+3x)^2\cdot 2\cdot e^{2x+1}$;

iii) $f'(x) = (\sqrt{2x+1}\cdot\cos(x^2+5))' = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\cos(x^2+5) - \sqrt{2x+1}\cdot 2x\cdot\sin(x^2+5)$;

iv) $((e^{2x}-1)^2\cdot(4x-1)^3)'=2\cdot e^{2x}\cdot 2\cdot(e^{2x}-1)\cdot(4x-1)^3+(e^{2x}-1)^2\cdot 4\cdot 3\cdot(4x-1)^2$;

v) $(e^{sin(x)}\cdot\sin(e^x))'=e^{\sin(x)}\cdot(\cos(x)\cdot\sin(e^x)+e^x\cdot cos(e^x))$.

Aufg. 163/421: a) $f(x)=(x+1)\cdot e^x$: $((x+1)\cdot e^x)'''=((x+2)\cdot e^x)''=((x+3)\cdot e^x)'=(x+4)\cdot e^x$,

A: $(x+1)\cdot e^x \xrightarrow{x\to-\infty} 0 \Rightarrow$ wA $y=0$; N: $(x+1)\cdot e^x=0\Leftrightarrow x=-1\Rightarrow N(-1/0)$;

E: $(x+2)\cdot e^x=0\Leftrightarrow x=-2,\ f''(-2)=\frac{1}{e^2}>0,\ f(-2)=\frac{-1}{e^2}\Rightarrow T(-2/\frac{-1}{e^2})$;

W: $(x+3)\cdot e^x=0\Leftrightarrow x=-3,\ f'''(-3)=\frac{1}{e^3}\neq 0,\ f(-3)=\frac{-2}{e^3}\Rightarrow W(-3/\frac{-2}{e^3})$;

M: f ist smf für ≤ -1 $f'(x)<0$ für $x<-1$ und f ist smw für $x\geq -1$: $f'(x)>0$ für $x>-1$;

D: $\mathbb{D}=\mathbb{R}$, $\mathbb{W}=[y_t,\infty)=[\frac{-1}{e^2},\infty)$; Vom Tiefpunkt an aufwärts, S: keine Symmetrie (erkennbar) + f ist stetig;

b) $g(x)=x\cdot e^{-x}$: $(x\cdot e^{-x})'''=((1-x)\cdot e^{-x})''=((x-2)\cdot e^{-x})'=(3-x)\cdot e^{-x}$,

A: $x\cdot e^{-x}\xrightarrow{x\to\infty} 0\Rightarrow$ wA $y=0$; N: $x\cdot e^{-x}=0\Leftrightarrow x=0\Rightarrow N(0/0)$;

E: $(1-x)\cdot e^{-x}=0\Leftrightarrow x=1,\ g''(1)=\frac{-1}{e}<0,\ g(1)=\frac{1}{e}\Rightarrow H(1/\frac{1}{e})$;

W: $(x-2)\cdot e^{-x}=0\Leftrightarrow x=2,\ g'''(2)=\frac{1}{e^2}\neq 0,\ g(2)=\frac{2}{e^2}\Rightarrow W(2/\frac{2}{e^2})$;

M: g ist smw für ≤ 1 $g'(x)>0$ für $x<1$ und g ist smf für $x\geq 1$: $g'(x)<0$ für $x>1$;

D: $\mathbb{D}=\mathbb{R}$, $\mathbb{W}=(-\infty,y_h]=(-\infty,\frac{1}{e}]$; S: keine Symmetrie erkennbar + g ist stetig;

c) $h'''(x)=((2x+0.5x^2)\cdot e^{0.5x})''=((0.25x^2+2x+2)\cdot e^{0.5x})'=(0.125x^2+1.5x+3)\cdot e^{0.5x}$,

A: $x^2\cdot e^{0.5x}\xrightarrow{x\to-\infty} 0\Rightarrow$ wA $y=0$; N: $x^2\cdot e^{0.5x}=0\Leftrightarrow x=0\Rightarrow N(0/0)$;

E: $(2x+0.5x^2)\cdot e^{0.5x}=0\Leftrightarrow x=0$ oder $x=-4$, $h''(-4)=-2e^{-8}<0\Rightarrow H(-4/16e^{-8})$, $h''(0)=2e^{-8}>0\Rightarrow T(0/0)$;

W: $(0.25x^2+2x+2)\cdot e^{0.5x}=0\Leftrightarrow x=-4\pm 2\sqrt{2}$, $h'''(-4\pm 2\sqrt{2})\neq 0\Rightarrow W_1(-4+2\sqrt{2}/\approx 0.764)$, $W_2(-4-2\sqrt{2}/\approx 1.534)$;

M: h ist smw für $x\in(-\infty,-4]$ oder $x\in[0,\infty)$; h ist smf für $x\in[-4,0]$;

D: $\mathbb{D}=\mathbb{R}$, $\mathbb{W}=[y_t,\infty)=[0,\infty)$; S: keine Symmetrie erkennbar + h ist stetig;

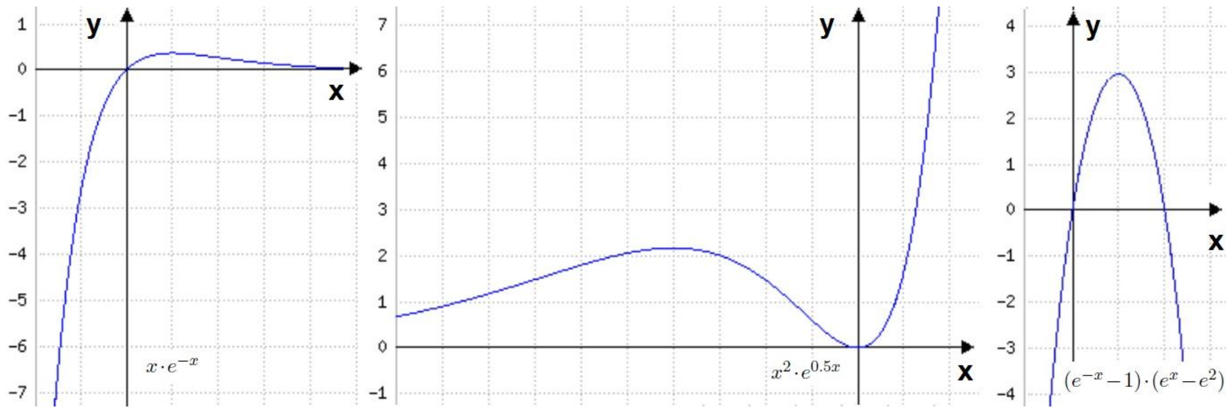


Abb. 354 Zur Aufgabe 421 b,c,d

d) $f(x)=(e^{-x}-1)\cdot(e^x-e^2)=1-e^x-e^{2-x}+e^2$, $f'(x)=-e^x+e^{2-x}$, $f''(x)=-e^x-e^{2-x}$, $f'''(x)=-e^x+e^{2-x}$;

M: f ist smw für $x\leq 1$ und f ist smf für $x\geq 1$;
A: $f(x)\xrightarrow{x\to\pm\infty}-\infty$, f hat keine Asymptote;
D: $\mathbb{D}=\mathbb{R}$; $\mathbb{W}=(-\infty;(e^{-1}-1)\cdot(e-e^2)\approx 2.95]$;

N: $(e^{-x}-1)\cdot(e^x-e^2)=0 \Leftrightarrow e^{-x}-1$ oder $e^x-e^2=0 \Leftrightarrow x=\ln(1)=0$ oder $x=2$;
E: $f'(x)=-e^x+e^{2-x}=0 \Leftrightarrow e^{2-x}=e^x \Leftrightarrow e^2=(e^x)^2 \Leftrightarrow x=1,\ f''(1)=-e^1-e^1=-2e<0 \Rightarrow H(1/(e^{-1}-1)\cdot(e-e^2)\approx 2.95)$; W: $-e^x-e^{2-x}<0 \Rightarrow$ es gibt keine Wendepunkte;
S: K_f ist as zur Achse $x=1$: $f(1-t)=1-e^{1-t}-e^{2-(1-t)}+e^2=1-e^{1-t}-e^{1+t}+e^2$ $f(1+t)=1-e^{1+t}-e^{2-(1+t)}+e^2=1-e^{1+t}-e^{1-t}+e^2$ (qed); S: Stetigkeit: Ja.

e) $f'(x)=(x\cdot e^{-0.5x})'=e^{-0.5x}-0.5x\cdot e^{-0.5x}=(1-0.5x)e^{-0.5x}<0$,
da $1-0.5x<0$ für $x>2$, $x\cdot e^{-0.5x}>0$, weil beide Faktoren für $x>2$ größer null sind.

f) $f'(x)=((x-1)\cdot e^{-0.25x})'=e^{-0.25x}-0.25(x-1)\cdot e^{-0.25x}=(1.25-0.25x)\cdot e^{-0.25x}$,
da $1.25-0.25x<0$ für $x>5$, $(x-1)\cdot e^{-0.25x}>0$, weil beide Faktoren für $x>5$ größer null sind.

Aufg. 163/422: a) $f'(x)=e^x\cdot\sin(x)+x\cdot e^x\cdot\sin(x)+x\cdot e^x\cdot\cos(x)$,
$(u(x)\cdot v(x)\cdot w(x))'=u'(x)\cdot v(x)\cdot w(x)+u(x)\cdot v'(x)\cdot w(x)+u(x)\cdot v(x)\cdot w'(x)$.

b) $(x\cdot\cos(x)\cdot\sin(x))'=\cos(x)\cdot\sin(x)+x\cdot(-\sin(x))\cdot\sin(x)+x\cdot\cos(x)\cdot\cos(x)$,

c) $f'(x)=e^x\cdot\sqrt{x}\cdot\cos(x)+e^x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\cos(x)-e^x\cdot\sqrt{x}\cdot\sin(x)$,

Aufg. 163/423: a) $((\sin(x))^2)'=2\cdot\cos(x)\cdot\sin(x)$, $((x^2-3x)^2)'=2\cdot(2x-3)\cdot(x^2-3x)$,
$((\cos(x))^2)'=2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)$, $((\sqrt{x}+1)^2)'=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x}+1)$, $(e^x)^2)'=2\cdot e^x\cdot e^x$,
$((y(x))^2)'=2\cdot y'(x)\cdot y(x)$.
b) $((y(x))^3)'=y'(x)\cdot 3y^2(x)$, $(\frac{1}{y(x)})'=y'(x)\cdot(-1)y^{-2}(x)$, $(\sqrt{y(x)})'=y'(x)\cdot\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}(x)$,
$(\sin(y(x)))'=y'(x)\cdot\cos(y(x))$, $(f(y(x)))'=y'(x)\cdot f'^y(y(x))$.

Aufg. 163/424: ... bei $y=\sqrt{x}$ die <u>Wurzel</u> eliminieren. Lösen Sie die Gleichung nach $\underline{y'}$ auf und Setzen Sie jetzt für $y=\underline{\sqrt{x}}$ ein. $y=\sqrt{x}\Leftrightarrow y^2=x\Rightarrow y'2y=1\Leftrightarrow y'=\frac{1}{2y}\Leftrightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

b) $y=\ln(x)\Leftrightarrow e^y=x$ nach x abgeleitet: $y'e^y=1\Leftrightarrow y'=\frac{1}{e^y}=\frac{1}{e^{\ln(x)}}=\frac{1}{x}$ (auswendig).

c) i) $(\ln(3x))'=3\cdot\frac{1}{3x}=\frac{1}{x}$ oder $(\ln(3x))'=(\ln(x)+\ln(3))'=\frac{1}{x}$,

ii) $g(x)=2x+1, g'(x)=2, f(g)=\ln(g), f'(g)=\frac{1}{g}$, $(\ln(2x+1))'=2\cdot\frac{1}{2x+1}$;
iii) $g(x)=4+5x, g'(x)=5, f(g)=\ln(g), f'(g)=\frac{1}{g}$, $(\ln(4+5x))'=5\cdot\frac{1}{4+5x}$;
iv) $g(x)=x^2+4x, g'(x)=2x+4, f(g)=\ln(g), f'(g)=\frac{1}{g}$, $(\ln(x^2+4x))'=(2x+4)\cdot\frac{1}{x^2+4x}$;
v) $g(x)=7x, g'(x)=5, f(g)=\ln(g), f'(g)=\frac{1}{g}$, $(\ln(7x))'=7\cdot\frac{1}{7x}=\frac{1}{x}$, tatsächlich ist $\ln(7x)=\ln(7)+\ln(x)$;
vi) $g(x)=e^x-3x, g'(x)=e^x-3, f(g)=\ln(g), f'(g)=\frac{1}{g}$, $(\ln(e^x-3x))'=(e^x-3)\cdot\frac{1}{e^x-3x}$;
vii) $g(x)=\ln(x)$, $g'(x)=\frac{1}{x}$, $f(g)=\frac{1}{g}=g^{-1}$, $f'(g)=(-1)\cdot g^{-2}$,
$(\frac{1}{\ln(x)})'=\frac{1}{x}\cdot(-1)g^{-2}=\frac{1}{x}\cdot(-1)\ln(x)^{-2}=\frac{-1}{x\ln^2(x)}$;

viii) $g(x)=\ln(x)+1$, $g'(x)=\frac{1}{x}$, $f(g)=e^g$, $f'(g)=e^g$, $(e^{\ln(x)+1})'=\frac{1}{x}\cdot e^g=\frac{1}{x}\cdot e^{\ln(x)+1}$,
tatsächlich ist $e^{\ln(x)+1}=e^{\ln(x)}\cdot e=e\cdot x$ und $\frac{e^{\ln(x)+1}}{x}=e$;

ix) $g(x)=\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-1+2}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}=1+2(x-1)^{-1}$, $g'(x)=(-2)\cdot(x-1)^{-2}$, $f(g)=\ln(g)$, $f'(g)=\frac{1}{g}$,
$(\ln(\frac{x+1}{x-1}))'=-2(x-1)^{-2}\cdot\frac{1}{g}=\frac{-2}{(x-1)^2}\cdot\frac{x-1}{x+1}=\frac{-2}{(x-1)\cdot(x+1)}$,
anderer Weg: $(\ln(\frac{x+1}{x-1}))'=(\ln(x+1)-\ln(x-1))'=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}=\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}-\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}=\frac{x-1-(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{-2}{(x+1)(x-1)}$;

x) $(e^x\cdot\ln(x))'=e^x\cdot\ln(x)+e^x\cdot\frac{1}{x}$,

xi) $(\ln(-x))'=(-1)\frac{1}{-x}=\frac{1}{x}$ es bleibt die Frage, ob $\ln(-x)$ überhaupt definiert ist: Ja, aber nur für $x<0$.

d) Sei $y=\frac{1}{x}$. Wir multiplizieren diese Gleichung mit x: $x\cdot y=1$. Nun differenzieren wir einfach beide

Seiten der Gleichung (links mit der Produktregel):

$$x'y + xy' = 0 \Leftrightarrow y + xy' = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{-y}{x} \Leftrightarrow y' = \frac{-1}{x^2}.$$

Auf diese Weise läßt sich die Ableitung von $y = \frac{1}{x}$ nur mit Hilfe der Produktregel bestimmen (das ist toll).

e) Mit Hilfe der Ableitung der Exponentialfunktion und der Kettenregel können wir (endlich) die Potenzregel der Ableitung $\underline{(x^r)' = r \cdot x^{r-1}}$ beweisen, indem wir x^r in der Form $e^{r\ln(x)}$ also als 'Exponentialfunktion' darstellen. $(e^{r\ln(x)})' = r \cdot \frac{1}{x} \cdot e^{r\ln(x)} = r \cdot \frac{1}{x} \cdot x^r = r \cdot x^{r-1}$.

i) $y = \sqrt[3]{(x)} \Leftrightarrow y^3 = x$ abgeleitet: $y' \cdot 3y^2 = 1 \Leftrightarrow y' = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{3} \cdot x^{-2/3}$;

ii) $y = \sqrt[n]{(x)} \Leftrightarrow y^n = x$ abgeleitet: $y' \cdot ny^{n-1} = 1 \Leftrightarrow y' = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot x^{-(n-1)/n}$;

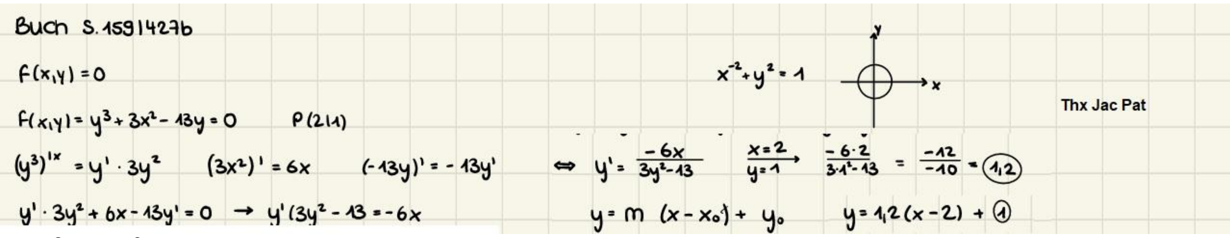
iii) $y = \ln(\sqrt{x}) \Leftrightarrow e^y = \sqrt{x} \Leftrightarrow (e^y)^2 = e2y = x$ abgeleitet: $2y' \cdot e^{2y} = 1 \Leftrightarrow y' = \frac{1}{2e^{2y}} = \frac{1}{2e^{2\ln(\sqrt{x})}}$ $= \frac{1}{2e^{\ln(\sqrt{x}^2)}} = \frac{1}{2e^{\ln(x)}} = \frac{1}{2x}$;

g) Die Produktregel kann auf eine nette Weise mit Hilfe des impliziten Differenzierens bewiesen werden: Wir differenzieren $(u(x) + v(x))^2$ auf zwei Arten:

$$\begin{array}{llll} & ((u+v)^2)' & = 2(u'+v')(u+v) & \text{Kettenregel} \\ & & = 2u'u + 2u'v + 2uv' + 2v'v & \text{ausmultipliziert} \\ \text{oder} & ((u+v)^2)' & = (u^2 + 2uv + v^2)' & \text{Binomische Formel} \\ & & = 2u'u + 2(uv)' + 2v'v & \text{Kettenregel} \end{array}$$

Damit ist $2u'u + 2u'v + 2uv' + 2v'v = 2u'u + 2(uv)' + 2v'v \Leftrightarrow (uv)' = u'v + uv'$.

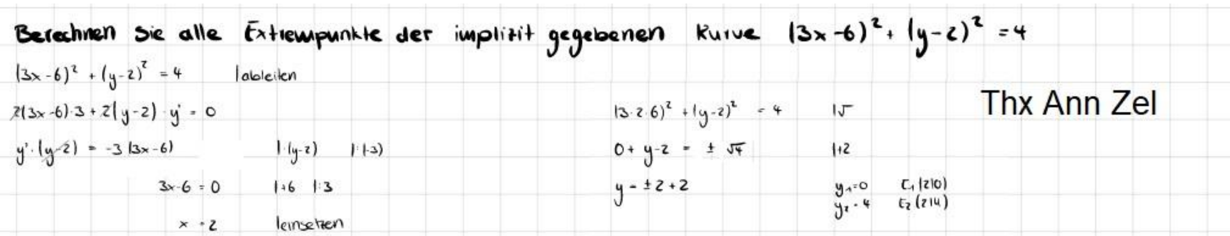
Aufg. 163/425: a) $x^2 + y^2 - 25 = 0$ (abgeleitet):
$2x + 2y'y = 0 \Leftrightarrow 2y'y = -2x \Leftrightarrow y' = \frac{-x}{y} \Rightarrow y'(3) = -\frac{3}{4}$ Tangente: $y = -\frac{3}{4}(x-3) + 4$;


Buch S.159|427b
$f(x,y) = 0$
$x^{-2} + y^2 = 1$
Thx Jac Pat
$f(x,y) = y^3 + 3x^2 - 13y = 0$ P(2|1)
$(y^3)'^x = y' \cdot 3y^2$ $(3x^2)' = 6x$ $(-13y)' = -13y'$ $\Leftrightarrow y' = \frac{-6x}{3y^2-13} \xrightarrow[y=1]{x=2} \frac{-6\cdot 2}{3\cdot 1^2 - 13} = \frac{-12}{-10} = 1{,}2$
$y' \cdot 3y^2 + 6x - 13y' = 0 \rightarrow y'(3y^2 - 13 = -6x$ $y = m(x - x_0) + y_0$ $y = 1{,}2(x-2) + 1$

b) $y^3 + 3x^2y - 13 = 0$ (abgeleitet):

$3y'y^2 + 3x^2y' + 6xy = 0 \xLeftrightarrow{-6xy} 3y'y^2 + 3x^2y' = -6xy \Leftrightarrow 3y'(y^2 + x^2) = -6xy \xLeftrightarrow{:3(y^2+x^2)} y' = \frac{-2xy}{y^2+x^2}$;

$y'(2) = \frac{-2\cdot 2\cdot 1}{1^2+2^2} = -0.8$ (mit $y = 1$) Tangente: $y = -0.8(x-2) + 1$;


Berechnen Sie alle Extrempunkte der implizit gegebenen Kurve $(3x-6)^2 + (y-2)^2 = 4$
$(3x-6)^2 + (y-2)^2 = 4$ | ableiten
$2(3x-6)\cdot 3 + 2(y-2)\cdot y' = 0$
$y' \cdot (y-2) = -3(3x-6)$ | :(y-2) | :(-3)
$3x - 6 = 0$ | +6 | :3
$x = 2$ | einsetzen
$(3\cdot 2 - 6)^2 + (y-2)^2 = 4$ | $\sqrt{\ }$
$0 + y - 2 = \pm\sqrt{4}$ | +2
$y = \pm 2 + 2$
$y_1 = 0$ $E_1(2|0)$
$y_2 = 4$ $E_2(2|4)$
Thx Ann Zel

Aufg. 163/426: a) i) $f'(t) = (20 \cdot e^{0.1t - 0.005t^2})' = (2 - 0.2t) \cdot e^{0.1t - 0.005t^2} = 0 \xLeftrightarrow{SvN} 2 - 0.2t = 0 \xLeftrightarrow{+0.2t, \cdot 5}$ $t = 10$.

$f''(t) = -0.2 \cdot e^{0.1t - 0.005t^2} + (2 - 0.2t)^2 \cdot e^{0.1t - 0.005t^2} = ((2 - 0.2t)^2 - 0.2) \cdot e^{0.1t - 0.005t^2}$

$f''(10) = ((2 - 0.2 \cdot 10)^2 - 0.2) \cdot e^{0.1 \cdot 10.0.005 \cdot 10^2} = -0.2 \cdot e^{-0.5} < 0 \Rightarrow$ Maximum.

$f(10) = 20 \cdot e^{-0.5}$; die größte Fläche ist $20 \cdot e^{0.5} \approx 32.97cm^2$.

ii) $f(0) = 20 \cdot e^0 = 20$; $20 \cdot e^{0.1t-0.005t^2} = 20 \overset{:20}{\Longleftrightarrow} e^{0.1t-0.005t^2} = 1 \overset{\ln}{\Longleftrightarrow} 0.1t - 0.005t^2 = 0$
$\Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 20$. 20 Stunden nach Beobachtungsbeginn nimmt der Bestand wieder die Ausgangsfläche von $20cm^2$ ein.

b) Wann beginnt ein 5 Stundenzeitraum in welchem die Fläche um $9.1cm^2$ zunimmt? (Antwort: Zwischen den Zeitpunkten 0 und 5 nimmt die Fläche etwa um $9.1cm^2$ zu (diese war nicht gefragt)).

c) i) $h(t) = g(t+10) = 20 \cdot e^{0.1(t+10)-0.005(t+10)^2} = 20 \cdot e^{0.1t+1-0.005(t^2+20t+100)} = 20 \cdot e^{0.005t^2}$.

$h(-t) = 20 \cdot e^{0.005(-t)^2} = 20 \cdot e^{0.005t^2} = h(t)$.

ii) K_h (Schaubild von $h(t)$) ist achsensymmetrisch zur y-Achse und K_h ist das um 10 LE nach links verschobene Schaubild von $f(t)$. Damit ist K_f (Schaubild von $f(t)$) achsensymmetrisch zur Geraden $x = 10$.

d) $g''(x) = (-x^2 \cdot f(x))'' \overset{PR}{=\!=} (-2x \cdot f(x) - x^2 \cdot f'(x))' \overset{PR}{=\!=} -2 \cdot f(x) - 4x \cdot f'(x) - x^2 \cdot f''(x)$

$g'(x_0) = -2x_0 \cdot f(x_0) - x_0^2 \cdot f'(x_0) \overset{f(x_0)=f'(x_0)=0}{=\!=\!=\!=} 0$

$g(x_0) = -x_0^2 \cdot f(x_0) \overset{f(x_0)=0}{=\!=\!=} 0$

$g''(x_0) = -2 \cdot f(x_0) - 4x_0 \cdot f'(x_0) - x_0^2 \cdot f''(x_0) \overset{f(x_0)=f'(x_0)=0}{=\!=\!=\!=} -2 \cdot 0 - 4x_0 \cdot 0 - x_0^2 \cdot f''(x_0) = -x_0^2 \cdot f''(x_0) > 0$, weil $f''(x_0) < 0$ ist.

e) $f(x_0) = (x_0 - x_0)^2 \cdot g(x_0) = 0$ und $f'(x) = (x - x_0)^2 \cdot g(x) \overset{PR}{=\!=} 2(x - x_0) \cdot g(x) + (x - x_0)^2 \cdot g'(x)$

$\Rightarrow f'(x_0) = 2(x_0 - x_0) \cdot g(x_0) + (x_0 - x_0)^2 \cdot g'(x_0) = 0$.

Damit ist die Tangente im Punkt $P(x_0|f(x_0))$: $y = 0(x - x_0) + 0 \equiv 0$.

f) $g''(x) = (e^{-f(x)})'' \overset{KR}{=\!=} (-f'(x) \cdot e^{-f(x)})' \overset{PR,KR}{=\!=\!=} -f''(x) \cdot e^{-f(x)} + (-f'(x)) \cdot (-f'(x)) \cdot e^{-f(x)}$.
$g'(5) = -f'(5) \cdot e^{-f(5)} = 0$; $g''(5) = -f''(5) \cdot e^{-f(5)} + (-f'(5))^2 \cdot e^{-f(5)} = -2 \cdot e^{-f(5)} + 0 \cdot e^{-f(5)} < 0$
$\Rightarrow g$ hat an der Stelle 5 ein Maximum.

g) Aus $g''(x) < 0$ folgt, dass g' im Intervall [0; 6] streng monoton fallend ist. Somit ist $g'(x) < 0.5$ im Intervall [0; 4). Der Graph von g verläuft in diesem Bereich also überall steiler als die Gerade mit der Gleichung $y = 0.5x$. Diese hat mit dem Graphen von g den Punkt $P(4|2)$ gemeinsam und geht durch den Ursprung. Somit besitzt g im Intervall [0; 4) eine Nullstelle.

h) $f''(x) = (e^{g(x)} - 2)'' \overset{Kettenregel}{=\!=\!=\!=\!=} (g'e^{g(x)})' \overset{Produktregel}{=\!=\!=\!=\!=} (g'^2 + g'')e^{g(x)}$; $(g'(x_0)^2 + g''(x_0))e^{g(x_0)} = 0$ (Wendestelle von f) und $g''(x_0) = 0$ (Wendestelle von g) $\Rightarrow$ (eingesetzt) $(g'(x_0)^2 + 0)e^{g(x_0)} = 0$ $\overset{e^{g(x_0)} \neq 0}{\Longleftrightarrow} g'(x_0)^2 = 0$ also ist $g'(x_0) = 0$ (waagrechte Tangente).

j) i) $x_1 = 3$; ii) Gemäß der Kettenregel gilt $g'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x)$. iii) $f'(f(x)) = 0$ oder $f(x) = 3$ oder $x_2 = 2$; $x_3 = 5$;

Aufg. 164/427: ... mit der Produktregel ... $(\frac{1}{v(x)})' = v'(x) \cdot \frac{-1}{v^2(x)}$; $f'(x) = (\frac{u(x)}{v(x)})' = (u(x) \cdot \frac{1}{v(x)})' = u'(x) \cdot \frac{1}{v(x)} + u(x) \cdot (\frac{1}{v(x)})' = u'(x) \cdot \frac{1}{v(x)} + u(x) \cdot v'(x) \cdot \frac{-1}{v^2(x)} = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.

Aufg. 164/428: **a)** $(\frac{1}{x+1})' = \frac{0 \cdot (x+1) - 1 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{(x+1)^2}$, **b)** $\frac{-5}{(x-4)^2}$, **c)** $(\frac{x+1}{x-1})' = \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$,

b) $f(x) = (\frac{5}{x-4})' = \frac{0 \cdot (x-4) - 5 \cdot 1}{(x-4)^2} = \frac{-5}{(x-4)^2}$ | $u(x) = 5$ $u'(x) = 0$ $v(x) = x-4$ $v'(x) = 1$ **Thx Ann Zel**

h) $f(x) = \left(\frac{x^3+2x^2}{3(x-1)}\right)' = \frac{(3x^2+4x)+3(x-1)-(x^3+2x^2)\cdot 3}{(3(x-1))^2} = \frac{3x^3-3x^2+4x^2-4x-x^3-2x^2}{3(x-1)^2} = \frac{2x^3-x^2-4x}{3(x-1)^2}$

$= \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$u(x) = x^3+2x^2$ $\quad u'(x) = 3x^2+4x$

$v(x) = 3(x-1) = 3x-3$ $\quad v'(x) = 3$

Erklärung: $(3(x-1))^2 = 3^{\cancel{2}}(x-1)^2$

$\frac{3a+3b}{3^2(x-1)^2} = \frac{3(a+b)}{3^{\cancel{2}}(x-1)^2}$

Thx Ann Zel

i) $f(x) = \left(\frac{tx^2+t}{(x+1)^2}\right)' = \frac{2tx(x+1)^2-(tx^2+t)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}$ $\quad \boxed{\frac{u'v-uv'}{v^2}}$

$u(x) = tx^2+t$ (konstante) $\quad u'(x) = 2tx$

$v(x) = (x+1)^2$ $\quad v'(x) = 2(x+1)$

$= \frac{2\cancel{(x+1)}\{tx(x+1)-(tx^2+t)\}}{(x+1)^{\cancel{4}3}} = \frac{2(tx^2+tx-tx^2-t)}{(x+1)^3} = \frac{2t(x-1)}{(x+1)^3}$

Thx Ann Zel

$\left(\frac{6x^2}{1+x^2}\right)' = \frac{12x(1+x^2)-6x^2\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{12x+\cancel{12x^3}-\cancel{12x^3}}{(1+x^2)^2} = \frac{12x}{(1+x^2)^2}$

Thx Mar Fee

$\left(\frac{(x-2)^2}{x(x-4)}\right)' = \left(\frac{x^2-4x+4}{x^2-4x}\right)' = \frac{(2x-4)(x^2-4x)-(x^2-4x+4)(2x-4)}{(x^2-4x^2)}$ $\quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ $\quad$ Buch S.159|430j

$u' = (x^2-4x+4)' = 2x-4$ $\quad v' = (x^2-4x)' = 2x-4$

$= \frac{(2x-4)(x^2-4x-x^2)4x-4)}{(x^2-4x)^2} = \frac{-4(2x-4)}{(x^2-4x)^2}$

Thx Jac Pat

$\rightarrow \left(\underbrace{\frac{x^2-4x}{x^2-4x}}_{1} + \frac{4}{4x^2-4x}\right)' = (4(4x^2-4x)^{-1})' = 4(-1)\cdot(2x-4)(4x^2-4x)^{-2}$

Thx Mar Fee

$\left(\frac{x-4}{(x+4)^2}\right)' = \frac{1\cdot(x+4)^2-(x-4)\cdot 2(x+4)}{((x+4)^2)^2} = \frac{\cancel{(x+4)}((x+4)-2(x-4))}{(x+4)^{\cancel{4}}} = \frac{x+4-2x+8}{(x+4)^3} = \frac{12-x}{(x+4)^3}$

$\left(\frac{x-4}{(x+4)^3}\right)' = \frac{1\cdot(x+4)^3-(x-4)\cdot 3(x+4)^2}{((x+4)^3)^2} = \frac{(x+4)^2((x+4)-3(x-4))}{(x+4)^6} = \frac{x+4-3x+12}{(x+4)^4} = \frac{16-2x}{(x+4)^4}$

Abb. 355 Rechnungen zur Quotientenregel; Teil b,h,i,j,k,z

d) $(\frac{1}{(x+1)^2})' = \frac{0\cdot(x+1)^2-1\cdot 2\cdot(x+1)}{((x+1)^2)^2} = \frac{-2}{(x+1)^3}$, **e)** $(\frac{x+1}{(x-1)^2})' = \frac{-x-3}{(x-1)^3}$;

f) $\left(\frac{x-3}{(x-2)^2}\right)' = \left(\frac{1\cdot(x-2)^2-(x-3)\cdot 2\cdot(x-2)}{(x-2)^4}\right) = \left(\frac{(x-2)-(x-3)\cdot 2}{(x-2)^3}\right) = \frac{-x+4}{(x-2)^3}$

g) $\left(\frac{2x-2}{(x+2)^2}\right)' = \left(\frac{2\cdot(x+2)^2-(2x-2)\cdot 2\cdot(x+2)}{(x+2)^4}\right) = \frac{2\cdot(x+2)-(2x-2)\cdot 2}{(x+2)^3} = \frac{2x+4-4x+4}{(x+2)^3} = \frac{-2x+8}{(x+2)^3}$ LöVo k fehlen noch

L) $(\frac{2}{e^{2x}+3})' = \frac{-2\cdot 2e^{2x}}{(e^{2x}+3)^2} = \frac{-4e^{2x}}{(e^{2x}+3)^2}$; m) $(\frac{e^x}{e^{2x}-2})' = \frac{e^x(e^{2x}-2)-e^x\cdot 2e^{2x}}{(e^{2x}-2)^2} = \frac{e^{3x}-2e^x-2e^{3x}}{(e^{2x}-2)^2} = \frac{-2e^x-e^{3x}}{(e^{2x}-2)^2}$;

n) $f(x) = \frac{e^{2x+1}}{e^{2x-4}} = e^5$, damit ist die Ableitung 0 (die Ag ist in gewisser Weise eine Scherzaufgabe);

$(\frac{e^{2x+1}}{e^{2x-4}})' = \frac{2e^{2x+1}.(e^{2x-4})-e^{2x+1}.2e^{2x-4}}{(e^{2x-4})^2} = \frac{2e^{4x-3}-2e^{4x-3}}{(e^{2x-4})^2} = 0$;

o) $(\frac{1-e^{-3x-3}}{e^{2x}+1})' = \frac{3e^{-3x-3}.(e^{2x}+1)-(1-e^{-3x-3})\cdot 2\cdot e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{3e^{-3x-3}+5e^{-x-3}-2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$;

p) $(\frac{e^{-2x-2}-2}{e^{2x+2}+2})' = \frac{-2e^{-2x-2}.(e^{2x+2}+2)-(e^{-2x-2}-2)\cdot 2e^{2x+2}}{(e^{2x+2}+2)^2} = \frac{-2-4e^{-2x-2}-2+4e^{2x+2}}{(e^{2x+2}+2)^2} = \frac{4e^{2x+2}-4-4e^{-2x-2}}{(e^{2x+2}+2)^2}$,

q) $(\frac{\sin(x)}{x-4})' = \frac{\cos(x)\cdot(x-4)-\sin(x)}{(x-4)^2}$, **r)** $(\frac{x}{e^x})' = \frac{e^x-xe^x}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$, **s)** $(\frac{e^x}{x-4})' = \frac{e^x(x-4)-e^x}{(x-4)^2} = \frac{(x-5)e^x}{(x-4)^2}$,

t) $\left(\frac{1-x}{\ln(x)}\right)' = \left(\frac{(-1)\cdot\ln(x)-(1-x)\cdot\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2}\right) = \frac{-\ln(x)-\frac{1}{x}+1}{(\ln(x))^2}$

u) $(\frac{\sin(x)}{\cos(x)})' = \frac{\cos(x)\cos(x)-\sin(x)\cdot(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\sin^2(x)} = 1+\tan^2(x)$,

v) $(1+\tan^2(x))' = \left(1+\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\right)' = \frac{2\sin(x)\cos(x)\cdot\cos^2(x)-2(-\sin(x))\cos(x)\cdot\sin^2(x)}{\cos^4(x)} = \frac{2\sin(x)\cdot\cos^2(x)+2\sin(x)\cdot\sin^2(x)}{\cos^3(x)} =$
$2\tan(x)\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 2\tan(x)(1+\tan^2(x)) =$ (anderer Weg)$= -2\sin(x)\cos^{-3}(x)$.

w) $\mathbb{D} = (-\infty; -\frac{1}{2})$;

Aufg. 164/429: **a)** $f_t''(x) = -2e^{tx}(2 + tx)$, Wendepunkte: $W(\frac{-2}{t}; \frac{4}{e^2 \cdot t^2})$; $g(x) = \frac{x^2}{e^2}$.

b) $f_t''(x) = ((x-1)^2 e^{tx})'' = (t \cdot e^{tx} \cdot (x-1)^2 + e^{tx} \cdot 2 \cdot (x-1))' = ((x-1)(tx - t + 2)e^{tx})' = e^{tx} \cdot (t^2 \cdot (x-1)^2 + 4t \cdot (x-1) + 2)$,

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(tx - t + 2)e^{tx} = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ oder $tx - t + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ oder $x = 1 - \frac{2}{t}$;

$f''(1) = e^t \cdot (t^2 \cdot (1-1)^2 + 4t \cdot (1-1) + 2) = 2e^t > 0 \Rightarrow$ Minimum;

$f''(1 - \frac{2}{t}) = e^{t \cdot (1 - \frac{2}{t})} \cdot (t^2 \cdot (1 - \frac{2}{t} - 1)^2 + 4t \cdot (1 - \frac{2}{t} - 1) + 2) = e^{t-2} \cdot (t^2 \cdot (-\frac{2}{t})^2 + 4t \cdot (-\frac{2}{t}) + 2) = e^{t-2} \cdot (4 - 8 + 2) = -2e^{t-2} < 0 \Rightarrow$ Maximum;

$f(1 - \frac{2}{t}) = (1 - \frac{2}{t} - 1)^2 \cdot e^{t(1 - \frac{2}{t})} = (-\frac{2}{t})^2 \cdot e^{t-2} = \frac{4}{t^2} \cdot e^{t-2} \quad \Rightarrow H(1 - \frac{2}{t}; \frac{4}{t^2} \cdot e^{t-2})$;

EdP: $x = 1 - \frac{2}{t} \Leftrightarrow t = \frac{-2}{x-1}$ in $y = \frac{4}{t^2} \cdot e^{t-2}$ eingesetzt: $y = \frac{4}{(\frac{-2}{x-1})^2} \cdot e^{\frac{-2}{x-1} - 2} \Leftrightarrow y = \frac{4(x-1)^2}{(-2)^2} \cdot e^{(-2) \cdot (\frac{1}{x-1} + \frac{x-1}{x-1})}$

$\Leftrightarrow g(x) = e^{\frac{-2x}{1-x}} \cdot (x-1)^2$;

c) $(\frac{2x}{t} \cdot e^{tx})'' = ((\frac{2}{t} + 2x) \cdot e^{tx})' = (4 + 2tx) \cdot e^{tx}$; $\quad f_t'(x) = 0 \Leftrightarrow (\frac{2}{t} + 2x) \cdot e^{tx} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{t}$,

$f_t(x) = \frac{2 \cdot \frac{-1}{t}}{t} \cdot e^{t \cdot \frac{-1}{t}} = \frac{-2}{t^2} \cdot e^{-1}$, $\quad f''(\frac{-1}{t}) = (4 + 2t \cdot \frac{-1}{t}) \cdot e^{t \cdot \frac{-1}{t}} = (4-2) \cdot e^{-1} > 0 \Rightarrow T(\frac{-1}{t}; \frac{-2}{t^2} \cdot e^{-1})$;
Ortskurve: $x = \frac{-1}{t} \Leftrightarrow t = \frac{-1}{x}$ in $y = \frac{-2}{t^2} \cdot e^{-1} = \frac{-2}{(\frac{-1}{x})^2} \cdot e^{-1} = \frac{-2}{e} x^2 \Rightarrow y = \frac{-2}{e} x^2$ ohne $(0;0)$.

d) $f_t'(x) = \frac{-x^2 - t}{(x^2 - t)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-t}$, (für $t < 0$); $\quad (\sqrt{-t})^2 = -t > 0$ aber $(-t)^2 = t^2$,
$f(\sqrt{-t}) = \frac{\sqrt{-t}}{(\sqrt{-t})^2 - t} = \frac{\sqrt{-t}}{-t-t} = \frac{\sqrt{-t} \cdot \sqrt{-t}}{-2t \cdot \sqrt{-t}} = \frac{-t}{-2t \cdot \sqrt{-t}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{-t}}$, $\ f(-\sqrt{-t}) = \frac{-1}{2 \cdot \sqrt{-t}}$,
Klassifikation mit Hilfe eines Vorzeichenwechsels von $f_t'(x)$:

x	$-2\sqrt{-t}$	$-\sqrt{-t}$	0	$\sqrt{-t}$	$2\sqrt{-t}$
$f_e'(x) = \frac{-x^2 - t}{(x^2 - t)^2}$	$\frac{3t}{4t^2}$	0	$\frac{-t}{t^2}$	0	$\frac{3t}{4t^2}$
Vorzeichen für $t < 0$	$-$	$T(-\sqrt{-t}; \frac{-1}{2 \cdot \sqrt{-t}})$	$+$	$H(\sqrt{-t}; \frac{1}{2 \cdot \sqrt{-t}})$	$-$

$E(\pm\sqrt{-t}; \frac{\pm 1}{2 \cdot \sqrt{-t}})$, Fall $x < 0$: $x = -\sqrt{-t}$, $y = \frac{-1}{2 \cdot \sqrt{-t}}$, Fall $x > 0$: $x = \sqrt{-t}$, $y = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{-t}}$, EdP: $y = \frac{1}{2x}$;

e) $f_t'(x) = \left(\frac{8x}{x^2 + t^2}\right)' = \frac{8(x^2 + t^2) - 8x \cdot 2x}{(x^2 + t^2)^2} = \frac{8t^2 - 8x^2}{(x^2 + t^2)^2}$, $f_t'(x) = 0 \Leftrightarrow 8t^2 - 8x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm t$,

$f_t(t) = \frac{8t}{t^2 + t^2} = \frac{4}{t}$, VZW: $f'(-2t) = \frac{-8t^2}{5t^2} = -1.6 < 0$, $f'(0) = \frac{8t^2}{t^2} = 8 > 0$, $f'(2t) = -1.6 < 0$ - damit $T(-t/\frac{-4}{t})$, $H(t/\frac{4}{t})$ (Hochpunkt). Ortskurve: $x = t$ und $y = \frac{4}{t} \Leftrightarrow y = \frac{4}{x}$ für $x > 0$.

f) $f_t'(x) = \left(\frac{4}{x^2} + t^3 x\right)' = (-2) \cdot 4 \cdot x^{-3} + t^3$, $f_t'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{t}$, $f\left(\frac{2}{t}\right) = \frac{4}{(\frac{2}{t})^2} + t^3(\frac{2}{t}) = 3t^2$
$f_t''(x) = \left((-8) \cdot x^{-3} + t^3\right)' = 24 \cdot x^{-4}$, $f''\left(\frac{2}{t}\right) = 24 \cdot (\frac{2}{t})^{-4} > 0 \Rightarrow T(\frac{2}{t}/3t^2)$; $y = 3t^2 = 3(\frac{2}{x})^2 = \frac{12}{x^2}$.
g) $\frac{2}{x^2}$;

Aufg. 164/430: Madness = **M**onotonie, **A**symptoten (Globalverlauf),
Definitions + Wertebereich, **N**ullstellen, **E**xtrem und Wendepunkte, **S**ymmetrie,
Stetigkeit (Themenfriedhof) oder aber auch **s**enkrechte Tangenten.

a) i) $f(x) = \ln(4 - x)$: Nst 3; Extrema: keine (streng monoton fallend); Asymptote: sA $x = 5$; $f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$; Wendepunkte + Symmetrie: keine, $\mathbb{D} = (-\infty; 5); \mathbb{W} = \mathbb{R}$;

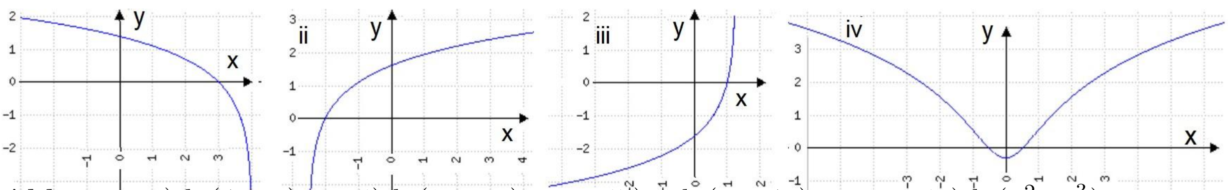


Abb. 356 a) $\ln(4 - x)$ ii) $\ln(2x + 5)$; iii) $-\ln(5 - 4x)$; iv) $\ln(x^2 + \frac{3}{4})$;

a) ii) $f(x) = \ln(2x+5)$: Nst -2; Extrema: keine (streng monoton wachsend); Asymptote: sA $x = -2.5$; $f(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$; Wendepunkte + Symmetrie: keine, $\mathbb{D} = (-2.5; \infty); \mathbb{W} = \mathbb{R}$;

a) iii) $f(x) = -\ln(5-4x)$: Nst 1; Extrema: keine (streng monoton wachsend); Asymptote: sA $x = 1.25$; $f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$; Wendepunkte + Symmetrie: keine, $\mathbb{D} = (-\infty; 1.25); \mathbb{W} = \mathbb{R}$;

a) iv) $f(x) = \ln(x^2+\frac{3}{4})$: Nst ± 0.5; $T(0|\ln(0.75))$ (damit nicht monoton); Asymptoten: keine; $f(x) \xrightarrow{x\to\pm\infty} \infty$; $W(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}| \sim 1.15)$, as zur y-Achse; $\mathbb{D} = \mathbb{R}; \mathbb{W} = [\ln(0.75); \infty)$;

i) $f(x) = \ln(4-x)$ MADNESS

Thx Ann Zel

Monotonie: 1. Ableitung

$f'(x) = \frac{-1}{4-x}$ <0 falls $x<4$ $\Rightarrow$ f ist streng monoton fallend

$f'(x) = 4-x$ >0 falls $x<4$

$u(x): 4-x$ $\quad u(x)': -1$ $\quad v(x): \ln(x)$ $\quad v(x)': \frac{1}{x}$

Nullstellen: Gleich Null setzen $\ln(4-x)=0$ $\quad 4-x = e^0$ $\quad 4-x = 1$ $\quad |-4$ $\quad -x=-3$ $\quad |\cdot(-1)$ $\quad x=3$ $\quad N(3|0)$

Extremstellen: 1. Ableitung gleich Null setzen $(\ln(4-x))' = (-1)\cdot\frac{1}{4-x} = 0$ ↯ geht nicht, also keine Extremstellen

Wendestellen: 2. Ableitung gleich Null setzen $\left(\frac{-1}{4-x}\right)' = -((4-x)^{-1})' = (-1)(4-x)^{-2} = \frac{-1}{(4-x)^2} = 0$ ↯ geht nicht Wendestellen

Definitionsmenge: $4-x>0$ $\quad |-4$ $\quad -x>-4$ $\quad |\cdot(-1)$ $\quad x<4$ $\quad \mathbb{D} = (-\infty, 4)$ damit auch keine Symmetrie

Asymptoten: $f(-\infty) = \ln(4, -\infty) = \ln\infty = \infty$ keine Asymptote für $x \to -\infty$

$f(4) = \ln(4-4) = \ln 0 = -\infty$ $\quad x=4$ ist senkrechte Asymptote weil $f(x) \xrightarrow{x\to4} \infty$ $\quad \mathbb{W} = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

iv) $f(x) = \ln(x^2+\frac{3}{4})$ $\quad u(x) = x^2+\frac{3}{4}$ $\quad u(x)' = 2x$ $\quad v(x) = \ln(x)$ $\quad v(x)' = \frac{1}{x}$ $\quad f(x)' = (\ln(x^2+\frac{3}{4}))'$

Nullstellen: $\ln(x^2+\frac{3}{4}) = 0$ $\quad |e^{\circ}$ $\quad x^2+\frac{3}{4} = e^0$ $\quad x^2+\frac{3}{4} = 1$ $\quad |-\frac{3}{4}$ $\quad x^2 = 0{,}25$ $\quad |\sqrt{\ }$ $\quad x = \pm\sqrt{0{,}25}$ $\quad x_1 = 0{,}5$ $\quad x_2 = -0{,}5$ $\quad N_1(0{,}5|0)$ $\quad N_2(-0{,}5|0)$

Extremstellen: $f(x)' = 0$

$\frac{2x}{x^2+\frac{3}{4}} = 0$

$x = 0$ $\quad$ einsetzen in zweite

$f(x)'' = \frac{2x(x^2+3/4) - 2x\cdot 2x}{(x^2+3/4)^2} = \frac{-2x^2+6/4}{(x^2+3/4)^2}$

$f(0)'' = \frac{6/4}{(3/4)^2}$ >0 $\Rightarrow$ Tiefpunkt $(0|\underbrace{\ln 3/4}_{\infty})$

Monotonie: keine

Wendepunkte: $f(x)''=0$ $\quad \frac{-2x^2+6/4}{(x^2+3/4)^2} = 0$ $\quad |\cdot(x^2+3/4)^2$ $\quad -2x^2+6/4 = 0$ $\quad |-6/4$ $\quad -2x^2 = -6/4$ $\quad |\cdot(-1)$ $\quad 2x^2 = 1{,}5$ $\quad x_{1/2} = \pm\sqrt{1{,}5}$ $\quad x_{1/2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$W_{1/2}(\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}|0{,}41)$

Symmetrie: $f(-x) = \ln((-x)^2+3/4) = \ln(x^2+3/4) = f(x)$ $\Rightarrow$ k_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse

Asymptote: $f(\pm\infty) = \ln((\infty^2)+3/4) = \infty$ $\Rightarrow$ keine Asymptote $\quad$ Senkrechte Asymptote: $x^2+3/4 = 0$

$x^2 = -3/4$ ↯ geht nicht $\Rightarrow$ keine Asymptote

Definitionsmenge: $x^2+3/4 > 0$ das gilt für alle $x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{W}: [\ln 3/4; 0)$

Thx Ann Zel

a) v) $f(x) = (x-1)\ln(x)$ $\quad u(x) = x-1$ $\quad v(x) = \ln(x)$ $\quad u(x)' = 1$ $\quad v(x)' = 1/x$ $\quad f(x)' = u'\cdot v + u\cdot v' = 1\cdot\ln(x) + (x-1)\cdot\frac{1}{x} = \ln(x) + \frac{(x-1)}{x}$

Die Gleichung ln(x)+1+1/x=0 ist transzendent und kann nicht (einfach) nach x aufgelöst werden

Nullstellen: $(x-1)\cdot\ln(x) = 0$

$x-1=0$

$x_1 = 1$

$\ln(x) = 0$

$x_2 = 1$

$\Rightarrow$ doppelte Nullstelle $\Rightarrow$ vermutlich Extremstelle

Extremstellen: $f(x)' = 0$

$\ln(x) + \frac{(x+1)}{x} = 0$

Wendestelle x_1 einsetzen $x=1$

$f'(x) = 1\cdot\ln(1) + \frac{(1+1)}{1} = 0$

$f(x) \xrightarrow[x\to1]{x>1} 0$ $\quad f(x)$ ist für $(x>1) > 0$ und für $(x<1) > 0$

$T(1|0)$

Wendepunkte: $f(x)'' = 0$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$ $\quad |\cdot x$

$x+1 = 0$

$x_1 = -1$ ↯ geht nicht $\Rightarrow$ keine Wendestellen

$f(-1) = (-1-1)\ln(-1)$

$= (-2)\ln(-1)$

Monotonie: keine, weil Extremum

Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$

Wertebereich: $\mathbb{W} = [0, \infty)$ $\quad T(1|0)$

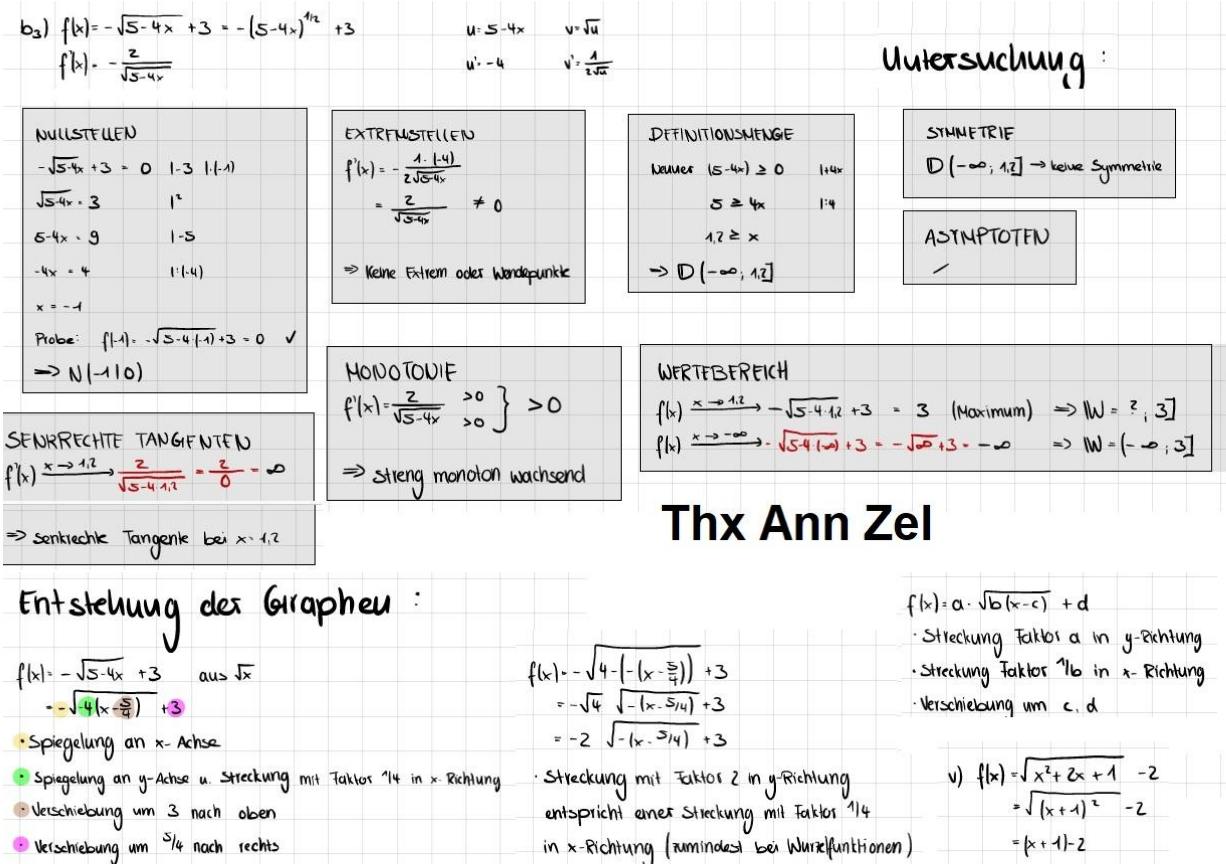
$f(x) \geq 0$

Asymptote: • $f(0) = (0-1)\ln(0) = \infty$ $\Rightarrow$ senkrechte Asymptote $x=0$

$f(x) \xrightarrow{x\to0} \infty$ $\Rightarrow$ senkrechte Asymptote $x=0$

• $f(\infty) = (\infty-1)\ln(\infty) = \infty$ $\Rightarrow$ keine waagrechte Asymptote $\Rightarrow$ keine Symmetrie

Thx Ann Zel


b3) $f(x) = -\sqrt{5-4x} + 3 = -(5-4x)^{1/2} + 3$ $u = 5-4x$ $v = \sqrt{u}$
$f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{5-4x}}$ $u' = -4$ $v' = \frac{1}{2\sqrt{u}}$

Untersuchung:

NULLSTELLEN
$-\sqrt{5-4x} + 3 = 0$ | -3 | $\cdot(-1)$
$\sqrt{5-4x} = 3$ | ^{2}
$5-4x = 9$ | -5
$-4x = 4$ | $:(-4)$
$x = -1$
Probe: $f(-1) = -\sqrt{5-4\cdot(-1)} + 3 = 0$ ✓
$\Rightarrow N(-1|0)$

EXTREMSTELLEN
$f'(x) = -\frac{1\cdot(-4)}{2\sqrt{5-4x}}$
$= \frac{2}{\sqrt{5-4x}} \neq 0$
$\Rightarrow$ Keine Extrem oder Wendepunkte

DEFINITIONSMENGE
Nenner $(5-4x) \geq 0$ | $+4x$
$5 \geq 4x$ | $:4$
$1{,}2 \geq x$
$\Rightarrow \mathbb{D}(-\infty; 1{,}2]$

SYMMETRIE
$\mathbb{D}(-\infty; 1{,}2] \rightarrow$ keine Symmetrie

ASYMPTOTEN
/

SENKRECHTE TANGENTEN
$f'(x) \xrightarrow{x \to 1{,}2} \frac{2}{\sqrt{5-4\cdot 1{,}2}} = \frac{2}{0} = \infty$
$\Rightarrow$ senkrechte Tangente bei $x = 1{,}2$

MONOTONIE
$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{5-4x}}$ $\left.\begin{matrix} >0 \\ >0 \end{matrix}\right\} > 0$
$\Rightarrow$ streng monoton wachsend

WERTEBEREICH
$f(x) \xrightarrow{x \to 1{,}2} -\sqrt{5-4\cdot 1{,}2} + 3 = 3$ (Maximum) $\Rightarrow \mathbb{W} = ?; 3]$
$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -\sqrt{5-4\cdot(-\infty)} + 3 = -\sqrt{\infty} + 3 = -\infty$ $\Rightarrow \mathbb{W} = (-\infty; 3]$

Thx Ann Zel

Entstehung des Graphen:
$f(x) = -\sqrt{5-4x} + 3$ aus $\sqrt{x}$
$= -\sqrt{-4(x-\frac{5}{4})} + 3$
· Spiegelung an x-Achse
· Spiegelung an y-Achse u. Streckung mit Faktor 1/4 in x-Richtung
· Verschiebung um 3 nach oben
· Verschiebung um 5/4 nach rechts

$f(x) = -\sqrt{4\cdot(-(x-\frac{5}{4}))} + 3$
$= -\sqrt{4}\sqrt{-(x-5/4)} + 3$
$= -2\sqrt{-(x-5/4)} + 3$
· Streckung mit Faktor 2 in y-Richtung entspricht einer Streckung mit Faktor 1/4 in x-Richtung (zumindest bei Wurzelfunktionen)

$f(x) = a\cdot\sqrt{b(x-c)} + d$
· Streckung Faktor a in y-Richtung
· Streckung Faktor 1/b in x-Richtung
· Verschiebung um c, d

v) $f(x) = \sqrt{x^2+2x+1} - 2$
$= \sqrt{(x+1)^2} - 2$
$= |x+1| - 2$

Abb. 357 Rechnungen a i) $\ln(4-x)$, iv) $\ln(x^2+\frac{3}{4})$ + v) $(x-1)\ln(x)$, b iii) $-\sqrt{5-4x}+3$

a) v) $f(x) = (x-1)\ln(x)$: Nst 1 (doppelt), Tiefpunkt (1;0), nicht monoton; Wendestellen und Symmetrie: keine; Asymptoten: $x = 0$; $f(x) \xrightarrow{x\to\pm\infty} \infty$; $\mathbb{D} = (0;\infty)$; $\mathbb{W} = [0;\infty)$;

a) vi) $f''(x) = \left(x^2(\ln(x)-1.5)\right)'' = (2x(\ln(x)-1))' = 2ln(x)$. Nst $e^{1.5}$, Tiefpunkt $(e;\sim -3.7)$, nicht monoton; $W(1;-1.5)$; Symmetrie: keine; Asymptoten: $x = 0$; $f(x) \xrightarrow{x\to\pm\infty} \infty$; $\mathbb{D} = (0;\infty)$; $\mathbb{W} = [\sim -3.7;\infty)$;

f kann bei $x = 0$ stetig ergänzt werden: $\overline{f}(0) = 0$. $\overline{f}$ ist hier die stetige Ergänzung von $f(x)$ (das ist die offizielle Notation wie zB bei Wikipedia) und nicht die Umkehrfunktion von $f(x)$.$\overline{f}$ hat dann an der Stelle 0 eine waagrechte Tangente; und auch ein lokales Maximum;

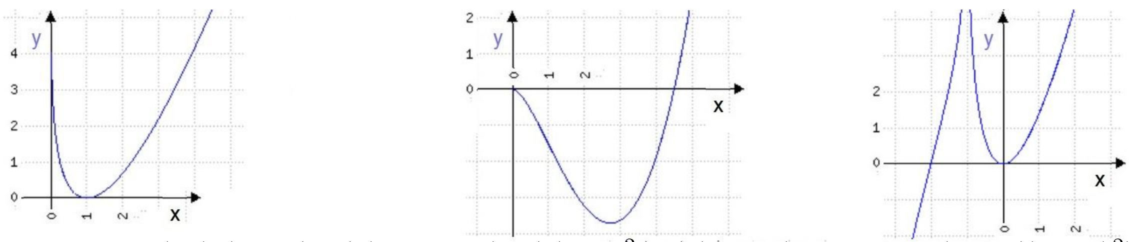


Abb. 358 a) v) $(x-1)\ln(x)$ vi) $f(x) = x^2(\ln(x)-1.5)$; vii) $x\ln((x+1)^2)$;

a) viii) $f(x) = \ln(x^2+2x+1)$: Nst -2 und 0; keine Extremstellen und Wendestellen, trotzdem nicht monoton; Asymptoten: $x = -1$; $f(x) \xrightarrow{x\to\pm\infty} \infty$; as zur Achse $x = -1$; $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$; $\mathbb{W} = (-\infty;\infty)$;

a) ix) $f(x) = \ln(x^2-4x+3) - \ln(3)$: Nst 0 und 4; keine Extremstellen und Wendestellen, trotzdem nicht monoton; Asymptoten: $x = 1$ und $x = 3$; $f(x) \xrightarrow{x\to\pm\infty} \infty$; as zur Achse $x = 2$;
$\mathbb{D} = (-\infty;1) \cup (3;\infty)$; $\mathbb{W} = (-\infty;\infty)$;

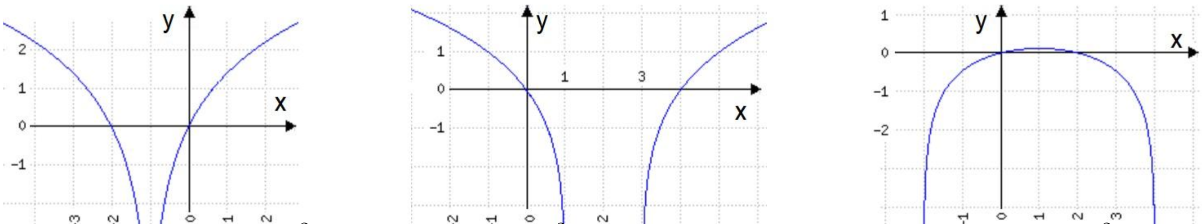
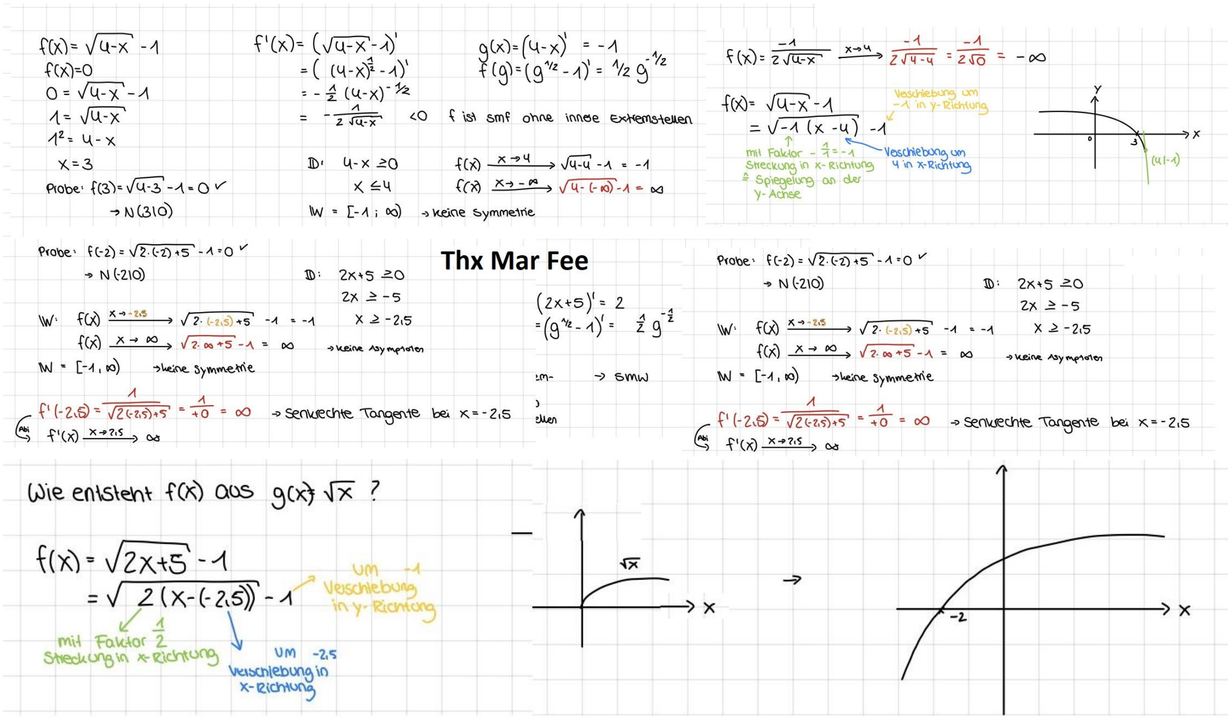


Abb. 359 a) viii) $\ln(x^2+2x+1)$ ix) $\ln(x^2-4x+3)-\ln(3)$; x) $\ln(8+2x-x^2)-\ln(8)$;

a) x) $f(x)=\ln(8+2x-x^2)-\ln(8)$: Nst 0 und 2; Hochpunkt $H(1|\sim 0.118)$, damit nicht monoton; keine Wendestellen; Asymptoten: $x=-1$ und $x=3$; as zur Achse $x=1$; $\mathbb{D}=(-2;4)$; $\mathbb{W}=(-\infty;0.118]$;

b) i) $f(x)=\sqrt{4-x}-1$: Nst 3; innere Extrema: keine (streng monoton fallend); Randminimum: $f(4)=-1$; Asymptoten: keine; $f(x)\xrightarrow{x\to-\infty}\infty$; Wendepunkte + Symmetrie: keine, $\mathbb{D}=(-\infty;4]$; $\mathbb{W}=[-1;\infty)$; Senkrechte Tangente bei $x=4$.

b) ii) $f(x)=\sqrt{2x+5}-1$: Nst -3; innere Extrema: keine (streng monoton steigend); Randminimum: $f(-3)=-1$; Asymptoten: keine; $f(x)\xrightarrow{x\to\infty}\infty$; Wendepunkte + Symmetrie: keine, $\mathbb{D}=[-2.5;\infty)$; $\mathbb{W}=[-1;\infty)$; Senkrechte Tangente bei $x=-2.5$.



b) iii) $f(x)=-\sqrt{5-4x}+3$: Nst -1; innere Extrema: keine (streng monoton steigend); Randmaximum: $f(1)=3$; Asymptoten: keine; $f(x)\xrightarrow{x\to\infty}\infty$; Wendepunkte + Symmetrie: keine, $\mathbb{D}=(-\infty;1.25]$; $\mathbb{W}=(-\infty;3]$; Senkrechte Tangente bei $x=1.25$.

b) iv) $f(x)=\sqrt{1+x^2}$: Nst: keine; $T(0|1)$ (damit nicht monoton); Wendepunkte: keine; as zur y-Achse; $\mathbb{D}=\mathbb{R}$; $\mathbb{W}=[1;\infty)$;

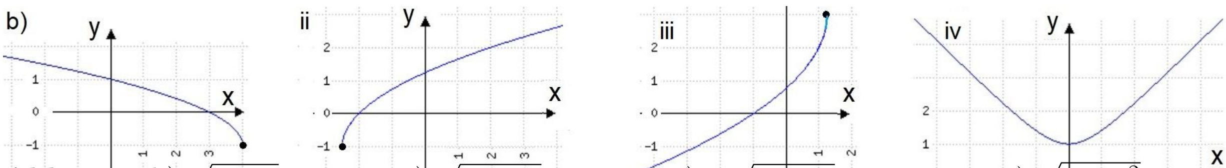


Abb. 360 b) $\sqrt{4-x}-1$; ii) $\sqrt{2x+5}-1$; iii) $-\sqrt{5+4x}+3$; iv) $\sqrt{1+x^2}$;

(Zusatz:) Asymptoten: $y=\pm x$; Beweis: $\sqrt{x^2+1}-x=\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\xrightarrow{x\to\infty} 0$; $\sqrt{x^2+1}+x=\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\xrightarrow{x\to-\infty} 0$;

$[\![\frac{1}{(\sqrt{(-\infty)^2+1}-(-\infty)} = \frac{1}{\sqrt{\infty^2+\infty}} = 0]\!]$ Tatsächlich ist der Graph eine Hyperbel ($K_{\frac{1}{x}}$ um 45° gedreht).

b) v) $f(x) = \sqrt{x^2+2x+1} - 2 = \sqrt{(x+1)2} - 2 = |x+1| - 2$; $f(x)$ ist an der Stelle -1 nicht differenzierbar. Nst: $-2; 0$ Extrema: globales Minimum an der Stelle $x = -1$ (ohne dort differenzierbar zu sein): $f(-1) = -2$; Monotonie: keine; Asymptoten: keine waagrechte und auch keine senkrechte Asymptote. Zusatz: Zwei schiefe Asymptoten $y = x-1$ und $y = -x-3$; $f(x) \xrightarrow{x\to\pm\infty} \infty$; Wendepunkte: keine, K_f ist achsensymmetrisch zur Achse $x = -1$; $\mathbb{D} = \mathbb{R}; \mathbb{W} = [-1; \infty)$.

b) vi) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-4x+3}{3}} - 1$; $f(x)$ hat an den Stellen 1 und 3 senkrechte Tangenten. Nst: $0; 4$ Extrema: globales Minimum an der Stellen $x = 1$ und 3 (ohne dort differenzierbar zu sein); $f(1) = f(3) = -1$; Monotonie: keine; Asymptoten: keine waagrechte und auch keine senkrechte Asymptote. Zusatz: Zwei schiefe Asymptoten $y = \frac{x-2}{\sqrt{3}} - 1$ und $y = \frac{-x+2}{\sqrt{3}} - 1$; $f(x) \xrightarrow{x\to\pm\infty} \infty$; Wendepunkte: keine, K_f ist achsensymmetrisch zur Achse $x = 2$; $\mathbb{D} = \mathbb{R}; \mathbb{W} = [-1; \infty)$. K_f ist eine halbe, stehende Hyperbel.

b) vii) $f(x) = \sqrt{\frac{8+2x-x^2}{8}} - 1$; $f(x)$ hat an den Stellen -2 und 4 senkrechte Tangenten. Nst: $-1; 3$ Extrema: globales Maximum $f(1) \approx 0.06$; globales Randminimum an der Stellen $x = -2$ und 4 (ohne dort differenzierbar zu sein): $f(-2) = f(4) = -1$; Monotonie: keine; Asymptoten: keine; $f(x) \xrightarrow{x\to\pm\infty} \infty$; Wendepunkte: keine, K_f ist achsensymmetrisch zur Achse $x = 1$; $\mathbb{D} = (-\infty; 1] \cup [3; \infty); \mathbb{W} = [-1; \infty)$. K_f ist eine halbe Ellipse.

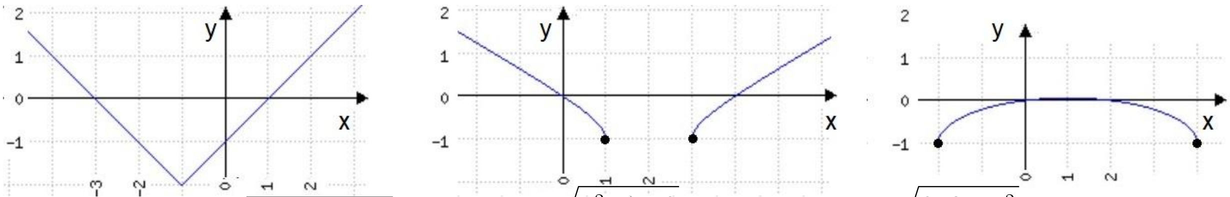


Abb. 361 a) v) $\sqrt{x^2+2x+1} - 2$ vi) $\sqrt{\frac{x^2-4x+3}{3}} - 1$; vii) $\sqrt{\frac{8+2x-x^2}{8}} - 1$;

c) i $f''(x) = \left(\frac{1}{\ln(x)}\right)'' = \left(\frac{-1}{x\ln^2(x)}\right)' = \frac{\ln(x)+2}{x^2\ln^3(x)}$. Monotonie: keine; Asymptoten: $x = 1$ und $y = 0$; Wendepunkt: $W(e^{-2}; -0.5)$, Symmetrie: keine; $\mathbb{D} = (0; \infty)\backslash\{1\}; \mathbb{W} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

f kann bei $x = 0$ stetig ergänzt werden: $\overline{f}(0) = 0$, $\overline{f}$ ist hier die stetige Ergänzung von $f(x)$ (das ist die offizielle Notation wie zB bei Wikipedia) und nicht die Umkehrfunktion von $f(x)$.$\overline{f}$ hat dann an der Stelle 0 eine senkrechte Tangente; und ein lokales Maximum;

c) ii $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$; $f(x)$ ist streng monoton fallend; Asymptoten: $x = 0$ und $y = 0$; Extrem und Wendepunkte, Nullstellen und Symmetrie: keine; $\mathbb{D} = (0; \infty); \mathbb{W} = (0; \infty)$.

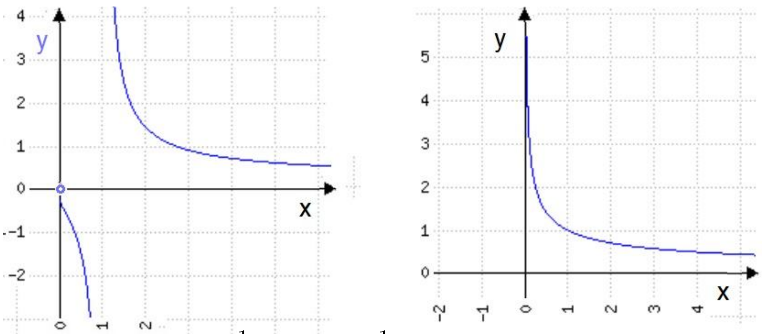


Abb. 362 a) i) $\frac{1}{\ln(x)}$ ii) $\frac{1}{\sqrt{x}}$;

d) a i) $f(x) = \ln(4-x)$: Spiegelung an der $y-$Achse, dann Verschiebung um 4 nach rechts;

a ii) $f(x) = \ln(2(x+2.5))$: Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in $x-$Richtung; Verschiebung um 2.5 nach links;

a iii) $f(x) = -\ln(4(1.25 - x))$: Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{4}$ in $x-$Richtung; Spiegelung an der x und an der $y-$Achse, dann Verschiebung um 1.25 nach rechts;

c) b i) $f(x) = \sqrt{4-x} - 1$: Spiegelung an der $y-$Achse, dann Verschiebung um 4 nach rechts und um 1 nach unten;

b ii) $f(x) = \sqrt{2(x+2.5)} - 1$: Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in $x-$Richtung; Verschiebung um 2.5 nach links und um 1 nach unten;

b iii) $f(x) = -\sqrt{4(1.25-x)} + 3$: Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{4}$ in $x-$Richtung; Spiegelung an der x und an der $y-$Achse, dann Verschiebung um 1.25 nach rechts;

Aufg. 164/431: a) x^2 ist nicht umkehrbar. $y^2 = x$ kann 0 eine oder zwei Lösungen haben.
b) $f(x) = x^2$ ist nicht umkehrbar. Es gilt (ua) $f(-3) = f(3)$.
c) i) Eine Funktion f heißt umkehrbar (injektiv, eineindeutig) $\Leftrightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
ii) $f(x) = x^2$ hat ein inneres Extremum und ist damit nicht streng monoton.
Monotoniesatz: Innere Extremata zerstören die strenge Monotonie.
iii) $f'(x) \neq 0$ (auf $[a;b]$) $\Rightarrow f(x)$ ist streng monoton $\Rightarrow f(x)$ ist umkehrbar.

d) i) $(e^x)' = e^x > 0 \Rightarrow f$ ist smw und $f^{-1}(x) = \overline{f}(x) = \ln(x)$;
ii) $(e^{2x+1})' = 2e^{2x+1} > 0 \Rightarrow f$ ist smw und $f^{-1}(x) = \overline{f}(x) = \frac{\ln(x)-1}{2}$;
iii) $(e^{3x-6})' = 3e^{3x-6} > 0 \Rightarrow f$ ist smw und $f^{-1}(x) = \overline{f}(x) = \frac{\ln(x)+6}{3}$;
iv) $(e^{-x})' = -e^{-x} < 0 \Rightarrow f$ ist smf und $f^{-1}(x) = \overline{f}(x) = \frac{\ln(x)+6}{3}$;
v) $(e^{-2x+1})' = -2e^{-2x+1} < 0 \Rightarrow f$ ist smf und $f^{-1}(x) = \overline{f}(x) = \frac{\ln(x)-1}{2}$;
vi) $(e^{-3x-6})' = -3e^{-3x-6} < 0 \Rightarrow f$ ist smf und $f^{-1}(x) = \overline{f}(x) = \frac{\ln(x)+6}{3}$;

Verallgemeinert sind alle Funktionen der Form $f(x) = e^{ax+b}$ für $a > 0$ smw und für $a < 0$ smf also für $a \neq 0$ umkehrbar und $f^{-1}(x) = \overline{f}(x) = \frac{\ln(x)-b}{a}$;

e) $f(x) = \ln(ax+b)$ ist definiert für $x > \frac{-b}{a}$ falls $(a > 0)$ und für $x < \frac{-b}{a}$ falls $(a < 0)$ ist. $(\ln(ax+b))' = \frac{a}{ax+b}$; der Ausdruck $ax + b > 0$ (sonst wäre der ln nicht definiert gewesen); damit hat $f'(x) = \frac{a}{ax+b}$ das Vorzeichen von a.
$f(x)$ ist damit smf falls $a < 0; \mathbb{D} =]-\infty; \frac{-b}{a}[$ und smw falls $a > 0, \mathbb{D} =]\frac{-b}{a}; \infty[$.
$x = \ln(ay+b) \Leftrightarrow e^x = ay + b \Leftrightarrow \frac{e^x - b}{a} = y = f^{-1}(x) = \overline{f}(x)$.

f) $f(x) = \sqrt{ax+b}$ ist (analog zum Logarithmus) definiert für $x > \frac{-b}{a}$ falls $(a > 0)$ und für $x < \frac{-b}{a}$ falls $(a < 0)$ ist. $(\sqrt{ax+b})' = \frac{a}{2\cdot\sqrt{ax+b}}$; wieder ist der Ausdruck $ax + b > 0$ (sonst wäre der Radikand negativ); damit hat $f'(x)$ das Vorzeichen von a.
$f(x)$ ist damit smf falls $a < 0; \mathbb{D} =]-\infty; \frac{-b}{a}]$ und smw falls $a > 0, \mathbb{D} = [\frac{-b}{a}; \infty[$.
$x = \sqrt{ay+b} \Leftrightarrow x^2 = ay + b \Leftrightarrow \frac{x^2-b}{a} = y = f^{-1}(x) = \overline{f}(x)$.

g) $f(x) = (e^{x-3})^2 = e^{2x-6}$, dann wie Teil d); $f^{-1}(x) = \overline{f}(x) = \frac{\ln(x)+6}{2}$.

h) f ist smw (oder smf) $\Rightarrow f$ ist umkehrbar.
Beweis: f ist smw $\Leftrightarrow (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)) \Leftrightarrow f$ ist umkehrbar.

i) i) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $f'(x) = x^2 + 2 > 0$ also streng monoton steigend, also umkehrbar,
ii) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $f'(x) = (1+x)e^x$ besitzt ein Extremum bei $x = -1$ und damit nicht umkehrbar,
iii) $\mathbb{D} =]-\infty; 3]$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3-x}} < 0$ also streng monoton fallend, also umkehrbar,
iv) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $f'(-x) = f(x)$ Graph ist achsensymmetrisch zu y-Achse, also nicht umkehrbar
v) $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$ und damit nicht umkehrbar,

j) i) für $x \in]-\infty; -2]$ oder $x \in [-2, \infty[$ umkehrbar
ii) für $x \in]-\infty; 0]$ oder $x \in [0, \infty[$ umkehrbar
iii) für $x \in]-\infty; \frac{3}{2}]$ umkehrbar
iv) das Problem der Aufgabe ist die senkrechte Asymptote bei $x = 0$, für $x \in]-\infty; 0)$ oder $x \in (0, \infty[$ umkehrbar

k) **i)** richtig, mit $f(-x) = f(x)$ existieren x-Werte mit gleichen Funktionswerten (falls $\mathbb{D}$ mehr als zwei Elemente hat); **ii)** falsch, sei $f(x) = x^3 - 3x$, dann ist K_f punktsymmetrisch zum Ursprung, aber nicht umkehrbar. **iii)** richtig, links und rechts der Extremstelle gibt es [nach dem ZWS] x-Werte mit gleichem Funktionswert. **iv)** richtig, weil [nach dem Monotoniesatz] diese Funktionen streng monoton sind (Hinweis: Konstante sind nicht umkehrbar, besitzen nach üblicher Definition aber unendlich viele Extremstellen), **v)** falsch, für f mit $f(x) = 2x$ besitzt die Ableitungsfunktion keine Umkehrfunktion. **vi)** falsch, die Graphen von $f(x) = \ln(x)$ und $\bar{f}(x) = f^{-1}(x) = e^x$ schneiden sich nicht. **vii)** richtig, zweimalige Spiegelung an der 1.Winkelhalbierenden liefert die identische Abbildung.

viii) (richtig) Gemeinsame Punkte müssen Fixpunkte bei der Spiegelung an der 1.Winkelhalbierenden sein und damit auf der 1.Winkelhalbierenden liegen. Spiegelt man die Tangente mit der Gleichung $y = mx + c$ an der 1.Winkelhalbierenden entsteht die Tangente der Umkehrfunktion mit $y = \frac{1}{m}x - \frac{c}{m}$ und damit beträgt das Produkt der Steigungen -1.

ix) (richtig) Es gilt: $m = \frac{1}{m}$, woraus die Behauptung folgt; anschaulich heißt das, dass der Graph von f gleich der 1. Winkelhalbierende ist oder die Winkelhalbierende senkrecht schneidet.

l) i) Der Graph der Funktion ist symmetrisch zur 1.Winkelhalbierenden und damit ist die Funktion gleich ihrer Umkehrfunktion. Ihr Graph ist ein Viertelkreis um (0/0) mit $r = 3$.

ii) $\bar{f} = f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln(x) + \frac{3}{2}$ mit $\mathbb{D}_{f^{-1}} =]0;\infty[$ und $\mathbb{W}_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ und
$f(f^{-1}(x)) = e^{2(\frac{1}{2}\ln(x)+\frac{3}{2})-3} = x$ und $f^{-1}(f(x)) = \frac{1}{2}\ln(e^{2x-3}) + \frac{3}{2} = x$.

m) siehe Teil 130/5.10.4.

n) $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}|x < e^2$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^2 - 1$, $f'(x) = \frac{1}{x-e^2}$. Es gilt $f(0) = 2, f'(0) = \frac{-1}{e^2}$.
$y = \frac{-1}{e^2}(x - 0) + 2$.

o) i) $\mathbb{D}_f = (-\infty; 2]$; $\mathbb{W}_f = [0;\infty)$.
ii) $f(x) = \sqrt{3}\cdot\sqrt{-(x-2)}$; Streckung um $\sqrt{3}$ in $y-$Richtung danach Spiegelung an der y-Achse, danach Verschiebung um 2 nach rechts.
iii) $f'(x) = \frac{-3}{2\sqrt{6-3x}} < 0$ also ist f smf und damit umkehrbar.
$\bar{f}(x) = f^{-1}(x) = \frac{6-x^2}{3}$; $\mathbb{D}_{\bar{f}} = \mathbb{W}_f = [0;\infty)$ und $\mathbb{W}_{\bar{f}} = \mathbb{D}_f = \mathbb{D} = (-\infty; 2]$.

r) $f(x) = \frac{1}{x}$ ist nicht monoton aber umkehrbar (Definitionslücke!) und die Funktion aus 99/42j ist ohne Lücke umkehrbar. s) $f'(x) > 0$ ohne Lücke $\Rightarrow f$ ist smw $\Rightarrow f$ ist umkehrbar.

Aufg. 165/432: c) Teil entnommen aus Prof. Adameks Mathevorkurs auch Wille: Analysis

a) $\sin^2(y) + \underline{\cos^2(y)} = 1 \Leftrightarrow \cos^2(y) = 1 - \sin^2(y) \Leftrightarrow \cos(y) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(y)}$ oder
$\cos(\arcsin(x)) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \pm\sqrt{1 - x^2}$

Wir kennen diese Formel von der Kreisgleichung **(Formel 31)**

$(\tan(x))' = (\frac{\sin(x)}{\cos(x)})' \overset{QR}{=} \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) - \sin(x)\cdot(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$,

b) i) $y = \sin^{-1}(x) \Leftrightarrow \sin(y) = x$ abgeleitet: $y' \cdot \cos(y) = 1 \Leftrightarrow y' = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\cos(\sin^{-1}(x))} = \frac{(\pm)\,1}{\sqrt{1-x^2}}$:

ii) $\cos^2(y) + \sin^2(y) = 1 \Leftrightarrow \cos(y) = (\pm)\sqrt{1 - \sin^2(y)} = (\pm)\sqrt{1 - \sin^2(\sin^{-1}(x))} = (\pm)\sqrt{1 - x^2}$;

In der Tat: $\pm\sqrt{1 - x^2}$ ist der Einheitskreis

$y = \cos^{-1}(x) \Leftrightarrow \cos(y) = x$ abgeleitet: $y' \cdot \sin(y) = 1 \Leftrightarrow y' = \frac{1}{\sin(y)} = \frac{1}{\sin(\cos^{-1}(x))} = \frac{(\pm)\,1}{\sqrt{1-x^2}}$:

iii) Mit $(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x)$ kann die Ableitung von $\tan^{-1}(x)$ berechnet werden:

$y = \tan^{-1}(x) \overset{\tan(.)}{\Longleftrightarrow} \tan(y) = x$ implizit nach x abgeleitet:

$y' \cdot (1+\tan^2(y)) = 1 \overset{:(1+\tan^2(y))}{\Longleftrightarrow} y' = \frac{1}{1+\tan^2(y)} \overset{y=\tan^{-1}(x)}{\Longleftrightarrow} y' = \frac{1}{1+\tan^2(\tan^{-1}(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$

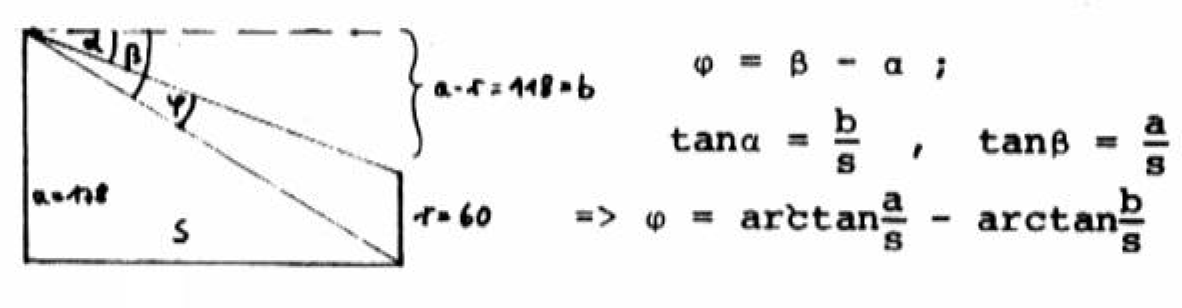


Abb. 363 Schottenrockaufgabe

c) $\varphi'(s) = \left(\arctan\left(\frac{a}{s}\right) - \arctan\left(\frac{b}{s}\right)\right)' \overset{\text{Kettenregel}}{=\!=\!=} -a \cdot s^{-2} \cdot \frac{1}{1+(\frac{a}{s})^2} - (-b \cdot s^{-2} \cdot \frac{1}{1+(\frac{b}{s})^2})$

$= \frac{-a}{s^2(1+(\frac{a}{s})^2)} - \frac{-b}{s^2(1+(\frac{b}{s})^2)} = \frac{b}{s^2+b^2} - \frac{a}{s^2+a^2} \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow b \cdot (s^2+a^2) = a \cdot (s^2+b^2) \Leftrightarrow bs^2 + a^2b = as^2 + ab^2 \Leftrightarrow bs^2 - as^2 = ab^2 - a^2b \Leftrightarrow (b-a)s^2 = ab(b-a)$

falls $a \neq b$ oder $r > 0$, was bei dieser Aufgabe implizit so sein sollte (ebenso $a, b > 0$)

$\Leftrightarrow s^2 = ab$ oder $s = (\pm)\sqrt{ab}$

(das - sagt, dass sie auch vorne laufen und nach hinten schauen könnte)

hier $s = \sqrt{(178-60) \cdot 178} = \sqrt{21004} \approx 145.$

Der maximale Blickwinkel wird bei $s = 145cm$ erreicht und ist $\varphi(145) \approx 11.7°$ (in Pi-Teilen ≈ 0.2).

Aufg. 167/433: alle Rechnungen finden Sie unten.

a) $f'(t) = 0 \Rightarrow H(1.386; 2500)$;
Die maximale Zuflussrate ist $2500\frac{l}{h}$.

b) $f''(t) = 0 \Rightarrow W(2.773; 1875)$; $f'(2.773) = -625$.
Der maximale Zuflussratenabfall $625\frac{l}{h^2}$ ist nach 2.773 Std.

c) $f(t) = 2000 \Rightarrow t \approx 0.647$ oder $t \approx 2.572$;
Die Zuflussrate ist für $0.647 < t < 2.572$ größer 2000.

e) $\lim_{t\to\infty} F(t) = 10000$
In den Tank werden langfristig 10000l fließen. (Abb. 364)

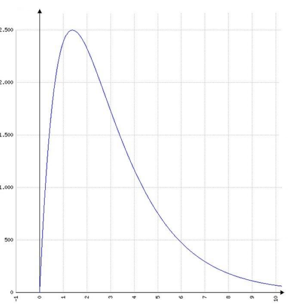


Abb. 364 Wassertank

f) $\bar{m} = \frac{1}{10}\int_0^{10} f(t)dt \Rightarrow \bar{m} = \frac{1}{10}(F(10)-F(0)) \approx \frac{1}{10}(9865.695-0) = 986.5695$; Der mittlere momentane Änderungsrate etwa 986.6 l/min.

Lösung ohne GTR:

a) $f'(t) = (10000 \cdot (e^{-0.5t} - e^{-t}))' = 10000 \cdot (-0.5 \cdot e^{-0.5t} - (-1) \cdot e^{-t}) = -5000e^{-0.5t} + 10000 \cdot e^{-t}$,

$f''(t) = (-5000e^{-0.5t} + 10000 \cdot e^{-t})' = 2500e^{-0.5t} - 10000 \cdot e^{-t}$,

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow -5000 \cdot e^{-0.5t} + 10000 \cdot e^{-t} = 0 \overset{\cdot e^t}{\Longleftrightarrow} -5000 \cdot e^{0.5t} + 10000 = 0 \overset{:5000}{\Longleftrightarrow} -e^{0.5t} + 2 = 0 \overset{+e^{0.5t}}{\Longleftrightarrow}$
$e^{0.5t} = 2 \overset{\ln(.)}{\Longleftrightarrow} 0.5t = \ln(2) \overset{\cdot 2}{\Longleftrightarrow} t = 2\ln(2) = \ln(2^2) = \ln(4)$;

$f''(2\ln(2)) = 2500e^{-0.5\cdot 2\ln(2)} - 10000\cdot e^{-2\ln(2)} = 2500e^{-\ln(2)} - 10000\cdot e^{-\ln(4)} = 2500\frac{1}{e^{\ln(2)}} - 10000\cdot\frac{1}{e^{\ln(4)}} = 2500\frac{1}{2} - 10000 \cdot \frac{1}{4} = -1250 < 0 \Rightarrow$ Maximum.

$f(2\ln(2)) = 10000 \cdot (e^{-0.5\cdot 2\ln(2)} - e^{-2\ln(2)}) = 10000 \cdot (e^{-\ln(2)} - e^{-\ln(4)}) = 10000 \cdot (\frac{1}{e^{\ln(2)}} - \frac{1}{e^{\ln(4)}}) = 10000 \cdot (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = 2500$;

Randwerte: $f(0) = 10000 \cdot (e^{-0.5\cdot 0} - e^{-0}) = 0$; $f(\infty) = 10000 \cdot (e^{-0.5\cdot\infty} - e^{-\infty}) = 0$ damit ist das Maximum global.

b) $f'''(t) = (2500e^{-0.5t} - 10000 \cdot e^{-t})' = -1250e^{-0.5t} + 10000 \cdot e^{-t}$,

WP $2500e^{-0.5t} - 10000 \cdot e^{-t} = 0 \overset{\cdot e^t}{\Longleftrightarrow} 2500e^{0.5t} - 10000 = 0 \xLeftrightarrow{+10000:2500} e^{0.5t} = 4 \overset{\ln(.)}{\Longleftrightarrow} 0.5t = \ln(4) \overset{\cdot 2}{\Longleftrightarrow}$ $t = 2\ln(4) = \ln(16)$;

$f'''(2\ln(4)) = -1250e^{-0.5\cdot 2\ln(4)} + 10000 \cdot e^{-2\ln(4)}$

c) MA: $f(t) = 2000$ für $f(t)$ eingesetzt: $10000 \cdot (e^{-0.5t} - e^{-t}) = 2000 \xLeftrightarrow{:10000,-0.2} e^{-0.5t} - e^{-t} - 0.2 = 0$.

Substitution $e^{-0.5t} = u$: $u - u^2 - 2000 = 0 \overset{MNF}{\Longleftrightarrow} u_1 \approx 0.2734$, $u_2 \approx 0.7236$.

Rücksubstitution: $e^{-0.5t} = u$.

$e^{-0.5t} = 0.2734 \Leftrightarrow t_2 = -2\ln(0.2734) \approx 2.5936$; $e^{-0.5t} = 0.7236 \Leftrightarrow t_1 = -2\ln(0.7236) \approx 0.647$;

d) $F'(t) = (10000 - 20000e^{-0.5t} + 10000e^{-t})' = 10000e^{-0.5t} - 10000e^{-t} = f(t)$ und

$F(0) = 10000(1 - 2e^{-0.5\cdot 0} + e^{\cdot 0}) = 0$.

Aufg. 167/434: a) $f''(t) = (16 \cdot e^{-0.5t} - 14e^{-t} - 2)'' = (-8 \cdot e^{-0.5t} + 14e^{-t})' = 4 \cdot e^{-0.5t} - 14e^{-t}$.

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow -8 \cdot e^{-0.5t} + 14e^{-t} = 0 \overset{\cdot e^t}{\Longleftrightarrow} -8 \cdot e^{0.5t} + 14 = 0 \xLeftrightarrow{+8\cdot e^{0.5t}} 14 = 8 \cdot e^{0.5t} \xLeftrightarrow{:8,\ln(.)} \ln(\frac{14}{8}) = 0.5t$ $\overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} t = 2\ln(1.75) \approx 1.119$.

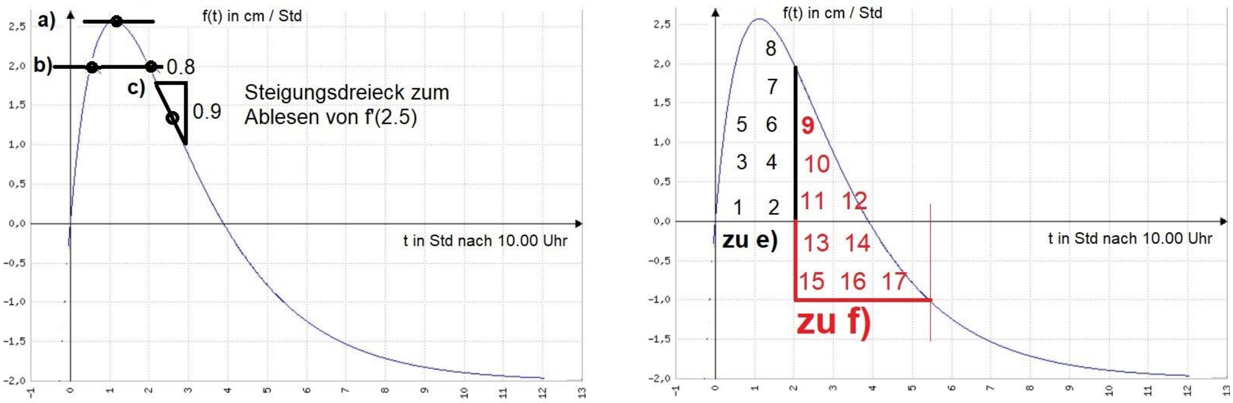


Abb. 365 momentane Änderungsrate dieser Schneehöhe zu Ag 167/434

Auf die Klassifikation des Extremums kann (des gegebenen Graphen wegen) verzichtet werden.

$f(2\ln(1.75)) = 16 \cdot e^{-0.5\cdot 2\ln(1.75)} - 14e^{-2\ln(1.75)} - 2 = 16 \cdot e^{-\ln(1.75)} - 14e^{\ln((\frac{4}{7})^2)} - 2$

$= 16 \cdot \frac{4}{7} - 14\frac{16}{49} - 2 = \frac{18}{7} \approx 2.571$.

Die maximale momentane Änderungsrate der Schneehöhe zum Zeitpunkt $t = 2\ln(1.75)$ oder etwa um 11.07 Uhr und beträgt etwa $2.571\frac{cm}{h}$.

b) $f(x) = 2 \Rightarrow S_1(0.5/2)$ und $S_2(2/2)$, die Werte sind aus der Abbildung abgelesen (Operator 'angeben'). Zwischen etwa 10.30 Uhr und 12.00 Uhr ist die momentane Änderungsrate größer als 2 $\frac{cm}{h}$.

c) Da f die Ableitungsfunktion der Schneehöhe F ist, ist die Schneehöhe bei der Nullstelle von f mit VZW von + nach − maximal.

$16 \cdot e^{-0.5t} - 14e^{-t} - 2 = 0$ Substitution $e^{-0.5t} = w$; $16 \cdot w - 14w^2 - 2 = 0$

$w_{1,2} = \frac{-16\pm\sqrt{16^2-4\cdot 2\cdot 14}}{-28} \Rightarrow w_1 = 1; w_2 = \frac{1}{7}$;

Rücksubstitution $e^{-0.5t_1} = 1 \Rightarrow t_1 = 0$; $e^{-0.5t_2} = \frac{1}{7} \Rightarrow t_2 = 2\ln(7) \approx 3.892$.

Die maximale Schneehöhe zum Zeitpunkt $t = 2\ln(7)$ oder etwa um 13.54 Uhr.
Bei $x = 0$ (um 10.00 Uhr) VZW $-$ nach $+$ hat die Schneehöhe ein Minimum.

d) $f''(x) = 0 \Rightarrow 4 \cdot e^{-0.5t} - 14e^{-t} = 0 \overset{\cdot e^t}{\Longleftrightarrow} 4 \cdot e^{0.5t} - 14 = 0$

$\xLeftrightarrow{+14,:4,\ln(.)} 0.5t = \ln(3.5) \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} t = 2\ln(3.5) \approx 2.506;$

$f'(2\ln(3.5)) = -8/3.5 \cdot e^{-0.5 \cdot 2\ln(3.5)} + 14e^{-2\ln(3.5)} = -\frac{16}{7} + 14\frac{4}{49} = -\frac{8}{7} \approx -1.143.$

$f'(2.5)$ kann beim Operator 'bestimmen' auch mit Hilfe eines Steigungsdreiecks aus der Zeichnung abgelesen werden. $f'(2.5) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-0.9}{0.8} \approx -1.1$

Die mÄR fällt gegen 12.30 Uhr am stärksten. Sie fällt um etwa $1.1\frac{cm}{h^2}$ (Die Abnahme ist eine negative Zunahme). Wegen der gegebenen Zeichnung, kann auf dem zweiten Teil der hinreichende Bedingung ($f'''(2.5) \neq 0$) verzichtet werden.

Weil es keine weitere Stelle mit $f''(x) = 0$ gibt, muss die maximale Zunahme am Rand ($x = 0$ oder $x \to \infty$) sein. $f'(0) = -8 \cdot e^{-0.5 \cdot 0} + 14e^{-0} = 6$, $\lim_{t\to\infty} f'(t) = -8 \cdot 0 + 14 \cdot 0 = 0$. Damit ist die maximale Zunahme am Anfang mit $6\frac{cm}{h^2}$.

e) $\int_0^2 f(t)dt = \int_0^2 (16 \cdot e^{-0.5t} - 14e^{-t} - 2)dt = \left[-32 \cdot e^{-0.5t} + 14e^{-t} - 2t\right]_0^2$

$= -32 \cdot e^{-1} + 14e^{-2} - 4 - (-32 + 14) = \frac{14}{e^2} - \frac{32}{e} + 14 \approx 4.1225.$

Die Zunahme der Schneehöhe kann beim Operator 'bestimmen' auch mit Hilfe der Abbildung ermittelt werden. $\int_0^2 f(x)dx \approx 8$ Rechtecke. Jedes Rechteck steht
für $0.5\ \frac{cm}{h} \cdot 1h = 0.5\,cm$. Die Schneehöhe ist also um 4 cm gewachsen ('gerechnet' 4.1225 cm).

f) Durch die Schneekanonen wird die mÄS um 1 erhöht oder die $x-$Achse um 1 nach unten verschoben.

Rechnung: $16 \cdot e^{-0.5t} - 14e^{-t} - 2 + 1 = 0 \xLeftrightarrow{w=e^{-0.5t}} 14w^2 - 16w + 1 = 0 \Leftrightarrow w_{1,2} = \frac{16\pm\sqrt{200}}{28}$; $w_1 \approx 1.0765$, $w_2 \approx 0.0664$. Rücksubstitution $t = -2\ln(w)$: $t_1 \approx -0.1474$ (vor 12.00 Uhr), $t_2 \approx 5.424$ (nach 12.00 Uhr),

Der Zeitpunkt der maximalen Schneehöhe ist jetzt bei $t \approx 5.424h$ oder gegen 15.25 Uhr. Der Zeitpunkt verschiebt sich also um $5.424 - 3.892 = 1.532$ Stunden.

Das Schaubild schließt mit der x-Achse etwa 17 Kästchen ein. Damit beträgt die Schneehöhe etwa
$17 \cdot 0.5 + 140 = 148.5\ cm$ ('exakt' 148.51 cm).

Oder Rechnung: $\Delta h \approx \int_0^2 f(t)dt + \int_2^{5.424}(f(t) + 1)dt \approx 4.123 + \int_2^{5.424}(16 \cdot e^{-0.5t} - 14e^{-t} - 1)dt = 4.123 + \left[-32 \cdot e^{-0.5t} + 14e^{-t} - t\right]_2^{5.424} \approx 4.123 + 4.390 = 8.513$. Damit gilt $h \approx 148.513cm$.

g) Sei $H(t)$ die Funktion, die die Schneehöhe beschreibt.
$\int(16e^{-0.5t} - 14e^{-t} - 2)dt = \frac{16e^{-0.5t}}{-0.5} - \frac{14e^{-t}}{-1} - 2t + c = H(t)$ für noch zu bestimmendes c.
$H(0) = 140 \Rightarrow = -32e^{-0.5 \cdot 0} + 14e^{-0} - 2 \cdot 0 + c = 140 \Rightarrow c = 158.$
Die Schneehöhe zum Zeitpunkt t ($0 \leq t \leq 2$) ist $F(t) = -32e^{-0.5t} + 14e^{-t} - 2x + 158$ cm hoch.

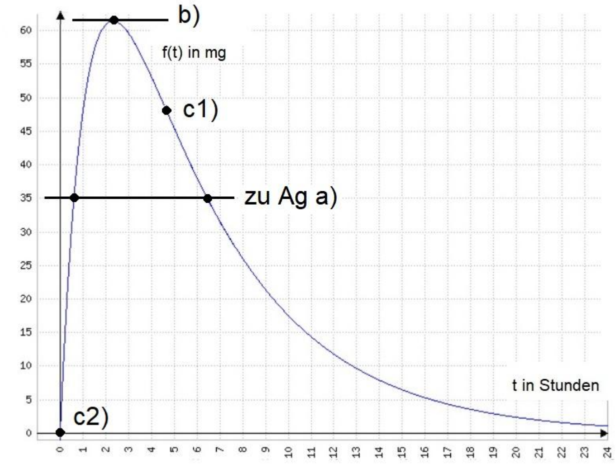
h) Wann beginnt ein Zwei-Stunden-Zeitraum in welchem die Schneehöhe $4cm$ zunimmt?
GTR: $x \approx 0.884$. Gegen 12.53Uhr beginnt dieser Zeitraum.

Aufg. 168/435: a) Der Operator 'bestimmen' sagt, dass die Zeichnung verwendet werden darf; hier sogar muss. $f(x) \geq 35$ (aus Graph abgelesen oder mit GTR gerechnet) $t_1 \approx 0.6$ oder $t_2 \approx 6.5$; Das Medikament wirkt zwischen 0.6 Std und 6.5 Std nach dem Einspritzen.

b) $f''(t) = (130 \cdot e^{-0.2t} - 130 \cdot e^{-0.8t})'' = (-26 \cdot e^{-0.2t} + 104 \cdot e^{-0.8t})' = 5.2 \cdot e^{-0.2t} - 83.2 \cdot e^{-0.8t}$.

$f'(t) = 0$: $-26 \cdot e^{-0.2t} + 104 \cdot e^{-0.8t} = 0 \xLeftrightarrow{\cdot e^{0.8t}} -26 \cdot e^{0.6t} + 104 = 0 \xLeftrightarrow{+26 \cdot e^{0.6t},:26,\ln(.)} 0.6t = \ln(\frac{104}{26})$ $\xLeftrightarrow{:0.6} t_3 = \frac{5}{3} \cdot \ln(4) \approx 2.3105$ $f(t_3) \approx 61.4212$; Die maximale Wirkstoffmenge im Körper ist etwa

2.3 Stunden nach dem Einspritzen, es sind etwa 61.4 mg Wirkstoff im Blut. Wegen der gegebenen Zeichnung, darf auf dem zweiten Teil der hinreichende Bedingung ($f''(t_3) < 0$) verzichtet werden.



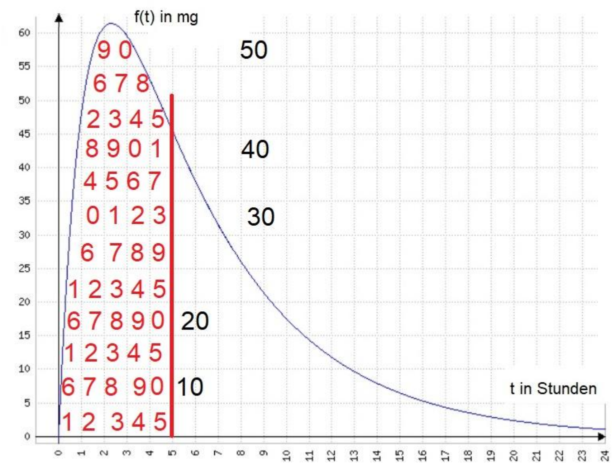


Abb. 366 Wirkstoffmenge zu Ag 168/435 $f(t) = 130(e^{-0.2t} - e^{-0.8t})$

c) $f''(x) = 0$: $5.2 \cdot e^{-0.2t} - 83.2 \cdot e^{-0.8t} = 0 \overset{\cdot e^{0.8t}}{\Longleftrightarrow} 5.2 \cdot e^{0.6t} - 83.2 = 0 \overset{+83.2,:5.2,\ln(.)}{\Longleftrightarrow} 0.6t = \ln(\frac{83.2}{5.2}) \overset{:0.6}{\Longleftrightarrow} t_4 = \frac{5}{3}\ln(16) \approx 4.621$ $f'(4.621) \approx -7.7386$. Etwa 4.6 Stunden nach dem Einspritzen ist der Konzentrationsabfall minimal (nicht gefragt) dieser ist etwa 7.7 $\frac{mg}{h}$. Weil kein weiterer Wendepunkt ermittelt werden kann, ist die maximale Konzentrationszunahme am Anfang für $t_5 = 0$ mit 78 $\frac{mg}{h}$. Wegen der gegebenen Zeichnung, kann auf dem zweiten Teil der hinreichende Bedingung ($f'''(t_4) \neq 0$) verzichtet werden.

d) $\int_0^5 f(t)dt$ aus Graph 50 Rechtecke mit 5 =250 $mg \cdot Std$ (GTR) 251.35 $mg \cdot Std$.

Oder gerechnet: $\int_0^5 f(t)dt = \int_0^5 (130 \cdot e^{-0.2t} - 130 \cdot e^{-0.8t})dt = \left[-650 \cdot e^{-0.2t} + 162.5 \cdot e^{-0.8t}\right]_0^5 = -650 \cdot e^{-1} + 162.5 \cdot e^{-4} - (-650 + 162.5) \approx 251.3545$.

Damit ist der Mittelwert etwa $\frac{251.35}{5} = 50.27$ mg.

e) Zu welchem Zeitpunkt nimmt die Wirkstoffmenge im Blut um $2\frac{mg}{h}$ zu?
GTR $t \approx 2$. Nach zwei Stunden nimmt die Wirkstoffmenge im Blut um $2\frac{mg}{h}$ zu.

f) $\lim_{t\to\infty} 130(e^{-0.2t} - e^{-0.8t}) = 0$, damit ist die waagrechte Asymptote $y = 0$. Interpretation: Langfristig wird das Medikament vollständig abgebaut werden.

g) $\lim\limits_{t\to\infty} g(t)[= 80(1 - e^{-\infty})] = 80$; Langfristig befinden sich 80 mg Wirkstoff im Blut.

h) $g'(t) = (80(1 - e^{-0.05t}))' = -0.05 \cdot 80 \cdot (-e^{-0.05t}) = 4 \cdot e^{-0.05t} > 0$ weil e^x immer > 0 ist, damit ist (nach dem Monotoniesatz) $g(t)$ smw.

i) $g'(x) = 1 \Leftrightarrow 4 \cdot e^{-0.05t} = 1 \overset{:4}{\Leftrightarrow} e^{-0.05t} = 0.25 \overset{\ln .}{\Longleftrightarrow} -0.05t = \ln(0.25) \overset{\cdot(-20)}{\Longleftrightarrow} t = -20\ln(0.25) = 20\ln(4) \approx 27.7$.

Nach etwa 27.7 Minuten beträgt die momentane Änderungsrate der Wirkstoffmenge im Blut $1\frac{mg}{Min}$.

j) Mittlere Wirkstoffmenge: Beachten Sie, dass $g(t)$ mit t in Minuten angegeben ist.

$$m = \frac{1}{240} \cdot \int_0^{240} (80(1 - e^{-0.05t})dt = \frac{80}{240} \cdot \left[x - \frac{e^{-0.05t}}{-0.05}\right]_0^{240}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left[(240 + \cdot 20e^{-0.05\cdot 240}) - (0 + 20 \cdot e^{-0.05\cdot 0})\right] \approx 73.3.$$

Die mittlere Wirkstoffmenge in den ersten 4 Stunden beträgt etwa 73,3 mg.

k) Frage im Sachzusammenhang: Wann beginnt ein 15-Minuten-Zeitraum, in welchem die Wirkstoffmenge im Blut um 30 mg zunimmt?

Aufg. 169/436: (Alle y- Werte sind gerundet)

a) $f'(t) = 0 \Rightarrow H(10; 40.179)$;
Die Maximaltemperatur ist etwa $40.179°C$.

b) $f''(t) = 0 \Rightarrow W(20; 39.207)$; $f'(20) \approx -0.1353$.
Der maximale Temperaturabfall ist $0.1353 \frac{°C}{h}$.

c) $f(t) = 37 \Rightarrow t \approx 44.63$; (bei $t \approx 0.527$ steigt das Fieber)
Die Temperatur wird nach etwa 44.63 Stunden unterschritten.

d) $\lim_{t\to\infty} f(t) = 36.5$
Die Temperatur geht langfristig gegen $36.5°\ C$. (Abb. 367)

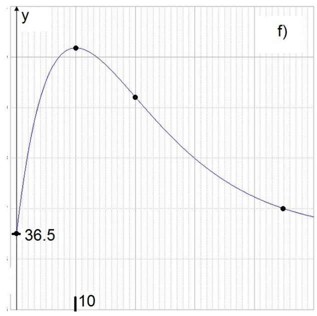


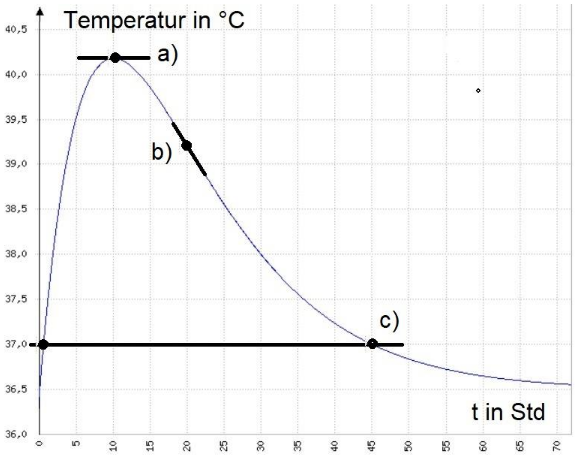
Abb. 367 Fieberkurve

e) Zu welchem Zeitpunkt nimmt die Temperatur um $0.1\ \frac{°C}{h}$ ab?

GTR: $t \approx 14.1$ oder $t \approx 29.9$ Nach etwa 14 und nach etwa 30 Std fällt die Temperatur um $0.1\ \frac{°C}{h}$.

f) $F'(t) = (36.5t - 10t \cdot e^{-0.1t} - 100 \cdot e^{-0.1t})' \xlongequal{\text{Produktregel}}$
$36.5 - 10 \cdot e^{-0.1t} - 10t \cdot (-0.1) \cdot e^{-0.1t} - 100 \cdot (-0.1) \cdot e^{-0.1t} = 36.5 + t \cdot e^{-0.1t} = f(t)$.

$\bar{m} = \frac{1}{48} \int_0^{48} f(t)dt \Rightarrow \bar{m} \approx 38.484°\ C$; Die mittlere Temperatur ist etwa $38.484°\ C$.



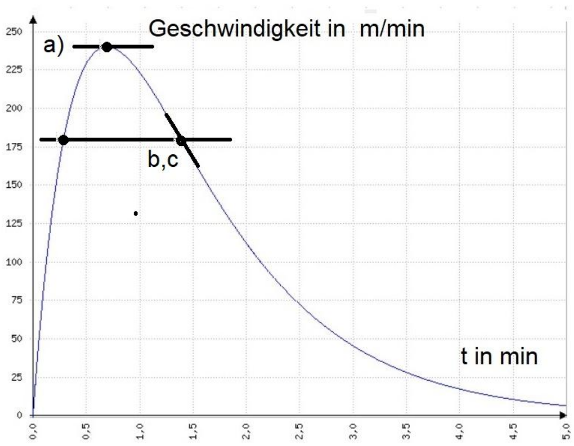


Abb. 368 Fieberkurve zu Ag 169/436 Motorboot zu Ag 169/437

a) $f''(t) = (36.5 + t \cdot e^{-0.1t})'' = (e^{-0.1t} - 0.1t \cdot e^{-0.1t})' = (0.1(10 - t)e^{-0.1t})'$

$= -0.1 \cdot e^{-0.1t}(1 - 0.1t) - 0.1e^{-0.1t} = 0.01(t - 20) \cdot e^{-0.1t}$;

Extremum: $e^{-0.1t}(1 - 0.1t) = 0 \Leftrightarrow 1 - 0.1t = 0 \Leftrightarrow t = 10$;

$f''(10) = 0.01(10 - 20) \cdot e^{-0.1 \cdot 10} < 0 \Rightarrow$ Maximum.

smf: Für $t > 10$ ist $10 - t < 0$ also $f'(t) = 0.1e^{-0.1t}(10 - t) < 0$ damit ist $f'(t) < 0$ für $t > 10$, damit ist f smf.

Aufg. 169/437:

a) $v'(t) = 0 \Rightarrow H(0.693; 240)$;
Die Maximalgeschwindigkeit ist $240 \frac{m}{min}$.

b) $v''(t) = 0 \Rightarrow W(1.386; 180)$; $f'(1.386) = -120$.
Der maximale Geschwindigkeitsabfall ist $120 \frac{m}{min^2}$.

c) $v(t) = 180 \Rightarrow t \approx 0.288$ oder $t \approx 1.386$;
Die Geschwindigkeit $180\ \frac{m}{min}$ wird im Bereich zwischen 0.288 und 1.386 also 1.099 minuten überschritten. (Ag.

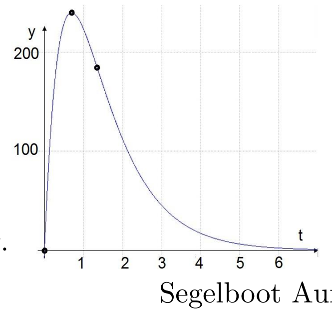


Abb. 369 Segelboot Aufgabe

e) $\bar{m} = \frac{1}{5} \int_0^5 v(t)dt \Rightarrow \bar{m} \approx 94.71 \frac{m}{min}$; Die mittlere Geschwindigkeit ist etwa $94.71 \frac{m}{min}$.

f) $V(x) = \int_0^x v(t)dt = -960 \cdot e^{-t} + 480 \cdot e^{-2t} + 480$; $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 480$, das Boot wird 480 m fahren.

Aufg. 169/437: (ohne GTR) $v'''(t) = (960 \cdot (e^{-t} - e^{-2t}))''' = (960 \cdot (-e^{-t} + 2e^{-2t}))''$
$= (960 \cdot (+e^{-t} - 4e^{-2t}))' = 960 \cdot (-e^{-t} + 8e^{-2t})$;

a) Extremum: $0 = v'(t) = 960(-e^{-t} + 2e^{-2t}) \overset{:960}{\Longleftrightarrow} 0 = -e^{-t} + 2e^{-2t} \overset{\cdot e^{2t}}{\Longleftrightarrow} 0 = -e^{t} + 2 \Leftrightarrow t = \ln(2) \approx 0.693$;

$y-$ Wert: $v(\ln(2)) = 960 \cdot (e^{-\ln(2)} - e^{-2\ln(2)}) = 960 \cdot (\frac{1}{e^{\ln(2)}} - \frac{1}{e^{\ln(2^2)}}) = 960 \cdot (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = 240$;

Klassifikation: $v''(\ln(2)) = 960 \cdot (+e^{-\ln(2)} - 4e^{-2\ln(2)}) = 960 \cdot (\frac{1}{e^{\ln(2)}} - \frac{4}{e^{\ln(4)}}) = 960 \cdot (\frac{1}{2} - \frac{4}{4}) = -480 < 0 \Rightarrow$ (lokales Maximum);

Randwerte: $\mathbb{D} = [0; \infty)$; $v(0) = 960 \cdot (e^{-0} - e^{-2\dot{0}}) = 0$; $v(\infty) = 960 \cdot (e^{-\infty} - e^{-2\dot{\infty}}) = 0$; (damit ist das Maximum global);

Antwortsatz: Die Maximalgeschwindigkeit ist $240 \frac{m}{min}$.

b) Wendestelle: $0 = v''(t) = 960 \cdot (+e^{-t} - 4e^{-2t}) \overset{:960}{\Longleftrightarrow} 0 = e^{-t} - 4e^{-2t} \overset{\cdot e^{2t}}{\Longleftrightarrow} 0 = e^{t} - 4 \Leftrightarrow x = \ln(4)$;

Verifikation/Klassifikation: $v'''(\ln(4)) = 960 \cdot (-e^{-\ln(4)} + 8e^{-2\cdot\ln(4)}) = 960 \cdot (-\frac{1}{4} + \frac{8}{4^2})$
$= 960 \cdot (-\frac{1}{4} + \frac{8}{4^2}) = 240 \neq 0$ (damit Wendepunkt), $240 > 0$ damit minimale Steigung oder größter Abfall.

$y-$ Wert (muss nicht gerechnet werden): $v(\ln(4)) = 960 \cdot (e^{-\ln(4)} - e^{-2\ln(4)})$
$= 960 \cdot (\frac{1}{e^{\ln(4)}} - \frac{1}{e^{\ln(4^2)}}) = 960 \cdot (\frac{1}{4} - \frac{1}{16}) = 180$;

$v'(\ln(4)) = 960 \cdot (-e^{-\ln(4)} + 2e^{-2\ln(4)}) = 960 \cdot (\frac{-1}{4} + \frac{2}{4^2}) = -120$;

Antwortsatz: Der maximale Geschwindigkeitsabfall ist nach ca 1.4 min und beträgt $120 \frac{m}{min^2}$.

c) $v(t) = 960 \cdot e^{-t} - 960 \cdot e^{-2t} = 180 \overset{:960}{\Longleftrightarrow} e^{-t} - e^{-2t} = \frac{3}{16}$

Substitution: $e^{-t} = w$, $e^{-2t} = w^2$: $w - w^2 = \frac{3}{16} \Leftrightarrow w^2 - w - \frac{3}{16} = 0 \Leftrightarrow w_1 = \frac{3}{4}, w_2 = \frac{1}{4}$,

Rücksubstitution: $e^{-t_1} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow -t_1 = \ln(\frac{3}{4}) \Leftrightarrow t_1 = \ln(\frac{4}{3})$;

$e^{-t_2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow -t_2 = \ln(\frac{1}{4}) \Leftrightarrow t_2 = \ln(4)$;

$\Delta t = t_2 - t_1 = \ln(4) - \ln(\frac{4}{3}) = \ln(4) - (\ln(4) - \ln(3)) = \ln(3)$.

Antwortsatz: Das Motorboot fährt etwa 1.1 min schneller als $180 \frac{m}{min}$.

d) $\bar{v} = \frac{1}{5-0} \cdot \int_0^5 (960 \cdot e^{-t} - 960 \cdot e^{-2t})dt = \frac{960}{5} \cdot \int_0^5 (e^{-t} - e^{-2t})dt = 192 \cdot \left[\frac{e^{-t}}{-1} - \frac{e^{-2t}}{-2}\right]_0^5$

$= 192 \cdot \left[-e^{-t} + 0.5e^{-2t}\right]_0^5 = 192 \cdot (-e^{-5} + 0.5e^{-10} - (-e^{-0} + 0.5e^{0})) = 96 \cdot (1 - 2e^{-5} + e^{-10}) \approx 94.71$

Antwortsatz: Die mittlere Geschwindigkeit ist etwa $94.71 \frac{m}{min}$.

e) $V(x) = \int_0^x (960 \cdot e^{-t} - 960 \cdot e^{-2t})dt = 960 \cdot \left[\frac{e^{-t}}{-1} - \frac{e^{-2t}}{-2}\right]_0^x = 960 \cdot (\frac{e^{-x}}{-1} + \frac{e^{-2x}}{2} - (\frac{e^{-0}}{-1} + \frac{e^{-2\cdot 0}}{2})) = 960 \cdot (-e^{-x} + 0.5e^{-2x} - (-1 + 0.5)) = 480 - 960e^{-x} + 480e^{-2x}$. $F(x)$= zurückgelegter Weg zum Zeitpunkt x. $\lim\limits_{x\to\infty} 480 - 960e^{-x} + 480e^{-2x} = 480$. Das Boot fährt 480 m.

Aufg. 169/438: a) $1000 - 800 \cdot e^{-0.01t} = 600 \overset{-1000|\cdot(-1)}{\Longleftrightarrow} 800 \cdot e^{-0.01t} = 400 \overset{:400}{\Longleftrightarrow} e^{-0.01t} = \frac{1}{2}$
$\overset{\ln(.)}{\Longleftrightarrow} -0.01t = \ln(\frac{1}{2}) \overset{-0.01}{\Longleftrightarrow} t = 100 \cdot \ln(2) \approx 69.3$;

Der Behälter ist nach 69.3 Minuten zur Hälfte gefüllt.

b) $f'(t) = (1000 - 800 \cdot e^{-0.01\cdot t})' = -800 \cdot (-0.01) \cdot e^{-0.01\cdot t} = \frac{8}{e^{0.01\cdot t}} > 0$

mit dem Monotoniesatz ist f streng monoton wachsend.

c) $\lim_{t\to\infty} 1000 - 800 \cdot e^{-0.01t} = 1000$; $\frac{1000}{1200} \cdot 100 = 83.\bar{3}\% < 85\%$ also 'ja', die Vorschrift wird eingehalten.

d) $\frac{1}{60-0} \cdot \int_0^{60}(1000 - 800 \cdot e^{-0.01 \cdot t})dt = \frac{1}{60} \cdot \left[1000 \cdot t - \frac{800 \cdot e^{-0.01 \cdot t}}{-0.01}\right]_0^{60}$
$= \frac{1}{60} \cdot (1000 \cdot 60 + 80000 \cdot e^{-0.01 \cdot t} - (1000 \cdot 0 + 80000 \cdot e^{-0.01 \cdot 0})) =$
$\frac{1}{60} \cdot (1000 \cdot 60 + 80000 \cdot e^{-0.01 \cdot 60} - (1000 \cdot 0 + 80000 \cdot e^{-0.01 \cdot 0})) = \frac{1}{60} \cdot (80000 \cdot e^{-0.6} - 20000) \approx 398.4155$

Die mittlere Flüssigkeitsmenge in der ersten Stunde ist etwa 398.4155 Liter.

Aufg. 169/439: a) Die Steigung muss maximal sein; $(f'(x))' = ((\frac{x^4}{24} - x^2 + 5.625)')' = (\frac{x^3}{6} - 2x)' = \frac{x^2}{2} - 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 2$. $\alpha = \tan^{-1}(m) = \tan^{-1}(f'(-2)) = \tan^{-1}(\frac{8}{3}) \approx 69.44°$, Die Wände laufen an den Stellen ± 2 am steilsten; die Tangenten schließen mit der x-Achse einen Winkel von 69.44° ein.

b) Um das Proximum (Punkt bester Approximation) zu $A(0; 3.92)$ zu finden, legen wir die allgemeine Normale: $y = \frac{-1}{f'(u)} \cdot (x-u) + f(u)$ durch A also $3.92 = \frac{-1}{\frac{u^3}{6} - 2u} \cdot (0-u) + \frac{u^4}{24} - u^2 + 5.625$ nach u auflösen (und das geht hier nur numerisch also mit dem GTR): $u \approx -1.1$ (genauer -1.099968). Das Proximum P ist also $P(1.1; 4.476)$; $d \approx \sqrt{1.1^2 + (4.476 - 3.92)^2} \approx 1.2325 < 1.3$. Der Abstand wird also nicht eingehalten.

Aufg. 169/440: a) $g(t) = 9 \cdot (e^{-t} - e^{-2t}) = 2$, Substitution: $e^{-t} = w$ bzw. $e^{-2t} = w^2$:

$9 \cdot (w - w^2) = 2 \overset{:9}{\Leftrightarrow} w - w^2 = \frac{2}{9} \xLeftrightarrow{-w+w^2} w^2 - w + \frac{2}{9} = 0,$

MNF: $w_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot \frac{2}{9}}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{1}{9}}}{2} = \frac{1 \pm \frac{1}{3}}{2} \Rightarrow w_1 = \frac{1}{3}$, $w_2 = \frac{2}{3}$;

Rücksubstitution: $w_1 : e^{-t} = \frac{1}{3} \xLeftrightarrow{\ln(.)} -t = \ln(\frac{1}{3}) = -\ln(3) \xLeftrightarrow{\cdot(-1)} t = \ln(3),$

$w_2 : e^{-t} = \frac{2}{3} \xLeftrightarrow{ln(.)} -t = \ln(\frac{2}{3}) = -\ln(\frac{3}{2}) \xLeftrightarrow{\cdot(-1)} t = \ln(1.5);$

Die Tablette wirkt etwa zwischen den Zeitpunkten $\ln(1.5) \approx 0.4h$ und $\ln(3) \approx 1.1h$.

$g'''(t) = (9 \cdot (e^{-t} - e^{-2t}))''' = (9 \cdot (-e^{-t} + 2e^{-2t}))'' = (9 \cdot (e^{-t} - 4e^{-2t}))' = 9 \cdot (-e^{-t} + 8e^{-2t})$

b) $g'(t) = 9 \cdot (-e^{-t} + 2e^{-2t}) = 0 \overset{:9}{\Leftrightarrow} -e^{-t} + 2e^{-2t} = 0 \xLeftrightarrow{\cdot e^{2t}} -e^t + 2 = 0 \xLeftrightarrow{+e^t} e^t = 2 \xLeftrightarrow{\ln(.)} t = \ln(2);$
$g(\ln(2)) = 2.25,$

Klassifikation: $g''(\ln(2)) = 9 \cdot (e^{-\ln(2)} - 4e^{-2\ln(2)}) = 9 \cdot (0.5 - 4 \cdot 0.25) = -4.5 < 0$ (Maximum)

Die Konzentration ist zum Zeitpunkt $\ln(2)$ maximal und beträgt dann $2.25 \ \frac{mg}{l}$.

c) $g''(t) = 9 \cdot (e^{-t} - 4e^{-2t}) = 0 \overset{:9}{\Leftrightarrow} e^{-t} - 4e^{-2t} = 0 \xLeftrightarrow{\cdot e^{2t}} e^t - 4 = 0 \xLeftrightarrow{+4} e^t = 4 \xLeftrightarrow{\ln(.)} t = \ln(4)$

Klassifikation: $g'''(\ln(4)) = 9 \cdot (-e^{-\ln(4)} + 8e^{-2\ln(4)}) = 9 \cdot (-0.25 + 8 \cdot 0.0625) = 2.25 > 0$
(Minimum der Steigung); $g'(\ln(4)) = 9 \cdot (-e^{-\ln(4)} + 2e^{-2\ln(4)}) = 9(-0.25 + \frac{2}{16}) = -9/8 = -1.125$

Die Konzentration nimmt am Zeitpunkt $\ln(4)$ am stärksten ab und zwar um $1.125 \ \frac{mg/l}{h}$.

d) $\lim\limits_{t \to \infty} 9 \cdot (e^{-t} - e^{-2t}) = 0$; damit geht die Konzentration gegen 0.

e) $\frac{1}{1-0} \int_0^1 9 \cdot (e^{-t} - e^{-2t}) \cdot dt = \left[9 \cdot (\frac{e^{-t}}{-1} - \frac{e^{-2t}}{-2})\right]_0^1 = 9 \cdot (\frac{e^{-1}}{-1} - \frac{e^{-2 \cdot 1}}{-2}) - 9 \cdot (\frac{e^{-0}}{-1} - \frac{e^{-2 \cdot 0}}{-2})$

$= 9 \cdot (\frac{-1}{e} + \frac{1}{2e^2} - (\frac{1}{-1} - \frac{1}{-2})) = 9 \cdot (0.5 - \frac{1}{e} + \frac{1}{2e^2}) \approx 1.798$

Die mittlere Konzentration während der ersten Stunde ist etwa $1.8 \ \frac{mg}{l}$.

Aufg. 170/441: a) $e^{0.3x}$ differenzieren wir mit der Kettenregel: $g = 0.4x, g' = 0.4$, $f(g) = e^g$,
$f'(g) = e^g$, $(e^{0.4x})' = 0.4e^g = 0.4 \cdot e^{0.4x}$; $f''(x) = (6 - e^{0.4x})'' = (-0.4e^{0.3x})' = -0.16e^{0.4x}$;

M: $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ ist smf; A: $\lim_{x \to -\infty} 6 - e^{0.4x} = 6 \Rightarrow$ wA $y = 6$;
D: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$; $\mathbb{W} = (-\infty; 6)$, $f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -\infty$;
N: $f(x) = 6 - e^{0.4x} = 0 \Leftrightarrow e^{0.4x} = 6 \Leftrightarrow 0.4x = \ln(6) \Leftrightarrow x = 2.5 \cdot \ln(6)$;

E: $f'(x) < 0$, W: $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ weder Extrem noch Wendestellen;
S: keine Symmetrie (erkennbar); S: Stetig: ja.

b) $f(x) = (x+1) \cdot e^{2x-4}$; e^{2x-4} differenzieren wir mit der Kettenregel: $g = 2x - 4, g' = 2$, $f(g) = e^g, f'(g) = e^g$, $(e^{2x-4})' = 2e^g = 2 \cdot e^{2x-4}$; (Abb.370)
$(x+1) \cdot e^{2x-4}$ differenzieren wir mit der Produktregel: $u = x+1, u' = 1$, $v = e^{2x-4}$, $v' = 2 \cdot e^{2x-4}$;
$((x+1) \cdot e^{2x-4})' = u'v + uv' = 1 \cdot e^{2x-4} + (x+1) \cdot 2e^{2x-4} = (2x+3) \cdot e^{2x-4}$;
$((x+1) \cdot e^{2x-4})''' = ((2x+3) \cdot e^{2x-4})'' = ((4x+8) \cdot e^{2x-4})' = (8x+20) \cdot e^{2x-4}$;

M: f ist smf für $x \leq -1.5$ und smw für $x \geq -1.5$,
A: $\lim_{x \to -\infty}(x+1) \cdot e^{2x-4} = 0 \Rightarrow$ wA $y = 0$;
D: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$; $\mathbb{W} = (-0.5e^{-1}; \infty)$, $f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \infty$;
N: $(x+1) \cdot e^{2x-4} = 0 \Leftrightarrow x = -1$;
E: $(2x+3) \cdot e^{2x-4} = 0 \Leftrightarrow x = -1.5$, $f''(-1.5) = 2e^{-7} > 0 \Rightarrow T(-1.5; -0.5e^{-1})$,
W: $(4x+8) \cdot e^{2x-4} = 0 \Leftrightarrow x = -2$, $f'''(-2) \neq 0 \Rightarrow W(-2; -e^{-8})$;
S: keine Symmetrie (erkennbar); S: Stetig: ja.

c) $e^{-0.5x}$ differenzieren wir mit der Kettenregel: $g = -0.5x, g' = -0.5$,
$f(g) = e^g, f'(g) = e^g$, $(e^{-0.5x})' = -0.5e^g = -0.5 \cdot e^{-0.5x}$;
$x^2 \cdot e^{-0.5x}$ differenzieren wir mit der Produktregel: $u = x^2, u' = 2x$, $v = e^{-0.5x}$, $v' = -0.5 \cdot e^{-0.5x}$;
$(x^2 \cdot e^{-0.5x})' = u'v + uv' = 2x \cdot e^{-0.5x} + x^2 \cdot (-0.5)e^{-0.5x} = (-0.5x^2 + 2x) \cdot e^{-0.5x}$;
$f'''(x) = ((-0.5x^2 + 2x) \cdot e^{-0.5x})'' = ((0.25x^2 - 2x + 2) \cdot e^{-0.5x})' = (-0.125x^2 + 1.5x - 3) \cdot e^{-0.5x}$;

M: (nicht am Anfang rechnen) K_f ist smf für $x \leq 0$ und für $x \geq 4$, K_f ist smw für $0 \leq x \leq 4$;
A: $\lim_{x \to \infty} x^2 \cdot e^{-0.5x} = 0 \Rightarrow$ wA $y = 0$; (Abb.370)
D: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$; $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$ (weil Nullstelle (0;0), $f(x) \not< 0$ und $f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$);
N: $x^2 \cdot e^{-0.5x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow N(0;0)$;
E: $(-0.5x^2 + 2x) \cdot e^{-0.5x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = 4$, $f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow T(0;0)$, $f''(4) = -2 \cdot e^{-2} < 0 \Rightarrow H(4; 16 \cdot e^{-2})$; W: $(0.25x^2 - 2x + 2) \cdot e^{-0.5x} = 0 \Leftrightarrow x = 4 \pm 2\sqrt{2}$, $f'''(4 \pm 2\sqrt{2}) \neq 0 \Rightarrow W_1(4 - 2\sqrt{2}; \approx 0.764)$, $W_2(4 + \sqrt{2}; \approx 1.534)$; S: keine Symmetrie (erkennbar); S: Stetig: ja.

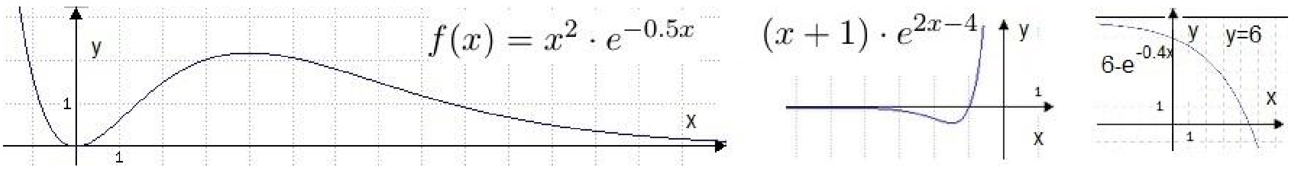


Abb. 370 Madness Aufgaben e-Funktion

d) i) $e^{2x} - 6e^x + 5 = 0$ Substitution $e^x = w \Rightarrow e^{2x} = w^2$ $w^2 - 6w + 5 = 0 \Leftrightarrow w_1 = 1, w_2 = 5 \Leftrightarrow$ (RS)
$e^{x_1} = 1, e^{x_2} = 5 \Leftrightarrow x_1 = \ln(1) = 0, x_2 = \ln(5)$ $\Rightarrow \mathbb{L} = \{0; \ln(5)\}$;

ii) $e^x = 1 + 2e^{-x} \Leftrightarrow e^x - 1 - 2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - e^x - 2 = 0$ Substitution $e^x = w \Rightarrow e^{2x} = w^2$ $w^2 - w - 2 = 0$ $\Leftrightarrow w_1 = -1, w_2 = 2 \Leftrightarrow$ (RS) $e^{x_1} = -1$ (kein Beitrag), $e^{x_2} = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2)$;

iii) $x \cdot e^{2x-4} - x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (e^{2x-4} - 1) = 0$ (SvN) $\Leftrightarrow x = 0$ oder
$(e^{2x-4} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2x-4} = 1 \Leftrightarrow 2x - 4 = \ln(1) = 0 \Leftrightarrow x = 2)$ $\Rightarrow \mathbb{L} = \{0; 2\}$;

e) $f''(x) = (e^x \cdot (t - x))'' = (e^x \cdot (t - x - 1))' = e^x \cdot (t - x - 2)$, $e^x \cdot (t - x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = t - 1$,
$f(t-1) = e^{t-1} \cdot (t - (t-1)) = e^{t-1}$ $f''(t-1) = e^{t-1} \cdot (t - (t-1) - 2) = -e^{t-1} < 0 \Rightarrow H(t-1; e^{t-1})$;
Elimination des Parameters: $x = t - 1$, $y = e^{t-1}$ mit $t = x + 1$ ist die Ortskurve $y = e^{t-1} = e^{(x+1)-1} \Rightarrow y = e^x$.

f) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $f''(x) = 6ax + 2b$,

$f(0) = 0$	(geht durch den Ursprung),	$0 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d$	$\Rightarrow d = 0$,
$f'(0) = 0$	(Maximum bei $x = 0$),	$0 = 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c$	$\Rightarrow c = 0$,
$f(2) = -3.2$	(geht durch $W(2; -3.2)$),	$-3.2 = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2$	$\Rightarrow$ (I) $-3.2 = 8a + 4b$,
$f''(2) = 0$	(Wendestelle bei $x = 2$),	$0 = 6a \cdot 2 + 2b$	$\Rightarrow$ (II) $b = -6a$,

(II) in (I) eingesetzt: -3.2 = $8a + 4 \cdot$ (-$6a$) $\Leftrightarrow$ -3.2 =-$16a$ $\Leftrightarrow$ $a = 0.2$, b =-1.2 $\Rightarrow$ $f(x) = 0.2x^3 - 1.2x^2$.

15.6.4 LöVo zu Einheit 6.3.11 (Die Regel von de l'Hospital UE $M{+}_3$)

Aufg. 170/442: Die Regel von de l'Hospital: a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(5x)}{\sin(2x)} = 2.5 \neq \underline{1}$. Es entsteht ein Ausdruck der Form $'\frac{0}{0}'$, der nicht gekürzt werden kann.

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} \approx \dfrac{\sin(0.0001)}{0.0001} \approx 0.9999 \approx 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{x} = 2$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{x} = 3$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(nx)}{x} = n$,

c) Durch Ableiten: $(\sin(nx))' = n \cdot \cos(nx)$.

d) Ein Ausdruck der Form $'\frac{0}{0}'$ wird auch bei der Berechnung des <u>Differenzenquotienten</u> betrachtet.

e) $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h)}{h}$;

f)
$$\begin{aligned}
\frac{f'(0)}{g'(0)} &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(0+h)-f(0)}{h}}{\frac{g(0+h)-g(0)}{h}} && \text{Differenzenquotient}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{g(h)-g(0)} && \tfrac{1}{h} \text{ gekürzt}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{g(h)} && f(0) = g(0) = 0
\end{aligned}$$

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h)}{g(h)} = \dfrac{f'(0)}{g'(0)}$ (sofern $g'(0) \neq 0$) oder $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

g) Die Regel von de l'Hospital: Sei $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, f, g differenzierbar. Wenn $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \underline{= 0 =} \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ (oder $|g(x)| \to \underline{\infty}$), dann gilt $\lim\limits_{x\to x_0} \underline{\dfrac{f(x)}{g(x)}} = \lim\limits_{x\to x_0} \underline{\dfrac{f'(x)}{g'(x)}}$.

Aufg. 170/443: $=^H$ bedeutet, dass die Regel von der l'Hospital angewendet wurde.

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}' = \dfrac{0}{0}' =^H \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x}{1} = 4$; b) $\lim\limits_{x\to 0.5} \dfrac{6x^2-5x+1}{8x^2-2x-1} =' \dfrac{0}{0}' =^H \lim\limits_{x\to 0.5} \dfrac{12x-5}{16x-2} = \dfrac{6-5}{8-2} = \dfrac{1}{6}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^x - e^{-x}} =' \dfrac{0}{0}' =^H \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1}{2}$; d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(a^x)}{e^x - 1} =' \dfrac{0}{0}' =^H \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(a)}{e^x} = \ln(a)$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x-2}{3x+8} =' \dfrac{\infty}{\infty}' =^H \dfrac{4}{3}$; f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{e^{-x} - \ln(x+e)}$; $=' \dfrac{0}{0}' =^H \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cos(2x)}{-e^{-x} - \frac{1}{x+e}} = \dfrac{2}{-1-\frac{1}{e}}$;

g) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x(1-e^{x-3})}{x - 3e^{x-3}} =' \dfrac{0}{0}' =^H \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1 - e^{x-3} - xe^{x-3}}{1 - 3e^{x-3}} = 1.5$;

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2(x)}{x^2} =' \dfrac{0}{0}' =^H \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin(x)\cos(x)}{2x} =' \dfrac{0}{0}' =^H \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cos^2(x) - 2\sin^2(x)}{2} = 1$;

Die Regel von de l'Hospital darf auch <u>mehrfach</u> angewendet werden.

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin(2x)}{e^x + e^{-x} - 2} =' \dfrac{0}{0}' =^H \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x) + 2x\cos(2x)}{e^x - e^{-x}} =' \dfrac{0}{0}'$

$=^H \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cos(2x) + 2\cos(2x) - 2x\sin(2x)}{e^x + e^{-x}} = 2$;

j) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{\ln(x-1)} - \dfrac{1}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2) - \ln(x-1)}{(x-2)\ln(x-1)} =' \dfrac{0}{0}' =^H \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1 - \frac{1}{x-1}}{\ln(x-1) + \frac{x-2}{x-1}} =$

entweder $'\frac{0}{0}' =^H \lim\limits_{x\to 2} \frac{\frac{1}{(x-1)^2}}{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}} = \frac{1}{2};$

oder $= \lim\limits_{x\to 2} \frac{x-1-1}{(x-1)\cdot\ln(x-1)+x-2} =' \frac{0}{0}' =^H \lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{\ln(x-1)+\frac{x-1}{x-1}+1} = \frac{1}{2};$

k) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-x}}{\sin(x)} - \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{xe^{-x}-\sin(x)}{x\sin(x)} =' \frac{0}{0}' =^H \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-x}-xe^{-x}-\cos(x)}{\sin(x)+x\cos(x)} =' \frac{0}{0}'$

$=^H \lim\limits_{x\to 0} \frac{-2e^{-x}+xe^{-x}-\sin(x)}{2\cos(x)-x\sin(x)} = -1;$

l) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} =' \frac{-\infty}{\infty}' =^H \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} -x = 0;$

m) $\lim\limits_{x\to 0} x^x = \lim\limits_{x\to 0} e^{x\ln(x)} = e^0 = 1;$

Aufg. 170/444: a) $f''(x) = \left(\frac{1}{x\ln^2(x)}\right)' = \frac{\ln(x)+2}{x^2\cdot\ln^3(x)};$ **M:** f ist smf für $x\in(0;1)$ und für $x\in(1;\infty)$;
A: f hat die sA $x=0$ und die wA $y=0$; **D:** $\mathbb{D}=(0;1)\cup(1;\infty)$, $\mathbb{W}=\mathbb{R}\backslash\{0\}$; **N:** keine;
E: E: keine, $W(e^{-2};\frac{-1}{2})$; **S:** keine; **S:** stetig; senkrechte Tangente bei $x=0$; $\lim_{x\to 0} f(x)=0$;

b) $\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(x)}} [= 0^0] = e^{\frac{\ln(x)}{\ln(x)}} = e^1 = e \neq 1;$

15.7 LöVo zu Kapitel 7.1: Integralrechnung (UE 11_3)

Seite 667-693

Aufg. 173/445: Gesucht ist der Deutsch Formel 1 Pilot Nico Rosberg

a) $t\in[0;1]$: konstante Beschleunigung, $t\in[1;3]\cup[5;6]$: konstante Geschwindigkeit, $t\in[3;5]$: konstante Verzögerung, $t\in[6;7]$: konstante (andere) Verzögerung (bis zum Stillstand) siehe Abb. 371a. **b)** $\frac{100}{2}1^2 + 100\cdot 2 + \frac{-20}{2}\cdot 2^2 + 100\cdot 2 + 60\cdot 1 + \frac{-60}{2}\cdot 1^2 + 60\cdot 1 = 500$ km.

c) $s=$ die Fläche, die $v(t)$ und die $x-$Achse einschließen. (Abb. 371)

d) $$v(t) = \begin{cases} 100t & \text{für } 0\le x\le 1 \\ 100 & \text{für } 1< x\le 3 \\ -20(t-3)+100 & \text{für } 3< x\le 5 \\ 60 & \text{für } 5< x\le 6 \\ -60(t-6)+60 & \text{für } 6< x\le 7 \end{cases} \qquad s(t) = \begin{cases} 50t^2 & \text{für } 0\le x\le 1 \\ 100(t-1)+50 & \text{für } 1< x\le 3 \\ -10t^2+160t-140 & \text{für } 3< x\le 5 \\ 60(t-5)+410 & \text{für } 5< x\le 6 \\ -30t^2+420t-970 & \text{für } 6< x\le 7 \end{cases}.$$

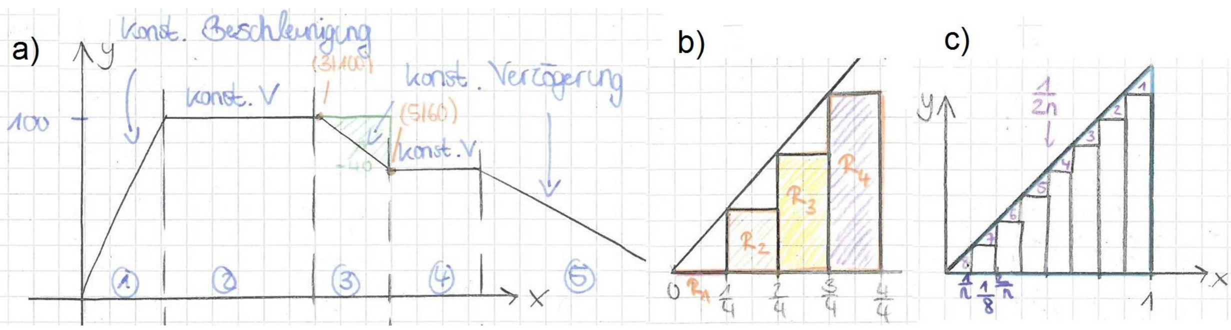


Abb. 371 Flächeninhalt / Riemannsummen - Vielen Dank an Amelie

Aufg. 173/446: $1, 3, 6, 10, 15, 21, 27, ...$, $a_n = \frac{n^2+n}{2}$ (Dreieckszahlen).

Aufg. 173/447: $(1+100)+(2+99)+(3+98)+(...)+(50+51)=50\cdot 51=5050$.
$(1+n)+(2+n-1)+(3+n-2)+(4+n-3)+(....)=(n+1)\frac{n}{2}=\frac{n^2+n}{2}$ (auswendig).

Aufg. 173/448: a) $1+2+3+...+n-1=\frac{(n-1)^2+(n-1)}{2}=\frac{n^2-n}{2}$;
b) $2+4+6+...+2n=2\cdot(1+2+..+n)=n^2+n$;
c) $3+6+9+...+3n=3(\frac{n^2+n}{2})\Rightarrow 2+5+8+...+3n-1=3-1+6-1+9-1+...+3n-1=3\left(\frac{n^2+n}{2}\right)-n$;
d) $6+10+14+...+4n+2=(4+2)+(8+2)+(12+2)+(...)+(4n+2)=4\left(\frac{n^2+n}{2}\right)+2n$,

e) $6+1-4-9-+...-5n+11= 11-5+11-10+11-15+11-20\pm...+11-5n=(11+...+11)-(5+10+15+20+25+...+5n)=11\cdot n-5\cdot(1+2+3+4+5+...+n)=11\cdot n-5\frac{n^2+n}{2}=-2.5n^2+8.5n$.

f) $a+b+a+2b+a+3b+..+a+nb=a+..+a+b+2b+3b+nb=n\cdot a+b\cdot(1+2+3+..+n)=n\cdot a+b\cdot\frac{n^2+n}{2}$.

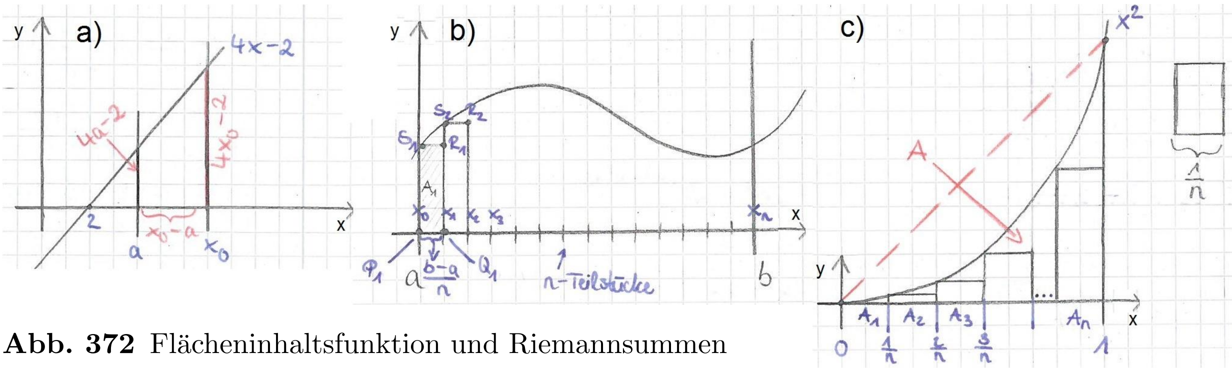


Abb. 372 Flächeninhaltsfunktion und Riemannsummen

Aufg. 173/449: a) Zerlegung in Dreiecke bzw. Flächen, deren Inhalte man berechnen kann. Die zerlegten Flächen werden dann einzeln berechnet und deren Inhalte addiert. Beim allgemeinen Gebilde wird die Fläche durch Rechtecke approximiert.

b) $R_4=\frac{1}{4}\cdot\left(0+\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot(0+1+2+3)=\frac{3^2+3}{2\cdot 16}=\frac{12}{32}$, siehe Abb. 371b,

$R_8=\left(\frac{1}{8}\right)^2\cdot(0+1+2+..+7)=\frac{7^2+7}{2\cdot 64}=\frac{56}{128}$,

$R_n=\left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot(0+1+2+..+n-1)=\frac{(n-1)^2+n-1}{2\cdot n^2}=\frac{n^2-n}{2\cdot n^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot n}$.

c) $A=\lim\limits_{n\to\infty}R_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot n}=\frac{1}{2}$. Dabei ist $\frac{1}{2}$ die Gesamtflächen und $\frac{1}{2\cdot n}$ die Fläche der kleinen Dreiecke, die noch fehlt; siehe Abb. 371c.

Aufg. 173/450: (Abb. 372)

a) $R_n=\frac{1}{n^2}\cdot(0+2+4+6+8+...+2n-2)=\frac{2}{n^2}\cdot(0+1+2+3+4+...+n-1)=\frac{2}{n^2}\cdot\frac{n^2-n}{2}=\frac{n^2-n}{n^2}\to 1$;

b) $R_n=\frac{2}{n}\cdot\left((2\cdot 0+1)+(2\cdot\frac{2}{n}+1)+(2\cdot 2\cdot\frac{2}{n}+1)+(2\cdot 3\cdot\frac{2}{n}+1)+...+(2\cdot 2(n-1)\cdot\frac{2}{n}+1)\right)=\frac{2}{n}\cdot n+\frac{2}{n}\left(\frac{4}{n}+\frac{8}{n}+\frac{12}{n}+...+\frac{4(n-1)}{n}\right)=2+\frac{8}{n^2}\left(1+2+3+...+(n-1)\right)=2+\frac{8(n^2-n)}{2n^2}\to 6$;

c) $R_n=\frac{1}{n}\cdot\left(0^2+(\frac{1}{n})^2+(\frac{2}{n})^2+(\frac{3}{n})^2+...+(\frac{n-1}{n})^2\right)=\frac{1}{n^3}\cdot\left(0^2+1^2+2^2+3^2+...+(n-1)^2\right)=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6}\to\frac{1}{3}$ (Abb. 372c);

Aufg. 173/451: a) $\frac{b-a}{n}$; b) $x_i=a+\frac{i(b-a)}{n}$; c) $|A_i|=\frac{b-a}{n}\cdot f(a+\frac{(i-1)(b-a)}{n}$.

d) $R_n=\frac{b-a}{n}\cdot\left(f(a)+f(a+\frac{b-a}{n})+f(a+2\frac{b-a}{n})+f(a+3\frac{b-a}{n})+...+f(a+(n-1)\frac{b-a}{n})\right)$ (Abb. 372b).

Sei $g_i=$ $\text{Max}\{f(x)\}$ mit $x\in[a+(i-1)\frac{b-a}{n},a+i\frac{b-a}{n}]$
und $k_i=$ $\min\{f(x)\}$ mit $x\in[a+(i-1)\frac{b-a}{n},a+i\frac{b-a}{n}]$,
dann ist $U_n=\frac{b-a}{n}(k_1+k_2+..+k_n)$ und $O_n=\frac{b-a}{n}(g_1+g_2+..+g_n)$. Beachten Sie dabei, dass weder Maximum noch Minimum am Rand des Intervalls liegen muss. Wenn f smw ist, so ist $k_i=$

$f(a+(i-1)\frac{b-a}{n})$ und $g_i = f(a+i\frac{b-a}{n})$; umgekehrt, wenn f smf ist, so ist $g_i = f(a+(i-1)\frac{b-a}{n})$ und $k_i = f(a+i\frac{b-a}{n})$. Oft wird die R_n vom Schüler als U_n definiert, was aber eben nur für smw Fkt gilt.

Aufg. 174/452: $J_a(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2}$, $\quad J_a(x) = \frac{mx^2}{2} + cx - \left(\frac{ma^2}{2} - ca\right)$.

Aufg. 174/453: Allgemein: $J_a(x) = (f(x)+f(a))\cdot\frac{x-a}{2}$ (falls $f(x), f(a), x, a > 0$); a) $J_a(x) = 2(x-a)$, b) $J_a(x) = 2x^2 - 2x - (2a^2 - 2a)$,

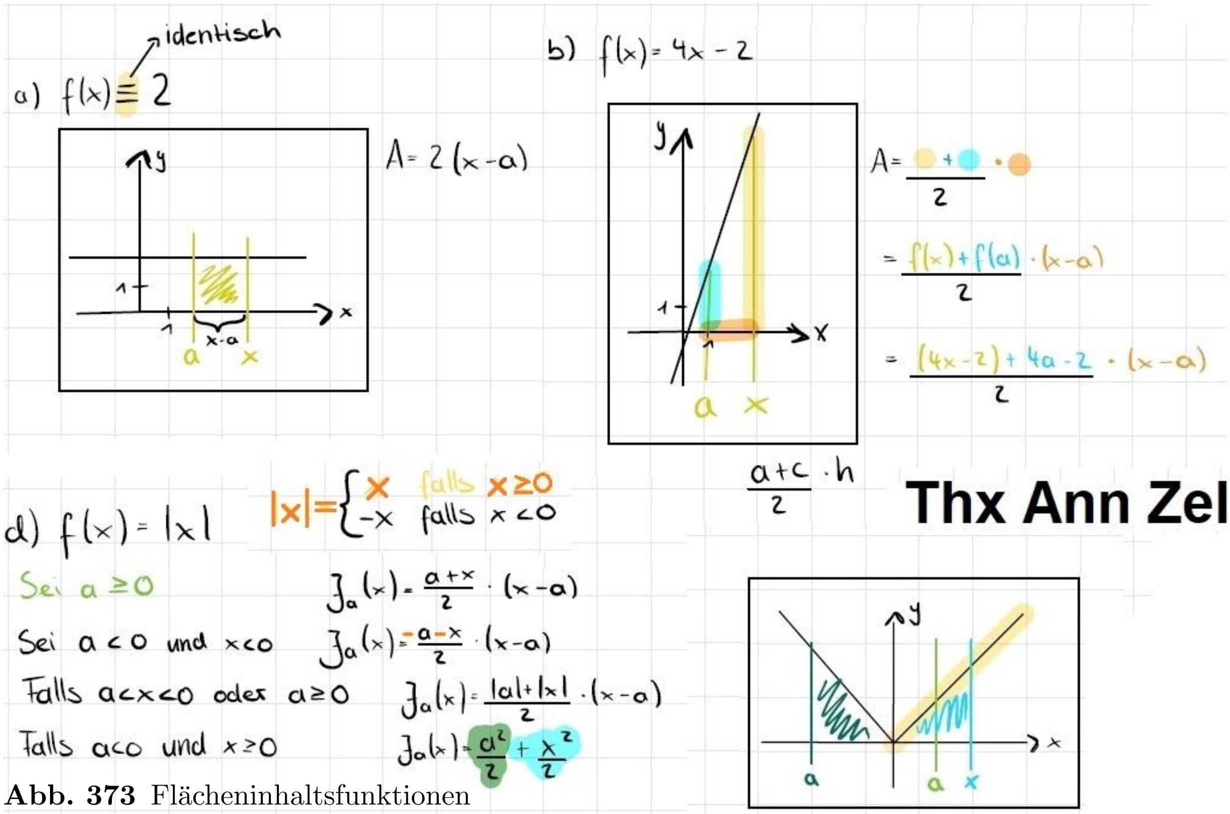


Abb. 373 Flächeninhaltsfunktionen

c) $J_a(x) = \frac{1}{2}\cdot((3x-1)+(3a-1))\cdot(x-a) = \frac{1}{2}\cdot(3x+3a-2)\cdot(x-a) = \frac{1}{2}\cdot(3x^2+3ax-2x-3xa+3a^2-2a) = \frac{3x^2+3a^2-2x-2a}{2}$;

d) $J_a(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + \frac{a^2}{2} & \text{für } x < 0 \\ \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$.

Aufg. 174/454: a) Bei einer Tautologie z.B. $\sin^2(x) + \cos^2(x) = \underline{1}$ bei welcher links ein x vorkommt, rechts aber nicht, kann für x <u>alles</u> einsetzt werden, ohne dass sich rechts etwas ändert. b)

$f(x) =$	x	mx	x^2	x^3	$mx + c$	$-\sin(x)$
$J_a(x) =$	$\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2}$	$\frac{mx^2}{2} - \frac{ma^2}{2}$	$\frac{x^3}{3} - \frac{a^3}{3}$	$\frac{x^4}{4} - \frac{a^4}{4}$	$\frac{m\cdot x^2}{2} + cx - (\frac{m\cdot a^2}{2} + ca)$	$\cos(x) - \cos(a)$
$J_0(x) =$	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{mx^2}{2}$	$\frac{x^3}{3}$	$\frac{x^4}{4}$	$\frac{m\cdot x^2}{2} + cx$	$\cos(x) - 1$

$J_0'(x) = f(x)$;

c) ... mit Hilfe eines R<u>echtecks</u> ... $J_0(x+h) - J_0(x) \approx h\cdot f(x) \Leftrightarrow \frac{J_0(x+h)-J_0(x)}{h} \approx f(x) \xrightarrow{h\to 0} F_0'(x) = f(x)$.

Statt $J_a(b)$ schreiben wir künftig $J_a(b) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$; sprich '<u>Integral</u> von a bis b $f(x)$ dx'.

e) Bei der Gleichung $\frac{J_0(x+h)-J_0(x)}{h} \approx f(x)$ darf man für h alles einsetzen, insbesondere $h \to 0$ bzw. Werte/ sehr nache bei 0. Wenn aus der begrenzenden Funktion $f(x)$ die Flächeninhaltsfunktion <u>$J_0(x)$ [oder $F(x)$]</u> berechnet werden soll, muss man das Ab<u>leiten</u> u<u>mkehren</u>.

f) $(J_0(x))' = \underline{f(x)}$

Jede Funktion der Form $J_a(x)$ heißt <u>Stammfunktion</u> von $f(x)$. (Abb. 374)

Aufg. 175/455: $J_a(b) = J_0(b) - J_0(a)$. Sei $F(x)$ eine Stammfkt von $f(x)$, dann ist $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

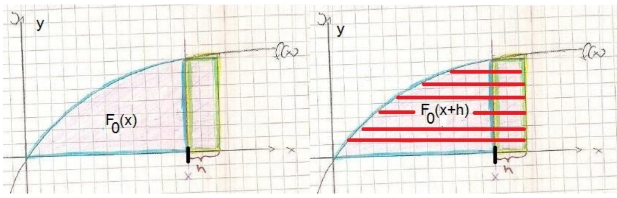


Abb. 374 Der Beweis des Hauptsatzes

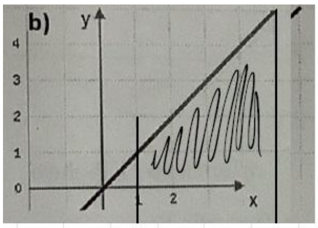
Sei f stetig, und sei $J_0(x_0)$ die zugehörige Flächeninhaltsfunktion zwischen den Geraden $\underline{x = 0}$ und $\underline{x = x_0}$, Dann berechnen wir die Fläche zwischen K_f, der x-Achse und den Geraden $x = a$ und $x = b$ durch $\underline{J_0(b) - J_0(a)}$.

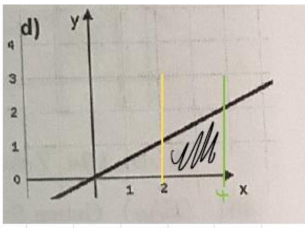
Aufg. 175/456: a) $F(x) = \frac{x^2}{2}$, $\displaystyle\int_0^2 t\,dt = F(2) - F(0) = \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} = 2$;

b) $F(x) = \frac{x^2}{2}$, $\displaystyle\int_1^5 t\,dt = F(5) - F(1) = \frac{5^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 12$;

c) $F(x) = 0.25x^2$, $\displaystyle\int_1^3 0.5t\,dt = F(3) - F(1) = 0.25(3^2 - 1^2) = 2$;

d) $F(x) = \frac{x^3}{3}$, $\displaystyle\int_0^3 t^2\,dt = F(3) - F(0) = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9$; e) $\int_a^a f(t)dt = 0$;





b) $\int_1^5 t\,dt = \int_1^5 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^5$

$= \frac{1}{2}\cdot 5^2 - \frac{1}{2}\cdot 1^2 \rightarrow F(b) - F(a)$

$= \frac{25}{2} - \frac{1}{2} = 12$

d) $\int_2^4 \frac{1}{2} t\,dt = \int_2^4 \frac{1}{2} x\,dx = \left[\frac{1}{4}x^2\right]_2^4 = \frac{1}{4}\cdot 4^2 - \frac{1}{4}\cdot 2^2 = 3$

Ich brauche eine Funktion von F(x) für die $F'(x) = \frac{1}{2}x = f(x)$

F(x) ist quadratisch $(x^2)' = 2x$ $\left(\frac{x^2}{4}\right)' = \frac{2x}{4} = \frac{x}{2}$

Eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{2}x$ ist $F(x) = \frac{1}{4}x^2 = J_2(x)$

Thx Ann Zel

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Abb. 375 Flächeninhaltsfunktionen

$$f) \int_0^0 f(t)dt = [F(t)]_{t=0}^{t=0} = F(0) - F(0) = 0\ .$$

Vorsicht: $\int_a^x f(t)dt$ ist <u>unabhängig</u> von t - das t ist eine Integrationsvariable (ähnlich einer <u>Schleifen</u>variablen aus der Informatik und t ist nach der Integration <u>verbraucht</u>.

g) Um das Integral zu ber. brauchen Sie eine (S<u>tamm</u>-)funktion $F(x)$ für die $\underline{F'(x)}= f(x)$ gilt.

Aufg. 175/457: a) $\displaystyle\int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$, b) $\displaystyle\int_2^x t^2\,dt = \frac{x^3}{3} - \frac{2^3}{3}$, c) $\displaystyle\int_4^x 2t\,dt = x^2 - 4^2$,

d) $\displaystyle\int_9^x \frac{t}{2}\,dt = \frac{x^2}{4} - \frac{9^2}{4}$, e) $\displaystyle\int_1^x t^3\,dt; = \frac{x^4}{4} - \frac{1^4}{4}$.

Aufg. 175/458: $g'(x) \equiv 0 \Rightarrow g(x)$ ist konstant. Beweis (indirekt): Annahme: $g(x)$ ist nicht konstant, dann gibt es x_1, x_2 mit $f(x_1) \neq f(x_2)$ und mit dem Mittelwertsatz $\{\rightarrow$ 14.14.3 und Kapitel 6.2.6 Aufgabe 388$\}$ gibt es dann ein $x_0 \in (x_1, x_2)$ mit $g'(x_0) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \neq 0$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme.

Aufg. 175/459: a) $F(x)+k=\tilde{F}(x)$, denn $(F(x)-\tilde{F}(x))'=F'(x)-\tilde{F}'(x)=f(x)-f(x)\equiv 0$, damit ist die Differenz mit Aufgabe 458 konstant. b) f hat ∞ viele Stammfunktionen.

Das unbestimmte Integral: Mit $\int f(x)dx=F(x)+c$ meinen wir künftig: Finde <u>alle</u> Stammfunktionen der Funktion f. Beispiel: $\int x^2dx=\underline{\frac{x^3}{3}+c}$.

c) Wenn eine Integralfunktion $\displaystyle\int_a^x f(t)dt\equiv c$ also konstant ist, dann kann man für x <u>alles</u> einsetzen, also insbesondere $x=\underline{a}\Rightarrow c=\displaystyle\int_a^{\underline{a}} f(t)dt=\underline{0}$.

e) $\left(\int_0^x t\,dt\right)' = \int_0^x x\,dt = \left(\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x\right)' = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right)' = x$

$\left(\int_2^x t^2\,dt\right)' = \left(\left[\frac{t^3}{3}\right]_2^x\right)' = \left(\frac{x^3}{3}-\frac{2^3}{3}\right)' = x^2$

$\left(\int_4^x 2t\,dt\right)' = \left(\left[t^2\right]_4^x\right)' = (x^2-4^2)' = 2x$

$\left(\int_9^x \frac{t}{2}\,dt\right)' = \left(\left[\frac{t^2}{4}\right]_{t=9}^{t=x}\right)' = \left(\frac{x^2}{4}-\frac{9^2}{4}\right)' = \frac{x}{2}$

$\boxed{\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'^{x} = f(x)}$ Hauptsatz der Differenzial- & Integralrechnung

Thx Jol Ros

Alte Aufgabe bezogen auf Ag 176/464 a) $(x^2+x)'=2x+1$; b) $(x^2+3x-18)'=2x+3$; c) $(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{14}{3})'=x^2+x$; d) $(\frac{x^3}{3}+x^2-x-15)'=x^2+2x-1$; e) $(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}-6)'=x^3+x$;

f) $(2\sin(x))'=2\cos(x)$; $\displaystyle\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x)$. Das Integral wird nach x abgeleitet.

Aufg. 176/460: a) $(x^2)'=2x$; $(x^3)'=3x^2$; $(x^n)'=nx^{n-1}$;
b+c) $\int 2x\,dx=x^2$; $\int x\,dx=\frac{x^2}{2}$; $\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3}$; $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}$; $(n\neq -1)$ (auswendig), weil Division durch 0 verboten ist. Was gilt stattdessen: $\int \frac{1}{x}dx=\ln(x)$ (später mehr), weil $(\ln(x))'=\frac{1}{x}$

Aufg. 176/461: $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$: $\int_a^x(f(t)+g(t))\,dt=\int_a^x f(t)\,dt+\int_a^x g(t)\,dt$;
$\left(\int_a^x(f(t)+g(t))\,dt-\int_a^x f(t)\,dt+\int_a^x g(t)\,dt\right)'=\left(\int_a^x(f(t)+g(t))\,dt\right)'-\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'-\left(\int_a^x g(t)\,dt\right)'=f(x)+g(x)-f(x)-g(x)\equiv 0$. Damit ist $\int_a^x(f(t)+g(t))\,dt-\int_a^x f(t)\,dt+\int_a^x g(t)\,dt$ konstant $(=k)$. Setze $x=a: k=\int_a^a(f(t)+g(t))\,dt-\int_a^a f(t)\,dt0\int_a^a g(t)\,dt=0-0-0=0$.

b) $\int_a^x cf(t)\,dt=c\int_a^x f(t)\,dt$: $\left(\int_a^x cf(t)\,dt-c\int_a^x f(t)\,dt\right)'=\left(\int_a^x cf(t)\,dt\right)'-\left(c\int_a^x f(t)\,dt\right)'=cf(x)-cf(x)\equiv 0$. Damit ist $\int_a^x cf(t)\,dt-c\int_a^x f(t)\,dt=k$ und mit $x=a$ gilt $k=0$ (analog Teil a).

c) $\int(f(x)+g(x))dx=\underline{\int f(x)dx+\int g(x)dx}$; $\int r\cdot f(x)dx=\underline{r\cdot\int f(x)dx}$.

d) **Beispiel:** $\int x^{0.3}dx=\frac{x^{1.3}}{1.3}+c$; $\int\frac{1}{x^3}dx=\frac{x^{-2}}{-2}+c$; $\int\sqrt{x}dx=\frac{x^{3/2}}{3/2}+c$;

$\int(6x^2-4x)\,dx=6\cdot\int x^2\,dx-4\cdot\int x\,dx=6\cdot\frac{x^3}{3}-4\frac{x^2}{2}+c=2x^3-2x^2+c$;

$\int(9x-2)^2dx=\int(81x^2-36x+4)dx=\frac{81x^3}{3}-\frac{36x^2}{2}+4x+c=27x^3-18x^2+4x+c$.

e) $\int_a^c f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx$ (Intervalladditivität).

Aufg. 176/462: a) $F(x)=\frac{3x^2}{2}+c$, b) $F(x)=2x^2+2x+c$, c) $F(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+x+c$,

d) $F(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+x^2+2x+c$, e) $F(x)=\frac{x^{-1}}{-1}+\frac{3x^{-2}}{-2}+c$, f) $F(x)=\frac{x^{3/2}}{3/2}+\frac{2x^5}{5}+c$,

g) $f(x)=2x^{-2}+2x^{1/2}$, $F(x)=\frac{2x^{-1}}{-1}+\frac{2x^{3/2}}{3/2}+c$, h) $F(x)=-2x^{-2}+4\sqrt{x}+c$,

i) $F(x)=2x^{3/2}+2\sqrt{x}-x^4$, denn $\frac{\sqrt{x}}{x}=x^{-1/2}$.

j) $\int(3x-4)^2dx=\int(9x^2-24x+16)dx=\frac{9x^3}{3}-\frac{24x^2}{2}+16x+c=3x^3-12x^2+16x+c$;

k) $\int(5-2(6x-2)^2)dx = \int(5-2(36x^2-24x+4))dx = \int(-72x^2+48x-3)dx$
$= \frac{-72x^3}{3} + \frac{48x^2}{2} - 3x + c = -24x^3 + 24x^2 - 3x + c;$

L) $\int(3-4x^3-x^2\sqrt{x}+\frac{1}{2x^3}-\frac{x}{3\sqrt{x}})dx = \int(3-4x^3-x^{2.5}+\frac{1}{2}x^{-3}-\frac{1}{3}x^{0.5})dx$
$=3x-4\frac{x^4}{4}-\frac{x^{3.5}}{3.5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-2}}{-2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^{1.5}}{1.5} = 3x-x^4-\frac{x^{3.5}}{3.5}-\frac{1}{4}x^{-2}-\frac{1}{4.5}x^{1.5};$

Aufg. 176/463: $P(a;b)$ liegt auf $K_{F_i} \Leftrightarrow F_i(a)=b$. a) $F(x)=x^2+c,\ F_1(2)=2^2+c=7 \Leftrightarrow c=3;$
b) $F(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2+2x+4;$ c) $F(x)=\frac{x^4}{4}-x^3+3x^2-46;$ d) $F(x)=\frac{2}{3}x^{1.5}-8;$ e) $F(x)=-\cos(x)+5;$
f) $F(x)=3\sin(x)+\sqrt{2}$.

Aufg. 176/464: a) $\displaystyle\int_0^x(2t+1)dt=[t^2+t]_0^x=x^2+x;$ b) $x^2+3x-18;$

c) $\displaystyle\int_2^x(t^2+t)dt=\left[\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}\right]_{t=2}^{t=x}=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{14}{3};$

d) $\displaystyle\int_3^x(t^2+2t-1)dt=\left[\frac{t^3}{3}+t^2-t\right]_{t=3}^{t=x}=\frac{x^3}{3}+x^2-x-15;$

e) $\displaystyle\int_{-2}^x(t^3+t)dt=[\frac{t^4}{4}+\frac{t^2}{2}]_{-2}^x=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}-6;$

f) $\displaystyle\int_\pi^x 2\cos(t)dt=[2\sin(t)]_\pi^x=2\sin(x);$ g) $\displaystyle\int_x^2(4t+2)dt=[2t^2+2t]_x^2=12-(2x^2+2x);$

h) $\displaystyle\int_x^{2x}(2t+4)dt=[t^2+4t]_x^{2x}=(2x)^2+4(2x)-(x^2+4x)=3x^2+4x.$

Aufg. 176/465: a) Wann braucht man bei der Integration das $'+c'$? **i)** Wenn alle Stammfunktionen (SF) gesucht sind. **ii)** Wenn eine SF durch einen spziellen Pkt gesucht ist. **iii)** Bei Integralfktn + Dgln.

b) Wann nicht? **i)** Wenn eine SF gesucht ist. **iii)** Bei der Flächenberechnung.

Aufg. 176/466: Sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, dann gilt:

a) $\int_{-1}^4 f(x)dx = F(4)-F(-1)=F(4)-F(0)+F(0)-F(-1)=\int_0^4 f(x)dx+\int_{-1}^0 f(x)dx=e-a$; die Aussage war falsch (oder nicht allgemein gültig), denn $-F(-1)\neq F(1)$; $e-b=\int_1^4 f(x)dx$;

b) $\int_1^3 f(x)dx=F(3)-F(1)=F(3)-F(0)+F(0)-F(1)=\int_0^3 f(x)dx-\int_0^1 f(x)dx=d-b$ (Aussage war ok);

c) $\int_2^4(f(x)+1)dx=F(4)-F(2)+[x]_2^4=F(4)-F(0)+F(0)-F(2)+(4-2)=e-b+2\neq e-b+1,$

d) (Verschiebe $K_{f(x-1)}$ um 1 nach links) $\int_1^2 f(x-1)dx=\int_0^1 f(x)dx=F(1)-F(0)=b$ die Aussage war falsch (oder nicht allgemein gültig), denn es wurde in die falsche Richtung verschoben.

e) (Strecke K_f mit Faktor 2 in y-Richtung) $\int_1^3 2f(x)dx=2\int_1^3 f(x)dx=2(F(3)-F(1))=2(F(3)-F(0)+F(0)-F(1))=2(d-b)$ (Aussage war ok);

f) Strecke K_f im Intervall [0;4] zuerst mit Faktor 0.5 in x-Richtung; Damit erhält man die gesuchte Fläche. Damit ist die Fläche die Hälfte von $\int_0^2 f(x)dx$ $\int_0^2 f(2x)dx=\frac{e}{2}$ (Aussage war ok).

g) Strecke K_f im Intervall [0;1] zuerst mit Faktor 0.25 in x-Richtung; Damit erhält man die gesuchte Fläche. Damit ist $\int_0^1 f(4x)dx$ ein Viertel von $\int_0^4 f(x)dx$ oder $\int_0^1 2f(4x)dx=\frac{e}{2}$ i.A. $\neq\frac{d}{2}$ (Aussage war falsch).

h) $\int_1^2 f(2x-2)dx=\int_1^2 f(2(x-1))dx$, Strecke K_f im Intervall [1;2] zuerst mit Faktor 0.5 in x-Richtung und verschiebe dann um 1 nach links. $\int_1^2 f(2x-2)dx=0.5(F(2)-F(0))=c/2$ (Aussage war ok).

Aufg. 176/467: a) $v(t)=a\cdot t=2t;$ b) $s=\frac{a}{2}t^2=x^2$, $s(x)=\displaystyle\int_0^x v(t)dt;$

c) $36=\displaystyle\int_0^x 2tdt=[t^2]_0^x=x^2\Leftrightarrow x=(\pm)6.$

Aufg. 177/469: a) $V(t) = 0.0025x^4 - 0.08x^3 + 0.675x^2 = \int_0^x v(t)dt$, $V(6) = 10.26$;

b) Kandidaten für ein Maximum sind alle Nullstellen von $v(t)$ also $t = 0, t = 9$ und $t = 15$ sowie die Randstellen $x = 0$ und $x = 20$;

Klass mit V'': $V''(0) = 1.5 > 0$ (Mini), $V''(9) = -0.57 < 0$ (Maxi), $V''(15) = 0.75 > 0$ (Mini),

Global oder lokal: $V(0) = 0$ (globales Mini), $V(9) = 12.7575$ (lokales Maxi),
$V(15) = 8.4375$ (lokales Mini), $V(20) = 30$ (globales Maxi);

c) -3, 5, 15 (doppelte 8.4375 Stelle), diese können mit dem GTR oder mit Polynomdivision und der Tatsache, dass $V(15) = 8.4375$ berechnet werden.

Aufg. 177/468: [Notation in eckigen Klammern = im Abi so nicht aufschreiben = weglassen]

a) $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{e^t}{(1+e^t)^2} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{e^t \cdot e^{-t}}{(1+2e^t+e^{2t}) \cdot e^{-t}} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{e^{-t}+2+e^t} \left[= \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{0+2+e^\infty} = \dfrac{1}{\infty}\right] = 0.$

Die Aufgabe kann auch mit der Methode von Sd gerechnet werden.

$f'(t) = \dfrac{e^t \cdot (1+e^t)^2 - e^t \cdot e^t \cdot 2(1+e^t)}{(1+e^t)^4} = \dfrac{(1+e^t) \cdot (e^t \cdot (1+e^t) - 2e^{2t})}{(1+e^t)^4} = \dfrac{e^t + e^{2t} - 2e^{2t}}{(1+e^t)^3} = \dfrac{e^t \cdot (1-e^t)}{(1+e^t)^3} < 0$
für $t > 0$ (weil in diesem Fall $1 - e^t < 0$ ist).

Der Fischbestand fällt nicht, weil $f(t)$ = die Ableitung des Bestandes > 0 ist; damit ist $F(x)$ smw.

b) $F'(t) = (-(1+e^t)^{-1})' = e^t \cdot (1+e^t)^{-2}$.

c) Geben Sie eine Funktion $J_0(0) = -(1+e^t)^{-1}|_{t=0} + c = 4 \Rightarrow c = 4.5$,

damit ist $J_0(t) = 4.5 - (1+e^t)^{-1}$. d) $\lim_{t\to\infty} F(t) = 4.5$; es sind 4.5 Millionen Fische zu erwarten.

Aufg. 177/470: $f''(t) = (150 \cdot t^2 \cdot e^{-0.2t})'' = ((300t - 30 \cdot t^2) \cdot e^{-0.2t})' = (300 - 120t + 6t^2) \cdot e^{-0.2t}$.

a) $f'(t) = 0 \Rightarrow (300t - 30 \cdot t^2) \cdot e^{-0.2t} = 0 \overset{:e^{-0.2t}}{\Longleftrightarrow} 30t(10 - t) = 0 \Leftrightarrow t_1 = 0,\ t_2 = 10.$ $H(10/2030)$: Die MER ist für $t = 10$ maximal und betägt ca 2030 Personen pro Woche. Auf die Klassifikation des Extremums kann (des gegebenen Graphen wegen) verzichtet werden.

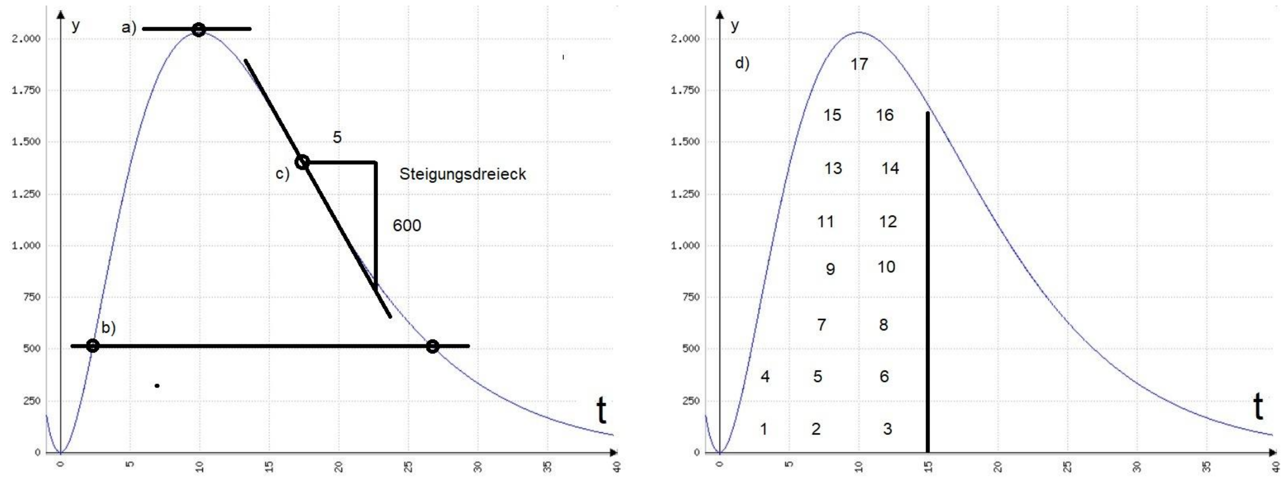


Abb. 376 Erkrankungsrate zu Ag 177/470

b) $f(t) = 500$: Die Gleichung $150 \cdot t^2 \cdot e^{-0.2t} = 500$ ist transtendent und kann also nur näherungsweise (z.B. mithilfe des Schaubildes) bestimmt werden. Abgelesen wurden $S_1(2.3/500), S_2(26.9/500)$. Die MER steigt etwa 2.3 Wochen nach Beobachtungsbeginn über 500 Personen/Woche und fällt nach etwa 26.9 Wochen wieder unter diese Schranke.

c) $f''(x) = 0 = (300 - 120t + 6t^2) \cdot e^{-0.2t} \Leftrightarrow t_{1,2} = 10 \pm \sqrt{50}$.
$t_1 \approx 2.929$ (Graph: maximaler Anstieg), $t_2 \approx 17.071$ (Graph: maximaler Abnahme).

$\Rightarrow W(17/1447)$. Abgelesene Werte ergeben $m \approx \frac{800-1400}{5} = -120 \Rightarrow f'(17) \approx -120$: Die MER fällt für $t \approx 17$ minimal und fällt um etwa 120 Personen pro Woche^2.

d) $\Delta P =$ die Personenänderung; $\Delta P = \int_0^{15} f(x)dx \Rightarrow$ es wurden etwa 17 Rechtecke abgelesen. Ein Rechteck ist von der Größe $5 \cdot 250 = 1250$ Personen. Damit ist $\Delta P \approx 17 \cdot 5 \cdot 250 = 21250$ (Personen). Damit sind nach 15 Wochen etwa 23250 Personen infiziert (relativ exakter Wert:$F(15) + 37500 \approx 21630{+}2000{=}23630$).

e) $f'(t) = (150 \cdot t^2 \cdot e^{-0.2t})' = 150 \cdot (2t - 0.2t^2) \cdot e^{-0.2t} = 30 \cdot (10t - t^2) \cdot e^{-0.2t}$. Für $t > 10$ ist $10t - t^2 < 0$, der Rest des Term ist > 0, damit ist $f'(t) < 0$ für $t > 10$, also ist nach dem Monotoniesatz f für $t > 10$ smf.

f) $F'(t) = (-750 \cdot (t^2 + 10t + 50) \cdot e^{-0.2t})' = -750 \cdot (2t + 10 - 0.2(t^2 + 10t + 50)) \cdot e^{-0.2t} = -750 \cdot (2t + 10 - 0.2t^2 - 2t - 10) \cdot e^{-0.2t} = 150 \cdot t^2 \cdot e^{-0.2t} = f(t)$ (qed).

g) Alle Stammfunktionen sind von der Form $F_c(x) = -750 \cdot (t^2 + 10t + 50) \cdot e^{-0.2t} + c$. $F_c(0) = -750 \cdot (0^2 + 10 \cdot 0 + 50) \cdot e^{-0.2 \cdot 0} + c = -750 \cdot 50 \cdot 1 + c$; $\quad \tilde{F}(0) = -37500 + c = 2000 \Leftrightarrow c = 39500$; $\tilde{F}(t) = -750 \cdot (t^2 + 10t + 50) \cdot e^{-0.2t} + 39500$.

h) $\lim_{t\to\infty} \tilde{F}(t) = 39500$; und $(\tilde{F}(t))' = f(t) = 150 \cdot t^2 \cdot e^{-0.2t} > 0$ für $t > 0$, damit ist $\tilde{F}(t)$ smw und $F(t)$ kann maximal den Wert $39500 < 40000$ annehmen.

Aufg. 177/471: $f''(t) = (6000 \cdot t \cdot e^{-0.5t})'' = ((6000 - 3000t) \cdot e^{-0.5t})' = (-6000 + 1500t) \cdot e^{-0.5t}$.

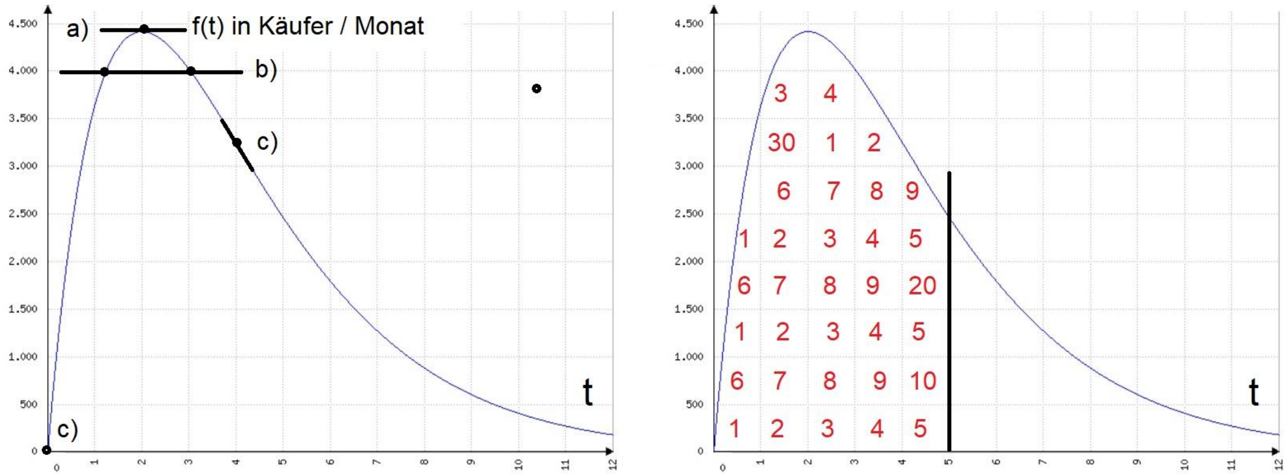


Abb. 377 Anzahl der Käufer der App zu Ag 177/471 $f(t) = 6000 \cdot t \cdot e^{-0.5t}$

a) $f'(t) = 0 = (6000 - 3000t) \cdot e^{-0.5t} \Leftrightarrow t_1 = 2. \Rightarrow H(2; 4414.5)$. Auf die Klassifikation des Extremums kann (des gegebenen Graphen wegen) verzichtet werden. Die maximale momentane Änderungsrate ist zwei Monate nach der Einführung und beträgt etwa 4414.5 Käufer pro Monat.

b) $f(t) = 6000 \cdot t \cdot e^{-0.5t} = 4000$. Die Gleichung ist transzendent (algebraisch nicht elementar lösbar) und damit kann diese nur näherungsweise berechnet oder aus dem Schaubild abgelesen werden. $t_2 \approx 1.3$, $t_3 \approx 3$ Zwischen 1.3 Monaten und 3 Monaten nach Einführung ist die momentane Änderungsrate größer als 4 000 Käufer pro Monat.

c) $f''(t) = (-6000 + 1500t) \cdot e^{-0.5t} = 0 \Leftrightarrow t_4 = 4$. Wegen der gegebenen Zeichnung, kann auf dem zweiten Teil der hinreichende Bedingung ($f'''(4) \neq 0$) verzichtet werden. Die momentane Änderungsrate fällt vier Monate nach der Einführung am stärksten. Weil kein weiterer Wendepunkt ermittelt werden kann, ist die maximale Konzentrationszunahme am Anfang für $t_5 = 0$.

d) Mit dem LK-Stoff kann keine Stammfunktion von f gefunden werden. Eine Stammfunktion ist $F(t) = -12000(t + 2) \cdot e^{-0.5t}$. $\Delta K = \displaystyle\int_0^5 f(t)dt$ (aus Graph oder mit GTR berechnet) 35 Rechtecke mit je 500 Käufern ergibt 17 000 Käufer (GTR 17 104.86); (Anfangsbestand 0). Damit gibt es nach 5 Monaten etwa 17 000 Käufer.

e) $f'(t) = (6000 \cdot t \cdot e^{-0.5t})' = 6000(t \cdot (-0.5) \cdot e^{-0.5t} + e^{-0.5t}) = 6000 \cdot e^{-0.5t}(1 - 0.5t)$. $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$ (siehe auch Teil a). Für $t > 2$ ist $f'(t) < 0$, weil $1 - 0.5t < 0$ ist. Damit ist $f(t)$ smf. $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} 6000 \cdot t \cdot e^{-0.5t} = 0$, damit bleibt $f(t)$ positiv.

Interpretation: $f(t) > 0$: Die Gesamtanzahl der Käufer nimmt zu. $f'(t) < 0$: Die Käuferzunahme wird im Laufe der Zeit immer geringer.

f) (exponentielle Interpolation) $g(0) = 0$ 'neue App'; $g(6) = 20000$ '6 Monate 20 000 Käufer';

$\lim\limits_{t\to\infty} S - c \cdot e^{-kt}[= S - c \cdot e^{-k\cdot\infty} = S - c \cdot e^{-\infty}] = S - c \cdot 0 = S$;

damit ist $y = S$ waagrechte Asymptote; $S = 30000$ 'maximal 30 000 Käufer'.

$\Rightarrow g(t) = 30000 - c \cdot e^{-kt}$

$g(0) = 0$: $g(0) = 30000 - c \cdot e^{-k\cdot 0} = 30000 - c \cdot e^0 = 30000 - c \cdot 1 \Leftrightarrow c = 30000$

$\Rightarrow g(t) = 30000 - 30000 \cdot e^{-kt} = 30000 \cdot (1 - e^{-kt})$

$g(6) = 20000$: $g(6) = 30000 \cdot (1 - e^{-k\cdot 6}) = 20000 \overset{:30000}{\Longleftrightarrow} 1 - e^{-6k} = \frac{2}{3} \overset{-1;\cdot(-1)}{\Longleftrightarrow} e^{-6k} = \frac{1}{3}$

$\overset{\ln}{\Longleftrightarrow} -6k = \ln(\frac{1}{3}) = -\ln(3) \overset{:(-6)}{\Longleftrightarrow} k = \frac{\ln(3)}{6} \approx 0.1831$

$\Rightarrow g(t) = 30000 - 30000 \cdot e^{-\frac{\ln(3)}{6}t} \approx 30000 \cdot (1 - e^{-0.1831t})$

[die Notation in eckigen Klammern ist im Abitur verboten]

Aufg. 178/472: a) $F'(t) = (-(2.25t^2 + 37.5t + 312.5) \cdot e^{-0.12t})'$
$= (0.12(2.25 \cdot t^2 + 37.5 \cdot t + 312.5) - 4.5t - 37.5) \cdot e^{-0.12t} = 0.27t^2 \cdot e^{-0.12t} = f(t)$.

b) Da $F(0) = 0$ ist, $-(2.25t^2 + 37.5t + 312.5) \cdot e^{-0.12t} + c|_{t=0} = 0 \Rightarrow c = 312.5$;
damit ist $J_0(t) = 312.5 - (2.25t^2 + 37.5t + 312.5) \cdot e^{-0.12t}$.

c) $F'(t) = f(t) > 0 \Rightarrow F$ ist smw. $\lim_{t\to\infty} F(t) = 312.5$; es kommen also (rund) 312 Personen.

Aufg. 178/473: a) $f_1'(x) = 2\cos(2x)$; $f_2'(x) = -3\sin(3x - 1)$; $f_3'(x) = a \cdot e^{ax+b}$;
$f_4'(x) = a \cdot \frac{1}{2} \cdot (ax + b)^{-1/2}$; $(f(ax + b))' = a \cdot f'(ax + b)$.

b) $\int 2 \cdot \cos(2x)\,dx = \sin(2x)$; $\int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\sin(2x)$; $\int \cos(6x)\,dx = \frac{-\sin(6x)}{6}$;
$\int \cos(ax)\,dx = \frac{-\sin(ax)}{a}$; $\int \cos(ax + b)\,dx = \frac{-\sin(ax+b)}{a}$; $\int e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3}$; $\int e^{ax+b}\,dx = \frac{e^{ax+b}}{a}$;

$\int \sin(ax + b)\,dx = \frac{-\cos(ax+b)}{a} + c$, $\int (ax + b)^2\,dx = \frac{(ax+b)^3}{3\cdot a} + c$, $\int (ax + b)^3\,dx = \frac{(ax+b)^4}{4\cdot a} + c$,

$\int \sqrt{ax + b}\,dx = \frac{(ax+b)^{3/2}}{3/2\cdot a} + c$, $\int \frac{1}{(ax+b)^2}\,dx = \frac{(ax+b)^{-1}}{(-1)\cdot a} + c$,

$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{\ln(ax+b)}{a} + c$. (Für $ax + b > 0$. Der Betrag kommt später ...)

c) $F'(x) = f(x)$ (Hauptsatz). $(F(ax + b))' = a \cdot f(ax + b)$, Sie benötigen die Kettenregel,
iv) $\int f(ax + b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$.

Aufg. 178/474: **a)** $\int e^{6x-3}\,dx = \frac{e^{6x-3}}{6} + c$; **b)** $\int \sin(3x - 8)\,dx = \frac{-\cos(3x-8)}{3} + c$;

c) $\int \cos(\frac{2x-3}{4})\,dx = 2 \cdot \sin(\frac{2x-3}{4}) + c$, **d)** $\int e^{\frac{4-x}{2}}\,dx = -2 \cdot e^{\frac{4-x}{2}} + c$; **e)** $\int (3x + 2)^4\,dx = \frac{(3x+2)^5}{3\cdot 5} + c$,

f) $\int \sqrt{4x - 2}\,dx = \int (4x - 2)^{0.5}\,dx = \frac{(4x-2)^{1.5}}{4\cdot 1.5} + c = \frac{(4x-2)^{\frac{3}{2}}}{6} + c$;

g) $\int \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx = \int (2x + 1)^{-2}\,dx = \frac{(2x+1)^{-1}}{2\cdot(-1)} + c$, **h)** $\int \frac{3}{(2x+1)^5}\,dx = \int 3 \cdot (2x + 1)^{-5}\,dx = \frac{3\cdot(2x+1)^{-4}}{2\cdot(-4)} + c$,

i) $\int \frac{2}{\sqrt{9x+4}}\,dx = \int 2 \cdot (9x + 4)^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2 \cdot \frac{(9x+4)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\cdot 9} + c = 4 \cdot \frac{(9x+4)^{\frac{1}{2}}}{9} + c$,

j) $\int \cos(2 - x)\,dx = \frac{\sin(2-x)}{-1} + c = -\sin(2 - x) + c$, $(a = -1, b = 2)$;

k) $\int \frac{1}{e^{2x+4}}\,dx = \int e^{-2x-4}\,dx = \frac{e^{-2x-4}}{-2} + c, \quad (a=-2, b=-4);$

L) $\int \sin(\pi - x)\,dx = \frac{-\cos(\pi-x)}{-1} + c = \cos(\pi - x) + c, \quad (a=-1, b=\pi);$

m) $\int \left(\frac{1}{1-x}\right)^4 dx = \int (1-x)^{-4}\,dx = \frac{(1-x)^{-3}}{(-1)\cdot(-3)} + c, \quad = \frac{(1-x)^{-3}}{3} + c, \quad (a=-1, b=1);$

n) $\int \left(\frac{3}{(3-3x)^3}\right)^{-3} dx = \int \left(\frac{3^{-3}}{(3-3x)^{-9}}\right) dx = \int \frac{(3-3x)^9}{3^3}\,dx = \frac{(3-3x)^{10}}{3^3\cdot 10\cdot(-3)} + c = -\frac{(3-3x)^{10}}{810} + c, \quad (a=-3, b=3);$

Aufg. 178/475: a) $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ oder $x=1$; $A = \int_0^1 \sin(\pi x)\,dx = [\frac{-1}{\pi}\cos(\pi x)]_0^1 = \frac{2}{\pi}$.

b) $\int \frac{48}{(2x-4)^3}\,dx = \int 48\cdot(2x-4)^{-3}\,dx = 48\cdot\frac{(2x-4)^{-2}}{2\cdot(-2)} + c = \frac{-12}{(2x-4)^2} + c;$
$F(3) = \frac{-12}{(2\cdot 3-4)^2} + c = -3 + c \Rightarrow c = 4 \Rightarrow F(x) = \frac{-12}{(2x-4)^2} + 4.$

c) i) $\int_0^{\pi}(2x - \sin(0.5x))dx = [x^2 + 2\cos(0.5x)]_0^{\pi} = \pi^2 + 2\cos(0.5\pi) - (0^2 + 2\cos(0)) = 5\pi^2 - 2;$

ii) $\int_0^1 \frac{1}{(2x+1)^3}dx = \int_0^1 (2x+1)^{-3}dx = [\frac{(2x+1)^{-2}}{-2\cdot 2}]_0^1 = \frac{(2\cdot 1+1)^{-2}}{-4} - \frac{(2\cdot 0+1)^{-2}}{-4} = \frac{17}{36} - 0.25 = \frac{2}{9};$

iii) $\int_1^9 (\frac{2}{\sqrt{x}-2})dx = \int_1^9 (2x^{-0.5} - 2)dx = [\frac{2x^{0.5}}{0.5} - 2x]_1^9 = \frac{2\cdot 9^{0.5}}{0.5} - 2\cdot 9 - (\frac{2\cdot 1^{0.5}}{0.5} - 2\cdot 1) = 12 - 18 - (4-2) = -8;$

iv) $\int_{-3}^0 e^x dx = [e^x]_{-3}^0 = e^0 - e^{-3} = 1 - \frac{1}{e^3};$

v) $\int_0^{\ln(4)} e^{0.5x}dx = [\frac{e^{0.5x}}{0.5}]_0^{\ln(4)} = 2\cdot(e^{0.5\cdot\ln(4)} - e^{0.5\cdot 0}) = 2\cdot(e^{0.5\cdot 2\ln(2)} - e^0) = 2\cdot(e^{\ln(2)} - 1) = 2\cdot(2-1) = 2.$

vi) $\int_{\ln(2)}^{\ln(4)} e^{2x+4}dx = \left[\frac{e^{2x+4}}{2}\right]_{\ln(2)}^{\ln(4)} = \frac{e^{2\cdot\ln(4)}\cdot e^4}{2} - \left(\frac{e^{2\cdot\ln(2)}\cdot e^4}{2}\right) = \frac{(e^{\ln(4)})^2\cdot e^4}{2} - \frac{(e^{\ln(2)})^2\cdot e^4}{2} = \frac{16\cdot e^4}{2} - \frac{4\cdot e^4}{2} =$
$8\cdot e^4 - 2\cdot e^4 = 6e^4 \approx 327.6.$

vii) $\int_1^{\ln(3)} e^{5x-2}dx = \left[\frac{e^{5x-2}}{5}\right]_1^{\ln(3)} = \left[\frac{e^{5x}}{5e^2}\right]_1^{\ln(3)} = \frac{e^{5\cdot\ln(3)}}{5e^2} - \left(\frac{e^{5\cdot 1}}{5e^2}\right) = \frac{(e^{\ln(3)})^5}{5e^2} - \frac{e^3}{5} = \frac{1}{5}(\frac{3^5}{e^2} - e^3) \approx 2.56;$

Bemerkung: $\int \frac{1}{x} = \ln|x| + c$ - dies wird aber erst in Ag 183/496 geklärt. An dieser Stelle darf auch $\int \frac{1}{x} = \ln(x) + c$ verwendet werden.

viii) $\int_1^e (\frac{4}{x} - 2x)dx = \left[4\ln|x| - x^2\right]_1^e = 4\ln(e) - e^2 - \left(4\ln(1) - 1^2\right) = 4 - e^2 + 1 = 5 - e^2 \approx -2.389;$

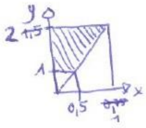
ix) $\int_e^{2e} (\frac{1}{2x} - \frac{1}{(2x)^2})dx = \int_e^{2e}(0.5x^{-1} - 0.25x^{-2})dx = \left[0.5\ln|x| - 0.25\cdot\frac{x^{-1}}{-1}\right]_e^{2e}$
$= 0.5\ln|2e| + 0.25\frac{1}{2e} - \left(0.5\ln|e| + 0.25\cdot\frac{1}{e}\right) = 0.5(\ln(2) + \ln(e)) + \frac{1}{8e} - 0.5 - \frac{1}{4e} = 0.5\ln(2) - \frac{1}{8e};$

d) i) $\int_3^{e+2} \frac{1}{x-2}dx = [\ln(x-2)]_3^{e+2} = \ln(e+2-2) - \ln(3-2) = \ln(e) - \ln(1) = 1 - 0 = 1$, also 'ja'.

d) ii) $\int_e^{e^2} \frac{3}{x}dx = [3\ln(x)]_e^{e^2} = 3\ln(e^2) - 4\ln(e) = 3\cdot 2\ln(e) - 3\cdot 1 = 3$, also 'ja'.

Aufg. 178/476:

Intervall 2



→ Dreieck $A = 2\cdot 1\cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{1}}$ [FE]

zwischen a und b: 0.25 (b² - a²) (FE)

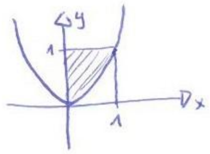
ohne kleines Dreieck:

$A - 1\cdot 0{,}5\cdot\frac{1}{2} = -0{,}25 + 1 = \underline{\underline{0{,}75}} = A_{gesucht}$

anderer Weg: $y = 2x$, $x = \frac{1}{2}y$ → $\int_1^2 \frac{1}{2}y\,dy = [0{,}25y^2]_1^2 = (0{,}25\cdot 4) - 0{,}25 = 0{,}75$ [FE]

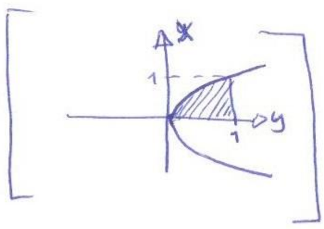
• mit $f(x) = x^2$ I [

• ~~geometrisch~~ graphisch



$A_{\square} - A_{\triangle} = A_{D}$

$1 - \int_0^1 x^2dx = 1 - [\frac{1}{3}x^3]_0^1 = 1 - (\frac{1}{3}) - 0 = \frac{2}{3}$ [FE]



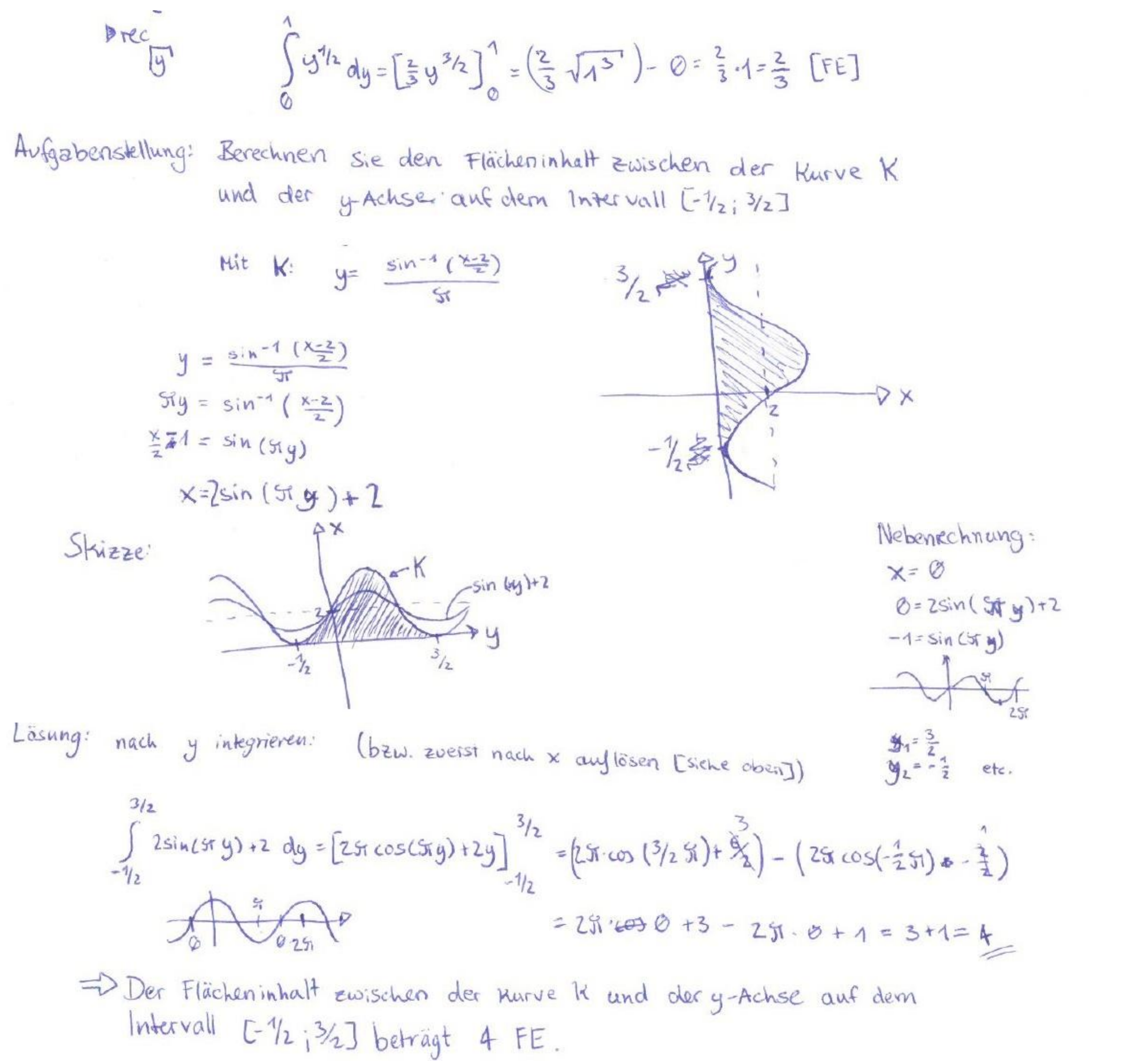


Abb. 378 LöVo zur Ag 178/476; Thx Hanna W.

Aufg. 178/477: a) $\int_0^{2\pi} \sin(t)dt = 0$. Flächen über der $x-$Achse und Flächen darunter löschen sich aus. b) Flächen über der $x-$Achse sind positiv orientiert, und Flächen darunter negativ. Somit sind negative Flächen auch definiert.

c) Sei $f(x) < 0$, dann ist $\int_a^b f(x)dx \underline{\leq 0}$, falls $a < \underline{b}$. Flächen u<u>nterhalb</u> der x-Achse sind <u>negativ</u>.

d) Sei $f(x) > 0$ und $a < b$, dann ist das $\int_a^b f(x)dx > 0$.

Aufg. 179/478:

a) i) 1; ii) 8; iii) 27; iv) 64; $f_n(x) = 0.75(x^2 - n^2) = 0 \Leftrightarrow x = \pm n$.
In diesem Bereich liegt der Graph von $f_n(x) = G_{f_n}$ unter der x-Achse.
$\int_{-n}^{n} 0.75 \cdot (n^2 - x^2)dx = 0.75 \cdot [n^2 \cdot x - \frac{x^3}{3}]_{-n}^{n} = 0.75 \cdot (n^3 - \frac{n^3}{3} - (-n^3 - \frac{(-n)^3}{3})) = 0.75 \cdot \frac{4}{3}n^3 = n^3$.

b) i) 1; ii) 16; iii) 81; iv) 256;
$f_n(x) = 12x(x-n)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = n$. In diesem Bereich liegt G_{f_n} über der x-Achse.

$\int_0^n 12x(x-n)^2dx = 12\int_0^n(x^3 - 2nx^2 + n^2x)dx = 12[\frac{x^4}{4} - \frac{2nx^3}{3} + \frac{n^2x^2}{2}]_{-n}^{n}$
$= 12((\frac{n^4}{4} - \frac{2n \cdot n^3}{3} + \frac{n^2 \cdot n^2}{2}) - (\frac{0^4}{4} - \frac{2n \cdot 0^3}{3} + \frac{n^2 \cdot 0^2}{2})) = 12n^4(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}) = n^4$.

c) i) $f_1(x) = x^4 + 4x^3 = x^3(x+4) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ oder $x_2 = -4$,
$\int_{-4}^{0}(x^4 + 4x^3)dx = [\frac{x^5}{5} + x^4]_{-4}^{0} = \frac{0^5}{5} + 0^4 - (\frac{(-4)^5}{5} + (-4)^4) = -51.2$.
Damit ist die eingeschlossene Fläche 51.2 (FE); G_{f_n} liegt im Bereich $]-4;0[$ unter der x-Achse.

ii) $f_2(x) = x^4 - 4x^3 = x^3(x-4) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ oder $x_2 = 4$;
$\int_{0}^{4}(x^4 - 4x^3)dx = [\frac{x^5}{5} - x^4]_{0}^{4} = -51.2$. Damit ist die eingeschlossene Fläche 51.2 (FE).
Warum sind die Flächen gleich? Es gilt $f_2(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^3 = x^4 + 4x^3 = f_1(x)$
oder G_{f_2} an der y-Achse gespiegelt ist G_{f_1}. Die Flächen sind also (gegensinnig) kongruent.

iii) $f_3(x) = -x^4 + 4x^3 = x^3(x-4) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ oder $x_2 = 4$;
$\int_{0}^{4}(-x^4 + 4x^3)dx = [\frac{-x^5}{5} + x^4]_{0}^{4} = 51.2$. Damit ist die eingeschlossene Fläche 51.2 (FE).
Es gilt $-f_2(x) = -(x^4 - 4x^3) = -x^4 + x^3 = f_3(x)$ oder G_{f_2} an der x-Achse gespiegelt ist G_{f_3}. Die Flächen sind also (gegensinnig) kongruent und G_{f_1} am Ursprung gespiegelt ergibt G_{f_3}.

iv) $f_3(x) = -x^4 - 4x^3 = -x^3(x+4) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ oder $x_2 = -4$;
$\int_{-4}^{0}(-x^4 - 4x^3)dx = [\frac{-x^5}{5} - x^4]_{-4}^{0} = 51.2$.
Damit ist die eingeschlossene Fläche ist bei allen Agteilen 51.2 (FE) und alle Flächen sind kongruent:
G_{f_4} an der x-Achse gespiegelt ist G_{f_1},
G_{f_4} an der y-Achse gespiegelt ist G_{f_3}, G_{f_4} am Ursprung gespiegelt ist G_{f_2}.

Beachten Sie bitte, dass nicht jede Permutation von $-$ und $+$ Zeichen unbedingt eine Spiegelung der oben genannten Art erzeugt (siehe dazu auch Teil k)). Dies liegt hier daran, dass $f(x)$ von der Form $f(x) = a \cdot x^b + c \cdot x^d$ ist, wobei b und d unterschiedliche Parität haben. Unterschiedliche Parität bedeutet hier:
Wenn b gerade ist, dann ist d ungerade und umgekehrt.

d) i) $f_1(x) = x^2 - 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1$ oder $x_2 = 6$;
$\int_{-1}^{6}(x^2 - 5x - 6)dx = [\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - 6x]_{-1}^{6} = \frac{6^3}{3} - \frac{5 \cdot 6^2}{2} - 6 \cdot 6 - (\frac{(-1)^3}{3} - \frac{5 \cdot (-1)^2}{2} - 6 \cdot (-1)) = -\frac{343}{6}$. Damit ist die eingeschlossene Fläche $57.1\bar{6}$ FE.

ii) $f_2(x) = x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2$ oder $x_2 = 3$; $\int_{2}^{3}(x^2 - 5x + 6)dx = [\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x]_{2}^{3} = -\frac{1}{6}$. Damit ist die eingeschlossene Fläche $0.1\bar{6}$ FE. Hier liegt keine Spiegelung und Ähnliches vor; trotzdem sind die Graphen natürlich kongruent, weil alle Graphen Normalparabeln sind.

Die Terme $x^2 \pm 5x \pm 6$ mit ganzen Nullstellen zu finden war nicht ganz einfach.

iii) $f_3(x) = x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -6$ oder $x_2 = 1$; $\int_{-6}^{1}(x^2 + 5x - 6)dx = [\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 6x]_{-6}^{1} = -\frac{343}{6}$. Damit ist die eingeschlossene Fläche $57.1\bar{6}$ FE. G_{f_3} an der x-Achse gespiegelt ist G_{f_1}.

iv) $f_4(x) = x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2$ oder $x = -3$; $\int_{-3}^{-2}(x^2 + 5x + 6)dx = -\frac{1}{6}$. Damit ist die eingeschlossene Fläche $0.1\bar{6}$ FE. G_{f_4} an der x-Achse gespiegelt ist G_{f_2}.

e) Verallgemeinerung: $f_n(x) = x^3 - (5+n)x^2 + 5nx$, $n = 1,2,3,4$; Nst: $0, n, 5$; damit besteht bei jedem Teil die Fläche aus zwei unterschiedlich orientierten Teilen A_1 und A_2; $A = |A_1| + |A_2|$.

i) $x^3 - 6x^2 + 5x = x(x-1)(x-5) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 5$; $A_1 = \int_{0}^{1}(x^3 - 6x^2 + 5x)dx = [\frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{5x^2}{2}]_{0}^{1} = 0.75$; $A_2 = \int_{1}^{5}(x^3 - 6x^2 + 5x)dx = -32$; $A = |0.75| + |-32| = 32.75$.

ii) $x^3 - 7x^2 + 10x = x(x-2)(x-5) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 5$; $A_1 = \int_{0}^{2}(x^3 - 7x^2 + 10x)dx = [\frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{3} + \frac{10x^2}{2}]_{0}^{2} = \frac{16}{3}$; $A_2 = \int_{2}^{5}(x^3 - 7x^2 + 10x)dx = -15.75$; $A = 21.08\bar{3}$.

iii) $x^3 - 8x^2 + 15x = x(x-3)(x-5) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 5$; $A_1 = \int_{0}^{3}(x^3 - 8x^2 + 15x)dx = [\frac{x^4}{4} - \frac{8x^3}{3} + \frac{15x^2}{2}]_{0}^{3} = 15.75$; $A_2 = \int_{3}^{5}(x^3 - 8x^2 + 15x)dx = -\frac{16}{3}$; $A = 21.08\bar{3}$. Tatsächlich sind die Flächen aus Teil ii) und Teil iii) kongruent.

iv) $x^3 - 9x^2 + 20x = x(x-4)(x-5) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 5$;
$A_1 = \int_{0}^{4}(x^3 - 9x^2 + 20x)dx = [\frac{x^4}{4} - \frac{9x^3}{3} + \frac{20x^2}{2}]_{0}^{3} = 32$; $A_2 = \int_{4}^{5}(x^3 - 9x^2 + 20x)dx = -0.75$;
$A = 32.75$. Auch die Flächen aus Teil i) und Teil iv) sind kongruent.

Die Kongruenz liegt unter anderem der Punktsymmetrie aller Graphen.

f) i) $(e^x-1)\cdot(e^x-e)=0 \Leftrightarrow (e^x-1=0 \Leftrightarrow x=\ln(1)=0)$ oder $(e^x-e=0 \Leftrightarrow x=\ln(e)=1)$

$\int_0^1(e^x-1)\cdot(e^x-e)dx=\int_0^1(e^{2x}-(e+1)e^x+e)dx=[\frac{e^{2x}}{2}-(e+1)e^x+ex]_0^1$
$=\frac{e^2}{2}-(e+1)e+e-(\frac{e^0}{2}-(e+1)e^0+0)=0.5e^2-e^2-0.5+e+1=-0.5e^2+e+0.5\approx-0.47625;$
damit ist $A\approx 0.47625$.

ii) $(e^x-1)\cdot(e^x-e^2)=0 \Leftrightarrow (e^x-1=0 \Leftrightarrow x=\ln(1)=0)$ oder $(e^x-e^2=0 \Leftrightarrow x=\ln(e^2)=2)$

$\int_0^2(e^x-1)\cdot(e^x-e^2)dx=\int_0^2(e^{2x}-(e^2+1)e^x+e^2)dx=[\frac{e^{2x}}{2}-(e^2+1)e^x+e^2x]_0^2$
$=\frac{e^4}{2}-(e^2+1)e^2+2e^2-(\frac{e^0}{2}-(e^2+1)e^0+0)=-0.5e^4+e^2-0.5+e^2+1=-0.5e^4+2e^2+0.5\approx-12.021;$
damit ist $A\approx 12.021$.

iii) $(e^x-1)\cdot(e^x-e^3)=0 \Leftrightarrow (e^x-1=0 \Leftrightarrow x=\ln(1)=0)$ oder $(e^x-e^3=0 \Leftrightarrow x=\ln(e^3)=3)$

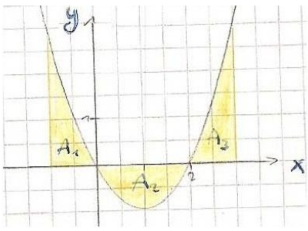
$\int_0^3(e^x-1)\cdot(e^x-e^3)dx=\int_0^3(e^{2x}-(e^3+1)e^x+e^3)dx=[\frac{e^{2x}}{2}-(e^3+1)e^x+e^3x]_0^3$
$=\frac{e^6}{2}-(e^3+1)e^3+3e^3-(\frac{e^0}{2}-(e^3+1)e^0+0)=-0.5e^6+e^3-0.5+e^3+1=-0.5e^6+3e^3+0.5\approx-140.9578;$
damit ist $A\approx 140.9578$.

Verallgemeinert: $f_n(x)(e^x-1)\cdot(e^x-e^n)=0 \Leftrightarrow (e^x-1=0 \Leftrightarrow x=\ln(1)=0)$ oder
$(e^x-e^3=0 \Leftrightarrow x=\ln(e^n)=n)$

$\int_0^n(e^x-1)\cdot(e^x-e^n)dx=\int_0^3(e^{2x}-(e^n+1)e^x+e^n)dx=[\frac{e^{2x}}{2}-(e^n+1)e^x+e^nx]_0^n$
$=\frac{e^{2n}}{2}-(e^n+1)e^n+ne^n-(\frac{e^0}{2}-(e^n+1)e^0+0)=-0.5e^{2n}+ne^n+0.5;$
damit ist $A=|-0.5e^{2n}+ne^n+0.5|$.

iv) Dies gilt auch für $n=-1$: $-0.5e^{-2}-e^{-1}+0.5\approx 0.06445$, allerdings benötigt die Formel hier keinen Betrag. Dies liegt vermutlich an der anderen Flächenorientierung.

Aufg. 179/479: a) $A_1=\int_0^2 x^2\,dx=[\frac{x^3}{3}]_0^2=\frac{8}{3}$ (rosa);
$A_3=A_1+A_2=\int_0^2 x+2\,dx=[\frac{x^2}{2}+2x]_0^2=6$ (rosa und orange);
$A_2=A_3-A_1=6-\frac{8}{3}=\frac{10}{3}$ (nur orange);



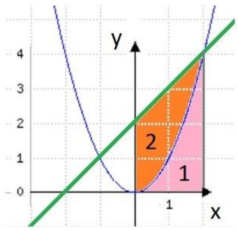


Abb. 379 Fläche zwischen Kurven

Aufg. 179/479: b) Sei $g(x)<f(x)$, dann berechnen wir die Fläche zwischen zwei Kurven K_f und K_g zwischen $x=a$ und $x=b$ durch $\underline{\int_a^b(g(x)-f(x))dx}$. (Abb. 379)

c) i) $|\int_0^1 x-1dx-\int_0^1 3x^2dx|=|\int_0^1 x-1-3x^2dx|=|[\frac{x^2}{2}-x-\frac{3x^3}{3}]_0^1|=|\frac{1^2}{2}-1-1^3-(\frac{0^2}{2}-0^3)|=1.5;$

ii) $|\int_0^1 x\sin(x)dx-\int_0^1(x\sin(x)+2)dx|=|\int_0^1(x\sin(x)-(x\sin(x)+2))dx|=|\int_0^1(\text{-}2)dx|=2;$

iii) $\int_0^1(x+1)e^xdx-\int_0^1 xe^xdx=\int_0^1((x+1)e^x-xe^x)dx=\int_0^1(xe^x+e^x-xe^x)dx=\int_0^1 e^xdx=[e^x]_0^1=e-1,$

Erst <u>subtrah</u>ieren, dann <u>integr</u>ieren.

Beachten Sie bitte, dass $\int_0^1 xe^xdx=(x-1)e^x$ ohne partielle Integration (sprich mit dem, was an der Schule im Regelunterricht gelehrt wird) nicht integrierbar ist.

Aufg. 179/480: (Siehe auch Abb. 379) **a)** $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2=4x-x^2\Leftrightarrow x_1=0$ oder $x_2=2$,
$\int_0^2(4x-x^2-x^2)dx=\int_0^2(4x-2x^2)dx=\left[-\frac{2x^3}{3}-2x^2\right]_{x=0}^{x=2}=\frac{8}{3};$

b) $f(x)=g(x)\Leftrightarrow-(x-1)^2+2=(x-1)^2\Leftrightarrow x_1=0$ oder $x_2=2$, $\int_0^2(-(x-1)^2+2-(x-1)^2)dx=$
$\int_0^2(-2x^2+4x)dx=\left[-\frac{2x^3}{3}-2x^2\right]_{x=0}^{x=2}=\frac{8}{3};$

c) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x_1 = 0$ oder $x_2 = 3$, $\int_0^3 (x - x^2 + 2x)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2\right]_{x=0}^{x=3} = 4.5;$

d) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x_1 = 0.5, x_2 = 2$ oder $x_3 = -0.4$, $\int_{0.5}^3 (5.25 - 2.5x - x^{-2})dx =$ $\left[5.25x - \frac{5x^2}{4} + \frac{x^{-1}}{-1}x^2\right]_{x=0.5}^{x=3} = 1.6875$, Zum Schnittpunkt $x = 0.4$ gibt es keinen zweiten Schnittpunkt, so dass eine Fläche eingeschlossen werden könnte.

e) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x_1 = -2, x_2 = 0$ oder $x_3 = 0.5$, $\int_{-2}^0 (\frac{3x^2}{2} - (x - x^3))dx = \left[\frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right]_{x=-2}^{x=0} = 2 = A_1$, $\int_0^{0.5} (f(x) - g(x))dx = \frac{-3}{64} = A_2$. $A = |A_1| + |A_2| = \frac{131}{64}$. (Abb. 380)

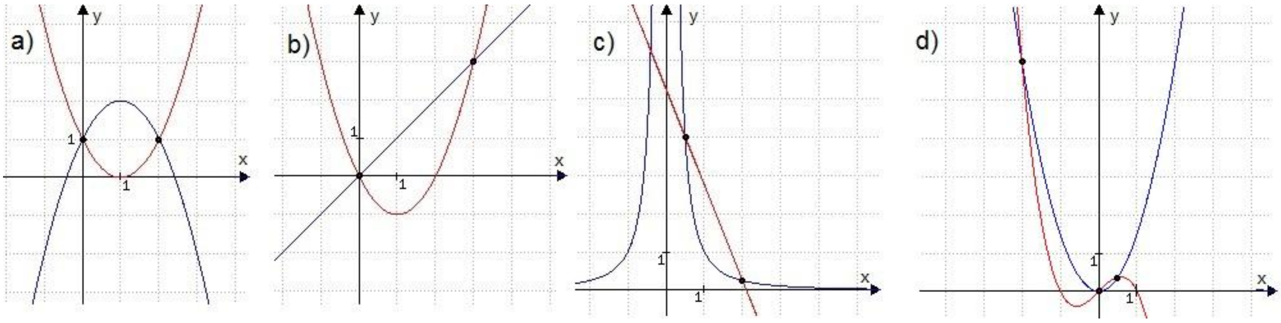


Abb. 380 Fläche zwischen Kurven

f) $4 - e^x = 3e^{-x} \Leftrightarrow e^x - 4 + 3e^{-x} = 0$; Substitution: $w = e^x$:
$w - 4 + \frac{3}{w} = 0 \Leftrightarrow w^2 - 4w + 3 = 0 \Leftrightarrow w_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3}}{2} \Rightarrow w_1 = 1, w_2 = 3$ Rücksubstitution: $x_1 = \ln(1) = 0$, $x_2 = \ln(3)$;

$\int_0^{\ln(3)} (4 - e^x - 3e^{-x})dx = [4x - e^x + 3e^{-x}]_{x=0}^{x=\ln(3)} = 4 \cdot \ln(3) - e^{\ln(3)} + 3e^{-\ln(3)} - (4 \cdot 0 - e^0 + 3e^0)$ $= 4 \cdot \ln(3) - 3 + 3 \cdot \frac{1}{e^{\ln(3)}} + e^0 - 3e^0 = 4 \cdot \ln(3) - 3 + 3 \cdot \frac{1}{3} + 1 - 3 = 4 \cdot \ln(3) - 4.$

g) $e^{4x} + 4e^{2x} = 5e^{3x} \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = \ln(4)$; (siehe Ag 160/411 vii; LoeVo: Seite 638).

$\int_0^{\ln(4)} (e^{4x} + 4e^{2x} - 5e^{3x})dx = \left[\frac{e^{4x}}{4} + \frac{4e^{2x}}{2} - \frac{5e^{3x}}{3}\right]_0^{\ln(4)} = \frac{e^{4 \cdot \ln(4)}}{4} + \frac{4e^{2 \cdot \ln(4)}}{2} - \frac{5e^{3 \cdot \ln(4)}}{3} - \left(\frac{e^0}{4} + \frac{4e^0}{2} - \frac{5e^0}{3}\right)$

$= \frac{(e^{\ln(4)})^4}{4} + \frac{4(e^{\ln(4)})^2}{2} - \frac{5(e^{\ln(4)})^3}{3} - \left(\frac{1}{4} + \frac{4}{2} - \frac{5}{3}\right) = \frac{4^4}{4} + \frac{4 \cdot 4^2}{2} - \frac{5 \cdot 4^3}{3} - \frac{7}{12} = 64 + 32 - \frac{320}{3} - \frac{7}{12} = -11.25.$

Damit ist die eingeschlossene Fläche 11.25 (Hurra, Rosamunde Pilcher hat geklappt).

h) $e^{2x} + e^3 = e^{1+x} + e^{2+x} \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = 2$; (siehe Ag 160/411 xi; LoeVo etwa Seite 638).

Beachten Sie, dass e^3 eine Konstante ist.

$\int_1^2 (e^{2x} + e^3 - e^{1+x} - e^{2+x})dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} + e^3x - e^{1+x} - e^{2+x}\right]_1^2$

$= \frac{e^{2 \cdot 2}}{2} + e^3 \cdot 2 - e^{1+2} - e^{2+2} - \left(\frac{e^{2 \cdot 1}}{2} + e^3 \cdot 1 - e^{1+1} - e^{2+1}\right)$

$= 0.5e^4 + 2e^3 - e^3 - e^4 - \left(0.5e^2 + e^3 - e^2 - e^3\right)$

$= -0.5e^4 + e^3 + 0.5e^2 \approx -3.519$

i) $f'''(x) = (0.25x^4 - 1.5x^2 + 1.25)''' = (x^3 - 3x)'' = (3x^2 - 3)' = 6x$, $f'' = 0 = 3x^2 - 3 \Leftrightarrow x = \pm 1$; $f'''(\pm 1) = \pm 6 \neq 0$. Die Wendestellen sind also $x = \pm 1$.

Tangenten: $y = (u^3 - 3u) \cdot (x - u) + 0.25u^4 - 1.5u^2 + 1.25$ für $u = \pm 1$;

$u = 1$: $y = (1^3 - 3 \cdot 1) \cdot (x - 1) + 0.25 \cdot 1^4 - 1.5 \cdot 1^2 + 1.25 \Leftrightarrow y = -2 \cdot (x - 1)$ $u = -1$ (aus Symmetriegründen): $y = 2 \cdot (x - 1)$.

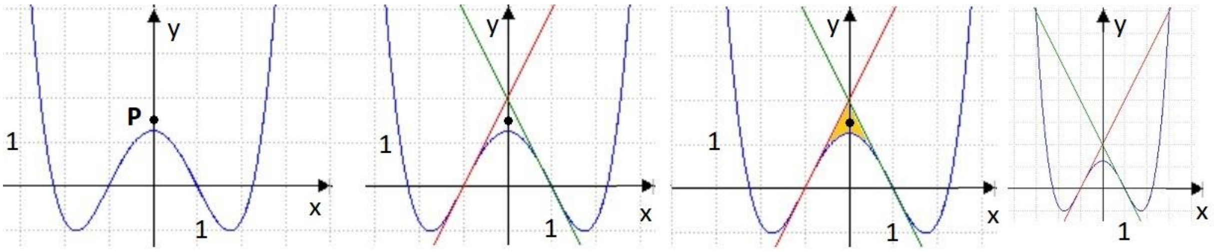


Abb. 381 Fläche zwischen Tangenten und Funktionsgraph

Die Fläche im ersten Quadranten: $\int_0^1(-2x+2-(0.25x^4-1.5x^2+1.25))dx$
$=[-x^2+0.75x-0.25\frac{x^5}{5}+1.5\frac{x^3}{3}]_0^1=-1+0.75-\frac{0.25}{5}+0.5=0.2$; Aus Symmetriegründen ist die Fläche zwischen -1 und 1 genauso groß. Damit ist $A=2\cdot 0.2=0.4$ (sieh auch Abb. 381).

j) Der Schnittpunkt liegt auf 1.Winkelhalbierenden, es genügt $x=\sqrt{3+2x}$ zu lösen: $x_1=3$.($x_2=-1$, $\notin \mathbb{D}$) $A=\int_0^3(\sqrt{3+2x}-(\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}))dx=9-\sqrt{3}\approx 7.27$.

k) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=x^2+2x; x\in[-1;\infty[$ und die Funktion g mit $g(f(x))=\sqrt{(x^2+2x)+1}-1=\sqrt{x+1}^2-1=|x+1|-1\overset{x\geq -1}{=\!=\!=}x$. Schnittpunkte liegen auf 1.Winkelhalbierenden, es genügt $x=x^2+2x$ zu lösen: $x_1=-1$; x_2=0, $A=\int_{-1}^0(\sqrt{x+1}-1-(x^2+2x))dx=\frac{1}{3}$

Aufg. 179/481: a) $A=\int_1^2 x^2dx=[\frac{x^3}{3}]_1^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$;

b) $A=\int_{-2}^{-1}x^2dx-\int_{-2}^{-1}1dx=[\frac{x^3}{3}]_{-2}^{-1}-[x]_{-2}^{-1}=\frac{-1}{3}-\frac{-8}{3}-1=\frac{4}{3}$;

c) $A=\int_0^2 4dx-\int_0^2 x^2dx=[4x]_0^2-[\frac{x^3}{3}]_0^2=8-\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$;

d) $A=\int_{-2}^{-1}4dx-\int_{-2}^{-1}x^2dx+\int_{-1}^1 4dx-\int_{-1}^1 1dx+\int_1^2 4dx-\int_1^2 x^2dx$
$=[4x]_{-2}^{-1}-[\frac{x^3}{3}]_{-2}^{-1}+[4x]_{-1}^1-[x]_{-1}^1+[4x]_1^2-[\frac{x^3}{3}]_1^2=\frac{5}{3}+6+\frac{5}{3}=\frac{28}{3}$;

Sorry aber x^2 ohne drittel ist schwer ...

e) $A=\int_1^2 4x^{-2}dx-\int_1^2 1dx=[\frac{4x^{-1}}{-1}]_1^2-1=-\frac{4}{2}+\frac{4}{1}-1=1$;

f) $A=\int_0^1 4dx+\int_1^2 4x^{-2}dx=[4x]_0^1+\frac{4x^{-1}}{-1}]_1^2=4-\frac{4}{2}+\frac{4}{1}=6$; (≈ Abi 2017)

Aufg. 179/482: Alle Werte sind mit den exakten Funktionen berechnet:

e) $F_1(x)=x^2$, $F_2(x)=(x-2)^2\cdot e^x$, $F_3(x)=(x-1)^3$, $F_4(x)=x\cdot e^{2-x}$;

a) $f_i(1)$ entspricht der Tangentensteigung an der Stelle 1.
$F_1'(1)=2$, $F_2'(1)=-e\approx -2.7$, $F_3'(1)=0$, $F_4'(1)=0$;

b) $\int_0^2 f_i(x)dx=F(2)-F(0)$; diese Werte sind aus den Schaubildern ablesbar. $F_1(2)-F_1(0)=4-0=4$, $F_2(2)-F_2(0)=0-4=-4$, $F_3(2)-F_3(0)=1-(-1)=2$, $F_4(2)-F_4(0)=2-0=2$;

c) $\int_0^2 F_i(x)dx$ entspricht der Fläche, die K_F und die x-Achse einschließen;
$A_1=\frac{8}{3}$ (FE), $A_2\approx 4.8$ (FE), $A_3=0$ (FE), $A_4\approx 4.4$ (FE).

d) $f'(x)=0$ sind (vermutlich) die Wendestellen von K_F: $F_1(x)$ hat keine Wendestellen;
$F_2(x)$ hat die Wendestelle $x\approx 1.414$; $F_3(x)$ hat die Wendestelle $x=1$;
$F_4(x)$ hat die Wendestelle $x=2$;

f) Stellen mit waagrechter Tangente von $\int_a^x F_i(t)dt$ sind Nullstellen von $F_i(x)$. Diese sind unabhängig von a. Das a sorgt lediglich dafür, dass die Integralfunktion an der Stelle a =0 ist.

$F_1(x)$: $x=0$ Terrassenpunkt (steigend); $F_2(x)$: $x=2$ Terrassenpunkt (steigend);
$F_3(x)$: $x=1$ Tiefpunkt (Flachpunkt wie bei x^4); $F_4(x)$: $x=0$ Tiefpunkt;

Aufg. 180/483: Die Fläche ist endlich aber unbegrenzt.

ii) Es entsteht eine Fläche mit unendlichem Umfang aber endlichem Inhalt.

a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 x^{-1/2}\,dx = \left[\frac{x^{1/2}}{1/2}\right]_{x=0}^{x=1} = 2.$

$$\lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \lim_{a\to 0}\int_a^1 x^{-2/3}\,dx =$$
$$\lim_{a\to 0}\left[\frac{x^{1/3}}{1/3}\right]_a^1 = \lim_{a\to 0}\left[3\sqrt[3]{x}\right]_a^1 =$$
$$\lim_{a\to 0}\left(3\sqrt[3]{1} - 3\sqrt[3]{a}\right) = 3;$$

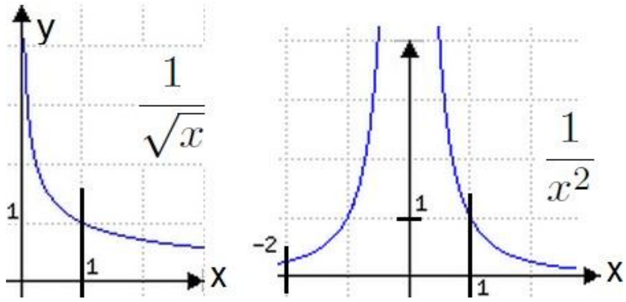


Abb. 382 Kurven bei welchen ein uneigentliches Integral berechnet wird

$$\int_a^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_a^1 = \frac{-1}{1} - \frac{-1}{a} \xrightarrow{a\to 0} \infty; \text{ (Abb. 382)}$$

$$\lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}\,dx = \lim_{a\to 0}\int_a^1 x^{-3/5}\,dx = \lim_{a\to 0}\left[\frac{x^{2/5}}{2/5}\right]_a^1 = \lim_{a\to 0}\left[2.5\sqrt[5]{x^2}\right]_a^1 = \lim_{a\to 0}\left(2.5\sqrt[5]{1^2} - 2.5\sqrt[5]{a^2}\right) = 2.5;$$

$$\int_a^1 \frac{1}{x}\,dx = [\ln(x)]_a^1 = \ln(1) - \ln(a) \xrightarrow{a\to 0} \infty;$$

b,c) $\lim\limits_{a\to 0}\int_a^1 x^r\,dx = \lim\limits_{a\to 0}\left[\frac{x^{r+1}}{r+1}\right]_{x=a}^{x=1}$, für $r > -1$ ist $\lim\limits_{a\to 0}\frac{a^{r+1}}{r+1} = 0$ als ist dann $\lim\limits_{a\to 0}\frac{1^{r+1}}{r+1} - \frac{a^{r+1}}{r+1} = \frac{1}{r+1}$.

Das Problem ist, dass $F(x) = \underline{\frac{x^{r+1}}{r+1}}$ ein Bruch sein kann, in welchen man $x = \underline{0}$ nicht einsetzen darf.

Wann ist $r + 1 \underline{> 0}$? Der $\lim\limits_{a\to 0}\int_a^1 x^r dx$ existiert für $\underline{r > -1}$ und hat dann den Wert $\underline{\frac{1}{r+1}}$.

d) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) - x = 0;$ $(x\ln(x) - x)' = x\cdot\frac{1}{x} + 1\cdot\ln(x) - 1 = \ln(x)$ (Produktregel).

Damit ist $x\ln(x) - x$ eine Stammfunktion von $\ln(x)$.

$$\lim_{a\to 0}\int_a^1 \ln(x)\,dx = \lim_{a\to 0}\left[x\ln(x) - x\right]_a^1 = \lim_{a\to 0}\left(1\ln(1) - 1 - (a\ln(a) - a)\right) = -1;$$

Aufg. 180/484: a) $\int_{-2}^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{-2}^1 x^{-2}\,dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_{x=-2}^{x=1} = \frac{-3}{2}$. Aber die gesamte Fläche ist oberhalb der $x-$Achse also $A > 0$ (Widerspruch).

b) $\lim_{a\to 0}\int_a^1 x^{-2} = \infty$, über eine senkrechte Asymptote hinwegintegrieren ist verboten.

c) Über eine senkrechte Asymptote darf nicht hinwegintegriert werden.

Aufg. 180/485: a) $\int_1^b x^{-2}dx = [\frac{x^{-1}}{-1}]_1^b = 1 - \frac{1}{b}$ und $\lim_{b\to} 1 - \frac{1}{b} = 1$; b) Die Fläche, die $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ berechnet an der Geraden $y = x$ gespiegelt ergibt die Fläche, die $\lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-2}dx$ berechnet + ein Quadrat mit der Seitenlänge 1. c) $\int_1^b x^{-3}dx = [\frac{x^{-2}}{-2}]_1^b = \frac{1}{2} - \frac{1}{2b^2} \to \frac{1}{2}$.

i) $\lim\limits_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^3}dx = \frac{1}{2}$, ii) $\lim\limits_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^7}dx = \frac{1}{6}$, iii) $\lim\limits_{b\to\infty}\int_1^b x^{\frac{-3}{2}}\,dx = 2$, iv) $\lim\limits_{b\to\infty}\int_1^b x^{\frac{-3}{7}}\,dx$'$= \infty$';

d) Der $\lim_{b\to\infty}\int_1^b x^r dx$ existiert für $\underline{r < -1}$ und hat dann den Wert $\underline{\frac{1}{r+1}}$.

e) Bei einem uneigentlichen Integral hat die Fläche einen unendlich großen Umfang aber möglicherweise einen endlichen Flächeninhalt. Bei uneigentlichen Integralen erster Art ist der Definitionsbereich unendlich groß, bei uneigentlichen Integralen zweiter Art wird bis zu einer senkrechten Asymptoten (bzw. bis zu einem kritischen Punkt) integriert.

Aufg. 180/486: a) $\int_1^b \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}\right) dx = \left[-x^{-1} - \frac{x^{-3}}{-3}\right]_{x=1}^{x=b} = \frac{-1}{b} + \frac{1}{3b^3} - (\frac{-1}{1} + \frac{1}{3}) \xrightarrow{b\to\infty} \frac{2}{3};$

b) $\int_0^b (e^{-0.5x+1})dx = \left[\frac{e^{-0.5x+1}}{-0.5}\right]_{x=0}^{x=b} = -2e^{-0.5b+1} + 2e^1 \xrightarrow{b\to\infty} 2e;$ **c)** $\int_a^1 \left(\frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$

$= \int_a^1 (3x^{-0.5} + 3x^{-\frac{1}{3}})dx = \left[\frac{3x^{0.5}}{0.5} + \frac{3x^{2/3}}{2/3}\right]_{x=a}^{x=1} = (6\sqrt{1} + \frac{9\cdot 1^{2/3}}{2}) - (6\sqrt{a} - \frac{9a^{2/3}}{2}) \xrightarrow{a\to 0} 10.5;$

d) $\lim\limits_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}dx = \lim\limits_{b\to\infty} \left[\frac{e^{-x}}{-1}\right]_0^b = \lim\limits_{b\to\infty}(-e^{-b} - (-e^{-0})) = 1;$

e) $\lim\limits_{b\to\infty} \int_1^b e^{-2x+4}dx = \lim\limits_{b\to\infty} \left[\frac{e^{-2x+4}}{-2}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{e^{-2b+4}}{-2} - \left(\frac{e^{-2\cdot 1+4}}{-2}\right)\right) = 0.5;$

f) $\lim\limits_{a\to-\infty} \int_a^0 e^x dx = \lim\limits_{a\to-\infty} [e^x]_a^0 = \lim_{a\to-\infty}(e^0 - e^a) = 1;$

g) $\lim\limits_{a\to-\infty} \int_a^0 (e^x + e^{2x})dx = \lim_{a\to-\infty} \left[e^x + \frac{e^{2x}}{2}\right]_a^0 = \lim_{a\to-\infty} \left(e^0 + \frac{e^{2\cdot 0}}{2} - \left(e^a + \frac{e^{2\cdot a}}{2}\right)\right) = 1.5;$

h) Rechnungen in den Klammern ⟦ ⟧ sind im Abitur bzw. offiziell verboten, tragen aber eventuell zur Klärung der Inhalte bei. Im Unterricht würden diese Rechnungen rot notiert.

i) e^{-x} hat die waagrechte Asymptote $y \equiv 0$ für $x \to \infty$; $[\![e^{-\infty} = 0]\!]$;

$\int_1^b (e^{-x} - 0)dx = [-e^{-x}]_1^b = -e^{-b} + e^{-1} \xrightarrow{b\to\infty} e^{-1} = \frac{1}{e}.$

ii) e^{-2x} hat die waagrechte Asymptote $y = 0$ für $x \to \infty$;

$\int_1^b (e^{-2x} - 0)dx = [\frac{-1}{2}e^{-2x}]_1^b = \frac{-1}{2}(e^{-2b} - e^{-2}) \xrightarrow{b\to\infty} \frac{e^{-2}}{2} = \frac{1}{2e^2}$; $[\![e^{-2\infty} = 0]\!]$.

iii) verallgemeinert: Sei $r > 0$: e^{-rx} hat die waagrechte Asymptote $y = 0$ für $x \to \infty$;

$\int_1^b (e^{-rx} - 0)dx = [\frac{-1}{r}e^{-rx}]_1^b = \frac{-1}{r}(e^{-rb} - e^{-r}) \xrightarrow{b\to\infty} \frac{e^{-r}}{r} = \frac{1}{re^r}$; $[\![e^{-r\cdot\infty} = 0]\!]$ $r > 0$.

g) iv) e^x hat die waagrechte Asymptote $y = 0$ aber für $x \to -\infty$;

$\int_a^1 (e^x - 0)dx = [e^x]_a^1 = e^1 - e^a \xrightarrow{a\to-\infty} e^{-1} = \frac{1}{e}.$

v) e^{2x} hat die waagrechte Asymptote $y = 0$ aber für $x \to -\infty$;

$\int_a^1 (e^{2x} - 0)dx = [\frac{e^{2x}}{2}]_a^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{e^{2a}}{2} \xrightarrow{a\to-\infty} \frac{e^2}{2}.$

verallgemeinert: Sei $r > 0$: e^{rx} hat die waagrechte Asymptote $y = 0$ für $x \to -\infty$;

$\int_a^1 (e^{rx} - 0)dx = [\frac{e^{rx}}{r}]_a^1 = \frac{e^r}{r} - \frac{e^{ra}}{r} \xrightarrow{a\to-\infty} \frac{e^r}{r}$; $[\![e^{-r\cdot\infty} = 0]\!]$.

i) i) $e^{-2x+2} + e^{-3x+3}$ hat die waagrechte Asymptote $y \equiv 0$ für $x \to \infty$; $[\![e^{-\infty} = 0]\!]$.

$\int_1^b (e^{-2x+2} + e^{-3x+3} - 0)dx = [\frac{e^{-2x+2}}{-2} + \frac{e^{-3x+3}}{-3}]_1^b = \frac{e^{-2b+2}}{-2} + \frac{e^{-3b+3}}{-3} - (\frac{e^0}{-2} + \frac{e^0}{-3}) \xrightarrow{b\to\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6};$

ii) $f_2(x) = e^{-3x+3} - e^{-2x+2}$ hat die waagrechte Asymptote $y \equiv 0$ für $x \to \infty$ und die Nullstelle $x = 1$ und $f_2(x) < 0$ für $x > 1$;

$\int_1^b (e^{-3x+3} - e^{-2x+2} - 0)dx = [\frac{e^{-3x+3}}{-3} - \frac{e^{-2x+2}}{-2}]_1^b = \frac{e^{-3b+3}}{-3} - \frac{e^{-2b+2}}{-2} - (\frac{e^0}{-3} - \frac{e^0}{-2}) \xrightarrow{b\to\infty} \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{-1}{6};$

Damit ist die eingeschlossene Fläche $\frac{1}{6}$.

iii) $e^{2x-2} + e^{3x-3}$ hat die waagrechte Asymptote $y \equiv 0$ für $x \to -\infty$

$\int_a^1 (e^{2x-2} + e^{3x-3} - 0)dx = [\frac{e^{2x-2}}{2} + \frac{e^{3x-3}}{3}]_a^1 = \frac{e^0}{2} + \frac{e^0}{3} - (\frac{e^{2a-2}}{2} + \frac{e^{3a-3}}{3}) \xrightarrow{a \to -\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$;

Tatsächlich sind die Flächen aus Teil 1 und Teil 3 sogar kongruent.

iv) Sei $f_4(x) = e^{3x-3} - e^{-2x+2}$.
Es gilt $f_4(x) + e^{-2x+2} \xrightarrow{x \to \infty} 0$ und $f_4(x) - e^{3x-3} \xrightarrow{x \to -\infty} 0$; damit sind die Funktionsteile e^{3x-3} und $-e^{-2x+2}$ sind zwar Näherungskurven aber keine Näherungsgeraden. Damit kann bei dieser Aufgabe keine Fläche zwischen Kurve und Asymptote gerechnet werden.

j) i) $e^{-x} + 1$ hat für $x \to \infty$ die waagrechte Asymptote $y = 1$
$\int_1^b (e^{-x} + 1 - 1)dx = [-e^{-x}]_1^b = -e^{-b} + e^{-1} \xrightarrow{b \to \infty} e^{-1} = \frac{1}{e}$

ii) $f_2(x) = 2 - e^{-x}$ hat für $x \to \infty$ die waagrechte Asymptote $y = 2$ (von unten, $f_2(x) < 2$)
$\int_1^b (2 - (2 - e^{-x}))dx = [-e^{-x}]_1^b = \frac{1}{e}$ (s.o.)

iii) $3 + e^x$ hat für $x \to -\infty$ die waagrechte Asymptote $y = 3$
$\int_a^1 (3 + e^x - 3)dx = [e^x]_a^1 = e^1 + e^a \xrightarrow{a \to -\infty} e$

Warum kommt nicht $\frac{1}{e}$ heraus? Die 'Symmetrie' ist hier zur y-Achse; sprich: Würde ab/von $x = 0$ integriert, so wäre das Ergebnis gleich.

iv) $f_4(x) = 4 - e^x$ hat für $x \to -\infty$ die waagrechte Asymptote $y = 4$ (von unten, $f_4(x) < 4$)
$\int_a^1 (4 - (4 - e^x))dx = [e^x]_a^1 = e^1 + e^a \xrightarrow{a \to -\infty} e$

v) $f_5(x) = x - e^{-x}$ hat für $x \to \infty$ die schiefe Asymptote $y = x$ (von unten, $f_5(x) < x$)
$\int_1^b (x - (x - e^{-x}))dx = [-e^{-x}]_1^b = -e^{-b} + e^{-1} \xrightarrow{b \to \infty} e^{-1} = \frac{1}{e}$ (wie bei den Teilen i und ii).
Die Tatsache der 'schiefen Asymptote' ändert nichts am Ergebnis.

vi) $f_6(x) = 2x + 4 + e^x$ hat für $x \to -\infty$ die schiefe Asymptote, $y = 2x + 4$ ($f_6(x) > 2x + 4$).
$\int_a^1 (2x + 4 + e^x - (2x + 4))dx = [e^x]_a^1 = e$ (wie bei den Teilen iii und iv).
Die Tatsache der 'schiefen Asymptote' ändert nichts am Ergebnis, auch bei Steigung $\neq 1$ und y-Achsenabschnitt $\neq 0$.

k) $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ hat die waagrechte Asymptote $y \equiv 0$ für $x \to \pm\infty$; $[\![\frac{1}{\infty^2} = 0 = \frac{1}{(-\infty)^2}]\!]$;

$\int_1^b (x^{-2})dx = [-x^{-1}]_1^b = -b^{-1} + 1^{-1} \xrightarrow{b \to \infty} 1$;

Die Rechnung $\int_a^1 (x^{-2})dx = [-x^{-1}]_a^1 = (-1)^{-1} + a^{-1} \xrightarrow{a \to -\infty} -1$ $[\![\frac{1}{-\infty} = 0]\!]$ ist aber falsch, wie wir aus Aufgabe 180/484c wissen. Hier wird über eine senkrechte Asymptote ($x = 0$) hinwegintegriert, was verboten ist. Ein reeller Wert kann der Fläche nicht zugeordnet werden, weil der Flächenteil $\int_c^1 (x^{-2})dx = [-x^{-1}]_c^1 = (-1)^{-1} + c^{-1} \xrightarrow{c \to 0} \infty$ schon keinen endlichen Wert hat.

l) i) Sei $a \neq b$: $f_a(x) = f_b(x) \Leftrightarrow: (1 - ax^2) \cdot e^{-2x} = (1 - bx^2) \cdot e^{-2x} \overset{:e^{-2x}}{\Longleftrightarrow}: 1 - ax^2 = 1 - bx^2 \overset{-1}{\Longleftrightarrow}: -ax^2 = -bx^2 \overset{+ax^2}{\Longleftrightarrow}: (a - b)x^2 = 0 \Leftrightarrow: a = b$ oder $x = 0$. ii) fehlt noch

iii) $\int_0^b h(x)dx = [-\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right) \cdot e^{-2x}]_0^b = -\left(b^2 + b + \frac{1}{2}\right) \cdot e^{-2b} + \left(0^2 + 0 + \frac{1}{2}\right) \cdot e^{-2 \cdot 0} \xrightarrow{b \to \infty} \frac{1}{2}$.

Die e Funktion dominiert die ganzrationale Funktion.

Aufg. 181/487: a) z.B. Kegel, Zylinder, Kugel aber auch Flasche, Vase, Nagel. ... F<u>läche</u> ...

b) Rechteck $\to$ Zylinder

c) $V_0(x + h) - V_0(x) \approx \pi f^2(x) \cdot h \quad \overset{:h}{\Leftrightarrow} \quad \frac{V_0(x+h) - V_0(x)}{h} \approx \pi f^2(x)$

$$\begin{array}{lll} & \downarrow (h \to 0) & \\ & V_0'(x) & = \pi f^2(x) \\ \text{oder} & V_0(x) & = \displaystyle\int_0^x \pi f^2(t)\, dt. \end{array}$$

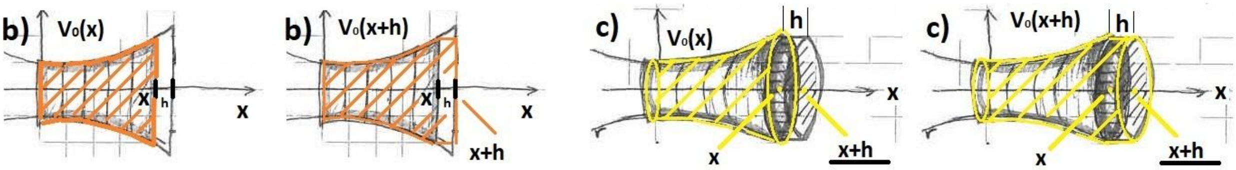


Abb. 383 Beweis: Rotationskörper

$V_0(x) = \underline{\pi \int_0^x f^2(t)dt}$.

Aufg. 181/488: $V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\,dx$ a) $V = \pi \cdot \int_1^4 x^2\,dx = \pi \cdot [\frac{x^3}{3}]_1^4 = \pi \cdot (\frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3}) = 21\pi$;
b) $V = \pi \cdot \int_0^5 (x^2)^2\,dx = \pi \cdot [\frac{x^5}{5}]_0^5 = \pi \cdot (\frac{5^5}{5} - \frac{0^5}{5}) = 625\pi$;
c) $V = \pi \cdot \int_0^{\ln(2)} (e^x)^2\,dx = \pi \cdot \int_0^{\ln(2)} e^2x\,dx = \pi \cdot [\frac{e^{2x}}{2}]_0^{\ln(2)} = \frac{\pi}{2} \cdot (e^{2\ln(2)} - e^0) = \frac{\pi}{2} \cdot ((e^{\ln(2)})^2 - 1) = 3\frac{\pi}{2}$;

d) $V = \pi \cdot \int_2^5 (0.5x-1)^2\,dx = \pi \cdot [\frac{(0.5x-1)^3}{0.5\cdot 3}]_2^5 = \pi \cdot (\frac{(2.5-1)^3}{0.5\cdot 3} - \frac{(1-1)^3}{0.5\cdot 3}) = 2.25\pi$;

e) $f(x) = 2x\text{-}1$ $V = \pi \cdot \int_2^5 (2t\text{-}1)^2 dt = \pi \left[\frac{(2t-1)^3}{3}\right]_2^5 = \pi(\frac{(2\cdot 5-1)^3}{3} - \frac{(2\cdot 2-1)^3}{3}) = 234\pi$ (Kegelstumpf).

f) $V = \pi \cdot \int_0^3 (1-x^2)^2\,dx = \pi \cdot \int_0^3 1 - 2x^2 + x^4\,dx = \pi \cdot [x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5}]_0^3 = \pi \cdot (3 - \frac{2\cdot 3^3}{3} + \frac{3^5}{5} - 0) = 33.6\pi$;

g) $V = \pi \cdot \int_0^1 (\sqrt{x}+1)^2\,dx = \pi \cdot \int_0^1 (x + 2\sqrt{x} + 1)\,dx = \pi \cdot \left[\frac{x^2}{2} + 2 \cdot \frac{x^{1.5}}{1.5} + x\right]_0^1$

$= \pi \cdot \left(\frac{1^2}{2} + 2 \cdot \frac{1^{1.5}}{1.5} + 1 - (\frac{0^2}{2} + 2 \cdot \frac{0^{1.5}}{1.5} + 0)\right) = \frac{17\pi}{6}$;

h) $V = \pi \cdot \int_0^1 (e^{3x})^2\,dx = \pi \cdot \int_0^1 e^{6x}\,dx = \pi \cdot [\frac{e^{6x}}{6}]_0^1 = \pi \cdot \frac{e^6 - e^0}{6} = \frac{\pi}{6} \cdot (e^6 - 1)$;

i) $V = \pi \cdot \int_{-2}^0 (e^{2x+4})^2\,dx = \pi \cdot \int_{-2}^0 e^{4x+8}\,dx = \pi \cdot [\frac{e^{4x+8}}{4}]_{-2}^0 = \pi \cdot \frac{e^8 - e^0}{4} = \frac{\pi}{4} \cdot (e^8 - 1)$;

j) $V = \pi \cdot \int_2^4 (2e^{4-x})^2\,dx = \pi \cdot \int_2^4 (4e^{2(4-x)})\,dx = \pi \cdot \left[\frac{4e^{8-2x}}{-2}\right]_2^4 = \pi \cdot \left(-2e^{8-2\cdot 4} - (-2e^{8-2\cdot 2})\right) = 2\pi e^4 - 2\pi$;

k) $V = \pi \cdot \int_0^2 (e^x+1)^2\,dx = \pi \cdot \int_0^2 (e^{2x} + 2e^x + 1)\,dx = \pi \cdot [\frac{e^{2x}}{2} + 2e^x + x]_0^2$
$= \pi \cdot (\frac{e^4}{2} + 2e^2 + 2 - (\frac{e^0}{2} + 2e^0 + 0)) = \pi \cdot (0.5e^4 + 2e^2 - 0.5)$;

Erst quadrieren, dann integrieren. Volumina sind nie negativ.

Aufg. 181/489: a) Es entsteht ein Kegel mit $r = h = 2$. $V = \frac{\pi}{3} r^2 \cdot h = \frac{\pi}{3} 2^2 \cdot 2 = \frac{8\pi}{3}$ oder
$V = \pi \int_0^2 x^2 dx = \pi[\frac{x^3}{3}]_{x=0}^{x=2} = \pi(\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}) = \frac{8\pi}{3}$. b) Es entsteht ein Kegelstumpf mit $r_1 = 1; r_2 = 7; h = 3$.
$V = \pi \int_0^3 (2x+1)^2 dx = \pi[\frac{(2x+1)^3}{2\cdot 3}]_{x=0}^{x=3} = \pi[\frac{(2\cdot 3+1)^3}{6} - \frac{(2\cdot 0+1)^3}{6}]_{x=0}^{x=3} = 57\pi$.

Aufg. 181/490: a,b) $V(x) = \pi \displaystyle\int_0^x \left(\frac{1}{4}t\right)^2 dt = \pi \left[\frac{t^3}{48}\right]_0^x = \pi \frac{x^3}{48}$. $V(10) = 20.8\bar{3}\pi \approx 65.45cm^3$,
$V(5) \approx 8.18$ dies entspricht 12.5% c) $\pi \int_0^x (\frac{1}{4}t)^2 dt = \pi \frac{x^3}{48} = 10.41\bar{6}\pi \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{500} \approx 7.94cm$.

d)$V_z = \pi \displaystyle\int_0^h (r)^2\,dx = \pi\left[r^2 x\right]_{x=0}^{x=h} = \pi r^2 h$; $V_k = \pi \displaystyle\int_0^h \left(\frac{r}{h} \cdot x\right)^2\,dx = \pi\left[\frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=h} = \pi \frac{r^2 h}{3}$. siehe
Abb. 686/384

e) Der Topf ist ein Rotationskörper um die $y-$ Achse. Um das Volumen zu berechnen muss der Topf als Rotationskörper von $\sqrt{x}$ (Umkehrfunktion von x^2) um die $x-$Achse interpretiert werden.

$$V_0(1) = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

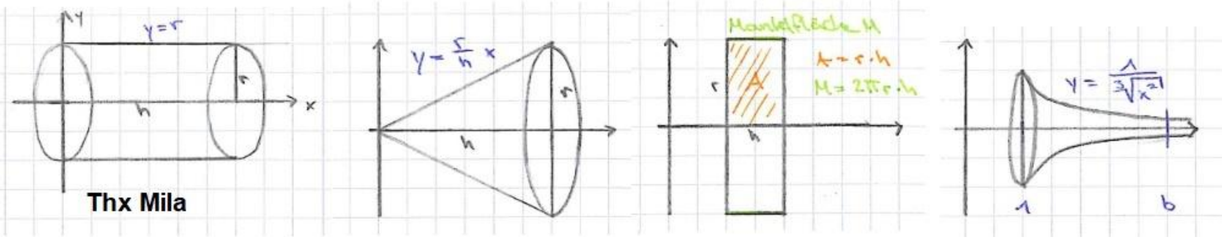


Abb. 384 Zylindervolumenformel Rotationskörper: Gabriels Horn

f) i) $f^{-1}(x) = \bar{f} = \sqrt[4]{8x}$. ii) $f^{-1}(x)$ beschreibt den Radius der kreisförmigen Flüssigkeitsoberfläche in Abhängigkeit von der Füllhöhe. iii) Rotation der der durch den Graphen der Umkehrfkt und der x-Achse eingeschlossenen Fläche um die x-Achse ergibt das Volumen: $V = \pi \int_0^2 (\sqrt[4]{8x})^2 dx = \frac{16\pi}{3} \approx 16.77$.

Aufg. 182/491: a) $V(t) = \pi \displaystyle\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (t\cos(x))^2\, dx = \pi t^2 \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\, dx \approx 1.57 \cdot \pi t^2$ (GTR)

(exakt $= \frac{\pi^2 t^2}{2}$ mit Abschnitt 7.4.3).

b) Die Gerade $4 - 0.5x$ rotiert um die x-Achse. Es entsteht ein Kegelstumpf mit $r_1 = f(0) = 4$, $r_2 = f(4) = 2$ und $h = 4 - 0 = 4$ (siehe Abb. 686/385 b).

Aufg. 182/492: a) $M = 2\pi \cdot rh = 2\pi A \Rightarrow O \approx 6 \cdot A$ (siehe Abb. 686/385 a) und 686/384.

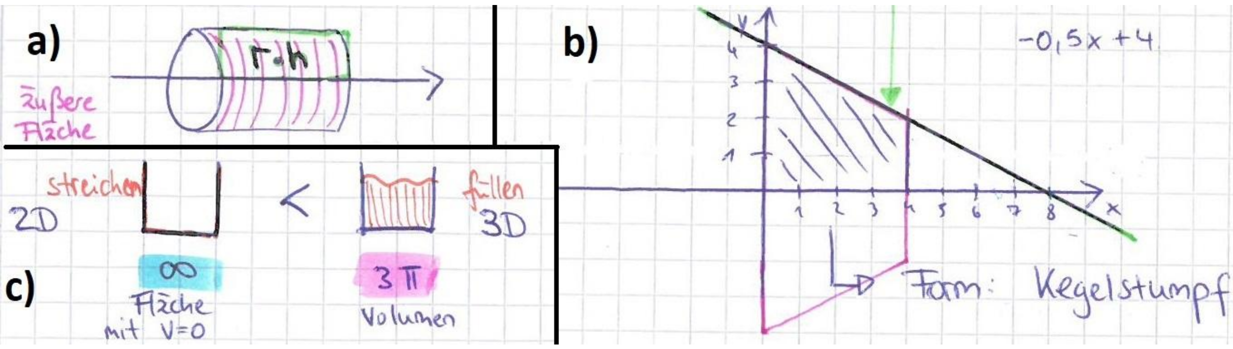


Abb. 385 Mantel eines Zylinders Kegelstumpf

b) $$V = \lim_{b\to\infty} \pi \int_1^b (x^{-2/3})^2\, dx = \lim_{b\to\infty} \pi \int_1^b x^{-4/3}\, dx = \pi \lim_{b\to\infty} \left[\frac{x^{-1/3}}{-1/3}\right]_{x=1}^{x=b} = 3\pi,$$

$$A = \lim_{b\to\infty} \pi \int_1^b x^{-2/3}\, dx = \pi \lim_{b\to\infty} \left[\frac{x^{1/3}}{1/3}\right]_{x=1}^{x=b} = \infty.$$

$O_1(b)(\geq) \approx 2\pi A = \infty$. Damit ist Gabriels Horn ein Körper, der nur endlich viel Farbe fasst, für den man aber ∞ viel Farbe zum Bestreichen der (Innen-)Oberfläche braucht (Paradox). Der Fehler liegt darin, dass Farbe etwas Räumliches ist und zur Benetzung des Endes aber beliebig dünn sein müsste.

Es gilt eine unendliche Fläche ist immer noch kleiner als ein endliches Volumen.

c+d) $$V = \lim_{b\to\infty} \pi \int_1^b (x^{-1})^2\, dx = \pi \lim_{b\to\infty} \left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_{x=1}^{x=b} = \frac{\pi}{2},$$

$$A = \lim_{b\to\infty} \pi \int_1^b x^{-1}\, dx = \pi \lim_{b\to\infty} [\ln(x)]_{x=1}^{x=b} = \infty,$$ $f(x) = x^r$ eignet sich als Hornfunktion für $-1 \leq r < \frac{-1}{2}$.

$V = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \pi \cdot \left(e^{-kx}\right)^2 dx = \pi \cdot \lim_{b\to\infty} \int_1^b e^{-2kx} dx = \pi \cdot \lim_{b\to\infty} \left[\frac{e^{-2kx}}{-2k}\right]_1^b = \pi \cdot \lim_{b\to\infty} \frac{e^{-2kb}}{-2k} - \frac{e^{-2k}}{-2k} = \pi \cdot \frac{e^{-2k}}{2k}$. $\pi \cdot \frac{e^{-2k}}{2k}$ ist für alle $k > 0$ endlich.

$O \approx 6 \cdot \lim_{b\to\infty} \int_1^b e^{-kx}dx = 6 \cdot \lim_{b\to\infty} \left[\frac{e^{-kx}}{-k}\right]_1^b = 6 \cdot \lim_{b\to\infty} \frac{e^{-kb}}{-k} - \frac{e^{-k\cdot 1}}{-k} = \frac{e^{-k}}{k}$, $\frac{e^{-k}}{k}$ ist für alle $k > 0$ endlich. Damit eignen sich Funktionen der Form $f(x) = e^{-kx}$ für alle k nicht als Hornfunktion.

Aufg. 182/493: a) Ein Mittelwert ist ein Durchschnitt / Erwartungswert, $\bar{m} = \frac{y_1+y_2+y_3+..+y_n}{n}$;

b) Im Intervall $[1;2]$ gibt es unendlich viele Funktionswerte - $\bar{m} =' \frac{\infty}{\infty}'$ - das geht nicht. Lösung: Wir betrachten endlich viele Werte und approximieren den Mittelwert mit unendlich vielen Summanden ($->$ Limes).

c,d) $m_2 = \frac{1^2+1.5^2}{2} = 1.625$, $m_4 = \frac{1^2+1.25^2+1.5^2+1.75^2}{4} \approx 1.969$, $m_8 \approx 2.15$;

$$m_n = \frac{1}{n}\left(1^2 + (1+1/n)^2 + (1+2/n)^2 + (1+3/n)^2 + ... + (1+\frac{n-1}{n})^2\right)$$

.

e) Diese Summe haben wir bei der Einführung in die Integralrechnung gesehen:

$$R_n = \frac{b-a}{n}\left(f(a) + f(a+\frac{b-a}{n}) + f(a+\frac{2(b-a)}{n}) + .. + f(a+\frac{(n-1)(b-a)}{n})\right) \text{ (Riemannsummen).}$$

f) $R_n = m_n \cdot b - a \Leftrightarrow m_n = \frac{R_n}{b-a} \to \bar{m} = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ für $n \to \infty$.

g) Der Mittelwert m einer Funktion f auf $[a,b]$ ist $m = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx$.

Aufg. 182/494: $\bar{m} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx$;
a) **Bsp:** $f(x) = \frac{x}{2} + 2$, [2;4]: $m = \frac{1}{4-2} \cdot \int_2^4 (\frac{x}{2} + 2)dt = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{4} + 2x\right]_2^4 = \frac{1}{2}\left(\frac{4^2}{4} + 2\cdot 4 - (\frac{2^2}{4} + 2\cdot 2)\right) = 3.5.$ (Abb. 386)

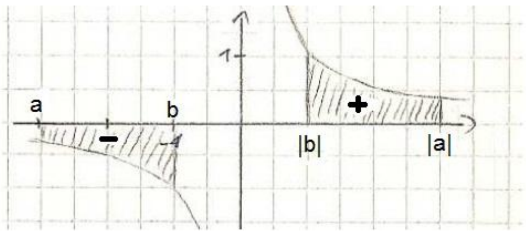


Abb. 386 Eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{x}$

b) $m = \frac{1}{3-0} \cdot \int_0^3 (2x - x^2)dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 3^2 - \frac{3^3}{3} - (0^2 - \frac{0^3}{3}) = 0$; c) 0.75; d) $\frac{1}{2\ln(2)}$; e) $\frac{2}{\pi}$;

Aufg. 182/495: $F(t)$ dessen Höhe in m.
a) $x = \int_0^3 f(t)dt$: Wieviele Meter ist der Baum in 3 Jahren (seit dem Zeitpunkt 0) gewachsen?
b) $f(t+3) - f(t) = 2$: Wann beginnt ein 3 Jahres Zeitraum, in welchem sich die Wachstumsgeschwindigkeit des Baumes um $2\frac{m}{Jahr}$ wächst?
c) $\int_x^{x+3} f(t)dt = 2$: Wann beginnt ein 3 Jahres Zeitraum, in welchem sich die Höhe des Baumes um $2m$ wächst?
d) $\frac{1}{3}\int_x^{x+3} f(t)dt = 2$: Wann beginnt ein 3 Jahres Zeitraum, in welchem die mittlere Wachstumsgeschwindigkeit $2\frac{m}{Jahr}$ ist?
e) $\frac{1}{4}\int_x^{x+4} F(t)dt = 5$: Wann beginnt ein 4 Jahres Zeitraum, in welchem die mittlere Höhe $5m$ ist?

Aufg. 183/496: Die Potenzregel versagt, weil 0 im Nenner stehen würde. $\ln(x)' = \frac{1}{x}$ also ist für $x > 0$: $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln(x)$.

$\int_2^3 \frac{1}{x}dx = -\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x}dx$ weil K_f punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

Seien $a < b < 0$, dann kann $\int_a^b \frac{1}{x}\, dx = -\int_{|b|}^{|a|} \frac{1}{x}\, dx = [-\ln(x)]_{x=|b|}^{x=|a|} = \ln|b| - \ln|a|$. Damit ist $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c$.

Aufg. 183/497: a) Integriert werden können: Summen, Differenzen Potenzen (+ konstante Faktoren), nicht integriert werden können: Produkte und Quotienten - zu Integration derselben siehe die Abschnitte 7.4 und 7.6.

b) $\int \frac{4x^2}{x}dx = \int 4x dx = \frac{4x^2}{2}(+c)$; Falsche Technik: Zähler integriert, Nenner integriert und zusammengefasst (da käme $\frac{\frac{4}{3}x^3}{\frac{x^2}{2}} = \frac{8x}{3} \neq \frac{4x^2}{2}$ heraus).

c) $\int \frac{x^2+1}{x^2}dx = \int(\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2})dx = \int(1 + x^{-2})dx = x + \frac{x^{-1}}{-1}(+c)$;

d) Um einen Term der Form $\frac{p(x)+q(x)}{x^r}$ in integrierbare Form zu bringen, müssen wir diesen:

1) In eine Summe umwandeln: $\frac{p(x)+q(x)}{x^r} = \underline{\frac{p(x)}{x^r} + \frac{q(x)}{x^r}}$.

2) Die entstandenen Summanden kürzen bzw. algebraisch umformen.

3) Jeden Summanden als Potenzfunktion also in der Form $\underline{c \cdot x^s}$ schreiben.

4) Erst dann integrieren!

Aufg. 183/498: a) $\int \frac{x^2}{x}\,dx = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$; b) $\int \frac{x^2}{x^4}\,dx = \int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c$;

c) $\int \frac{x^3-1}{x^2}\,dx = \int(x - x^{-2})\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^{-1}}{-1} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}(+c)$,

d) $\int \frac{x^2-1}{x}\,dx = \int(\frac{x^2}{x} + \frac{-1}{x})\,dx = \int(x - \frac{1}{x})\,dx = \frac{x^2}{2} - \ln|x| + c$;

e) $\int \frac{x^2-3x+2}{x}\,dx = \int(x - 3 + 2x^{-1})\,dx = \frac{x^2}{2} - 3x + 2\ln|x|(+c)$,

f) $\int \frac{x^2+5x-4}{x^2}\,dx = \int(\frac{x^2}{x^2} + \frac{5x}{x^2} - \frac{4}{x^2})\,dx = \int(1 + 5 \cdot \frac{1}{x} - 4x^{-2})\,dx = x + 5\ln|x| - 4 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + c$,

g) $\int \frac{x^3+5x^2-3x+1}{x^2}\,dx = \int(\frac{x^3}{x^2} + \frac{5x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{1}{x^2})\,dx = \int(x + 5 - \frac{3}{x} + x^{-2})\,dx = \frac{x^2}{2} + 5x - 3\ln|x| - x^{-1}(+c)$;

h) $\int \frac{x^3+5x^2-4x-3}{x^3}\,dx = \int(\frac{x^3}{x^3} + \frac{5x^2}{x^3} + \frac{-4x}{x^3} + \frac{-3}{x^3})\,dx = \int(1 + 5 \cdot \frac{1}{x} - 4x^{-2} - 3x^{-3})\,dx$
$= x + 5\ln|x| - 4 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} - 3 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} = x + 5\ln|x| + 4\frac{1}{x} + 1.5 \cdot \frac{1}{x^2}$,

i) $\int \frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x}}\,dx = \int(x^{3/2} - 3x^{1/2} + 2x^{-1/2})\,dx = \frac{x^{5/2}}{5/2} - 3\frac{x^{3/2}}{3/2} + 2\frac{x^{1/2}}{1/2}(+c)$,

j) $\int \frac{x^4+5x^2-3\sqrt{x}-1}{x^2}\,dx = \int(\frac{x^4}{x^2} + \frac{5x^2}{x^2} - \frac{-3\sqrt{x}}{x^2} - \frac{1}{x^2})\,dx = \int(x^2 + 5 - 3x^{-1.5} - x^{-2})\,dx$
$= \frac{x^3}{3} + 5x - 3\frac{x^{-0.5}}{-0.5} + x^{-1}(+c)$.

k) $\int \frac{x^6+5x^3\sqrt{x}-3x-1}{\sqrt{x}}\,dx = \int(\frac{x^6}{\sqrt{x}} + \frac{5x^3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{3x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}})\,dx = \int(x^{5.5} + 5x^3 - 3\sqrt{x} - x^{-0.5})\,dx$
$= \frac{x^{6.5}}{6.5} + 5\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^{1.5}}{1.5} - \frac{x^{0.5}}{0.5}(+c)$,

L) $\int \frac{1}{e^{2x}}\,dx = \int e^{-2x}\,dx = \frac{e^{-2x}}{-2}(+c)$;

m) $\int \frac{e^x+1}{e^{2x}}\,dx = \int(\frac{e^x}{e^{2x}} + \frac{1}{e^{2x}})\,dx = \int(e^{-x} + e^{-2x})\,dx = -e^{-x} + \frac{e^{-2x}}{-2}(+c)$,

n) $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x}\,dx = \int(\frac{e^x}{e^x} - \frac{e^{-x}}{e^x})\,dx = \int(1 - e^{-2x})\,dx = x - \frac{e^{-2x}}{-2} + c = x + 0.5e^{-2x}(+c)$,

o) $\int \frac{1}{(x-4)^2}\,dx = \int(x-4)^{-2}\,dx = \frac{(x-4)^{-1}}{-1}(+c)$,

p) $\int \frac{1}{(3x-4)^5}\,dx = \int(3x-4)^{-5}\,dx = \frac{(3x-4)^{-4}}{3\cdot(-4)}(+c) = \frac{-1}{12\cdot(3x-4)^4}(+c)$,

q) $\int \frac{1}{\sqrt{3x+2}}\,dx = \int(3x+2)^{\frac{-1}{2}}\,dx = \frac{1}{3}\frac{(3x+2)^{1/2}}{1/2}$, r) $\int \frac{1}{ax+b} = \frac{\ln|ax+b|}{a}(+c)$.

Aufg. 183/499: a) $A \approx$ die Fläche eines Trapezes. Seine Eckpunkte sind $(a;0)$, $(b;0)$, $(b;f(b))$, $(a;f(a))$. Seine Fläche A_T ist $A_T =' \frac{(a+c)\cdot h}{2} =' \underline{\frac{(f(b)+f(a))\cdot(b-a)}{2}}$. Diese Regel heißt Sehentrapezregel.

b) i) $\int_2^4(2x+1)dx \approx \frac{(f(a)+f(b))\cdot(b-a)}{2}$ mit $f(x) = 2x+1, a = 2, b = 4$.

$A_T = \frac{(f(4)+f(2))\cdot(4-2)}{2} = 2 \cdot 4 + 1 + 2 \cdot 2 + 1 = 14$, $A_T = A$ die Approximation ist exakt.

ii) $\int_0^1 x^2dx$, $f(x) = x^2, a = 0, b = 1$. $A_T = \frac{(f(1)+f(0))\cdot(1-0)}{2} = \frac{1^2+0^2}{2} = 0.5$.

Die exakte Fläche ist $\frac{1}{3}$, die absolute Abweichung ist $\frac{1}{6}$, die relative Abweichung ist $\frac{1/6}{1/3} = 50\%$.

c) Wenn Sie im Intervall $[a;b]$ zwei Trapeze zusammensetzen, erhalten wir die zusammengesetzte Trapezregel $A \approx \frac{b-a}{4} \cdot (f(a) + 2f(\frac{a+b}{2}) + f(b)$.

i) $\int_0^2 x^2 dx \approx \frac{2-0}{4} \cdot (f(0) + 2f(1) + f(2) = \frac{1}{2} \cdot (0^2 + 2 \cdot 1^2 + 2^2) = 3$ (exakt $\frac{8}{3}$);

ii) $\int_1^5 x^3 dx \approx \frac{5-1}{4} \cdot (f(1) + 2f(3) + f(5) = (1^3 + 2 \cdot 3^3 + 5^3) = 180$ (exakt 156);

iii) $\int_0^2 x^4 dx \approx \frac{2-0}{4} \cdot (f(0) + 2f(1) + f(2) = \frac{1}{2} \cdot (0^4 + 2 \cdot 1^4 + 2^4) = 9$ (exakt 6.4).

d) $\int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}$; sei x das neue Gewicht, dann gilt $A \approx \frac{b-a}{1+x+1} \cdot (1 \cdot f(a) + x \cdot f(\frac{a+b}{2}) + 1 \cdot f(b))$

i) $\int_3^5 x^2 dx \approx \frac{5-3}{4} \cdot (f(3) + 2f(4) + f(5) = \frac{1}{2} \cdot (3^2 + 2 \cdot 4^2 + 5^2) = 33$ (exakt $\frac{98}{3} = 32.\bar{6}$);

Es gilt: $\int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}$. Damit ist der Ansatz: $A = \frac{b-a}{x+2} \cdot (f(a) + xf(\frac{a+b}{2}) + f(b)) = \frac{2-0}{x+2} \cdot (0^2 + x \cdot 1^2 + 2^2) \overset{!}{=} \frac{8}{3}$

$\overset{:2}{\Leftrightarrow} \frac{4}{3} = \frac{1}{x+2} \cdot (x+4) \xLeftrightarrow{\cdot 3(x+2)} 4(x+2) = 3 \cdot (x+4) \Leftrightarrow 4x + 8 = 3x + 12 \Leftrightarrow x = 4.$

Die Zahl ist sogar 'schön'!

i) $\int_0^2 x^2 dx \approx \frac{2-0}{6} \cdot (f(0) + 4f(1) + f(2) = \frac{1}{3} \cdot (0^2 + 4 \cdot 1^2 + 2^2) = \frac{8}{3}$ (exakt !);

ii) $\int_1^5 x^3 dx \approx \frac{5-1}{6} \cdot (f(1) + 4f(3) + f(5) = \frac{2}{3} \cdot (1^3 + 4 \cdot 3^3 + 5^3) = \frac{2}{3} \cdot (1^3 + 2 \cdot 3^3 + 5^3) = 156$

die Rechnung ist auch exakt! Das ist völlig unerwartet und absolut begeisternd.

iii) $\int_0^2 x^4 dx \approx \frac{2-0}{6} \cdot (f(0) + 4f(1) + f(2) = \frac{1}{3} \cdot (0^4 + 4 \cdot 1^4 + 2^4) = \frac{20}{3} = 6.\bar{6}$ (exakt 6.4)

besser aber nicht mehr exakt - das war schon bei x^3 nicht zu erwarten.

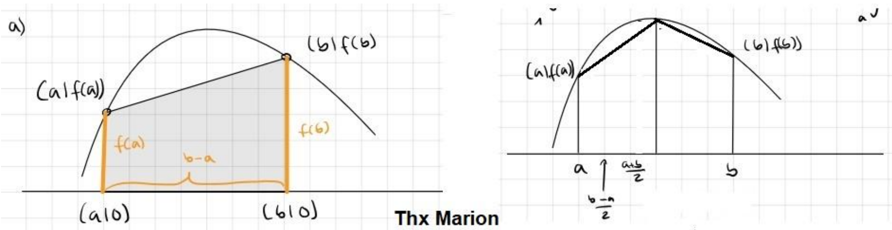


Abb. 387 Die Sehnentrapezregel und die kombinierte Sehnentrapezregel

Keplersfaßregel

Beweis 2 integriert lineare Funktionen exakt

$$\int_a^b (mx+c)\,dx = \left[\frac{mx^2}{2}+cx\right]_a^b = \frac{mb^2}{2}+cb-\frac{m\cdot a^2}{2}-c\cdot a$$

$$\int_a^b (mx+c)\,dx \overset{?}{\approx} \frac{b-a}{6}\cdot\left(ma+c+4\cdot\left(m\,\frac{a+b}{2}+c\right)+mb+c\right)$$

$$= \frac{b-a}{6}\,(ma+mb+2c+2m(a+b)+4c)$$

$$= \frac{b-a}{6}\cdot(3ma+3mb+6c) = (b-a)\cdot\left(\frac{m}{2}\cdot(a+b)+c\right)$$

$$= \frac{m}{2}\cdot(b^2-a^2)+(b-a)\cdot c = \frac{mb^2}{2}+cb-\frac{ma^2}{2}-ac$$

q.e.d.

Keplersfaßregel Beweis integriert nx^2+px+q exakt

$$\int_a^b (nx^2+px+q)\,dx = n\cdot\int_a^b x^2dx + \int_a^b (p(x)+q)\,dx$$

$$\int_a^b x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}$$

$$\int_a^b x^2 dx \approx \frac{b-a}{6}\cdot\left(a^2+4\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+b^2\right) = \frac{b-a}{6}\cdot\left(a^2+(a+b)^2+b^2\right)$$

$$= \frac{b-a}{6}\cdot(2a^2+2ab+2b^2) = \frac{1}{3}\cdot(b-a)\cdot(a^2+ab+b^2)$$

$$= \frac{1}{3}\cdot(\cancel{ba^2}+\cancel{b^2a}+b^3-a^3-\cancel{a^2b}-\cancel{ab^2}) = \frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}$$

Keplerfaßregel integral x^3 exakt

$$\int_a^b x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_a^b = \frac{b^4}{4}-\frac{a^4}{4}$$

$$\int_a^b x^3 dx \approx \frac{b-a}{6}\cdot\left(a^3+4\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)^3+b^3\right) = \frac{b-a}{6}\cdot\left(a^3+\underset{\downarrow}{\overset{\frac{1}{2}}{\frac{4}{2^3}}}\cdot(a+b)^3+b^3\right)$$

Thx Marion

$$= \frac{b-a}{6}\cdot\left(a^3+\frac{1}{2}\cdot(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)+b^3\right) = \frac{b-a}{6}\cdot(1.5a^3+1.5a^2b+1.5ab^2+1.5b^3)$$

$$= \frac{1.5}{6}\cdot(b-a)\cdot(a^3+a^2b+ab^2+b^3) = \frac{1}{4}\cdot(\cancel{ba^3}+\cancel{a^2b^2}+\cancel{ab^3}+b^4-a^4-\cancel{a^3b}-\cancel{a^2b^2}-\cancel{ab^3}) = \frac{b^4-a^4}{4}$$

Abb. 388 Die Keplersche Fassregel integriert kubische Funktionen exakt
e) Die Keplersche Fassregel: (mit Beweis) $A \approx \frac{b-a}{6}\cdot(f(a)+4\cdot f(\frac{a+b}{2})+f(b))$. Die Formel berechnet Flächen von ganzrationalen Funktionen <u>2.</u> und <u>3.</u> Grades e<u>exakt</u>!

Aufg. 183/500: **a)** $f_1(x) = -x^2+4x+1 = f_2(x) = x^2-6x+9 \Leftrightarrow 2x^2-10x+8 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = 4$; $\int_1^4(f_1(x)-f_2(x))dx = \int_1^4(-x^2+4x+1-(x^2-6x+9))dx = \int_1^4(-2x^2+10x-8)dx = [\frac{-2}{3}\cdot x^3+5x^2-8x]_1^4$ $=(\frac{-2}{3}\cdot 4^3+5\cdot 4^2-8\cdot 4)-(\frac{-2}{3}\cdot 1^3+5\cdot 1^2-8\cdot 1) = 9$;

b) $\int_1^x e^{-2t+2}dt = \left[\frac{e^{-2t+2}}{-2}\right]_1^x = \frac{e^{-2x+2}}{-2}+\frac{1}{2}$,

$\int_1^x \frac{-t+2}{t^3}dt = \int_1^x(\frac{-1}{t^2}+\frac{2}{t^3})dt = \int_1^x(-t^{-2}+2t^{-3})dt = \left[t^{-1}-t^{-2}\right]_1^x = \frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-(\frac{1}{1}-\frac{1}{1^2}) = \frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$,

$\int_1^x \frac{1}{2t-3}dt = \left[\frac{\ln(|2t-3|)}{2}\right]_1^x = \frac{\ln(|2x-3|)}{2}-\frac{\ln(|1|)}{2} = \frac{\ln(|2x-3|)}{2}$, $(\ln(1) = 0, \quad \int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{\ln|ax+b|}{a}+c)$.

$\int_1^x \sin(2-2t)dt = [\frac{-\cos(2-2t)}{-2}]_1^x = 0.5\cos(2-2x)-0.5\cos(2-2) = 0.5\cos(2-2x)-0.5$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{-2x+2}}{-2}+\frac{1}{2} = 0+0.5 = 0.5$; $\quad \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2} = 0-0 = 0$; $\quad \frac{\ln(|2x-3|)}{2} \xrightarrow{x\to\infty} \infty$;

d) $V = \pi\int_2^4(\sqrt{2x-4})^2dx = \pi\int_2^4(2x-4)dx = \pi\cdot\left[x^2-4x\right]_2^4 = \pi\cdot(4^2-4\cdot 4-(2^2-4\cdot 2)) = 4\pi$.

e) $\bar{m} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{4-2}\int_2^4(2x-4)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot(2x-4)^{\frac{3}{2}}\right]_2^4 = \frac{1}{6}((2\cdot 4-4)^{\frac{3}{2}}-(2\cdot 2-4)^{\frac{3}{2}}) = \frac{4}{3}$.

15.7.1 LöVo zu Einheit 7.1.18 (Weiterführung der Integralrechnung UE $M{+}_3$)

Aufg. 184/501: a) $(\int_a^x f(t)\,dt)' = f(x)$;

b) $(\int_a^x t^3\,dt)' = ([\frac{t^4}{4}]_{t=a}^{t=x})' = (\frac{x^4}{4}-\frac{a^4}{4})' = x^3$; beachten Sie dabei, dass nach x abgeleitet wird.

c) $U_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}\cdot\min\limits_{x\in[a+\frac{i(b-a)}{n};a+\frac{(i+1)\cdot(b-a)}{n}]}f(x)$, $\qquad O_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}\cdot\max\limits_{x\in[a+\frac{i(b-a)}{n};a+\frac{(i+1)\cdot(b-a)}{n}]}f(x)$,

Bemerkung: Bei stetigen Funktionen auf kompakten Intervallen werden Maximum und Minimum angenommen. $\quad R_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}\cdot f(a+\frac{i(b-a)}{n})$, $\qquad$ d) siehe Ag 454b).

e) Sei $h = \frac{b-a}{n}$; $F_0(x+\frac{b-a}{n})-F_0(x) \geq \frac{b-a}{n}\cdot\min\limits_{x\in[b;b+\frac{b-a}{n}]}f(x) \Leftrightarrow \frac{F_0(x+h)-F_0(x)}{h} \geq \min\limits_{x\in[b;b+h]}f(x)$

für $h \to 0$ geht $\min\limits_{x\in[b;b+h]} f(x)$ gegen $f(x)$, weil f stetig ist und $\frac{F_0(x+h)-F_0(x)}{h} \to F'(x)$. Damit ist $F'(x) \geq f(x)$. Der Unterschied ist das '$\geq$'.

Bei den Obersummen erhält man die Ungleichung $F'(x) \leq f(x)$, also ist $F'(x) = f(x)$.

Aufg. 184/502: a) i) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;

ii) Integrieren Sie die Gleichung dx und lösen Sie nach $\int u \cdot v' \cdot dx$ auf:

$\int (u \cdot v)' \cdot dx = \int (u' \cdot v + u \cdot v') \cdot dx \Leftrightarrow u \cdot v = \int u' \cdot v \cdot dx + \int u \cdot v' \cdot dx \Leftrightarrow \int u \cdot v' \cdot dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \cdot dx$;

b) $(f(g(x)))' = g'(x) \cdot f'(g)$.

c) i) $(F(g))' = f(g(x)) \cdot g'(x)\ dx$; ii) Integriert: $\int f(g) dg = F(g) = \int f(g(x)) \cdot g'(x) dx$;
iii) Kettenregel ... $dg = g'(x) \cdot dx$

Aufg. 184/503: a) (partielle Integration) i) $F_1(x) = (x-1)e^x$ (siehe Abs 7.4.1)

ii) $\int 2x \cdot \cos(x) \cdot dx = 2x \sin(x) - \int 2 \cdot \sin(x) \cdot dx = 2x\sin(x) + 2\cos(x) + c$
$\int u \cdot v' \cdot dx = uv - \int u' \cdot v \cdot dx$

iii) $\int 4x \cdot \sin(2x) \cdot dx = 4x \cdot \frac{-\cos(2x)}{2} - \int 4 \cdot \frac{-\cos(2x)}{2} \cdot dx = -2x\cos(x) + \sin(2x) + c$
$\int u \cdot v' \cdot dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \cdot dx$

iv) $F_4(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$ (siehe Abs 7.4.2)

v) $\int (x-1)^2 \cdot \sin(x) dx = (x-1)^2 \cdot (-\cos(x)) - \int 2(x-1) \cdot (-\cos(x)) dx$
$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$

$= -(x-1)^2 \cos(x) + \int 2x\cos(x) dx - 2\int \cos(x) dx = (-x^2 + 2x + 1)\cos(x) + 2(x-1)\sin(x) + c.$

Grad 2 $\xrightarrow{\text{ein Grad verloren}}$ Grad 1

$\int (x^2+3x-4)\, e^x dx = (x^2+3x-4) \cdot e^x - \int (2x+3) \cdot e^x dx$

$\int u \quad v'dx = u \quad v - \int u' \quad v \quad dx$

$\int (2x+3)\, e^x dx = (2x+3)e^x - \int 2e^x dx - (2x+3)e^x - 2e^x (+c) = (2x+1)e^x (+c)$

$\int (x^2+3x-4) e^x dx = (x^2+3x-4)e^x - ((2x+1)e^x) + c = \underline{(x^2+x-5)e^x + c}$

Abb. 389 doppelte partielle Integration von $(x^2 + 3x - 4) \cdot e^x$

b) i) $f(x) = 2x \cdot \sin(x^2)$, $g(x) = x^2, g'(x) = 2x$;

$\int 2x \cdot \sin(x^2) dx = \int g' \cdot \sin(g) dx =^{SR} \int \sin(g) dg = -\cos(g) =^{RS} -\cos(x^2) + c$;

ii) $\int 2x \cdot \sqrt{x^2+1} dx = \frac{2}{3}(x^2+1)^{1.5} + c$ iii) $\int x \cdot e^{x^2} dx = \frac{e^{x^2}}{2} + c$

iv) $f(x) = x^2 \cdot \cos(x^3 - 4)$, $g(x) = x^3 - 4, g'(x) = 3x^2$; $\int x^2 \cdot \cos(x^3-4) dx$
$= \int \frac{3x^2}{3} \cdot \cos(x^3-4) dx = \int \frac{g'}{3} \cdot \cos(g) dx =^{SR} \frac{1}{3}\int \cos(g) dg = \frac{1}{3}\sin(g) =^{RS} \frac{\sin(x^3-4)}{3} + c$;

v) $f(x) = \sin(2x) \cdot e^{\cos(2x)}$, $g(x) = \cos(2x)$, $g'(x) = -2\sin(2x)$; $\int \sin(2x) \cdot e^{\cos(2x)} dx =$
$-0.5 \int -2\sin(2x) \cdot e^{\cos(2x)} dx = -0.5 \int g' \cdot e^g dx =^{SR} -0.5 \int e^g dg = -0.5e^g =^{RS} -0.5e^{\cos(2x)} + c$;

vi) $f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{1-\cos(x)}}$, $g(x) = 1 - \cos(x)$, $g'(x) = \sin(x)$,

$\int \frac{\sin(x)}{\sqrt{1-\cos(x)}} dx = \int \frac{g'}{\sqrt{g}} dx =^{SR} \int \frac{1}{\sqrt{g}} dg = \int g^{-1/2} dg = \frac{g^{1/2}}{1/2} =^{RS} 2\sqrt{1-\cos(x)} + c$;

vii) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$, $g(x) = \ln(x)$, $g'(x) = \frac{1}{x}$,

$\int \frac{\ln(x)}{x}dx = \int \frac{1}{x} \cdot \ln(x) \cdot dx = \int g' \cdot g \cdot dx =^{SR} \int g \cdot dg = \frac{g^2}{2} =^{RS} 0.5(\ln(x))^2 + c$ (nicht Betrag);

viii) $f(x) = \frac{x^3-x}{x^4-2x^2}$, $g(x) = x^4 - 2x^2$, $g'(x) = 4x^3 - 4x$,

$\int \frac{x^3-x}{x^4-2x^2}dx = 0.25 \int (4x^3 - 4x) \cdot \frac{1}{x^4-2x^2}dx = 0.25 \int g' \cdot \frac{1}{g}dx =^{SR} 0.25 \int \frac{1}{g}dg =^{RS} 0.25 \ln|x^4 - 2x^2| + c$

Tatsächlich hätte man $f_5(x)$ auch kürzen können: $\frac{x^2-1}{x^3-2x}$ was aber die Integration erheblich erschweren würde (PBZ). x wirkt wie ein integrierender Faktor

ix) $2 \cdot e^{\sqrt{x}}$;

c) Bitte beachten Sie, dass i + ii + iii Einführungsaufgaben sind und natürlich auch anders gelöst werden können.

d) i) $f_1(x) = \sin(x)\cos(x)$, Substitution (partielle Integration ginge auch)

$g(x) = \sin(x)$, $g'(x) = \cos(x)$, $\int \sin(x) \cdot \cos(x)dx = \int g \cdot g'dx =^{SR}= \int g\ dg = \frac{g^2}{2} =^{RS} 0.5\sin^2(x) + c$;

ii) $f_2(x) = (2x - 4)\sin(2x)$, Produktregel:

$$\begin{array}{llllll} \int(2x-4) & \cdot\sin(2x)\cdot dx & = (2x-4)\cdot\frac{-\cos(2x)}{2} & -\int 2 & \cdot\frac{-\cos(2x)}{2}\cdot dx \\ \int u & \cdot v'\cdot dx & = uv & -\int u' & \cdot v\cdot dx \end{array}$$

$= (-x + 2)\cos(2x) + 0.5\sin(2x) + c$;

iii) $f_3(x) = (x^2 - 6x)\sin(2x - 6)$, Produktregel, keine Substitution, obwohl $(x^2 - 6x)' = 2x - 6$ ist:

$$\begin{array}{llllll} \int(x^2-6x) & \cdot\cos(2x-6)\cdot dx & = (x^2-6x)\cdot\frac{\sin(2x-6)}{2} & -\int(2x-6) & \cdot\frac{\sin(2x-6)}{2}\cdot dx \\ \int u & \cdot v'\cdot dx & = uv & -\int u' & \cdot v\cdot dx \end{array}$$

Zwischenrechnung: $$\begin{array}{llllll} \int(x-3) & \cdot\sin(2x-6)\cdot dx & = (x-3)\cdot\frac{-\cos(2x-6)}{2} & -\int 1 & \cdot\frac{-\cos(2x-6)}{2}\cdot dx & = \\ \int u & \cdot v'\cdot dx & = uv & -\int u' & \cdot v\cdot dx & \end{array}$$
$(1.5 - 0.5x) \cdot \cos(2x - 6) + \frac{\sin(2x-6)}{4}$

Hauptrechnung: $\int f_3(x)dx = (x^2 - 6x) \cdot \frac{\sin(2x-6)}{2} + (0.5x - 1.5) \cdot \cos(2x - 6) - \frac{\sin(2x-6)}{4} + c$

iv) Substitution $g = 1 + 2\sin(x)$, $g' = 2\cos(x)$:

$\int \frac{\cos(x)}{(1+2\sin(x))^2}\ dx = 0.5 \cdot \int \frac{g'}{g^2}dx =^{SR} 0.5 \cdot \int g^{-2}dg = 0.5 \cdot \frac{g^{-1}}{-1} =^{RS} \frac{-0.5}{1+2\sin(x)} + c$;

v) $f_5(x) = \frac{e^x}{e^{2x}-2e^x+1} = \frac{e^x}{(e^x-1)^2}$, Substitution: $g(x) = e^x - 1$, $g'(x) = e^x$,

$\int \frac{e^x}{(e^x-1)^2}dx = \int \frac{g'}{g^2}dx =^{SR}= \int \frac{1}{g^2}dg = \frac{g^{-1}}{-1} =^{RS} \frac{-1}{e^x-1} + c$;

vi) $f_6(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{x^2+x}{x+1} + \frac{1}{x+1} = \frac{x(x+1)}{x+1} + \frac{1}{x+1} = x + \frac{1}{x+1}$ (oder durch Polynomdivision mit Rest);

$\int(x + \frac{1}{x+1})dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x + 1| + c$;

vii) $f_7(x) = \frac{1}{x\ln(x)} = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln(x)}$ Substitution mit $g(x) = \ln(x)$, $g'(x) = \frac{1}{x}$,

$\int \frac{1}{x}\frac{1}{\ln(x)}dx = \int g' \cdot \frac{1}{g}dx =^{SR} \int \frac{1}{g}dg = \ln|g| =^{RS} \ln|\ln(x)| + c$;

viii) $f_8(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ Substitution mit $g(x) = \cos(x)$, $g'(x) = -\sin(x)$,

$\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx = \int g' \cdot \frac{-1}{g}dx =^{SR} \int \frac{-1}{g}dg = -\ln|g| =^{RS} -\ln|\cos(x)| + c$;

ix) $f_9(x) = \cos(\sqrt{x})$, innere Substitution mit $x(t) = t^2$, $x'(t) = 2t$:

$\int \cos(\sqrt{t^2})dx =^{ISR} \int \cos(t) \cdot 2t \cdot dt$

Zwischenrechnung: $\begin{array}{llllll} \int 2t & \cdot \cos(t)dt & = 2t \cdot \sin(x) & - \int 2 & \cdot \sin(x)dx & = 2t\sin(t) + 2\cos(t) \\ \int u & \cdot v'dx & = u \cdot v & - \int u' & \cdot v dx & \end{array}$

Hauptrechnung: $\int \cos(\sqrt{x})dx = 2\sqrt{x}\sin(\sqrt{x}) + 2\cos(\sqrt{x}) + c;$

x) siehe Abschnitt 188/7.4.3: $\int \sin(x) \cdot e^x dx = \frac{\sin(x)\cdot e^x - \cos(x)\cdot e^x}{2}$

xi) $f_{11}(x) = \sin(\ln(x))$, innere Substitution mit $x(t) = e^t$, $x'(t) = e^t$:

$\int \sin(\ln(e^t))dx =^{ISR} \int \sin(t) \cdot e^t \cdot dt$ mit Abschnitt 188/7.4.3

$= \frac{\sin(t)\cdot e^t - \cos(t)\cdot e^t}{2} =^{RS} \frac{\sin(\ln(x))\cdot e^{\ln(x)} - \cos(\ln(x))\cdot e^{\ln(x)}}{2} = \frac{x\sin(\ln(x)) - x\cos(\ln(x))}{2} + c;$

xii) $f_{12}(x) = \frac{2x}{(x^2+1)\ln(x^2+1)}$ zwei mal Substitution mit $h(x) = x^2 + 1$, $h'(x) = 2x$,

$\int \frac{2x}{(x^2+1)\ln(x^2+1)}dx = \int \frac{h'}{h\ln(h)}dx =^{SR} \int \frac{1}{h\ln(h)}dh = \ln|\ln(h)|$ (mit Teil vii) $=^{RS} \ln|\ln(x^2+1)| + c;$

xiii) Partielle Integration und Substitution

$\begin{array}{llllll} \int 1 & \cdot \ln(x^2+1) \cdot dx & = x \cdot \ln(x^2+1) & - \int x & \cdot \frac{2x}{x^2+1} \cdot dx & = x \cdot \ln(x^2+1) - 2x + 2\arctan(x), \\ \int u' & \cdot v \cdot dx & = uv & - \int u & \cdot v' \cdot dx & \end{array}$

Zwischenrechnung: $\int \frac{-2x^2}{x^2+1} \cdot dx = \int (\frac{-(2x^2+2)}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1})dx = \int(-2 + \frac{2}{x^2+1})dx = -2x + 2\arctan(x) + c;$

xiv) $f_{14}(x) = \frac{1\cdot e^x}{(1+e^{-x})\cdot e^x} = \frac{e^x}{e^x+1}$ Substitution $g = e^x + 1$, $g' = e^x$:

$\int \frac{e^x}{e^x+1}dx = \int \frac{g'}{g}dx =^{SR}= \int \frac{1}{g}dg = \ln|g| = \ln|e^x + 1| + c;$

xv) $f_{15}(x) = x^3 \cdot e^{x^2}$ Substitution $g = x^2$, $g' = 2x$:

$\int x^3 \cdot e^{x^2}\ dx = 0.5 \int 2x \cdot x^2 \cdot e^{x^2}\ dx = 0.5 \int g' \cdot g \cdot e^g\ dx =^{SR} 0.5 \int g \cdot e^g\ dg$

$= 0.5(g-1) \cdot e^g$ (nach Teil a_1) $=^{RS} 0.5(x^2 - 1) \cdot e^{x^2} + c.$
Substitution nicht e^{x^2} wäre auch gegangen.

Integration durch Partialbruchzerlegung

e) i) $\int(\frac{1}{x^2-4x+3})dx = \ln(\sqrt{|\frac{x-3}{x-1}|});$ ii) $\int(\frac{x^3}{x^2-1})dx = \frac{x^2}{2} + \ln(\sqrt{|x^2-1|});$
iii) $\int(\frac{x+1}{x^2-4x+4})dx = \ln(|x-2|) - \frac{3}{x-2};$ iv) $\int(\frac{x}{x^3-3x^2+3x-1})dx = -\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2};$

f) i) $\int(\frac{1}{x^2-4x+13})dx = \frac{1}{3} \cdot \arctan(\frac{x-2}{3});$ ii) $\int(\frac{2x}{x^2-4x+13})dx = \ln(x^2 - 4x + 13) + \frac{4}{3} \cdot \arctan(\frac{x-2}{3}).$

15.8 LöVo zu Kapitel 8: Differenzialgleichungen (UE 12_3)

Seite 693-709

Aufg. 200/504: a) $y' = y$; b) $y = e^x$, $y \equiv 0$; c) $y = c \cdot e^x$, $c \in \mathbb{R}$,
d) $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y = c \cdot e^{2x}$, $c \in \mathbb{R}$; e) $y = c \cdot e^{3x}$, bzw. $y = c \cdot e^{kx}$, $c \in \mathbb{R}$.

f) $g'(x) \equiv 0 \Rightarrow g(x) = c$ und damit $c := e^{-kx} \cdot y$ oder $y = c \cdot e^{kx}$.

Aufg. 201/505: a) $B(t+1) = B(t)\underline{+k \cdot f(B(t))};$

lineares Wachstum:	$B(t) = k \cdot t + c,$	$B(t+1) = k + B(t);$
exponentielles Wachstum:	$B(t) = c \cdot q^t,$	$B(t+1) = q \cdot B(t)$ oder $B(t+1) = B(t) + k \cdot B(t)$
beschränktes Wachstum:	$B(t) = c \cdot q^t + a\frac{1-q^n}{1-q},$	$B(t+1) = B(t) + k \cdot (S - B(t))$
logistisches Wachstum:	weiß ich noch nicht	$B(t+1) = B(t) + k \cdot B(t) \cdot (S - B(t))$

b) $f(B(t))$ ist ein Term, in welchem $B(t)$ vorkommen sollte.

LinWt:	$f(B(t)) = k$,	ExpWt:	$f(B(t)) = k \cdot B(t)$,
BeschrWt:	$f(B(t)) = k \cdot (S - B(t))$,	LogWt:	$f(B(t)) = k \cdot B(t) \cdot (S - B(t))$.

c) Die Änderungsrate (ÄR) zum Zeitschritt 1 ist $B(t+1) - B(t)$.
LinWt: ÄR ist konstant, ExpWt: ÄR ist proportional zum Bestand,
BeschrWt: ÄR ist proportional zum Sättigungsmanko,
LogWt: ÄR ist proportional zum Produkt us Bestand und Sättigungsmanko.

d) Zeitschritt $\frac{1}{2}$: $B(t+\frac{1}{2}) - B(t) = \frac{k}{2} \cdot B(t)$, Zeitschritt $\frac{1}{3}$: $B(t+\frac{1}{3}) - B(t) = \frac{k}{3} \cdot B(t)$,
Zeitschritt $\frac{1}{n}$: $B(t+\frac{1}{n}) - B(t) = \frac{k}{n} \cdot B(t)$, Zeitschritt h: $B(t+h) - B(t) = k \cdot h \cdot B(t)$;

e) (Differenzenquotient) $\dfrac{B(t+h) - B(t)}{h} = k{\cdot}B(t)$, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{B(t+1) - B(t)}{h} = B'(t) \Rightarrow B'(t) = k{\cdot}B(t)$,

f) $B(t) = c \cdot e^{kt}$. g) $y = c \cdot e^{0.05x}$ $y(0) = c \cdot e^{0.05 \cdot 0} = 1 \Rightarrow c = 1$ oder $y = 1 \cdot e^{0.05x} = e^{0.05x}$.

c) i) $B'(t) = k$: Lineares Wachstum (lin Wt), ii) $B'(t) = k \cdot B(t)$: Exponentielles Wachstum,

iii) $B'(t) = k \cdot (S - B(t))$: Beschränktes Wachstum; lin Wt: Die Wt Geschwindigkeit ist konstant;

exp Wt: Die Wt Geschwindigkeit ist proportional zum Bestand $B(t)$;

beschr Wt: Die Wt Geschwindigkeit ist proportional zum Sättigungsmanko $(S - B(t))$;

Aufg. 201/506: a)

Zeitschritt 1: $B(t+1) - B(t) = k \cdot (S - B(t))$, Zeitschritt $\frac{1}{2}$: $B(t+\frac{1}{2}) - B(t) = \frac{k}{2} \cdot (S - B(t))$,
Zeitschritt $\frac{1}{n}$: $B(t+\frac{1}{n}) - B(t) = \frac{k}{n} \cdot (S - B(t))$, Zeitschritt h: $B(t+h) - B(t) = k \cdot h \cdot (S - B(t))$;

b) (Differenzenquotient) $\dfrac{B(t+h) - B(t)}{h} = k{\cdot}B(t)$, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{B(t+1) - B(t)}{h} = B'(t) \Rightarrow B'(t) = k{\cdot}B(t)$.

c) i = lineares Wachstum, die Änderungsrate ist konstant;

ii = logistisches Wachstum, die Änderungsrate ist proportional zum Produkt aus Bestand und Sättigungsmanko;

iii = exponentielles Wachstum, die Änderungsrate ist proportional zum Bestand;

iv = beschränktes Wachstum, die Änderungsrate ist proportional zum Sättigungsmanko;

Aufg. 201/507: a) $y' = (20 - e^{-0.05x})' = 0.05e^{-0.05x}$ $1 - 0.05y = 1 - 0.05(20 - e^{-0.05x}) = 0.05e^{-0.05x} = y'$,
$(20 - 20 \cdot e^{-0.05x}$ geht analog). Die allgemeine Lösung ist: $y = 20 - c \cdot e^{-0.05x}$ $(c \in \mathbb{R})$, $S = 20$.

b) $y' = (S - ce^{-\lambda x})' = c\lambda e^{-\lambda x}$ $y' = 1 - ky = 1 - kS + kce^{-\lambda x}$
Koeffizientenvergleich ergibt: $S = \frac{1}{k}$, $\lambda = k$. Damit ist $y = \frac{1}{k} - ce^{-kx}$.

c) analog zu b) ergibt sich $S = ak$ und $\lambda = k$. d) $y = 1000 - 500e^{-0.01x}$.

Aufg. 201/508: EW = exponentielles Wachstum, BW = beschränktes Wachstum,

a)	$y' = 0.01y$	$y_a = ce^{0.01x}$	EW	b)	$y' = 0.03y$	$y_a = ce^{0.03x}$	EW
c)	$y' = y$	$y_a = ce^{x}$	EW	d)	$y' = -0.01y$	$y_a = ce^{-0.01x}$	EW, BW
e)	$y' = -y$	$y_a = ce^{-x}$	EW, BW	f)	$y' = 0.01(100 - y)$	$y_a = 100 - ce^{-0.01x}$	BW
g)	$y' = -0.01y$	$y_a = ce^{-0.01x}$	EW, BW	h)	$y' = 0.1(1000 - y)$	$y_a = 1000 - ce^{-0.1x}$	BW

Aufg. 201/509:

a) $y = e^x$	EW	b) $y = e^{0.1x}$	EW	c) $y = 20e^{0.2x}$	EW
d) $y = e^{-0.01x}$	EWBW	e) $y = -e^{-0.02x}$	EWBW	f) $y = 10 - 9e^{-0.1x}$	BW
g) $y = 10 + 10e^{-0.2x}$	BW	h) $y = 2000 - 1950e^{-0.01x}$	BW	i) $y = -1000 + 1000e^{0.01x}$	-

i) Probe: $y' = (-1000 + 1000e^{0.01x})' = 10e^{0.01x}$;
$10 + 0.01y = 10 + 0.01(-1000 + 1000e^{0.01x}) = 10 - 10 + 10e^{0.01x} = 10e^{0.01x} = y'$.

Aufg. 201/510: $q = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{-12.3}{100} = 0.877$. $f(x) = 1 \cdot 0.877^x$. $y' = 0.877y = y - 0.123y$.

Aufg. 201/511: a) $y' = 5 - 0.1y,\ \ k = 0.1$; b) $S = \frac{5}{0.1} = 50$,
$c = S - y(0) = 50 - 0 = 50,\ \ y = 50 - 50e^{-0.1x}$;
c) $45 = 50 - 50e^{-0.1x} \Leftrightarrow 0.1 = e^{-0.1x} \Leftrightarrow x = \frac{\ln(0.1)}{-0.1} \approx 23$ (Min).

d) $y' = -0.1 \cdot y$; $y = 50 \cdot e^{-0.1x}$.

Aufg. 202/512: a) $S = 10000,\ \ y = 10000 - 10000e^{-kx},\ \ y(1) = 1000 \Rightarrow 1000 = 10000 - 10000e^{-k} \Leftrightarrow$
$k = -\ln(0.9) \approx 0.1053,\ \ y' = 0.1053(10000 - y),\ \ y = 10000 - 10000e^{-0.1053x}$;
b) $y(6) = 10000 - 10000e^{-0.1053 \cdot 6} \approx 4683.66$ also 'nein'.

Aufg. 202/513: Auf 1000 Einwohner (Ew) 7 Geburten und 9 Todesfälle bedeutet, dass die Einwohnerzahl jährlich um 2 Ew pro Tausend sinkt; nur dieser Teil algebraisiert: $B(t+1) = B(t) - 0.002 \cdot B(t)$;
a) $y' = 100000 - 0.002 \cdot y$; b) $S = \frac{a}{k} = \frac{100000}{0.002} = 50000000$;

$y(0) = 20000000 \Rightarrow c = 30000000 \Rightarrow y = 50000000 - 30000000e^{-0.002t}$,

c) $45000000 = 50000000 - 30000000e^{-0.002t} \Leftrightarrow \ln(\frac{1}{6}) = -0.002t \Leftrightarrow t = \frac{\ln(6)}{0.002} \approx 896$ (Jahre).

15.8.1 LöVo zu Einheit 8.2 (Differenzialgleichungen (UE $M{+}_4$)

Aufg. 202/514: a) i) $1 - x^2$; ii) $1 - x^2 + x^4$; iii) $1 - x^2 + x^4 - x^6$;

b) Am Ende wird daraus $\cos(x)$; $f(x) = \underline{\cos(x)}$ ist eine <u>ganzrationale</u> Funktion vom Grade $\underline{\infty}$.

c) Es gilt also $f(x) = \underline{\cos(x)} = a_0 + a_1x + \underline{a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + ...}$

$a_0 = t(0) = f(0) = 1$; beim Berechnen von $t(0)$ fallen alle Koeffizienten bis auf a_0 weg.

Wie lauten die a_i bzw. wie kommt man darauf?

Ansätze: Linearfaktorzerlegung und Polynominterpolation.

$$\text{d)}\quad \cos(x) = a \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{5\pi}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{5\pi}{2}\right) \cdot ....$$

$$1 = \cos(0) = a \ \underbrace{\cdot \left(0 - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(0 + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(0 - \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \left(0 + \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \left(0 - \frac{5\pi}{2}\right) \cdot \left(0 + \frac{5\pi}{2}\right) \cdot ....}_{(\pm)\infty}$$

$\Rightarrow 1 = a \cdot (\pm)\infty \Rightarrow a = 0$.
Der Ansatz geht nicht - der Ansatz der Interpolation führt auf das selbe Problem.

e) Die Idee von Taylor (Newton) war: Bleibe bei $x = \underline{0}$. Wir kennen sämtliche Ableitungswerte von $\cos(x)$ an der Stelle $x = 0$.

f) Sei $t(x) = a_0 + a_1x + \underline{a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + ...}$ also $\cos(x)$ in <u>ganzrationaler</u> Form. Formulieren Sie algebraisch, dass die Funktionswerte von $t(x)$ und $\cos(x)$ an der Stelle $x = \underline{0}$ <u>gleich</u> sind ...

$$T(0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + a_3 \cdot 0^3 + a_4 \cdot 0^4 + ... = a_0 = \cos(0) = 1;\ \text{also ist } a_0 = 1.$$

g) Formulieren Sie wieder algebraisch, dass die Ableitungen von $t(x)$ und $\cos(x)$ an der Stelle $x = \underline{0}$ gleich sind.

$$\begin{array}{llllll}
T'(0) & = a_1 + 2a_2 \cdot x + 3a_3 \cdot x^2 + 4a_4 \cdot x^3 + ...|_{x=0} & = a_1 & = \cos'(0) & = 0, \\
T''(0) & = 2a_2 + 6a_3 \cdot x + 12a_4 \cdot x^2 + 20a_5 \cdot x^3 + ...|_{x=0} & = 2a_2 & = \cos''(0) & = -1, \\
T'''(0) & = 6a_3 + 24a_4 \cdot x + 60a_5 \cdot x^2 + 120a_6 \cdot x^3 + ...|_{x=0} & = 6a_3 & = \cos'''(0) & = 0, \\
T^{(4)}(0) & = 24a_4 + 120a_5 \cdot x + 360a_6 \cdot x^2 + 840a_7 \cdot x^3 + ...|_{x=0} & = 24a_4 & = \cos^{(4)}(0) & = 1, \\
T^{(5)}(0) & = 120a_5 + 720a_6 \cdot x + 2520a_7 \cdot x^2 + 6720a_8 \cdot x^3 + ...|_{x=0} & = 1206a_5 & = \cos^{(5)}(0) & = 0, \\
T^{(n)}(0) & = n! \cdot a_n & & = \cos^{(n)}(0) & \Rightarrow
\end{array}$$

$$a_n \quad = \quad \frac{\cos^{(n)}(0)}{n!} \qquad \text{oder} \qquad a_n \quad = \quad \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(\text{auswendig}).$$

Damit ist $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \pm ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.

h) .... dann heißt $t(x) = f(\underline{0}) + \frac{f'(\underline{0})}{\underline{1!}} \cdot x + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + ...$ Taylorreihe von f.

Aufg. 202/515: a) Mit der Formel $a_n = \frac{f^{(n)}}{n!}$ berechne man die TRdarst. von $\sin(x)$ und e^x.

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$;

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$;

b) Entwickeln Sie $\sin(3x)$ und e^{4x} in eine TR mit Hilfe von Substitution.

$\sin(3x) = 3x - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} - \frac{(3x)^7}{7!} \pm ... = 3x - \frac{27}{3!}x^3 + \frac{3^5}{5!}x^5 - \frac{3^7}{7!}x^7 \pm ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$;

$e^{4x} = 1 + 4x + \frac{4^2}{2}x^2 + \frac{4^3}{3!}x^3 + \frac{4^4}{4!}x^4 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n!} x^n$;

c) Zeigen Sie: $(\sin(x))' = \underline{\cos(x)}$ und $(e^x)' = \underline{e^x}$.

$(\sin(x))' = 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x)$;

$(e^x)' = 0 + 1 + \frac{2x}{2} + \frac{3x^2}{3!} + \frac{x^3}{3!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$;

d) Zeigen Sie die Formel von Euler: $e^{i \cdot x} = \underline{\cos(x) + i \cdot \sin(x)}$.
Es gilt $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$ ... Substituieren Sie $x \to ix$:

$$\begin{aligned}
e^{ix} &= 1 + ix + \frac{i^2x^2}{2} + \frac{i^3x^3}{3!} + \frac{i^4x^4}{4!} + \frac{i^5x^5}{5!} + \frac{i^6x^6}{6!} + \frac{i^7x^7}{7!} + \frac{i^8x^8}{8!} + ... \\
&= 1 + ix + \frac{-x^2}{2} + \frac{-ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} + \frac{-x^6}{6!} + \frac{-ix^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + ... \\
&= \underbrace{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + ...}_{\cos(x)} \quad \underset{+i\cdot}{+i \cdot} \underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + ...\right)}_{\sin(x)}
\end{aligned}$$

e)
$$\begin{array}{lllllllll}
\int e^{x^2} dx & = \int(& 1 & +x^2 & +\frac{(x^2)^2}{2!} & +\frac{(x^2)^3}{3!} & +\frac{(x^2)^4}{4!} & +.. + \frac{(x^2)^n}{n!} + ... &)dx \\
 & = \int(& 1 & +x^2 & +\frac{x^4}{2!} & +\frac{x^6}{3!} & +\frac{x^8}{4!} & +.. + \frac{x^{2n}}{n!} + ... &)dx \\
 & = & x & +\frac{x^3}{3} & +\frac{x^5}{5\cdot 2!} & +\frac{x^7}{7\cdot 3!} & +\frac{x^9}{9\cdot 4!} & +.. + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot n!} + ... & (+c)
\end{array}$$

Damit ist zwar eine TR der Stammfunktion gefunden, die Rückumwandlung in eine elementare steht bis heute aber aus. $\int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1^n)x^{2n+1}}{\sqrt{2\pi}\cdot 2^n \cdot (2n+1)\cdot n!}$.

Aufg. 203/516: a) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + ... = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$ (geometrische Reihe);

b) $f(2) = \frac{1}{1-2} = -1$, $t(2)$ ist nicht definiert, denn die geometrische Reihe konvergiert nur für $|x| < 1$. Die Konvergenzbereiche von $t(x)$ und $f(x)$ sind nicht gleich.

c) $\frac{2}{2-x} = 1 + x/2 + (x/2)^2 + (x/2)^3 + (x/2)^4 + (x/2)^5 + ... = \sum_{i=0}^{\infty}(x/2)^i$;

d) $\int \frac{1}{1-x}dx = -\ln|1-x| = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + ... = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$;

$(-\ln|1-x|)''''' = ((1-x)^{-1})'''' = ((1-x)^{-2})''' = (2(1-x)^{-3})'' = (6(1-x)^{-4})' = 24(1-x)^{-5}$.

$f^{(n)}(x) = (n-1)!(1-x)^{-n}$ $n > 0$, (ohne Induktionsbeweis).

$f(0) = -\ln|1-0| = 0$, $f^{(n)}(0) = (n-1)!(1-0)^{-n} = (n-1)!$, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$, $n > 0$;

e) siehe Abs. 83/4.11.6

f) $E = p\cdot(1+2\cdot q+3\cdot q^2+...) = p\cdot\sum_{i=0}^{\infty} i\cdot q^{i-1}$. Die $\sum_{i=0}^{\infty} i\cdot x^{i-1}$ berechnen wir mit Taylorreihen: Wir wissen, dass $(x^i)' = i\cdot x^{i-1}$ also ist $\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot x^{i-1} = (\frac{1}{1-x})'$ (geometrische Reihe) $= \frac{-1\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$. Also ist $E = p\cdot\sum_{i=0}^{\infty} i\cdot q^{i-1} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$.

f)* $T(-1) = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \pm ...$ konvergiert nach Leibniz (Abschnitt 4.11.15) und nach dem Abelschen Grenzwertsatz (dieser kann ich leider noch nicht beweisen) gegen $F(-1) = -\ln(2)$; der Limes $\lim\limits_{x\to-1} t(x)$ hingegen existiert nicht.

Aufg. 203/517: a+b) Beweisen Sie für diesen Spezialfall die Regel von de l'Hospital mit Hilfe von Taylorreihen. Sei $\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, dann gilt $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (sofern dieser existiert). Sei $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...$ und $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ...$, dann ist $f(0) = a_0 + a_1\cdot 0 + a_2\cdot 0^2 + ... = a_0 = 0$; damit ist $a_0 = b_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to0} \tfrac{a_1x+a_2x^2+...}{b_1x+b_2x^2+...} && a_0 = b_0 = 0\\
&= \lim_{x\to0} \tfrac{x\cdot(a_1+a_2x+a_3x^2+...)}{x\cdot(b_1+b_2x+b_3x^2+...)} && x \text{ ausgeklammert}\\
&= \lim_{x\to0} \tfrac{a_1+a_2x+a_3x^2+...}{b_1+b_2x+b_3x^2+...} && x \text{ gekürzt}\\
&= \tfrac{a_1}{b_1} && x = 0 \text{ eingesetzt}\\
&= \tfrac{\frac{f'(0)}{1!}}{\frac{g'(0)}{1!}} = \tfrac{f'(0)}{g'(0)} && \text{Taylor}
\end{aligned}$$

Aufg. 203/518: a) i) $T(x) = x^2 - 4$; ii) $T(x) = 3 - 2x + x^3$, iii) $T(x) = x^3 - 6x^2 + 9$; (Polynome entwickelt sind 'sie selbst');

iv) $f(x) = e^{2x}$, $T(x) = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}$;

v) $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} .... = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{(2n)!}$;

$\cos(3x) = 1 - \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^4}{4!} - \frac{(3x)^6}{6!} + \frac{(3x)^8}{8!} .... = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(3x)^{2n}}{(2n)!}$;

vi) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} .... = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$;

$e^{x^3} = 1 + \frac{x^3}{1!} + \frac{(x^3)^2}{2!} + \frac{(x^3)^3}{3!} + \frac{(x^3)^4}{4!} .... = 1 + \frac{x^3}{1!} + \frac{x^6}{2!} + \frac{x^9}{3!} + \frac{x^{12}}{4!} .... = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^3)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n!}$;

vii) $-\ln(1-x) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} .... = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$;

$\ln(1+x) = -(\frac{(-x)}{1} + \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3} + \frac{(-x)^4}{4} ....) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} .... = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$;

viii) $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$,

$\ln(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} .... = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$,

aus iv): $\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} .... = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$,

$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} .... - \left(-\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} ....\right) = 2\cdot\frac{x}{1} + 2\cdot\frac{x^3}{3} + 2\cdot\frac{x^5}{5} ....$

$\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

ix) $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} .... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}$;

$x \cdot \cos(x) = x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} ....\right) = x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} - \frac{x^7}{6!} + \frac{x^9}{8!} .... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n)!}$;

x) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} .... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$;

$(x-1) \cdot e^x = (x-1) \cdot \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} ....\right)$
$= \left(x + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \frac{x^5}{4!} ....\right) - \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} ....\right)$
$= -1 + x^2(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}) + x^3(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}) + x^4(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}) + +x^5(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!})$ mit $\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{n}{n!} - \frac{1}{n!} = \frac{n-1}{n!}$.
$= -1 + x^2 \cdot \frac{2-1}{2!} + x^3 \cdot \frac{3-1}{3!} + x^4 \cdot \frac{4-1}{4!} + +x^5 \cdot \frac{5-1}{5!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{n!} \cdot x^n$;

xi) $\ln(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} .... = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$,

$f(x) = x^2 \cdot \ln(1-x) = x^2 \cdot (-\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} ....) = -\frac{x^3}{1} - \frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{3} - \frac{x^6}{4} .... = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n}$,

xii) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$,

$\frac{1}{1-x^2} = 1 + (x^2) + (x^2)^2 + (x^2)^3 + (x^2)^4 + ... = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$,

xiii) $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} u^n$, Sei $u = -x^2$, dann ist $\frac{1}{1-u} = \frac{1}{1-(-x^2)}$ und

$\frac{1}{1-(-x^2)} = 1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + (-x^2)^3 + (-x^2)^4 + ... = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n}$,

xiv) $\frac{3x}{1+3x} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (3x)^{k+1}$

xv) $\arctan(x) = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + ...)\, dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \pm ... + c$ $(c = 0)\{$ weil $\arctan(0) = 0\ \} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$,

b) i) $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} .... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$;

$(\sin(2x))' = \left(2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!} + \frac{(2x)^9}{9!} ....\right)' = 2 - \frac{2^3 \cdot 3x^2}{3!} + \frac{2^5 \cdot 5x^4}{5!} - \frac{2^7 \cdot 7x^6}{7!} + \frac{2^9 \cdot 9x^8}{9!} ....$

$= 2 \cdot (1 - \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} - \frac{2^6 x^6}{6!} + \frac{2^8 x^8}{8!} .... = 2 \cdot (1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \frac{(2x)^8}{8!} .... = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2x)^{2n}}{(2n)!}$;

ii) $\int \sin(2x) dx = \int \left(2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!} + \frac{(2x)^9}{9!} ....\right) dx \quad = \frac{2x^2}{2} - \frac{(2x)^4}{2 \cdot 4 \cdot 3!} + \frac{(2x)^6}{2 \cdot 6 \cdot 5!} - \frac{(2x)^8}{2 \cdot 8 \cdot 7!} + \frac{(2x)^{10}}{2 \cdot 10 \cdot 9!} .... + c$

$= -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \frac{(2x)^8}{8!} + \frac{(2x)^{10}}{10!} ....\right) + (c + 0.5) \quad = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2x)^{2n}}{(2n)!} + c + 0.5$

$= -\frac{1}{2}\cos(2x) + (c + 0.5)$ also ist $-\frac{1}{2}\cos(2x)$ eine Stammfunktion von $\sin(2x)$.

iii), iv) fehlt noch v) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} .... \geq 1 + x \quad \surd$;

vi) $x - 1 \geq \ln(x)$ für $x \leq 1 \overset{x=1-w}{\Longleftrightarrow} (1-w) - 1 \geq \ln(1-w)$ für $1 - w \leq 1$

$\Leftrightarrow -w \geq \ln(1-w)$ für $w \geq 0 \Leftrightarrow -w \geq -\frac{w}{1} - \frac{w^2}{2} - \frac{w^3}{3} - \frac{w^4}{4} .... \surd$,

c) i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} ....}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} ....}{1}$

$= 1 - \frac{0^2}{3!} + \frac{0^4}{5!} - \frac{0^6}{7!} + \frac{0^8}{9!} .... = 1$;

ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} ....)}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!} ....}{x^2}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \frac{x^6}{8!} ....}{1} = \dfrac{1}{2!} - \dfrac{0^2}{4!} + \dfrac{0^4}{6!} - \dfrac{0^6}{8!} .... = 0.5$;

iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1-e^x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1-(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\ldots)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{-\frac{x}{1!}-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}\ldots}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{-\frac{1}{1!}-\frac{x}{2!}-\frac{x^2}{3!}-\frac{x^3}{4!}\ldots}=\dfrac{1}{-\frac{1}{1!}-\frac{0}{2!}-\frac{0^2}{3!}-\frac{0^3}{4!}\ldots}=-1;$

Aufg. 203/519: a) $2-x^2\rightarrow\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$, $mx+c\rightarrow\begin{pmatrix}c\\m\end{pmatrix}$, $x^3\rightarrow\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$;

b) Der Vektorraum aller ganzrationalen Funktionen (grFktn) vom Grad $\underline{\leq} n$ ist $\underline{n+1}$ dimensional; Der Vektorraum aller ganzrationalen Funktionen ist <u>unendlich</u> dimensional.

c) $1-3x\rightarrow\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}=\vec{v}_1$, $4-x^2\rightarrow\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}=\vec{v}_2$, $x^2-3x-3\rightarrow\begin{pmatrix}-3\\-3\\1\end{pmatrix}=\vec{v}_3$; $\vec{v}_1-\vec{v}_2=\vec{v}_3$; damit sind die Vektoren l. a.

d) Funktionen können z.B. über Wertetabellen definiert werden - damit sind die Funktionswerte $f(x_0)$ bzw. $g(x_0)$ bekannt. Die Summe zweier Funktionen $(f+g)(x_0):=f(x_0)+g(x_0)$ ist komponentenweise definiert. Ok es ist trivial - aber vieles ist einfach. $(r\cdot f)(x_0):=r\cdot f(x_0)$.

Alle Vektorraumgesetze können leicht über die entsprechenden Gesetze der reellen Zahlen nachgerechnet werden. Bsp. Distributivgesetz (2):

$$\begin{array}{lll}(r\cdot(f+g))(x_0) & =r\cdot(f+g)(x_0) & \text{Def. der Mult. einer Funktion mit einem Skalar } r\\ & =r\cdot(f(x_0)+g(x_0)) & \text{Def. der Addition zweier Funktion}\\ & =r\cdot f(x_0)+r\cdot g(x_0) & \text{Distributivgesetz in } \mathbb{R}\\ & =(r\cdot f)(x_0)+(r\cdot g)(x_0) & \text{Multiplikation mit einem Skalar}\\ & =(r\cdot(f+g))(x_0) & \text{Addition zweier Funktionen}\end{array}$$

Alle anderen Gesetze gehen analog. Ein Skalarprodukt ist (bisher) nicht definiert.

e) Nein, f und g sind sicher l.u. **Beweis:** $f(x)\not\equiv 0$ sagt, dass es ein x_1 gibt, mit $f(x_1)\neq 0$.

$r\cdot f(x)+s\cdot g(x)\equiv 0$ bedeutet $r\cdot f(x)+s\cdot g(x)=0$ für alle $x\in\mathbb{R}$,

x_0 eingesetzt ergibt: $r\cdot f(x_0)+s\cdot g(x_0)=r\cdot 0+s\cdot g(x_0)=0\Rightarrow s=0$, da $g(x_0)\neq 0$;

x_1 eingesetzt ergibt: $r\cdot f(x_1)=0\Rightarrow r=0$, da $f(x_1)\neq 0$; Damit sind f,g l.u.

Aufg. 203/520: Zu dieser Aufgabe sollte das Thema 'Taylorreihen' bekannt sein.

a) $g_n(x)=1+x+x^2+x^3+..+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ $(x\neq 1)$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x)=\dfrac{1}{1-x}$ für $(|x|<1)$;

c) $g(x)=\frac{1}{1-x}\rightarrow\begin{pmatrix}1\\1\\\ldots\end{pmatrix}$;

d) Weil $g(x)$ eine 'unendlich lange' ganzrationale Funktion ist (Taylorreihe).

e) $$e^x\rightarrow\begin{pmatrix}1\\1\\0.5\\..\\\frac{1}{n!}\\..\end{pmatrix}\qquad\sin(x)\rightarrow\begin{pmatrix}0\\1\\0\\..\\\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\\..\end{pmatrix}\qquad\cos(x)\rightarrow\begin{pmatrix}1\\0\\-\frac{1}{2}\\..\\\frac{(-1)^n}{(2n)!}\\..\end{pmatrix}$$

Vorsicht: die allgemeine Zeile ist bei e^x in Zeile n, bei $\sin(x)$ in Zeile $2n-1$ und bei $\cos(x)$ in Zeile $2n$; die Zeilenzählung beginnt dabei bei 0.

f) Während $g(x)$ auf $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ definiert ist, ist $1+x+x^2+x^3+..+x^n$ nur für $|x|<1$ definiert. Für $x_0=2$ wäre die Addition $x^2+\frac{1}{1-x}$ vektoriell gesehen nicht konvergent. Die komponentenweise Darstellung soll helfen, den abstrakten Vektorraum aller Funktionen zu verstehen. Diese Darstellung ist gültig bei ganzrationalen Fktn und bei Funktionen, deren Taylorreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent ist (siehe Abschnitt 4.11.2).

Aufg. 204/521: a) Eine Differenzialgleichung (Dgl) ist eine Gleichung in welcher mit einer (noch unbekannten) Funktion y auch deren Ableitung(en) vorkommen kann. Die Dgl soll in der Regel nach $\underline{y}$ (nicht nach x) aufgelöst werden. b) $y \equiv 0$ und $y = e^x$;

c) $\frac{dy}{dx} = y' \Leftrightarrow y'dx = dy$. Für $y \neq 0$ gilt:

$$\frac{y'}{y} = 1 \Leftrightarrow \int \frac{y'}{y} dx = \int 1 dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = x + \tilde{c} \Leftrightarrow \ln|y| = x + \tilde{c} \Leftrightarrow |y| = e^{x+\tilde{c}} \Leftrightarrow y = \pm e^{\tilde{c}} \cdot e^x.$$

$\pm e^{\tilde{c}}$ kann jede reelle Zahl $\neq 0$ erzeugen. $y \equiv 0$ löst die Dgl ebenfalls, damit ist $y = c \cdot e^x$ $(c \in \mathbb{R})$.

d) siehe Abschnitt 8.4.5.

Aufg. 204/522: a) $2x - 4 = 6 \Rightarrow x = 5$ und $x^3 + x = 2 \Rightarrow x = 1$, sind gelöst, denn für diese Gleichungen gilt ein Existenz und Eindeutigkeitssatz für Lösungen. Für die Gleichungen $x^2 + x - 6 = 0$ und $x^4 + 36 = 13x^2$ gilt dies nicht.

b) Gleichungen der Form $mx + c = 0$ haben für $\underline{m \neq 0}$ immer genau eine Lösung; Gleichungen der Form $\underline{x^2 + ... = 0, x^3 + ... = 0}$ hingegen nicht.

c) Wenn von einer Gleichung bekannt ist, dass deren Lösung existiert und eindeutig ist, dann darf die Lösung geraten werden.

d) Eine Differenzialgleichung der Form $y' = f(x, y)$; $f(x, y)$ ist ein Term, in welchem $\underline{x}$ und $\underline{y}$ vorkommen (können); hat eine allgemeine Lösung mit einem Parameter c; ihr Lösungsraum ist also eindimensional.

e) Nach dem Satz von PPL ist mit der Lösung von 521 c): $y = \underline{c \cdot e^x}$ die Dgl $y' = y$ komplett gelöst, weil die Lösung (genau) einen Parameter c enthält.

Die Lösung der Dgl entspricht einer Ursprungsgeraden im Vektorraum aller Funktionen.

Aufg. 204/523:

$$\begin{array}{llll} & y' = \lambda e^{\lambda x} & y = e^{\lambda x} & \text{in Dgl:} \\ \text{Dgl:} & y' = & 3y & \\ & \lambda e^{\lambda x} = & 3e^{\lambda x} & \Leftrightarrow \lambda = 3 \end{array}$$

b) $y_{allg} = c \cdot e^{3x}$: $y'_{allg} = 3c \cdot e^{3x} = 3y_{allg}$, damit erfüllen alle Funktionen die Dgl und der von PPL geforderte Parameter ist auch gefunden.

c) $y_{allg} = c \cdot e^{kx}$: $y'_{allg} = k \cdot c \cdot e^{3x} = k \cdot y_{allg}$ löst die Dgl allgemein.

d) $y = e^{\lambda x}$ in $y'' + y' - 6y = 0$ eingesetzt ergibt: $\lambda^2 \cdot e^{\lambda x} + \lambda \cdot e^{\lambda x} - 6 \cdot e^{\lambda x} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ (charakteristisches Polynom) $\Leftrightarrow \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 2$. $y_{allg} = c_1 \cdot e^{-3x} + c_2 \cdot e^{2x}$.

e) Verallgemeinerung von PPL: Eine Differenzialgleichung der Form $y'' = \underline{f(x, y, y')}$ hat eine allgemeine Lösung mit zwei Parametern und zwei linear unabhängigen Funktionen; ihr Lösungsraum ist also zweidimensional.

Aufg. 204/524: a) $y_0 = r \cdot y_1 + s \cdot y_2$ ist eine Lösung der Dgl: y_0 eingesetzt:

$$\begin{array}{cccc} & y'' & +a_1 y' & +a_0 y \\ & (r \cdot y_1 + s \cdot y_2)'' & +a_1(r \cdot y_1 + s \cdot y_2)' & +a_0(r \cdot y_1 + s \cdot y_2) \\ = & r \cdot y_1'' + s \cdot y_2'' & +r \cdot a_1 \cdot y_1' + s \cdot a_2 \cdot y_2' & +r \cdot a_0 \cdot y_1 + s \cdot a_0 \cdot y_2 \\ = & r \cdot \underbrace{(y'' + a_1 y' + a_0 y)} & +s \cdot \underbrace{(y'' + a_1 y' + a_0 y)} & \\ = & r \cdot 0 & +s \cdot 0 & = 0 \ \text{ qed} \end{array}$$

b) Eine hlinDgl hat immer die Lösung $y \equiv \underline{0}$. Die Struktur der Lösung einer Dgl der Form

$y' + a_0 y = 0$ ist $\underline{y_{allg} = y_c \cdot y_1}$; geometrisch ist dies eine Ursprungsgerade

bzw. $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ ist $\underline{y_{allg} = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2}$; geometrisch ist dies eine Ursprungsebene

im Vektorraum aller Funktionen.

Aufg. 204/525:

b) $\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -6$ $\quad\Leftrightarrow y_{allg} = c_1 e^{-6x}$;
c) $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ $\quad\Leftrightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1$ $\quad\Leftrightarrow y_{allg} = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}$;
d) $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$ $\quad\Leftrightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 4$ $\quad\Leftrightarrow y_{allg} = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{4x}$;
e) $y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-4x}$; f) e) $y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-4x}$;
g) $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda = 0$ $\quad\Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ $\quad\Leftrightarrow y_{allg} = c_1 e^{0x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$;
h) $\lambda^3 - 16\lambda^2 + 30\lambda = 0$ $\quad\Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 5$ $\quad\Leftrightarrow y_{allg} = c_1 + c_2 e^{3x} + c_3 e^{5x}$;
i) $\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4\lambda = 0$ $\quad\Leftrightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 2$ $\quad\Leftrightarrow y_{allg} = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^x + c_4 e^{2x}$;

k) $y'' - 6y' + 8y = 0$; : $y_{allg} = c_1 e^{4x} + c_2 e^{2x}$;

L) $y' - 10y' + 9y = 0$; $y_{allg} = c_1 e^x + c_2 e^{9x}$;

m) $y''' - 3y'' = 10y'$; : $y_{allg} = c_1 + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{5x}$;

n) $y'' - 4y' = 21y$; $y_{allg} = c_2 e^{-3x} + c_3 e^{7x}$;

Aufg. 205/526: a) $y_1 = \sin(x)$, $y_2 = \cos(x)$, b) $\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \Leftrightarrow y_{allg} = \tilde{c}_1 e^{ix} + \tilde{c}_2 e^{-ix}$;

c) a) und b) hängen über die Eulerformel zusammen:

$$\begin{aligned}
y_{allg} &= \tilde{c}_1 e^{ix} + \tilde{c}_2 e^{-ix} && \text{Theorie der Dgl} \\
&= \tilde{c}_1(\cos(x) + i\sin(x)) + \tilde{c}_2(\cos(-x) + i\sin(-x)) && \text{Euler} \\
&= \tilde{c}_1(\cos(x) + i\sin(x)) + \tilde{c}_2(\cos(x) - i\sin(x)) && \text{Achsen bzw. Punktsymmetrie} \\
&= (\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2)\cos(x) + i(\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2)\sin(x) && \sin(x), \cos(x) \text{ ausgeklammert} \\
&= c_1\cos(x) + c_2\sin(x) && \text{neue Konstanten.}
\end{aligned}$$

Der Umweg durch das Komplexe hat an der Stelle $i(\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2) = c_2$ seine Spuren hinterlassen. Nach PPL genügt es aber, die Lösung zu finden (fast egal wie).

d) Beachten Sie dabei, dass $e^{x+y} = \underline{e^x \cdot e^y}$ ist. $\lambda^2 - 4\lambda^2 + 13 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$.

$$\begin{aligned}
y_{allg} &= \tilde{c}_1 \cdot e^{(2+3i)x} + \tilde{c}_2 \cdot e^{(2-3i)x} && \text{Theorie der Dgl} \\
&= \tilde{c}_1 \cdot e^{2x} \cdot e^{3ix} + \tilde{c}_2 \cdot e^{2x} \cdot e^{-3ix} && \text{Potenzgesetz} \\
&= e^{2x} \cdot (\tilde{c}_1(\cos(3x) + i\sin(3x)) + \tilde{c}_2(\cos(3x) - i\sin(3x)) && \text{Euler} \\
&= e^{2x} \cdot (c_1\cos(3x) + c_2\sin(3x)) && \text{siehe Ag c).}
\end{aligned}$$

e) Der Umweg durch das Komplexe hinterlässt das $\underline{i}$ bei den Parametern, welches ignoriert werden darf.

f) $y_{allg} = \underline{e^{ax} \cdot (c_1\cos(bx) + c_2\sin(bx))}$.

g) i) $\lambda_{1,2} = -3 \pm i$, $y_{allg} = e^{-3x}(c_1\cos(x) + c_2\sin(x))$;

ii) $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2i$, $\lambda_3 = 0$, $y_{allg} = \tilde{c}_1 e^{3x+2i} + \tilde{c}_2 e^{3x-2i} + c_3 = e^{3x} \cdot (\tilde{c}_1 e^{2ix} + \tilde{c}_2 \tilde{e}^{2ix}) + c_3$

$= e^{3x} \cdot (\tilde{c}_1 e^{2x^i} + \tilde{c}_2 e^{-2x^i}) + c_3 = e^{3x} \cdot (\tilde{c}_1(\cos(2x) + i\sin(2x)) + \tilde{c}_2(\cos(2x) - i\sin(2x)) + c_3$

$= e^{3x}(c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x)) + c_3$ (mit $c_1 = \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2$ und $c_2 = i\tilde{c}_1 - i\tilde{c}_2$);

iii) $e^{-5x}(c_1\cos(6x) + c_2\sin(6x))$ iv) $e^{-4x}(c_1\cos(5x) + c_2\sin(5x))$

v) $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, $\lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{2}$, $\lambda_5 = 0$, $y_{allg} = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x} + c_3\cos(\sqrt{2}x) + c_4\sin(\sqrt{2}x) + c_5$;

vi) $\lambda_{1,2} = \pm 1$, mit der Formel von Moivre (51/130) gilt: $\lambda_{3,4} = \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$, $\lambda_{5,6} = \frac{-1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$,

$y_{allg} = c_1e^x + c_2e^{-x} + e^{0.5x}(c_3 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + c_4 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)) + e^{-0.5x}(c_5 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + c_6 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x))$.

vii) $y_{allg} = \tilde{c}_1e^{2x} + \tilde{c}_2e^{-2x} + \tilde{c}_3e^{\sqrt{2}x} + \tilde{c}_4e^{-\sqrt{2}x}$, viii) $c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3 \cos(2x) + c_4 \sin(2x)$;

ix) $\lambda_{1,2} = \pm 1$, $\lambda_{3,4} = \pm i$, $y_{allg} = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3 \cos(x) + c_4 \sin(x)$;

x) $y'''' - 12y'' + 64y = 0 :\quad c_1e^{-4x} + c_2e^{-2x} + c_3e^{2x} + c_4e^{4x}$.

Aufg. 205/527: a+b) $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 1 \Leftrightarrow y_{allg} = c_1e^x + c_2e^x = c \cdot e^x$ $c \cdot e^x$ ist nur eindimensional, damit ist die allgemeine Lösung nach PPL noch nicht gefunden.

c) $g(x) \cdot y_1 = g(x) \cdot e^x$, $(g(x) \cdot e^x)'' = (g' \cdot e^x + g \cdot e^x)' = g'' \cdot e^x + 2g' \cdot e^x + g \cdot e^x$

$$\begin{array}{lcccc}
\text{in die Dgl eingesetzt:} & & y'' & -2y' & +y = 0 \\
& \Leftrightarrow & g'' \cdot e^x + 2g' \cdot e^x + g \cdot e^x & -2(g' \cdot e^x + g \cdot e^x) & +g \cdot e^x = 0| : e^x \\
& \Leftrightarrow & g'' + 2g' + ge^x & -2g' - 2g & +g = 0 \\
& \Leftrightarrow & g'' = 0 & \Leftrightarrow g = c_2x + c_1 & \Leftrightarrow y_2 = y_{allg} = (c_2x + c_1) \cdot e^x
\end{array}$$

d) Normalerweise steckt man eine Münze in einen Kaugummiautomaten hinein und bekommt etwas anderes (den Kaugummi) heraus. Hier investieren wir eine homogene Lösung und suchen nach einer zweiten Lösung und wir erhalten aber direkt die allgemeine Lösung der Dgl.

e) $\lambda_{1,2} = 3$, $\quad y_{allg} = (c_2x + c_1) \cdot e^{3x}$;

f) Wenn das charakteristische Polynom einer Dgl 2. Ordnung die doppelte reelle Nullstelle $\lambda_{1,2} = a$ hat, dann ist die allgemeine Lösung von der Form: $y_{allg} = \underline{(c_2x + c_1) \cdot e^{ax}}$; ist a eine n-fache reelle Nullstelle ($n \geq 2$), so ist $y_{allg} = \underline{(c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + ... + c_1x^1 + c_0) \cdot e^{ax}}$.

g) i) $y_{allg} = (c_2x + c_1) \cdot e^{-2x}$;

ii) Charakteristisches Polynom: $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3$, damit ist $\lambda_{1,2,3} = -1$ (dreifach) $\Rightarrow$ $y_{allg} = (c_3x^2 + c_2x + c_1) \cdot e^{-x}$;

h) i) Charakteristisches Polynom: $\lambda^3 - \lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 1)$, damit ist $\lambda_{1,2} = 0$, (doppelt), $\lambda_3 = 1 \Rightarrow$ $y_{allg} = (c_2x + c_1)e^{0 \cdot x} + c_3 \cdot e^x = c_2x + c_1 + c_3 \cdot e^x$;

ii) $y_{allg} = c_3x^2 + c_2x + c_1$; iii) $(c_1x + c_0)e^{2x} + c_3e^{-2x}$; iv) $(c_1x + c_0)e^x + c_3e^{-2x}$

v) $y_{allg} = (c_2x + c_1) \cdot e^{-x} + (c_3x + c_4) \cdot e^x$;

vi) $y_{allg} = (c_2x+c_1) \cdot \cos(x)+(c_3x+c_4) \cdot \sin(x)$; vii) $y = (c_1x + c_2) \cdot e^{2x} + (c_3x + c_4) \cdot e^{-2x} + (c_5x + c_6)$;

viii) $y_{allg} = (c_2x + c_1) \cdot e^x + c_3 \cdot e^{3x}$;

ix) $y_{allg} = (c_3x^2 + c_2x + c_1) \cdot e^{-x} + (c_4x + c_5) \cdot e^{-2x}$;

x) $y_{allg} = (c_1 + c_2x + c_3x^2) \cdot e^{3x} - (d_1 + d_2x + d_3x^2) \cdot e^{-3x}$;

xi) $y_{allg} = y_{hom} = (c_1x + c_0)e^x + c_3e^{2x} + c_4e^{-x}$;

xii) $y_{allg} = y_{hom} = (c_3x^2 + c_2x + c_1) \cdot e^x + (d_2x + d_1) \cdot e^{-x} + d_3 \cdot e^{-2x}$;

xiii) $y_{allg} = y_{hom} = (c_4x^3 + c_3x^2 + c_2x + c_1) \cdot e^{-x} + (d_2x + d_1) \cdot e^x + (d_4x + d_3) \cdot e^{2x}$.

Aufg. 205/528: a) Lösen Sie das Gl.system mit Hilfe des Einsetzungsverfahrens. Dazu differenzieren wir die erste Gl. $y_1'' = 2y_1' + y_2'$ und setzen diese und $y_2 = -2y_1 + y_1'$ in die zweite ein:

$$\begin{array}{lcccc}
y_2' & = & y_1 & + & 2y_2 \\
y_1'' - 2y_1' & = & y_1 & + & 2(-2y_1 + y_1') \\
\Leftrightarrow y_1'' - 4y_1' + 3y_1 = 0 & & & & \Rightarrow\ y_1 = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{3x} \\
\Leftrightarrow y_2 = -2y_1 + y_1' = -2(c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{3x}) + c_1 \cdot e^x + 3c_2 \cdot e^{3x} & & & & \Rightarrow\ y_2 = -c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{3x}
\end{array}$$

Algorithmus:
i) Lösen Sie die erste Gleichung nach $\underline{y_2}$ oder die zweite GLeichung nach $\underline{y_1}$ auf.
ii) Die aufgelöste Gleichung ableiten und in die andere Gleichung einsetzen.
iii) Löse die Dgl (zwei-ten Grades).
iv) Die Lösung ableiten und in die im ersten Schritt erwählte Gleichung einsetzen.

b) $$\begin{array}{rcrcr} y_1' &=& 2y_1 &+& y_2 \\ y_2' &=& y_1 &+& 2y_2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{y}' = \underline{A}\vec{y}.$$

c) $$\begin{array}{rcrcr} \lambda v_1 e^{\lambda x} &=& 2v_1 e^{\lambda x} &+& v_2 e^{\lambda x} \\ \lambda v_2 e^{\lambda x} &=& v_1 e^{\lambda x} &+& 2v_2 e^{\lambda x} \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{0} = (\underline{A} - \lambda \cdot \underline{1_2})\vec{v}.$$

Dies entspricht genau einem Eigenwert (λ) / Eigenvektorproblem ($\vec{v}$). Die Eigenwerte von $\underline{A}$ sind $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$, die Eigenvektoren sind $\vec{v}_1 = \binom{1}{-1}$ und $\vec{v}_2 = \binom{1}{1}$. Damit ist

$$\vec{y}_{allg} = c_1 \binom{1}{-1} e^x + c_2 \binom{1}{1} e^{3x} \qquad \text{dies ist äquivalent (sogar gleich) zur Lösung von a)}$$

d) (Matrixexponentialfunktion) Gegeben sei das System (2 Gl. 2 Ubek.) von Dgl der Form

$\vec{y'} = \underline{A} \cdot \vec{y}$, so ist die allgemeine Lösung $\vec{y}_{allg} = \underline{c_1\vec{v}_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 x}}$ wobei λ_1, λ_2 Eigenwerte und $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ Eigenvektoren von $\underline{A}$ sind.

Eigenvektoren sind nur bis auf ein Vielfaches eindeutig.

e) i) $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$, $\vec{v}_1 = \binom{1}{-3}$, $\vec{v}_2 = \binom{-1}{1}$, $\vec{y}_{allg} = c_1 \binom{1}{-3} e^{4x} + c_2 \binom{-1}{1} e^{2x}$;

ii) $\vec{y}_{allg} = c_1 \binom{1}{1} e^x + c_2 \binom{2}{1} e^{2x}$; iii) $\vec{y}_{allg} = c_1 \binom{2}{1} e^x + c_2 \binom{0}{1} e^{-x}$;

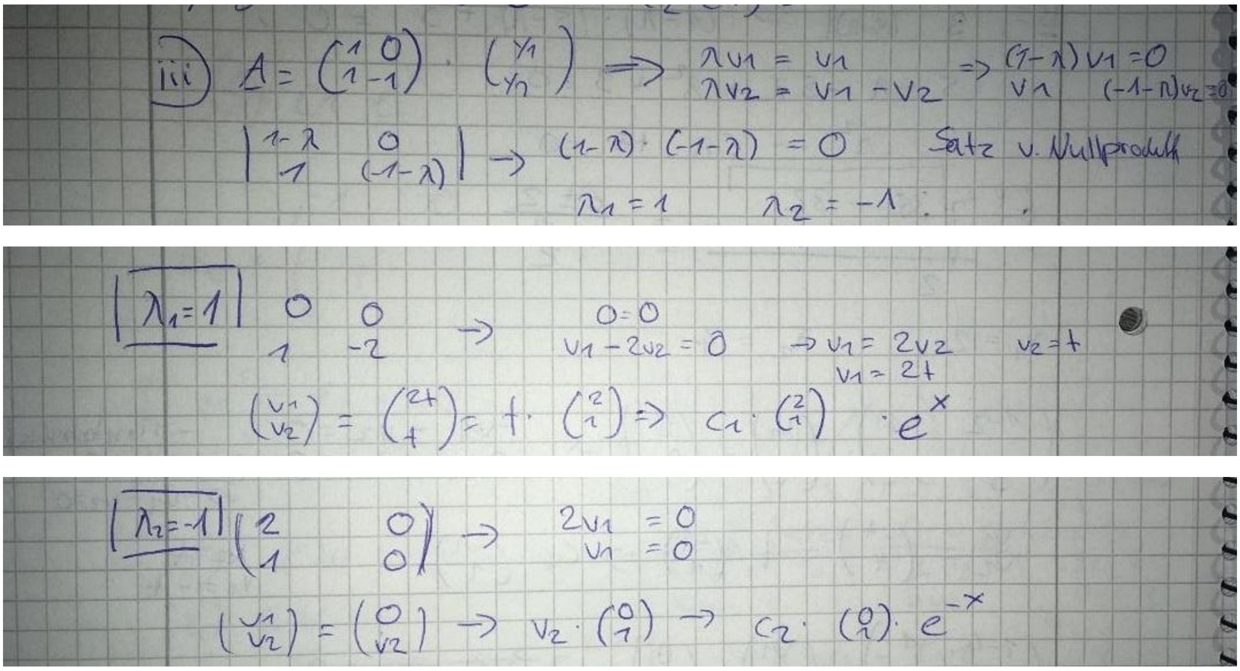


Abb. 390 Rg Matrixexponentialfunktion 205/528 e) iii). Danke an MLG siehe Ag 325/819 a)

iv) $\vec{y}_{allg} = c_1 \binom{-2}{3} e^{-4x} + c_2 \binom{1}{1} e^x$; v) $\vec{y}_{allg} = c_1 \binom{1}{-2} e^{-5x} + c_2 \binom{1}{1} e^{-2x}$;

vi) $\vec{y}_{allg} = c_1 \binom{4}{1} e^{6x} + c_2 \binom{-1}{1} e^x$;

e) VIII) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 8 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{System}} \begin{array}{l} y_1' = 5y_1 - 3y_2 \\ y_2' = 8y_1 - 5y_2 \end{array}$

Thx Jac Pat

① Entweder die este Gleichung nach y_2 oder die zweite Gleichung nach y_1 auflösen.

$3y_2 = 5y_1 - y_1' \iff y_2 = \frac{5}{3}y_1 - \frac{y_1'}{3}$

② Die aufgelöste Gleichung ableiten und in die andere Gleichung einsetzen.

$y_2' = \frac{5}{3}y_1' - \frac{y_1''}{3}$

$y_2' = 8y_1 - 5y_2$

$\cdot 3$

$\frac{5}{3}y_1' - \frac{y_1''}{3} = 8y_1 - 5\left(\frac{5}{3}y_1 - \frac{y_1'}{3}\right)$

③ $5y_1' - y_1'' = 24y_1 - 5(5y_1 - y_1')$ Dgl lösen

$5y_1' - y_1'' = 24y_1 - 25y_1 + 5y_1'$

$-y_1'' = -y_1 \iff y_1'' - y_1 = 0$

$\lambda^2 - 1 = 0$

$\lambda = \pm 1$

$y_1 = c_1e^x + c_2e^{-x}$

④ Die Lösung in die in ① erwähnte Gleichung einsetzen.

$y_2 = \frac{5}{3}y_1 - \frac{y_1'}{3}$

$y_2 = \frac{5}{3}(c_1e^x + c_2e^{-x}) - \frac{c_1e^x - c_2e^{-x}}{3}$

$= \frac{5}{3}c_1e^x + \frac{5}{3}c_2e^{-x} - \frac{c_1e^x}{3} + \frac{c_2e^{-x}}{3}$

$y_2 = \frac{4}{3}c_1e^x + 2c_2e^{-x}$

Lösung: $y_1 = c_1e^x + c_2e^{-x}$

$y_2 = \frac{4}{3}c_1e^x + 2c_2e^{-x}$

viii) $\vec{y}_{allg} = c_1 \binom{3}{4} e^x + c_2 \binom{1}{2} e^{-x}$; xiii) $\vec{y}_{allg} = c_1 \binom{1}{1} \cdot xe^{2x} + \binom{c_0+c_1}{c_0} \cdot e^{2x}$;

Aufg. 206/529: $x + 2y = 0$ ist ein <u>homogenes</u> LGS vom Typ: <u>1 Gl, 2 Unbek</u>. $y = t$, $x = -2t$, $\vec{x} = t \cdot \binom{-2}{1}$. a) Geometrisch entspricht die Lösung eines hLGS einer <u>Ursprungsgeraden</u>.

b+c) $\vec{x} = \binom{3}{0} + t \cdot \binom{-2}{1}$. Die Lösung eines ihLGS besteht aus einer speziellen (inhomogenen) Lösung (<u>Aufpunkt</u>) und aus der homogenen Lösung (<u>Richtungsvektor</u>). Die Lösungsmenge eines ihLGS ist also eine Gerade, die nicht durch den Ursprung geht.

d) Sei $x_3 = t$, dann ist $x_2 = -2t$ und $x_1 = t$. $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ löst das ihLGS; $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

e) Die Lösung der Dgl $y' + 2y = 0$ entspricht ebenfalls einer Ursprungsgeraden im Vektorraum aller Funktionen: $\underline{y = c \cdot e^{-2x}}$, wobei e^{-2x} deren Richtungsvektor ist.

f) Die ihlin Dgl $y' - y = 1$ hat die spezielle Lösung $y \equiv \underline{-1}$. $y_{allg} = -1 + c \cdot e^{1x}$.

Probe: $(-1 + c \cdot e^{1x})' = c \cdot e^x$; in die Dgl: $\begin{array}{ccccc} y' & - & y & = 1 & \\ c \cdot e^x & - & (-1 + c \cdot e^{1x}) & = 1 & \surd. \end{array}$

g) $y = -3 + c \cdot e^{2x}$, $y = -3 + c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot e^{-3x}$.

Aufg. 206/530: a) Zum Auffinden einer speziellen Lösung verwenden Sie den Ansatz $y_{sp} = \underline{ax + b}$. $y_{hom} = c \cdot e^{3x}$. $y = ax + b$ in die Dgl eingesetzt ergibt:

$$\begin{array}{ccccccc} y' & - & 3y & = & 3x & + & -4 \\ a & - & 3(ax + b) & = & -3ax & + & a - 3b \quad \text{(ausmultipliziert und angeordnet)} \end{array}$$

Koeffizientenvergleich ergibt ein LGS: $\begin{array}{c} 3 = -3a \\ -4 = a - 3b \end{array}$ also $a = -1$ und $b = 1$.

Damit ist $y_{sp} = -x + 1$ und $y_{allg} = -x + 1 + c \cdot e^{3x}$.

b) $y_{allg} = -x + 1 + c \cdot e^{3x}$ in die Dgl ergibt (das mit den verschiedenen Farben müssen Sie sich denken):

$$\begin{array}{cccc} y' & -\,3y & & = 3x - 4 \\ -1 + 3c \cdot e^{3x} & -\,3(-x + 1 + c \cdot e^{3x}) & = -1 - (-3x + 3) + 3c \cdot e^{3x} - 3c \cdot e^{3x} & = 3x - 4 \quad (+0)\ \surd \end{array}$$

c) Bei der Probe wird die homogene Lösung zu $\underline{0}$ und die spezielle Lösung zu $\underline{3x - 4 \text{ bzw. } f(x)}$.

d) i) $y_{allg} = 2x + 4 + c \cdot e^{-2x}$; ii) $y_{allg} = 3x - 2 + c \cdot e^{4x}$; iii) $y_{allg} = x + 1 + c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$;

iv) $y_h = c \cdot e^x$; Ansatz: $y_{sp} = ax^2 + bx + c$; $y'_{sp} = 2ax + b$ in Dgl $y' - y \equiv x^2$:

$$2ax + b - (ax^2 + bx + c) = -ax^2 + (2a - b)x + b - c \equiv x^2 + 0x + 0$$

$\Leftrightarrow (-a = 1;\ 2a - b = 0;\ b - c = 0) \Leftrightarrow (a = -1;\ b = -2;\ c = -2) \Leftrightarrow y_{sp} = -x^2 - 2x - 2$;

Probe: $y'_{sp} - y_{sp} = -2x - 2 - (-x^2 - 2x - 2) = -2x - 2 + x^2 + 2x + 2 = x^2 \surd$;

v) $y_{allg} = x^2 + c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$; vi) $y_{allg} = x^2 + x + c_1 e^x + c_2 e^{3x}$; viii) $y_{allg} = x^2 + c \cdot e^{0x}$;

Aufg. 206/531:

a) $y_{allg} = e^x + c \cdot e^{0.5x}$; b) $y_{allg} = -e^{2x} + c \cdot e^{3x}$; c) $y_{allg} = 0.5e^{4x} + c \cdot e^{2x}$;

d) Eine spezielle Lösung einer ihlDgl $y' + ky = f(x)$ kann mit dem Ansatz $y_{sp} = \underline{a \cdot f(x)}$ geraten werden. e) i) $y_{allg} = -0.5e^{2x} + c \cdot e^{4x}$; ii) $y_{allg} = 2e^{2x} + c \cdot e^{-2x}$;

iii) y_{sp} kann nicht mit dem Ansatz $y_{sp} = a \cdot \sin(x)$ gefunden werden, weil die Gleichung $a\cos(x) + a\sin(x) = 2\sin(x)$ entsteht. Vielmehr muss der Ansatz $y_{sp} = a \cdot \sin(x) + b \cdot \cos(x)$ verwendet werden. Dieser führt auf das LGS $a + b = 0$ und $a - b = 2$ und damit auf $y_{sp} = 1 \cdot \sin(x) + (-1) \cdot \cos(x)$. Damit ist $y_{allg} = \sin(x) - \cos(x) + c \cdot e^{-x}$.

iv) $y_{allg} = \cos(x) + c \cdot e^{-2x}$; v) $y_{allg} = \sin(x) + (c_1 x + c_2) \cdot e^{-x}$;

vi) $y' + 4y = e^x + 8 \Rightarrow y_{hom} = c \cdot e^{-4x}$; Separationsansatz $y' + 4y = e^x$:

Ansatz: $y'_{Sp1} = (b \cdot e^x)' = b \cdot e^x$ in Dgl: $b \cdot e^x + 4b \cdot e^x = 1 \cdot e^x \to b = 0.2$; $y' + 4y = 8$:

Ansatz: $y_{Sp2} = a$ in Dgl: $0 + 4a = 8 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow y_{allg} = c \cdot e^{-4x} + 0.2 \cdot e^x + 2$.

vii) $y' - 3y = e^{2x} - 12 \Rightarrow y_{hom} = c \cdot e^{3x}$; Separationsansatz: $y' - 3y = e^{2x}$:

Ansatz: $y'_{Sp1} = (b \cdot e^{2x})' = 2b \cdot e^{2x}$ in Dgl: $2b \cdot e^{2x} - 3(b \cdot e^{2x}) = e^{2x} \Rightarrow b = -1$;

Ansatz: $y'_{Sp2} = a$ in Dgl: $-3a = -12 \Rightarrow y_{Sp2} = 4$;

$\Rightarrow y_{allg} = c \cdot e^{3x} - e^{2x} + 4.$

viii) $y_{allg} = c + 0.5 \cdot e^{2x} + x;\quad (e^{0x} = 1)$ **ix)** $y_{allg} = c \cdot e^{-x} + \sin(x) - \cos(x) + x - 1;$

f) i) $y' = k \Leftrightarrow y = kx + c$, ii) $y' = ky \Leftrightarrow y = c \cdot e^{kx}$,

iii) $y' = S - ky \Leftrightarrow y' + ky = kS$, $y_h = c \cdot e^{-kx}$, $y_{sp} = S \Rightarrow y_{allg} = S + c \cdot e^{-kx}$,

iv) Logistisches Wachstum: PBZ=Partialbruchzerlegung, TdV= Trennung der Variablen

$y' = ky(S-y) \overset{TdV}{\Longleftrightarrow} \frac{y'}{y(S-y)} = k \overset{int}{\Longleftrightarrow} \int \frac{y'}{y(S-y)}dx = \int kdx \overset{SR}{\Longleftrightarrow} \int \frac{dy}{y(S-y)} = kx + \tilde{c};$

PBZ: $\frac{1}{y(S-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{S-y} \Leftrightarrow 1 = A(S-y) + By;$ $y = 0$: $1 = A \cdot S + B \cdot 0 \Leftrightarrow A = \frac{1}{S};$

$y = S$: $1 = A(S-S) + B \cdot S \Leftrightarrow \frac{1}{S} = B;$ $\Rightarrow \frac{1}{y(S-y)} = \frac{1}{Sy} + \frac{1}{S(S-y)}$

Integral: $\frac{1}{S}\int(\frac{1}{y} + \frac{1}{S-y})dy = \frac{\ln|y|}{S} - \frac{\ln|S-y|}{S} = \frac{1}{S}\ln(\frac{|y|}{|S-y|});$

$\int \frac{dy}{y(S-y)} = kx + \tilde{c} \Leftrightarrow \frac{1}{S} \cdot \ln\left|\frac{y}{S-y}\right| = kx + \tilde{c} \overset{\exp}{\Longleftrightarrow} \frac{y}{S-y} = \pm e^{\tilde{c}\cdot S} \cdot e^{Skx}$ mit ($c' = \pm e^{\tilde{c}\cdot S}$ oder 0)

$\overset{y \text{ gekürzt}}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{\frac{S}{y}-1} = c' \cdot e^{Skx} \overset{\cdot(\frac{S}{y}-1)}{\Longleftrightarrow} 1 = (\frac{S}{y}-1)\cdot c' \cdot e^{kSx} \overset{:(c'\cdot e^{Sx})}{\Longleftrightarrow} c \cdot e^{-Skx} = \frac{S}{y} - 1 \overset{+1,\cdot y}{\Longleftrightarrow} y \cdot (c \cdot e^{-kSx} + 1) = S$

$\Leftrightarrow y = \frac{S}{c\cdot e^{-Skx}+1};\quad c = \frac{1}{c'}.$

Aufg. 207/532: a) Aus der rekursiven Darstellung des exp. Wt $B(t+1) - B(t) = k \cdot B(t)$ haben wir die explizite Darstellung $B(t) = \underline{c \cdot (1+k)^t}$ (Klasse 10) und $f(x) = \underline{c \cdot e^{k\cdot t}}$ (Klasse 12) hergeleitet.

$k = 0.01$: $B(t) = c \cdot (1+k)^t = c \cdot (1.01)^t = c \cdot e^{\ln(1.01)t} \approx e^{0.00995t}$ (Klasse 10), $f(x) = c \cdot e^{0.01t}$ (Klasse 12). Die Funktionen sind für den Physiker identisch aber für den Mathematiker verschieden.

$k = 1$: $B(t) = c \cdot (1+k)^t = c \cdot (1+1)^t = c \cdot 2^t$ (Klasse 10), $f(x) = c \cdot e^{1\cdot t} = c \cdot e^t$ (Klasse 12). Die Funktionen sind für beide Parteien verschieden.

b) $B(t+\frac{1}{2}) - B(t) = \frac{k}{2} \cdot B(t) \rightarrow B(t+\frac{1}{2}) - B(t) = \frac{\boxed{k_2}}{2} \cdot B(t)$; Die Änderungsrate ist zwar konstant aber (eben) mit einer anderen Konstanten (hier k_2); verallgemeinert: $B(t+\frac{1}{n}) - B(t) = \frac{k_n}{n} \cdot B(t)$;

c) Berechnen Sie k_2 (k_n) abhängig von k_1. Dazu berechnen Sie $B(t+1)$ mit zwei Zeitschritten mit Schrittweite 0.5. Dabei ist $B(t+\frac{1}{2}) = (\underline{1} + \frac{k_2}{2}) \cdot B(t)$ und $B(t+1) = (\underline{1 + \frac{k_2}{2}}) \cdot B(t+\frac{1}{2})$;

$B(t+1) = (1+\frac{k_2}{2}) \cdot B(t+\frac{1}{2}) = (1+\frac{k_2}{2}) \cdot (1+\frac{k_2}{2}) \cdot B(t) = (1+\frac{k_2}{2})^2 \cdot B(t).$

Damit ist $k_1 = (1+\frac{k_2}{2})^2 - 1$. Verallgemeinert: $B(t+1) = (1+\frac{k_n}{n})^n \cdot B(t)$; $k_1 = (1+\frac{k_n}{n})^n - 1$.

d) $k_1 = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{k_n}{n})^n - 1 = e^k - 1$ also ist $k = \ln(k_1+1)$. Für kleine k_1 ist $\ln(k_1+1) \approx k_1$, also $k = k_1$.

Beim Bänkerschockbeispiel brauchen wir bei zwei (n) Zeitschritten einen Faktor 2: $q^2 = 2 \Leftrightarrow q = (\pm)\sqrt{2}$ bzw. ($q^n = 2 \Leftrightarrow q = \sqrt[n]{2}$, falls $q \geq 0$)

oder eben einen Zins von $\sqrt{2} = 1 + \frac{k_2}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot (\sqrt{2}-1) = k_2$, bzw. $k_n = n \cdot (\sqrt[n]{2} - 1)$. Beim falschen Ansatz wird dort wird $k_n = \frac{1}{n}$ angenommen.

Aufg. 207/533: a) Der Ansatz $y_{sp} = a \cdot e^{-2x}$ funktioniert nicht.

b) Es gilt $f(x) = \underline{y_{hom}} = e^{-2x}$; dieser Fall Resonanz.

c) $y_{sp} = g(x) \cdot e^{-2x} \Rightarrow y'_{sp} = g' \cdot e^{-2x} - 2ge^{-2x}$; in die Dgl eingesetzt:

$$\begin{array}{ccccc} y' & + & 2y & & = e^{-2x} \\ g' \cdot e^{-2x} - 2g\, e^{-2x} & + & 2g\, e^{-2x} & = \quad g' \cdot e^{-2x} & = e^{-2x} \end{array}$$

$\Leftrightarrow g' = 1 \Leftrightarrow g(x) = x + c \Leftrightarrow y_{sp} = (x + c) \cdot e^{-2x} = y_{allg}$.

d) Das Prinzip vom Kaugummiautomaten gilt wieder nicht.

spezielle Lösung:

$y_{sp} = g(x) \cdot y_{hom} = g(x) \cdot e^{-0,5x}$

$y'_{sp} = g'(x) \cdot e^{-0,5x} - 0,5\, g(x) \cdot e^{-0,5x}$

$2y'_{sp} + y_{sp} = -0,25\, e^{-0,5x}$

$2(g'(x) \cdot e^{-0,5x} - 0,5\, g(x) \cdot e^{-0,5x}) + g(x) \cdot e^{-0,5x} = -0,25\, e^{-0,5x}$

$2g'(x) \cdot e^{-0,5x} - g(x) \cdot e^{-0,5x} + g(x) \cdot e^{-0,5x} = -0,25\, e^{-0,5x}$

$2g'(x) \cdot e^{-0,5x} = -0,25\, e^{-0,5x} \quad | : e^{-0,5x}$

$2g'(x) = -0,25$

$g'(x) = -0,125$

$g(x) = -0,125\, x + c$

$\Rightarrow y_{allg} = (-0,125\, x + c)\, e^{-0,5x}$

Abb. 391 Rechnung Variation der Konstanten

e) i) $y_{allg} = (3x + c)e^{3x}$; ii) $y_{allg} = (0.125x + c)e^{-0.5x}$; (Rg Abb. 707/391) iii) $y_{allg} = (x + c)e^{0.4x}$;

Aufg. 207/534: a) Die Variablen x und y werden getrennt. b) $y' \cdot dx = dy$ (äußere Substitution). c) Lösen Sie die Gleichung nach $\underline{y}$ auf.

Beachten Sie, dass $y \neq 0$ sein muss, weil durch y geteilt wurde.

$\int \frac{y'}{y} dx = \int x dx \overset{Subst}{\Longleftrightarrow} \int \frac{dy}{y} = \frac{x^2}{2} + c \Leftrightarrow \ln|y| = \frac{x^2}{2} + c \overset{e^{\cdot}}{\Leftrightarrow} |y| = e^{\frac{x^2}{2}+c} \Leftrightarrow |y| = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^c \Leftrightarrow y = \tilde{c} \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$. Aus $\pm c \in \mathbb{R}$ und $c = 0$ wird $\tilde{c} \in \mathbb{R}$.

d) i) x und y werden getrennt, so dass links ein Term der Form $\underline{y'} \cdot g(y)$ und rechts $f(x)$ steht.
ii) Integrieren Sie $d\underline{x}$ und wenden Sie die Substitionstegel $\underline{y' \cdot dx = dy}$ an.
iii) Lösen Sie die Integrale ($\underline{c}$ nicht vergessen) und lösen Sie nach $\underline{y}$ auf.

e) i) $y = \frac{x^2}{2} + x + c$, ii) $y = 3 + c \cdot e^{-0.5x}$, iii) $y = c \cdot (x - 1)^2$, iv) $y = c \cdot \sqrt{2x - 1}$, v) $y = c \cdot (x - 2)$, vi) $y = c \cdot (2x - 1)$, vii) $y = c \cdot (x + 1) \cdot e^{-x}$, viii) $y = \frac{1}{c+x-\ln|x+1|}$.

Lösen Sie $y' - \frac{x}{y^2} = 0 \quad | \cdot y^2$

$y' y^2 - x = 0$

$\int y' y^2 dx = \int x\, dx$ (SR)

$\int y^2 dy = x^2/2 + c$

$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} + c$

$y^3 = \frac{3}{2} x^2 + \tilde{c}$

$y = \sqrt[3]{\frac{3}{2} x^2 + \tilde{c}}$

allg Lösung

f) ii) $y = c \cdot e^{\sin(x)}$; iii) $y = \frac{1}{\cos(x) - c}$; oder $y \equiv 0$

e3) $y' - y^2 \sin x = 0 \iff y' = y^2 \sin x \quad | : y^2$

$$\int \frac{y'}{y^2}\, dx = \int \sin x \, dx \overset{SR}{\iff} \int \frac{dy}{y^2} = -\cos x + c.$$

$$\iff \int y^{-2}\, dy = \frac{y^{-1}}{-1} = -\cos x + c \overset{(-1)}{\iff} \frac{1}{y} = \cos x - c \iff y = \frac{1}{(\cos x) - c}$$

iv) $y = c \cdot \sqrt{|2x-1|}$; v) $y = c \cdot xe^x$,

vi) $y = 2 - \ln(-x^2/2 - c)$, (nur definiert für $c < 0$ und für $x^2/2 < -c$);

vii) $\frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + c$; $y = \sqrt[3]{x^3 + 3c}$ Für alle y gilt $y' \geq 0$

viii) $y' = x^2 \cdot y$; $\Rightarrow y = d \cdot e^{\frac{x^3}{3}}$.

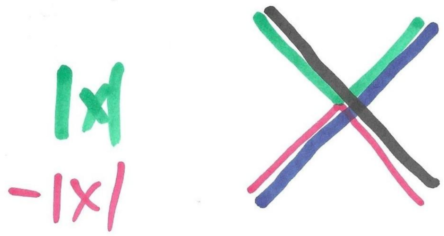
$$xy' - (x+1)y = c \iff xy' = (x+1)y \overset{x(y \neq 0)}{\iff} \int \frac{y'}{y}\, dx = \int \frac{x+1}{x}\, dx$$

$$\overset{SR}{\iff} \int \frac{dy}{y} = \int \left(\frac{x}{x} + \frac{1}{x}\right) dx \iff \ln|y| = x + \ln|x| + c$$

$$\overset{e^{\cdot}}{\iff} |y| = e^{x + \ln|x| + c} \overset{|.| \to \pm}{\iff} y = e^{x + \ln|x|} \cdot \tilde{c}$$

$$\iff y = e^x \cdot e^{\ln|x|} \cdot \tilde{c} = |x| \cdot e^x \cdot \tilde{c}$$

$$|.| \to \pm \quad \xrightarrow{?} \quad y = xe^x \cdot \tilde{\tilde{c}} \quad \tilde{\tilde{c}} \to c$$



in Dgl $y' = (e^x + xe^x) \cdot c$

$xy' = (x+1)\, y$

$x(e^x + xe^x) \cdot \cancel{c} = (x+1)\, xe^x \cdot \cancel{c}$

✓ $0 = 0$ ✓

$$y' = x e^{y-2} \Leftrightarrow \int \frac{y'}{e^{y-2}}\,dx = \int x\,dx \Leftrightarrow \int y' \cdot e^{2-y}\,dx = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\overset{SR}{=} \int e^{2-y}\,dy = \frac{x^2}{2} + c \Leftrightarrow \frac{e^{2-y}}{-1} = \frac{x^2}{2} + c$$

$$e^{2-y} = \frac{-x^2}{2} - c \Leftrightarrow 2-y = \ln\left(\frac{-x^2}{2} - c\right)$$

$$\Leftrightarrow y = 2 - \ln\left(\frac{-x^2}{2} - c\right)$$

ist nur definiert, falls $C < 0$ und $-C > \frac{+x^2}{2}$

15.9 LöVo von Kapitel 9: Die Geometrie der Mittelstufe

15.9.1 LöVo zu Einheit 9.1 (Geometrie: Kongruenz UE 8_4) Seite 709-742

Aufg. 225/535: a) Gruppe 1: 1,2,4,7; Gruppe 2: 3,5,8,9; Gruppe 3: 7;

b) Zwei Dreiecke sind kongruent deckungsgleich, wenn man diese durch eine Kombination der Abbildungen Drehung, Verschiebung und Achsenspiegelung aufeinander abbilden kann. Kongruente Dreiecke sehen gleich aus, sind aber (eventuell) an verschiedenen Orten.

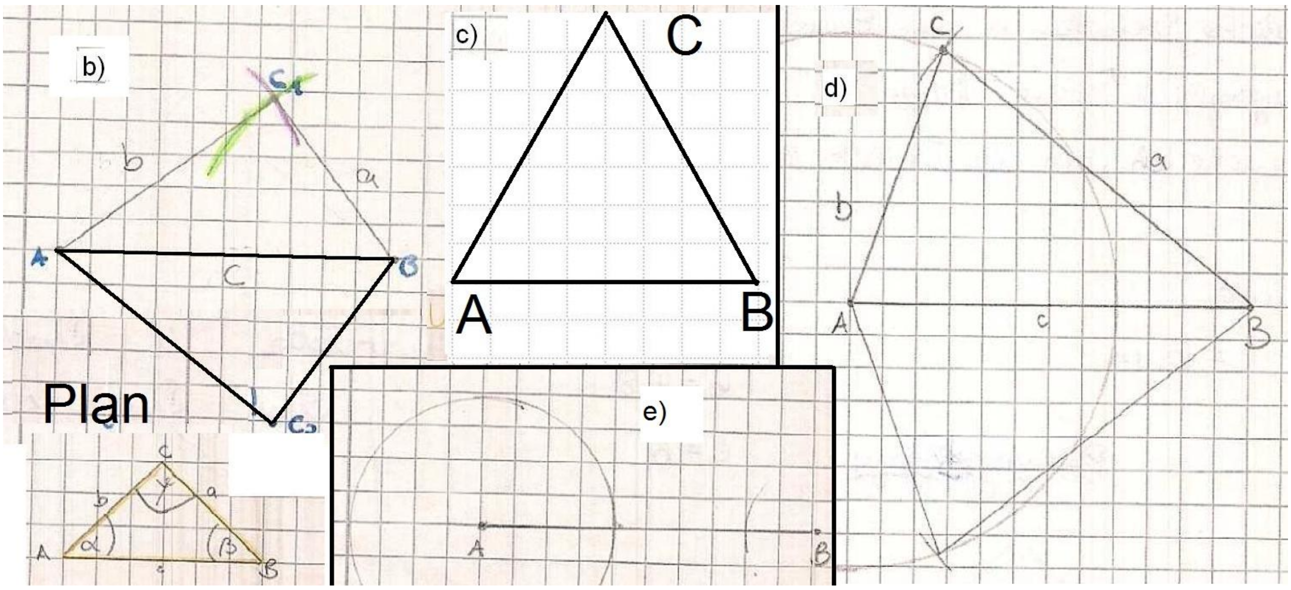


Abb. 392 SSS - Konstruktion

Aufg. 225/536: a) Wie lautet die Menge aller Punkte, die zu einem Gegebenen Punkt M den gleichen Abstand r haben? Kreis um M mit Radius r.

b) Der Punkt C liegt auf einem Kreis K_1 um A, $r = 4$, weil $\overline{AC} = b = 4cm$. Der Punkt C liegt auch auf einem Kreis K_2 um B, $r = 5$, weil $\overline{BC} = 3cm$. Schneiden Sie K_1 und K_2.

Eine Dreieckskonstruktion braucht sichtbare Hilfslinien. Exemplarisch ist die Beschreibung von a) aufgeführt. (Abb. 392)

1) Zeichne $\overline{AB} = c = 5cm$.

2) Zeichne Kreis K_1 um A mit $r = 4cm$.

3) Zeichne Kreis K_2 um B mit $r = 3cm$.

4) $c_{1,2} = K_1 \cap K_2$.

5) Verbinde A, B und C.

ΔABC_2 hat die falsche Orientierung und ist kongruent zum Dreieck ΔABC_1. d) ist nicht konstruierbar.

Aufg. 226/537: a) Durch Konstruktion haben wir in Aufgabe 536 festgestellt, dass zwei Dreiecke übereinstimmen (kongruent sind), wenn sie in allen Seiten übereinstimmen. Mann nennt diesen Kongruenzsatz sss. Ein Dreieck hat noch Winkel (und mehr).

b) Die Konstruktion könnte die Seitenlängen $a = 3cm, b = 4cm$ und $c = 5cm$ haben aber auch beliebige Vielfache dieser Zahlen. Die Ergebnisse sind nicht (unbedingt) kongruent.

c) Im Teil b) haben wir gesehen, dass www kein Kongruenzsatz ist, weil es mehrere verschiedene Dreiecke mit $\alpha = 36.9°$, $\beta = 53.1°$ und $\gamma = 90°$ gibt. Nach dem Satz über die Winkelsumme errechnet sich der dritte Winkel aus den ersten beiden Winkeln. Statt eines Winkels benötigen wir eine Seite. wsw könnte ein weiterer Kongruenzsatz sein. d) sws

Aufg. 226/538: Konstruktionsbeschreibung:

a) (1) Zeichne $c = \overline{AB} = 6cm$.
(2) Zeichne freien Schenkel b mit Anfangspunkt A und $\sphericalangle\,(c; b) = 30°$.
(3) Zeichne freien Schenkel a mit Anfangspunkt B und $\sphericalangle\,(a; c) = 60°$.
(4) $C = b \cap a$ ($\cap$ heißt 'geschnitten mit').

b) (1) $\beta = 180° - \alpha - \gamma = 70°$ (die kann auch konstruktiv gelöst werden).
(2) Zeichne $c = \overline{AB} = 5cm$.
(3) Zeichne freien Schenkel b mit Anfangspunkt A und $\sphericalangle\,(c; b) = 40°$.
(4) Zeichne freien Schenkel a mit Anfangspunkt B und $\sphericalangle\,(a; c) = 70°$.
(5) $C = b \cap a$.

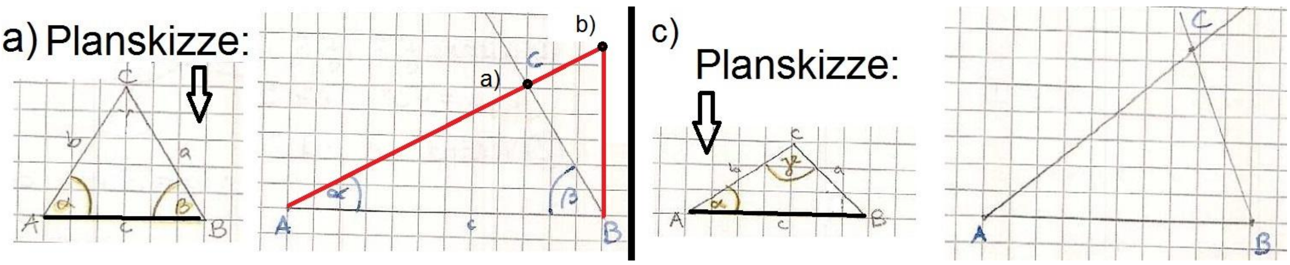


Abb. 393 WSW und SWW - Konstruktion

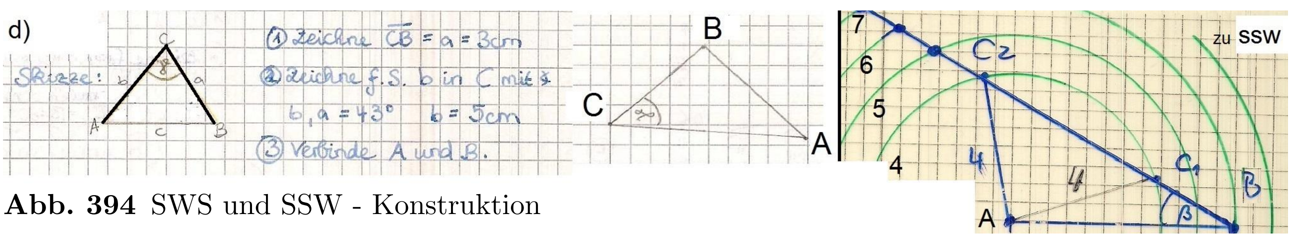


Abb. 394 SWS und SSW - Konstruktion

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und in den anliegenden Winkeln übereinstimmen. Dieser Kongruenzsatz heißt wsw. (Abb. 393)

Zwei Dreiecke sind auch kongruent, wenn sie in einer Seite und einem (anliegenden) Winkel und dem gegenüberliegenden Winkel der gegebenen Seite übereinstimmen. Dieser Kongruenzsatz heißt sww.

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und in dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen. Dieser Kongruenzsatz heißt sws. (Abb. 394) e) Abb. 395

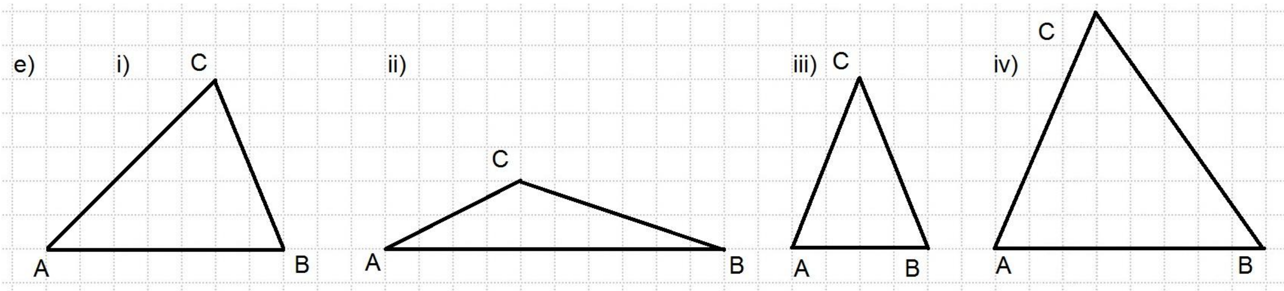


Abb. 395 SWW - Konstruktionen

Aufg. 227/539: Es gibt zwei Dreiecke des Typs a). e) mehrdeutig: $3 < b < 6$, eindeutig: b ≥ 6 oder $b = 3$, unmöglich: $b < 3$. Die Eindeutigkeit von $b = 3$ kann über die Tangenteneigenschaft ($a \perp b$) und die Eigenschaft 'halbes gleichseitiges Dreieck' bewiesen werden.

f) Was hat der Bereich $b \geq 6$ mit dem Aufgabentext zu tun? Für $b \geq 6$ ist b die längere (gegebene) Seite des Dreiecks.

g) Der Kongruenzsatz Ssw: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und im gegenüberliegenden Winkel der größeren Seite übereinstimmen. (Abb. 394 und 396)

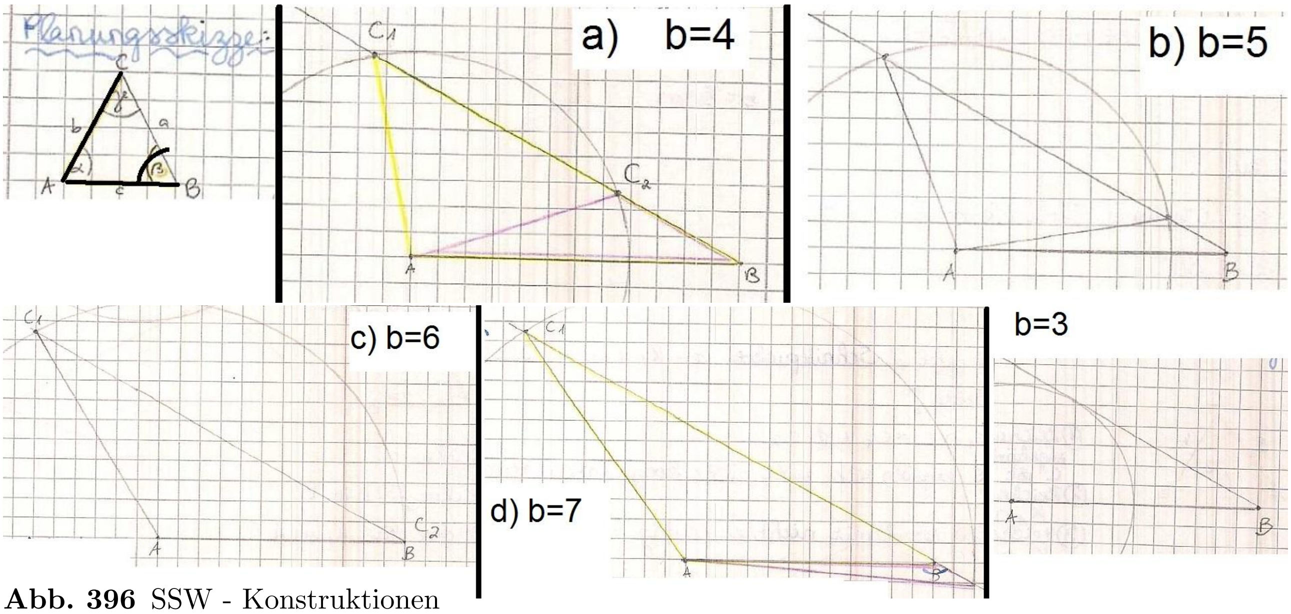


Abb. 396 SSW - Konstruktionen

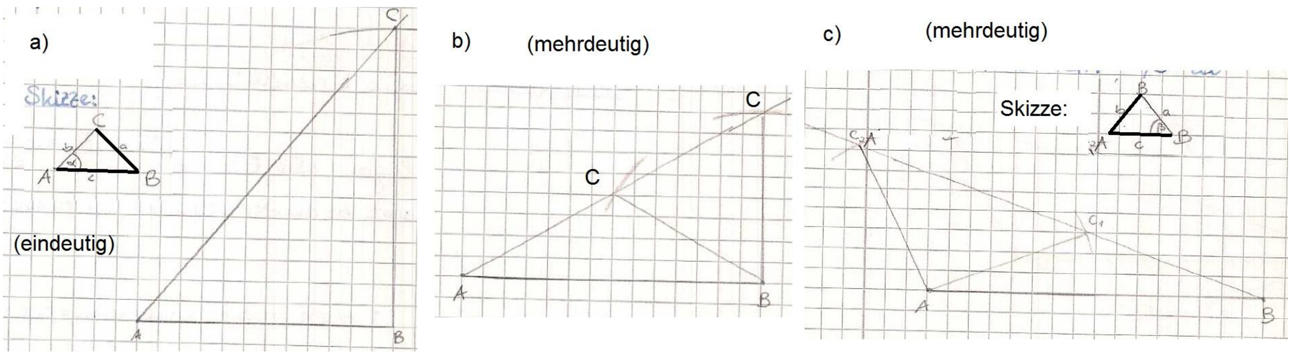


Abb. 397 SSW - Konstruktionen

Aufg. 227/540: Konstruktionsbeschreibung exemplarisch für a):

(1) Zeichne $\overline{AB} = c = 6cm$.

(2) Zeichne freien Schenkel b mit Anfangspunkt A und $\sphericalangle\,(c; a) = 50°$.

(3) Zeichne Kreis K um B mit $r = a = 7cm$.

(4) $C = K \cap a$ (Abb. 397)

Aufg. 227/541: a) Entweder $4.5m$ oder $9.15m$ (es wird wohl nicht dieses Dach sein).

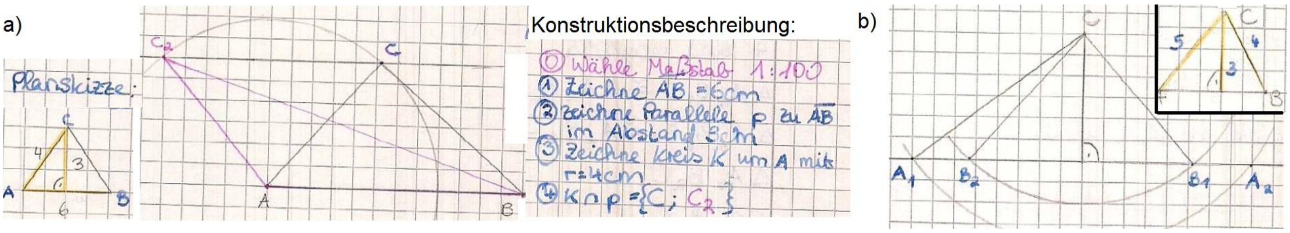


Abb. 398 Konstruktion mit gegebener Höhe

c) Sind bei einem Dreieck zwei Seiten und eine Höhe gegeben, dann kann es nicht eindeutig konstruiert werden. Die Höhe wird als Parallelenpaar interpretiert. (Abb. 398)

Aufg. 227/542: a) Auf dem Umkreis liegen alle Eckpunkte eines Dreiecks $\Delta A, B, C$. Der Mittelpunkt wird konstruiert als Schnittpunkt aller Mittelsenkrechten. Konstruktionsbeschreibung von b):

(1) Wähle M und zeichne Kreis K_1 um M mit Radius $r = 6cm$.

(2) Wähle A auf K. Zeichne K_2 um A mit $r = c = 8cm$. $K_2 \cap K_1 = B$.
Es gibt i.A. zwei Schnittpunkte $K_2 \cap K_1$ - die Ergebnisse sind aber nicht (unbedingt) kongruent.

(3) Zeichne Kreis K_3 um B mit Radius $r = a = 4cm$. $K_3 \cap K_1 = C_1, C_2$ (Abb. 399)

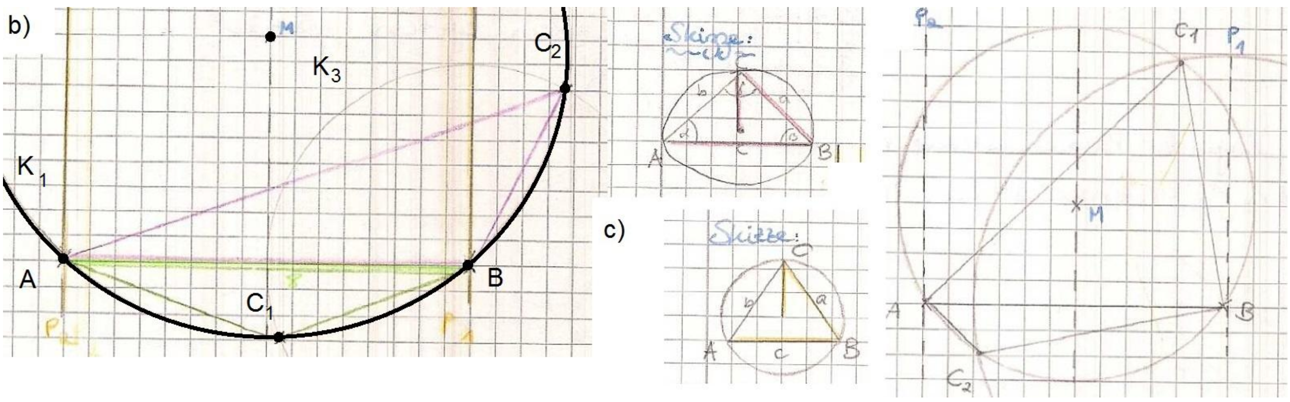


Abb. 399 Konstruktion mit gegebenem Umkreis

Aufg. 227/543:

(auch andere Dreieck können stimmen);

a) ΔACG

c) ΔACS (Abb. 400 und 401)

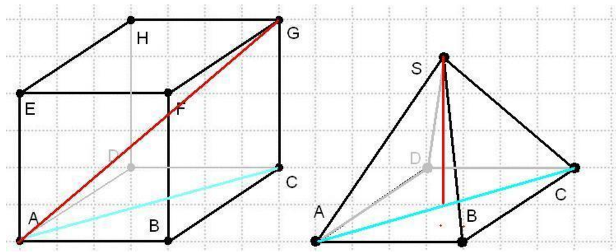


Abb. 400 Rechtwinklige Dreiecke in Würfel und Pyramide

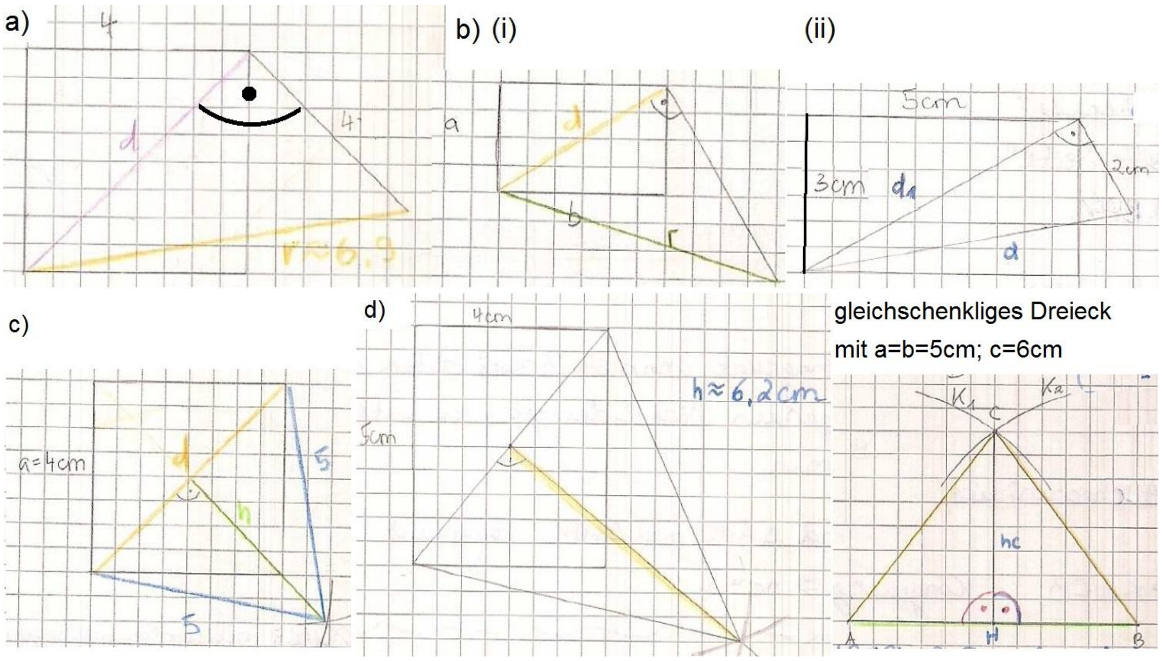


Abb. 401 Konstruktion wahrer Längen im Raum

Aufg. 227/544: b) Die Kreise schneiden sich nicht;

c) $a + b < c$ und $b + c < a$ und $a + c < b$; Bei Gleichheit entsteht auch kein Dreieck.

d) Da die Winkelsumme im Dreieck 180° ist, und jeder Winkel größer 0° sein muss, muss $\alpha + \beta < 180°$ gelten, was hier nicht der Fall ist.

e) Da die Höhe immer kleiner oder gleich der anliegenden Seiten sein muss, ist dieses Dreieck nicht konstruierbar.

f) Kreis und freier Schenkel schneiden sich nicht. (Abb. 402)

g) In diesem Dreieck ist max $\alpha = 90°$ möglich.

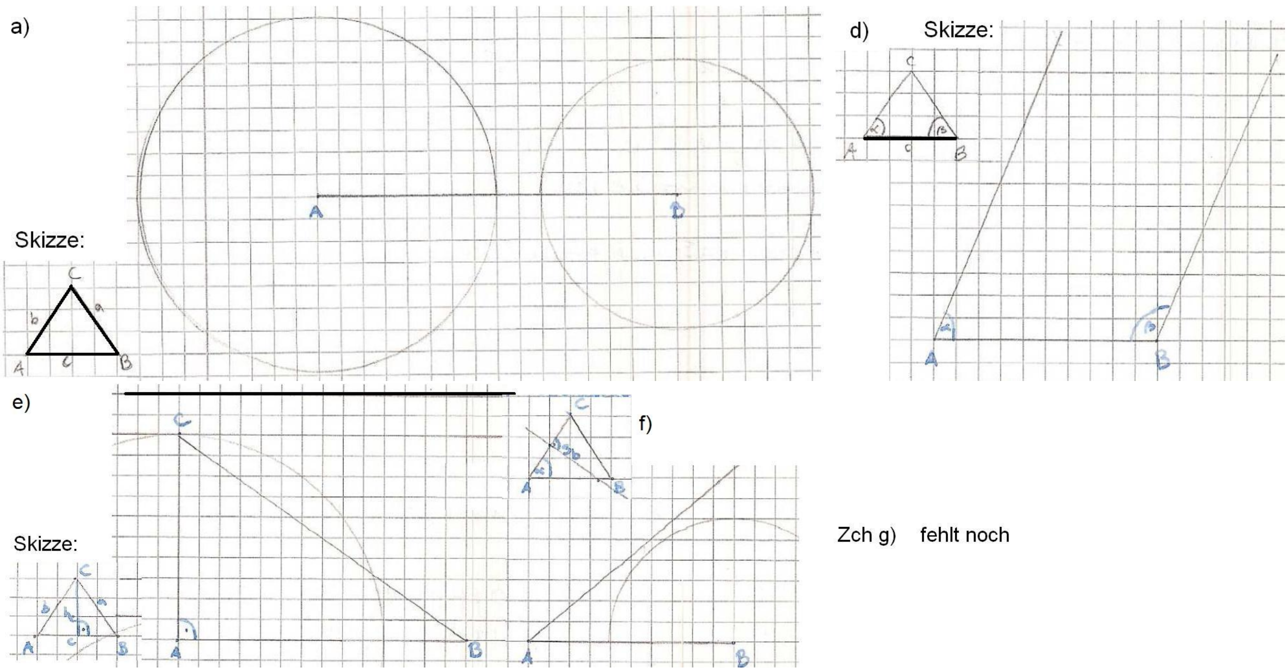


Abb. 402 Unmögliche Vorgaben für Dreiecke

Aufg. 228/545: Ein gleichschenkliges Dreieck ist ein Dreieck mit zwei gleichlangen Seiten. Die dritte Seite heißt Basis. Ein Satz ist eine beweisbare Aussage.

b) Es sind drei Dreiecke: $\Delta A, B, C$; $\Delta A, H, C$ und $\Delta H, B, C$.

c) $\Delta A, H, C$ und $\Delta H, B, C$ sind kongruent nach sss: $\overline{AC} = \overline{BC}$ (gleichschenkliges Dreieck), $\overline{AH} = \overline{BH}$ (H ist die Mitte von $\overline{AB}$), und die Seite $\overline{CH}$ kommt in beiden Dreiecken vor.

d) (i): $\Delta A, H, C \cong \Delta H, B, C \Rightarrow \sphericalangle\,(A, C, H) = \sphericalangle\,(H, C, B) \Leftrightarrow s_c = w_\gamma$;

(ii): $\sphericalangle\,(H, A, C) = \sphericalangle\,(C, B, H) \Leftrightarrow \alpha = \beta$;

(iii) und (iv): $\sphericalangle\,(C, H, A) = \sphericalangle\,(B, H, C)$ weil B, H und C auf einer Strecke liegen,
ist $\sphericalangle\,(C, H, A) + \sphericalangle\,(B, H, C) = 180°$, also $\sphericalangle\,(C, H, A) = 90°$, damit ist $s_c = h_c = m_c$;

Im gleichschenkligen Dreieck sind also die Höhe, die Seitenhalbierende, die Winkelhalbierende und die Mittelsenkrechte auf die Basis gleich.

Aufg. 228/546: a) sws: $(\overline{AH}, 90°, \overline{HC})$; b) wsw: $(90°, \overline{HC}, \frac{\gamma}{2})$; c) wws: $(\alpha, 90°, \overline{HC})$;

Aufg. 228/547: In gleichschenkligen Dreieck gilt $\alpha = \beta$. a) Es seien M_a die Mitte von a und M_b die Mitte von b, dann sind $\Delta A, B, M_a$ und $\Delta A, B, M_b$ nach sws kongruent $\Rightarrow \overline{AM_a} = s_a = s_b = \overline{AM_b}$.

b) Es seien $W_a = w_\alpha \cap a$ und $W_b = w_\beta \cap b$, dann sind $\Delta A, B, W_a$ und $\Delta A, B, W_b$ nach wsw kongruent $\Rightarrow \overline{AW_a} = w_\alpha = w_\beta = \overline{AW_b}$.
c) Es seien $H_a = h_a \cap a$ und $H_b = h_b \cap b$, dann sind $\Delta A, H_a, C$ und $\Delta B, W_b, C$ nach wws kongruent $\Rightarrow \overline{AH_a} = h_a = h_b = \overline{AH_b}$.
d) $\Delta D, A, C \cong \Delta B, E, C$ nach sws. (Abb. 403)
e) Zuerst zeigen wir, dass $\alpha = \beta$ ist: Bei einem gleichschenkligen Trapez sind die Höhen $\overline{DH_1}$ und $\overline{CH_2}$ gleich lang, weil $\overline{AB}||\overline{CD}$ damit sind $\Delta A, H_1, D \cong \Delta H_2, B, C$, also $\alpha = \beta$.

(i) $\Delta A, B, C \cong \Delta A, B, D$ nach sws, damit gilt $\overline{AC} = \overline{BD}$;
(ii) $\Delta A, C, D \cong \Delta B, C, D$ nach sss, damit gilt $\sphericalangle\,(C, A, D) = \sphericalangle\,(C, B, D)$;
(iii) $\Delta A, E, D \cong \Delta B, C, E$ nach sww, weil $\sphericalangle\,(D, E, A) = \sphericalangle\,(B, E, C)$ (Scheitelwinkel);

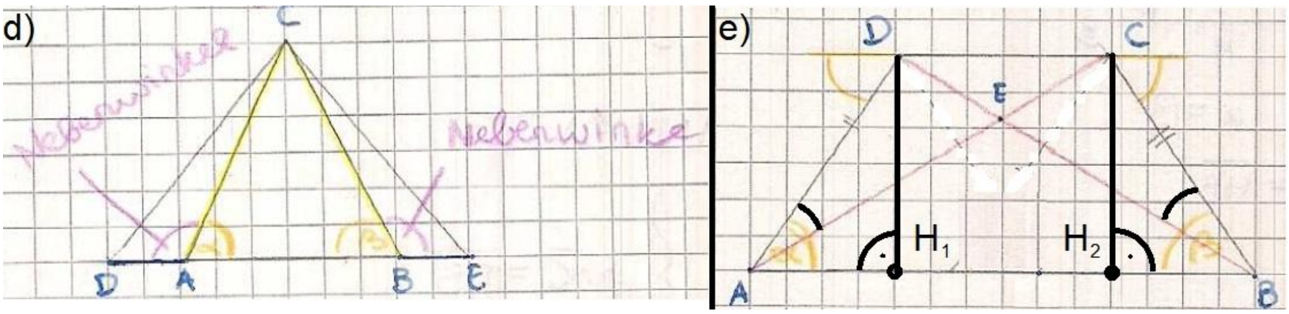


Abb. 403 Beweise um das gleichschenklige Dreieck

Aufg. 228/548: a) Die Zahlen hinter den Figuren bedeuten die Anzahl der Freiheitsgrade (Abb. 404).

b) Raute: Alle vier Seiten sind gleich lang.
Rechteck: Alle vier Winkel sind 90° 'RECHTe Winkel' (ok drei reichen auch).
Quadrat: Eine Raute, die gleichzeitig Rechteck ist.
Drachen: Je zwei anliegende Seiten sind gleich lang.
Parallelogramm: Je zwei gegenüberliegende Seiten sind parallel.
Trapez: Ein Paar gegenüberliegende Seiten sind parallel.
gleichschenkliges Trapez: Trapez bei welchem die anderen Seiten gleich lang und nicht parallel sind.

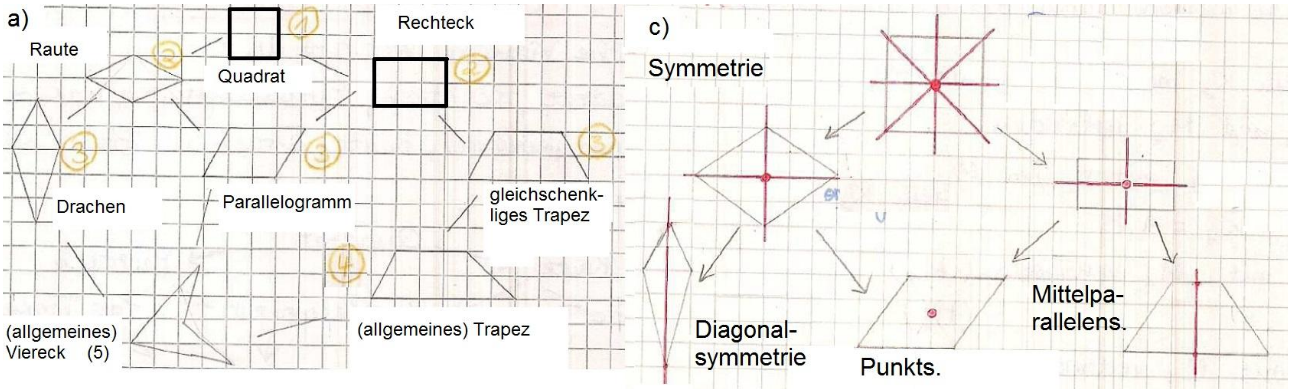


Abb. 404 Das Haus der Vierecke

d) Umkreis: gleichschenkliges Trapez, Rechteck, Quadrat; Inkreis: Drachen, Raute, Quadrat.

Aufg. 228/549: Zeigen Sie (mit Hilfe der Kongruenzsätze): (Abb. 405)

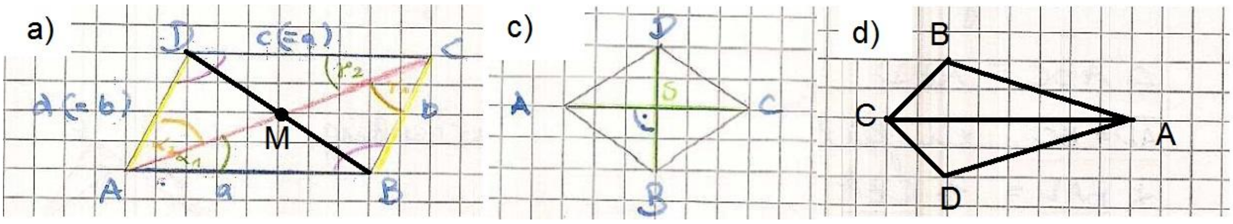


Abb. 405 Beweise mit Hilfe der Kongruenzsätze

a) $\Delta ABC \cong \Delta ACD$: $\alpha_1 = \gamma_2$ und $\alpha_2 = \gamma_1$ (Wechselwinkel bei Parallelen) - damit gilt die Kongruenz nach wsw. b) $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ siehe Aufgabe 547 e)

c) Eine Raute besteht aus zwei gleichschenkligen kongruenten Dreiecken - die eine Diagonale sind deren Basen, die Andere wird aus den zwei Seitenhalbierenden (die gleichzeitig Höhen sind) zusammengesetzt. Damit halbieren sich die Diagonalen (orthogonal) siehe auch Aufgabe 546.

d) $\Delta ABC \cong \Delta ACD$: nach sss.

Aufg. 228/550: **a)** Alle Dreiecke sind rechtwinklig.

b) Sei R der Radius des Umkreises, dann gilt $R = \overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM}$; Damit sind die Dreiecke $\Delta A, M, C$ und $\Delta B, C, M$ gleichschenklig, und $\gamma = \alpha + \beta$ (Abb. 716/406).

Nach der Winkelsumme im Dreieck gilt $\sphericalangle\,(A, M, C) = 180° - 2\alpha$ und $\sphericalangle\,(C, M, B) = 180° - 2\beta$. $180° = \sphericalangle\,(A, M, C) + \sphericalangle\,(C, M, B) = 180° - 2\alpha + 180° - 2\beta \overset{-180°+2\alpha+2\beta}{\Longleftrightarrow} 2\alpha + 2\beta = 180° \overset{:2}{\Leftrightarrow} \alpha + \beta = \gamma = 90°$ qed.

c) Jedes Dreieck in einem Halbkreis ist rechtwinklig.

Aufg. 228/551: a) Der Winkel bei C scheint immer gleich zu sein. Das Dreieck $\Delta A, B, M$ bleibt für jedes Dreieck gleich. (Abb. 406)

b) Die Dreiecke $\Delta A, B, M$, $\Delta B, C, M$ und $\Delta C, A, M$ sind gleichschenklig, weil die Punkte A, B, C von M den gleichen Abstand R haben.

c) Formulieren Sie eine Vermutung analog zum Satz des Thales und beweisen Sie Ihre Vermutung.

Sei M der Umkreismittelpunkt. Die Dreiecke $\Delta A, M, C$ und $\Delta B, C, M$ sind gleichschenklig, damit ist $\gamma_1 = \alpha_2$ und $\gamma_2 = \beta_2$.

Beim Satz des Thales gilt $\gamma = 90°$, damit ist $\sphericalangle\,(A, M, B) = 180°$ oder M liegt auf AB.

Sei $\delta = \sphericalangle\,(B, M, A)$, dann ist: $\delta = 360° - (180° - 2\alpha_2) - (180° - 2\beta_2) = 2(\alpha_2 + \beta_2) = 2\gamma$.

Damit ist $\delta = \alpha_1 + \beta_1 = 2\gamma$ (unabhängig von α und β).

d) Wenn zwei Dreiecke den gleichen Umkreisradius R und die gleiche Grundseite c haben, dann sind auch deren Winkel γ gleich. Es gilt $2\gamma = \sphericalangle\ (A, M, B)$.

e) Der innere Winkel 'unten' am Mittelpunkt ist $360° - 2\gamma$, damit ist der Winkel am Kreis $\frac{360° - 2\gamma}{2} = 180° - \gamma$.

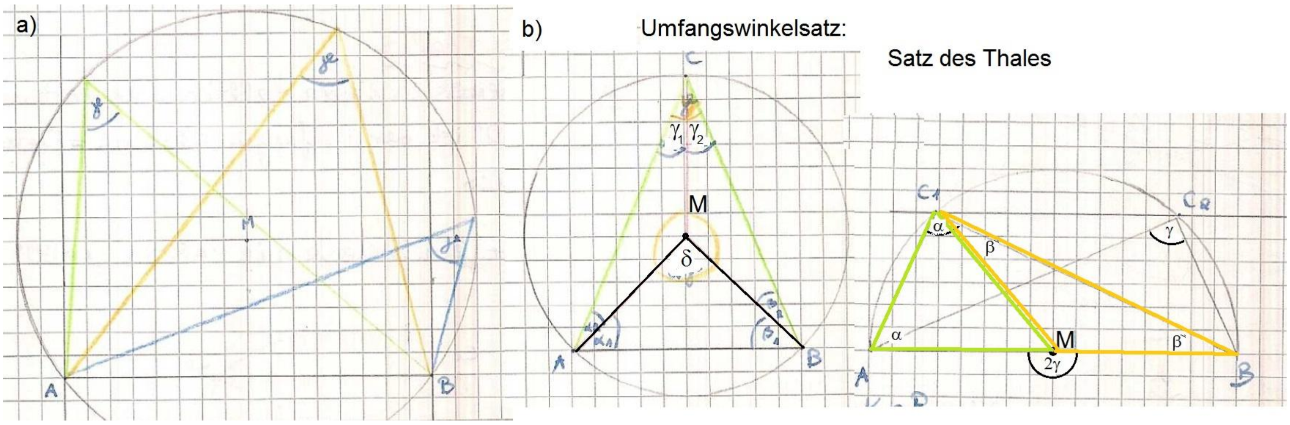


Abb. 406 Der Umfangswinkelsatz

15.9.2 LöVo zu Einheit 9.2 (Geometrie: Zentrische Streckung UE 9_3)

Aufg. 229/552: a) Gleich bleiben die Form, Winkel und die Seitenverhältnisse (Proportionen); es ändern sich die Seitenlängen und die Fläche. b) Z = Ballonmitte und Z ist ein Fixpunkt (bleibt fest).

Aufg. 229/553: a) ΔABC kann durch eine zentrische Streckung mit Zentrum O und Streckfaktor $k = 2$ auf $\Delta A'B'C'$ abgebildet werden. Es gilt $\overline{XY} \cdot k = \overline{X'Y'}\ X, Y \in \{A, B, C\}$.

b) Bei einer zentrischen Streckung mit Streckfaktor $k \neq 0$ werden alle Strecken vom Streckzentrum Z zu jedem Punkt ver k-facht.

c) Bild und Urbildgerade sind parallel zueinander. Damit sind zentrische Streckungen auch parallelentreu: Parallele Urbilder haben parallele Bilder. Nach einer zentrischen Streckung liegt die Bildgerade $A'B'$ immer parallel zur Urbildgeraden AB.

Aufg. 229/554:

ii) Wenn der Originalpunkt P mit der '1' verbunden ist und der Bildpunkt P' mit dem Wert 'k', dann ist der Streckfaktor k.

iii) Als Skala wählen wir optimalerweise eine Gerade in Richtung einer Achse.

b) Konstruktionsbeschreibung: Gegeben sei eine zentrische Streckung mit Zentrum Z und Streckfaktor k. Gesucht ist das Bild von A. Spitzfindigkeit: ZB gilt auch als parallel zu ZB'.

1) Zeichne Halbgerade g durch ZA beginnend bei Z; 2) Miss die Strecke $\overline{ZA}$; 3) Ver-k-fache $\overline{ZA}$; 4) Trage $k \cdot \overline{ZA}$ auf g beginnend bei Z ab; dies kann durch einen Kreis um Z mit $r = k \cdot \overline{ZA}$ geschehen.

c) Zeichen Sie die Geraden $h_a : AA'$ und $h_b : BB'$; $Z = h_a \cap h_b$; hier ist $Z(2; 1)$ und $k = 2.5$. Die zentrische Streckung ist gesichert, wenn sich g und h schneiden und $AB || A'B'$ ist (was hier der Fall ist). (Abb. 407)

c) $A'(-1; 0)$, $B'(2; 6)$. Siehe Abb. unten ($k = 3$). **c) i)** Zeichne eine Skala beginnend bei $Z \mathrel{\hat{=}}$ '0'.
ii) Zeichne Gerade g durch A und '1'. **iii)** Zeichne Gerade g' parallel zu g durch 'k'.
iv) Zeichne Gerade h durch Z und A. **v)** $A' = g' \cap h$; also der Schnittpunkt von g' und h.

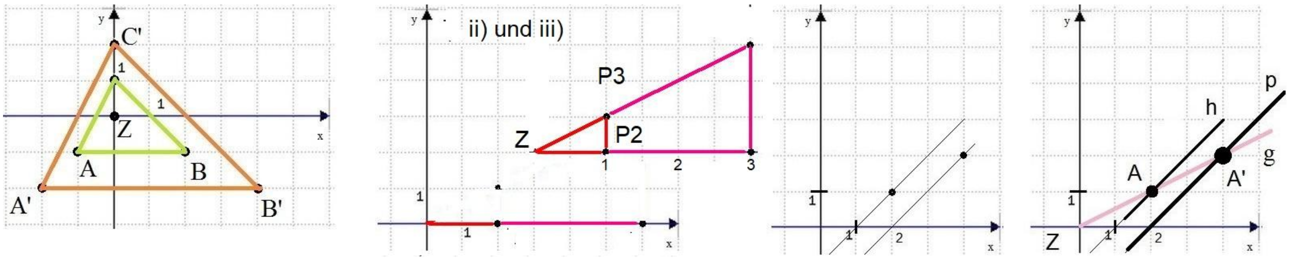


Abb. 407 zentrische Streckungen

d,e) siehe Abb. 407 bzw. fehlen noch

Aufg. 229/555: a) $A'(-4;-2)$, $B(0;-2)$;

b) Wird eine Figur mit einem negativen Streckfaktor gestreckt, so wird diese <u>auf</u> <u>links</u> <u>gedreht</u>.

Aufg. 229/556: b) .. $x-$ Achse .. Im Beispiel sind $P(2;0)$ und $P'(1;0)$; $P(3;0)$ und $P'(2;0)$;
a+c) i) Zeichne eine Skala durch $\underline{Z}$ mit $\underline{Z} = \underline{0}$. **ii)** Zeichne Gerade g durch $\underline{n}$ und $\underline{A}$.
iii) Zeichne Gerade p durch $\underline{m}$ <u>parallel</u> zu $\underline{g}$. **iv)** Zeichne Gerade h durch $\underline{Z}$ und $\underline{A}$
v) $A' = \underline{h} \cap \underline{p}$. **d)** Siehe unten

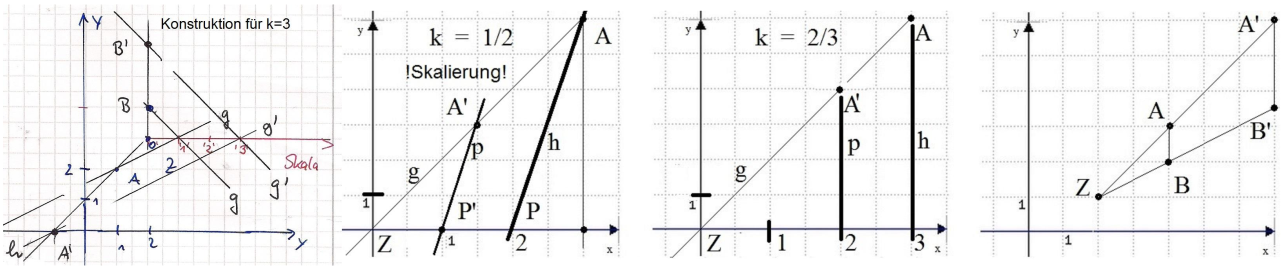


Abb. 408 zentrische Streckungen

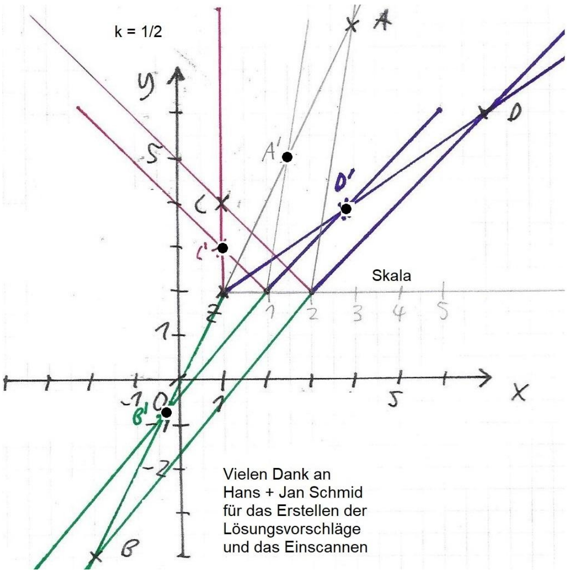
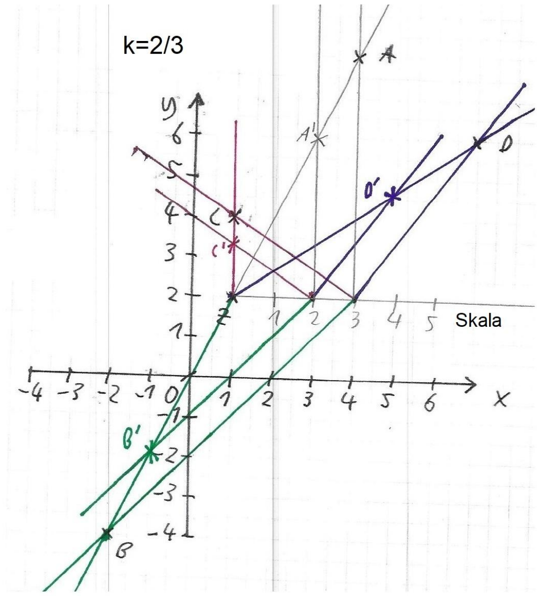


Abb. 409 Konstruktion mit Streckfaktor 1/2



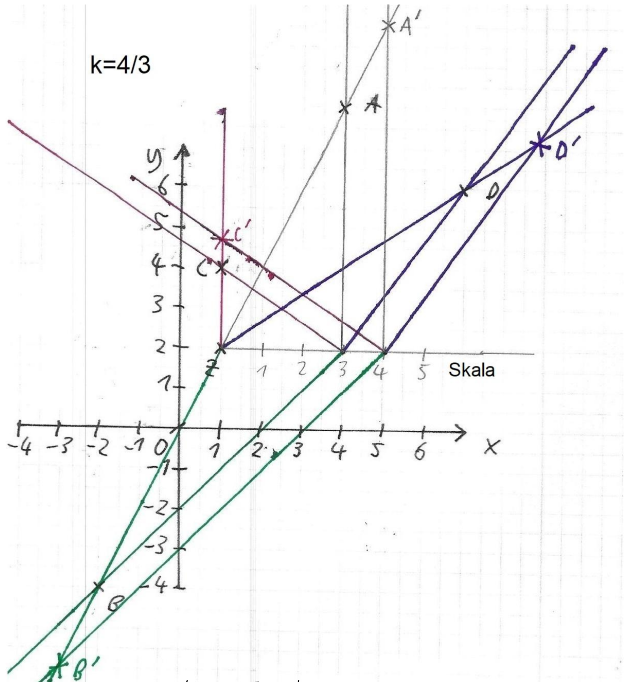
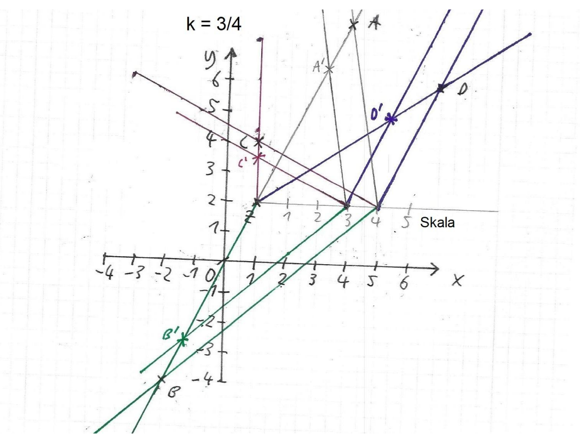


Abb. 410 Konstruktion mit Streckfaktor 2/3 und 4/3



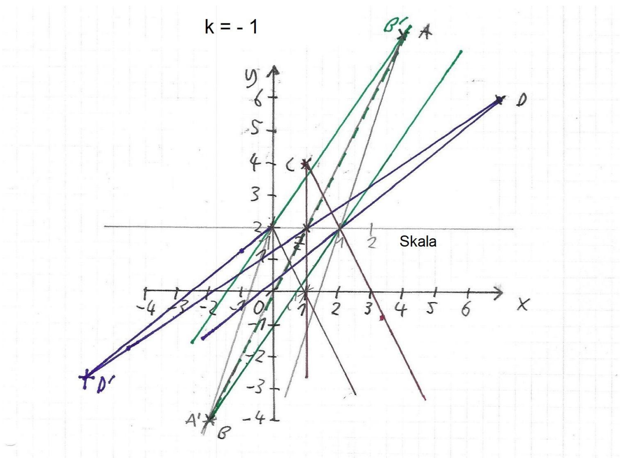
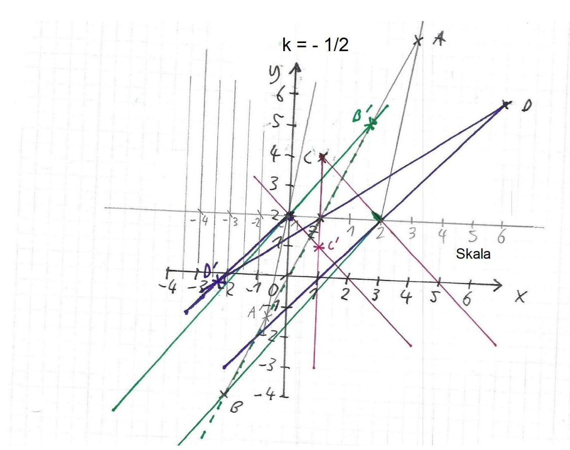


Abb. 411 Konstruktion mit Streckfaktor 3/4 und -1/2



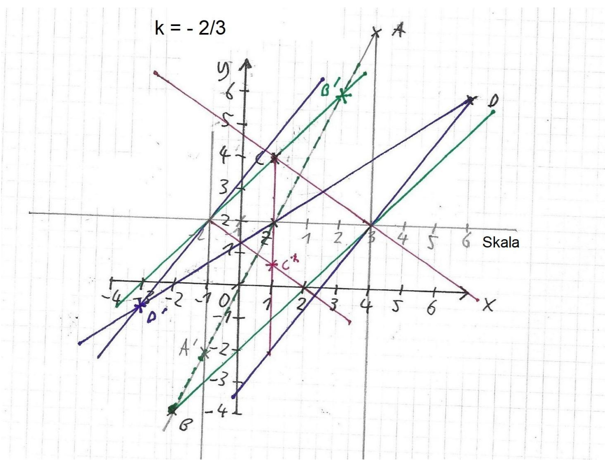


Abb. 412 Konstruktion mit Streckfaktor -1/2 und -2/3

Aufg. 230/557: a) $A = 4cm \cdot 3cm = 12cm^2$, $A' = (2 \cdot 4cm) \cdot (2 \cdot 3cm) = 4 \cdot 12cm^2 = 48cm^2$.
b) $A' = (k \cdot l) \cdot (k \cdot b) = k^2 \cdot (l \cdot b) = k^2 \cdot A$.

c) Bei einer zentrischen Streckung mit Streckfaktor k wird aus einer Fläche mit dem Inhalt A eine Fläche mit dem Inhalt $k^2 \cdot A$ und aus einem Körper mit Volumen V ein Körper mit Volumen $k^3 \cdot V$.
d) i) Sie wird verneunundvierzigfacht; ii) $k^2 = 81$, sie vereinundachzigfacht sich; iii) $k^2 = 0.25$, sie wird geviertelt, iv) $k^2 = 4$, sie wird vervierfacht; v) $k^2 = 8$, sie wird verachtfacht.
e) $A' = k^2 \cdot A \Leftrightarrow 9A = k^2 \cdot A \Leftrightarrow k^2 = 9$ oder $k = \pm 3$ (bzw. $k = \pm 1.2$).
f) $V' = (k \cdot l) \cdot (k \cdot b) \cdot (k \cdot h) = k^3 \cdot V$ (eigentlich $V' = |k^3| \cdot V$, denn Volumina sind positiv).
Die Tatsache des 'Dreieck' hat keinen Einfluss. g) $k = \pm\sqrt[3]{1000} = \pm 10$, denn $V' = |k^3| \cdot V$.

Aufg. 230/558: a) $1, 3, 5, 6$ sind ähnlich. b) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie durch eine zentrische Streckung verknüpft mit einer Kongruenzabbildung aufeinander abgebildet werden können.

c) Zwei Dreiecke heißen **ähnlich** wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen. Bei ähnlichen Dreiecken sind (entsprechende) Seitenverhältnisse gleich.

d) $1300 \cdot \frac{4}{1000} = 5.2cm$, $k = \frac{1}{250}$, ja, mit $k = 0.004$;

e) $\sphericalangle(ABS) = \delta = \sphericalangle(SDC)$, weil diese Winkel Stufenwinkel sind. $\sphericalangle(BSA) = \beta = \sphericalangle(DSC)$ (Scheitelwinkel); damit sind die Dreicke ähnlich.

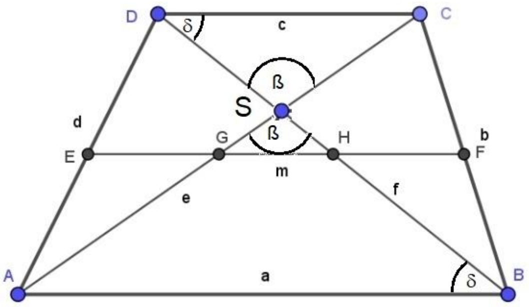


Abb. 413 Ähnliche Dreiecke im Trapez
Strahlensätze: Alle Aufgaben sind dimensionslos gestellt - es sind also keine Einheiten vorgesehen.

Aufg. 230/559: a) $\overline{AB} || \overline{A'B'}$; b) $\Delta(BAZ)$ ist ähnlich zum $\Delta(B'A'Z)$; berechnen Sie k [..]

i) $k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{12}{4} = 3$; $k = \frac{ZA'}{ZA} \Leftrightarrow 3 = \frac{ZA'}{6} \Rightarrow ZA' = 18$; $k = \frac{ZB'}{ZB} \Leftrightarrow 3 = \frac{ZB'}{5} \Rightarrow ZB' = 15$;

ii) $k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{7.5}{3} = 2.5$; $k = \frac{ZA'}{ZA} \Leftrightarrow 2.5 = \frac{x}{4} \Rightarrow x = ZA' = 10cm$; $k = \frac{ZB'}{ZB} \Leftrightarrow 2.5 = \frac{9}{y} \Rightarrow y = ZB = 3.6cm$;

Aufg. 231/560: a) i) ΔZAB und $\Delta ZA'B'$ können durch eine zentrische Streckung mit Zentrum Z aufeinander abgebildet werden.

ii) ΔZAB und $\Delta ZA'B'$ sind ähnlich. $\sphericalangle(A', Z, B') = \sphericalangle(A, Z, B)$ (offensichtlich) und $\alpha = \sphericalangle(B, A, Z) =<$) (B', A', Z) des Stufenwinkelsatzes wegen; damit sind die Dreiecke ähnlich. (Abb. 414) b) ΔZAB ist durch einen zentrische Streckung mit Streckzentrum Z auf $\Delta ZA'B'$ abbildbar. Es gilt $k = \frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$. Diese Beziehung heißt 'zweiter Strahlensatz' und ist auswendig zu lernen.

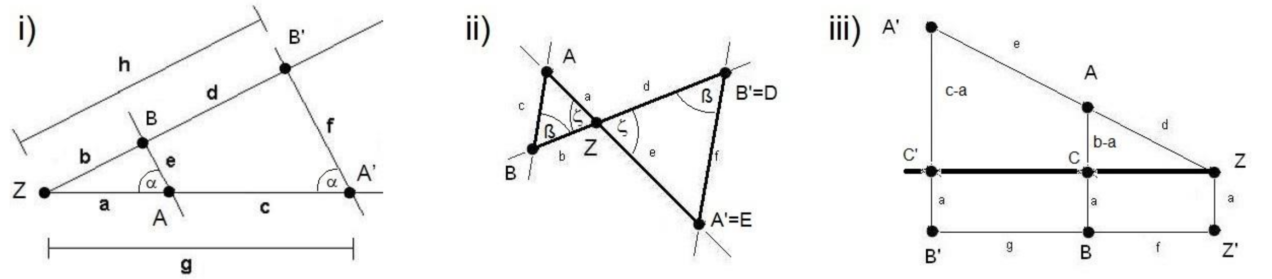


Abb. 414 Strahlensatz Lösungen

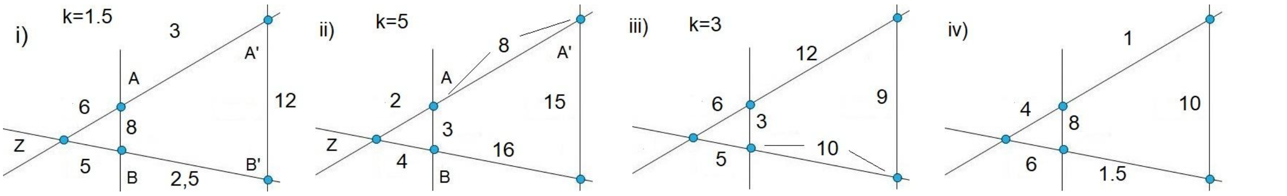


Abb. 415 c) Die fehlenden Größen

Aufg. 231/561: a) $d = h - b = 4,\ \ k = \frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZB}} = \frac{h}{b} = \frac{6}{2} = 3,\ \ k = \frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} = \frac{g}{a} \Leftrightarrow \frac{g}{3} = 3 \Rightarrow g = 9,$ $c = g - a = 6,\ \ k = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{f}{e} \Leftrightarrow \frac{f}{1} = 3 \Rightarrow f = 3;$ **b)** $d = h - b = 2,\ \ k = \frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZB}} = \frac{h}{b} = \frac{4}{2} = 2,$ $k = \frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} = \frac{g}{a} \Leftrightarrow \frac{6}{a} = 2 \Rightarrow a = 3,\ \ c = g - a = 3,\ \ k = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{f}{e} \Leftrightarrow \frac{f}{2} = 2 \Rightarrow f = 4;$

c) $h = 5,\ \ k = \frac{h}{b} = \frac{5}{2} = 2.5,\ \ k = \frac{g}{a} \Leftrightarrow \frac{g}{4} = 2.5 \Rightarrow g = 10,\ \ c = 6,\ \ k = \frac{f}{e} \Leftrightarrow \frac{f}{3} = 2.5 \Rightarrow f = 7.5;$

d) $h = 5,\ \ k = \frac{f}{e} = \frac{6}{2} = 3,\ \ k = \frac{g}{a} \Leftrightarrow \frac{12}{a} = 3 \Rightarrow a = 4,\ \ c = 8,\ \ k = \frac{h}{b} \Leftrightarrow \frac{h}{3} = 3 \Rightarrow h = 9,\ \ d = 6;$

e) $a = 2,\ \ k = \frac{g}{a} = \frac{3}{2} = 1.5,\ \ k = \frac{f}{e} \Leftrightarrow \frac{6}{e} = 1.5 \Rightarrow e = 4,\ \ k = \frac{h}{b} \Leftrightarrow \frac{h}{1} = 1.5 \Rightarrow h = 1.5,\ \ d = 0.5;$

f) $g = 7,\ \ k = \frac{g}{a} = \frac{7}{4},\ k = \frac{f}{e} \Leftrightarrow \frac{10.5}{e} = \frac{7}{4} \Rightarrow e = 6,\ k = \frac{b+d}{b} \Leftrightarrow \frac{b+4.5}{b} = \frac{7}{4} \Rightarrow 4(b + 4.5) = 7b \Rightarrow b = 6,\ h = 10.5;$

g) $h = 4,\ \ k = \frac{h}{b} = \frac{4}{3},\ k = \frac{f}{e} \Leftrightarrow \frac{6}{e} = \frac{4}{3} \Rightarrow e = 4.5,\ k = \frac{a+c}{a} \Leftrightarrow \frac{a+2}{a} = \frac{4}{3} \Rightarrow 3(a + 2) = 4a \Rightarrow a = 6,\ g = 8;$

Aufg. 231/562: Es sei k der Streckfaktor, der $\Delta ZAB \to \Delta ZCD$ abbildet, $k_2 : \Delta ZAB \to \Delta ZEF$, $k_3 : \Delta ZCD \to \Delta ZEF$ (es gilt immer $k_1 \cdot k_3 = k_2$), $C = A',\ \ E = A'',\ \ D = B',\ \ F = B''$.

a) $a = 3,\ \ b = 4,\ \ c = 5,\ \ d = 3,\ \ e = 4,\ \ f = 10,\ \ g = 3,\ \ h = 4,\ \ i = 15,\ \ k_1 = 2,\ \ k_2 = 3,\ \ k_3 = 1.5;$
b) $a = 6,\ \ b = 8,\ \ c = 4,\ \ d = 3,\ \ e = 4,\ \ f = 6,\ \ g = 9,\ \ h = 12,\ \ i = 12,\ \ k_1 = 1.5,\ \ k_2 = 3,\ \ k_3 = 2;$
c) $a = 7,\ \ b = 9,\ \ c = 8,\ \ d = 14,\ \ e = 18,\ \ f = 24,\ \ g = 7,\ \ h = 9,\ \ i = 32,\ \ k_1 = 3,\ \ k_2 = 4,\ \ k_3 = \frac{4}{3};$
d) $a = 6,\ \ b = 12,\ \ c = 10,\ \ d = 6,\ \ e = 12,\ \ f = 20,\ \ g = 3,\ \ h = 6,\ \ i = 25,\ \ k_1 = 2,\ \ k_2 = 2.5,\ \ k_3 = 1.25;$
e) $a = 12,\ \ b = 16,\ \ c = 10,\ \ d = 6,\ \ e = 8,\ \ f = 15,\ \ g = 12,\ \ h = 16,\ \ i = 25,\ \ k_1 = 1.5,\ \ k_2 = 2.5,\ \ k_3 = \frac{5}{3};$
f) $a = 5,\ \ b = 4,\ \ c = 6,\ \ d = 2.5,\ \ e = 2,\ \ f = 9,\ \ g = 7.5,\ \ h = 6,\ \ i = 18,\ \ k_1 = 1.5,\ \ k_2 = 3,\ \ k_3 = 2,$
g) $a = 2,\ \ b = 4,\ \ c = 3,\ \ d = 8,\ \ e = 16,\ \ f = 15,\ \ g = 10,\ \ h = 20,\ \ i = 30,\ \ k_1 = 5,\ \ k_2 = 10,\ \ k_3 = 2,$

Idee: Die Gerade EF (vorerst) weglassen.

Aufg. 231/563: a) Die Dreiecke sind ähnlich (Wechselwinkel bzw. Scheitelwinkel) und können durch eine zentrische Streckung mit Streckzentrum Z aufeinander abgebildet werden. b) $E = A'$ und $D = B'$ weil E auf der Geraden ZA liegt. c+d) $k = \frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$, dies entspricht genau dem zweiten Strahlensatz.
Aber: Eigentlich ist $k < 0$, weil das Dreieck auf links gedreht wurde. Es ist aber nicht vernünftig mit negativen Längen zu rechnen.

Aufg. 231/564: Weil (eigentlich) k negativ ist schreibe ich hier ausnahmsweise $|k|$.
a) $|k| = \frac{d}{b} = 2,\ \ |k| = \frac{e}{a} \Rightarrow e = 4,\ \ |k| = \frac{f}{c} \Rightarrow f = 8;$ b) $|k| = \frac{e}{a} = 1.5,\ \ d = 18,\ \ f = 27;$
c) $|k| = \frac{e}{a} = 2.5, b = 14, c = 16;$ d) $|k| = \frac{d}{b} = 4, a = 2.5, c = 2.25;$ e) $|k| = \frac{f}{c} = 3.5, a = 8, d = 21;$

Aufg. 232/565: Es sei k der Streckfaktor, der $\Delta ZAB \to \Delta ZEC$ abbildet, $k_2 : \Delta ZAB \to \Delta DZF$, $k_3 : \Delta ZEC \to \Delta DZF$ (es gilt immer $k_3 \cdot k_1 = k_2$).

a) $a = 10,\ \ b = 8,\ \ c = 12,\ \ d = 5,\ \ e = 4,\ \ f = 6,\ \ g = 25,\ \ h = 20,\ \ i = 36,\ \ k_1 = 0.5,\ \ k_2 = 3,\ \ k_3 = 6;$
b) $a = 15,\ \ b = 18,\ \ c = 21,\ \ d = 5,\ \ e = 6,\ \ f = 7,\ \ g = 5,\ \ h = 6,\ \ i = 14,\ \ k_1 = \frac{1}{3},\ \ k_2 = \frac{2}{3},\ \ k_3 = 2;$

ausführliche Lösung von Teil b $k = (-)\frac{ZE}{ZA} = \frac{24}{16} = 1.5;$

$k = 1.5 = \frac{DE}{AB} = \frac{f}{18} \Leftrightarrow f = 18 \cdot 1.5 = 27;$ $k = 1.5 = \frac{ZD}{ZB} = \frac{d}{12} \Leftrightarrow d = 12 \cdot 1.5 = 18;$

c) $a = 2,\ \ b = 3,\ \ c = 4,\ \ d = 4,\ \ e = 6,\ \ f = 8,\ \ g = 2,\ \ h = 3,\ \ i = 12,\ \ k_1 = 2,\ \ k_2 = 3,\ \ k_3 = \frac{3}{2};$
d) $a = 3,\ \ b = 5,\ \ c = 7,\ \ d = 21,\ \ e = 35,\ \ f = 49,\ \ g = 6,\ \ h = 10,\ \ i = 63,\ \ k_1 = 7,\ \ k_2 = 9,\ \ k_3 = \frac{9}{7};$

ausführliche LöVo von Teil d (für Lea) $k_3 = \frac{ZB''}{ZB'} = \frac{6+21}{21} = \frac{9}{7};$

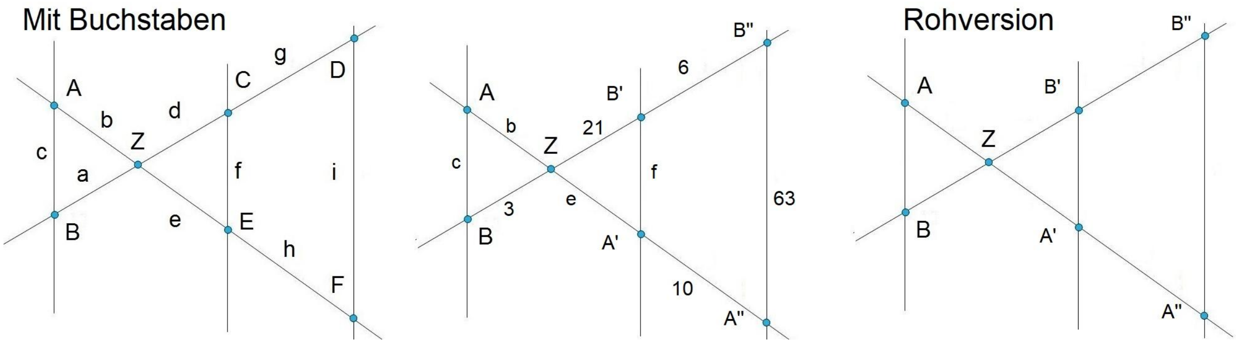


Abb. 416 große Strahlensatzfigur

$k_3 = \frac{A''B''}{A'B'} = \frac{9}{7} = \frac{63}{f} \Leftrightarrow 9f = 63 \cdot 7 \Leftrightarrow f = 49;$ $k_3 = \frac{ZA''}{ZA'} = \frac{9}{7} = \frac{e+10}{e} \Leftrightarrow 9e = 7 \cdot (e+10) \Leftrightarrow e = 35;$

$k_1 = (-)\frac{ZB'}{ZB} = \frac{21}{3} = 7;$

$k_1 = \frac{A'B'}{AB} = \frac{49}{c} = 7 \Leftrightarrow 7c = 49 \Leftrightarrow c = 7;$ $k_1 = \frac{ZA'}{ZA} = 7 = \frac{35}{b} \Leftrightarrow 7b = 35 \Leftrightarrow b = 5;$

e) $a = 3,\ b = 4,\ c = 5,\ d = 15,\ e = 20,\ f = 25,\ g = 9,\ h = 12,\ i = 40,\ k_1 = 5,\ k_2 = 8,\ k_3 = \frac{8}{5};$

Aufg. 232/566: a) $M =$ Mittelpunkt, $P =$ Brennpunkt, $f =$ Brennweite der Linse; b) ΔAMC ist ähnlich zu ΔEMF und ΔPMD ist ähnlich zu ΔEPF; c) ΔAMC und ΔEMF ergeben $\frac{B}{G} = \frac{b}{g}$, ΔPMD und ΔEPF ergeben $\frac{B}{G} = \frac{b-f}{f}$, damit ist $\frac{b}{g} = \frac{b-f}{f}$ oder $\frac{1}{b} + \frac{1}{g} = \frac{1}{f}$ (Linsengleichung), Beweis: $\frac{b}{g} = \frac{b-f}{f} \Leftrightarrow \frac{b}{g} = \frac{b}{f} - \frac{f}{f} \Leftrightarrow \frac{b}{g} = \frac{b}{f} - 1 \quad | : b \quad \Leftrightarrow \frac{1}{g} = \frac{1}{f} - \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$.

Aufg. 232/567:

$f = \frac{g \cdot b}{g+b};$ $g = \frac{f \cdot b}{b-f};$ $b = \frac{f \cdot g}{g-f};$ **a)** $f = \frac{2 \cdot 3}{2+3} = 1.2cm;$
b) $g = \frac{2 \cdot 7}{7-2} = 2.8cm;$ **c)** $b = \frac{15 \cdot 25}{25-15} = 37.5cm;$ **d)** $f = \frac{10 \cdot (-5)}{10+(-5)} = -10cm;$
e) $\Delta ACM \cong \Delta MEF \Rightarrow b = g = 3$ $f = \frac{3 \cdot 3}{3+3} = 1.5m;$
f) $k = \frac{30}{6} = 5,\ g = \frac{150}{5} = 30cm,\ f = \frac{30 \cdot 150}{30+150} = 25cm.$

Aufg. 232/568: a) $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ oder $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$ (es gibt noch mehr). b) Nach dem zweiten Strahlensatz gilt $k = \frac{d+b}{b} = \frac{c+a}{a}$: $\frac{d+b}{b} = \frac{c+a}{a} \Leftrightarrow \frac{d}{b} + \frac{b}{b} = \frac{c}{a} + \frac{a}{a} \Leftrightarrow \frac{d}{b} + 1 = \frac{c}{a} + 1 \Leftrightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$. c) ... mit Hilfe des zweiten Strahlensatzes ... Mit dem zweiten Strahlensatz können mehr Problemstellungen berechnet werden, als mit dem ersten Strahlensatz. Die Erfahrung zeigt, dass die Sätze sehr häufig vermischt werden. Deshalb sollten Sie den ersten Strahlensatz nur verwenden, wenn Sie den zweiten Strahlensatz gut beherrschen.

Aufg. 232/569:

a) $a = 4,\ b = 5,\ c = 4,\ d = 4,\ e = 5,\ f = 4,\ g = 6,\ h = 5,\ i = 12,\ j = 10,\ k = 2;$
b) $a = 3,\ b = 4,\ c = 2,\ d = 6,\ e = 8,\ f = 4,\ g = 5,\ h = 3,\ i = 15,\ j = 9,\ k = 3;$
c) $a = 4,\ b = 7,\ c = 6,\ d = 12,\ e = 21,\ f = 18,\ g = 8,\ h = 5,\ i = 32,\ j = 20,\ k = 4;$
d) $a = 20,\ b = 22,\ c = 14,\ d = 10,\ e = 11,\ f = 7,\ g = 16,\ h = 12,\ i = 24,\ j = 18,\ k = 1.5;$
e) $a = 12,\ b = 14,\ c = 8,\ d = 18,\ e = 21,\ f = 12,\ g = 10,\ h = 16,\ i = 25,\ j = 40,\ k = 2.5;$

Aufg. 233/570: a) P teilt Q im Verhältnis $2:1$; b) Zeichne Parallele p zu BC durch A; $D = OC \cap p$; $D(3;0)$. c+d) Verwenden Sie dazu eine Skala. (Abb. 417)

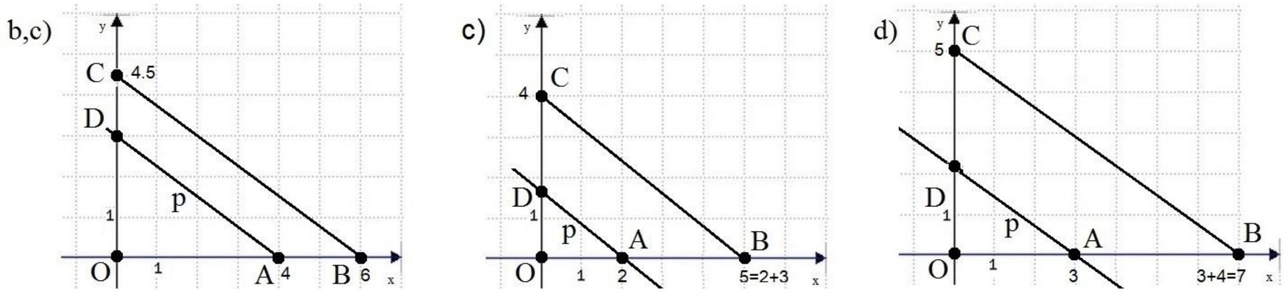


Abb. 417 Konstruktion von Teilverhältnissen

e) Zeichne ein Achsenkreuz und markiere die Punkte $A(a;0)$, $B(a+b;0)$ und $C(0;c)$. Zeichne dann die Parallele p zu BC durch A; $D = OC \cap p$.

Aufg. 233/571: a) Der <u>zweite</u> <u>Strahlensatz</u> geht nicht, weil sich die <u>Geraden AA' und BB'</u> nicht <u>in Z schneiden</u>.

b) Zeichne Parallele zu $\overline{BB'}$ durch Z; andere Linien sind auch denkbar.

Aufg. 233/572: a) $k = \frac{c-a}{b-a} = 2$, $k = \frac{g+f}{f} \Leftrightarrow \frac{g+4}{4} = 2 \Rightarrow g = 4$, $k = \frac{e+d}{d} \Leftrightarrow \frac{e+3}{4} = 3 \Rightarrow e = 3$;

b) $k = \frac{e+d}{d} = 3$, $k = \frac{g+f}{f} \Leftrightarrow \frac{g+4}{4} = 3 \Rightarrow g = 8$, $k = \frac{c-a}{b-a} \Leftrightarrow \frac{c-2}{1} = 3 \Rightarrow c = 5$;

ausführliche LöVo von Teil b (für Carla) $k = \frac{ZA'}{ZA} = \frac{3+6}{3} = 3$;

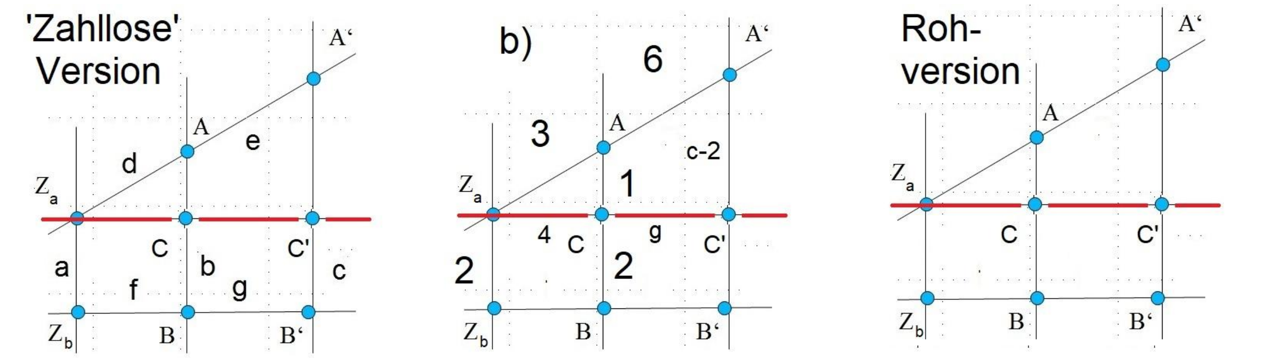


Abb. 418 Trapeze und Strahlensatz

$k = 3 = \frac{A'C'}{AC} = \frac{c-2}{1} \Leftrightarrow c-2 = 3 \Leftrightarrow c = 5$; $k = 3 = \frac{ZC'}{ZC} = \frac{4+g}{4} \Leftrightarrow 4+g = 12 \Leftrightarrow g = 8$;

c) $k = \frac{g+f}{f} = 1.5$, $k = \frac{e+d}{d} \Leftrightarrow \frac{e+2}{2} = 1.5 \Rightarrow e = 1$, $k = \frac{c-a}{b-a} \Leftrightarrow \frac{6}{b-3} = 3 \Rightarrow b = 5$;

d) $k = \frac{g+f}{f} = 2.5$, $k = \frac{e+d}{d} \Leftrightarrow \frac{21+d}{d} = 2.5 \Rightarrow d = 14$, $k = \frac{c-a}{b-a} \Leftrightarrow \frac{15-a}{12-a} = 2.5 \Rightarrow a = 10$;

e) $k = \frac{e+d}{d} = 1.2$, $k = \frac{g+f}{f} \Leftrightarrow \frac{1.5+f}{f} = 1.2 \Rightarrow f = 15$, $k = \frac{c-a}{b-a} \Leftrightarrow \frac{21-a}{20-a} = 1.2 \Rightarrow a = 15$;

Aufg. 233/573: a) Ein Kegelstumpf ist ein Kegel mit (parallel zur Grundfläche) abgeschnittener Spitze;

b) Verwenden Sie dazu den <u>Strahlensatz</u>. $h_e = \frac{3 \cdot 4}{9-3} = 2$ siehe c)

c) $k = \frac{r_1}{r_2} = \frac{h_e+h}{h_e} \xLeftrightarrow{\cdot r_2 \quad \cdot h_e} r_1 \cdot h_e = (h_e+h) \cdot r_2 \Leftrightarrow r_1 \cdot h_e = h_e \cdot r_2 + h \cdot r_2 \xLeftrightarrow{-h_e \cdot r_2} h_e \cdot r_1 - h_e \cdot r_2 = h \cdot r_2$ $\Leftrightarrow h_e \cdot (r_1 - r_2) = h \cdot r_2 \xLeftrightarrow{:(r_1-r_2)} h_e = \frac{h \cdot r_2}{r_1 - r_2}$.

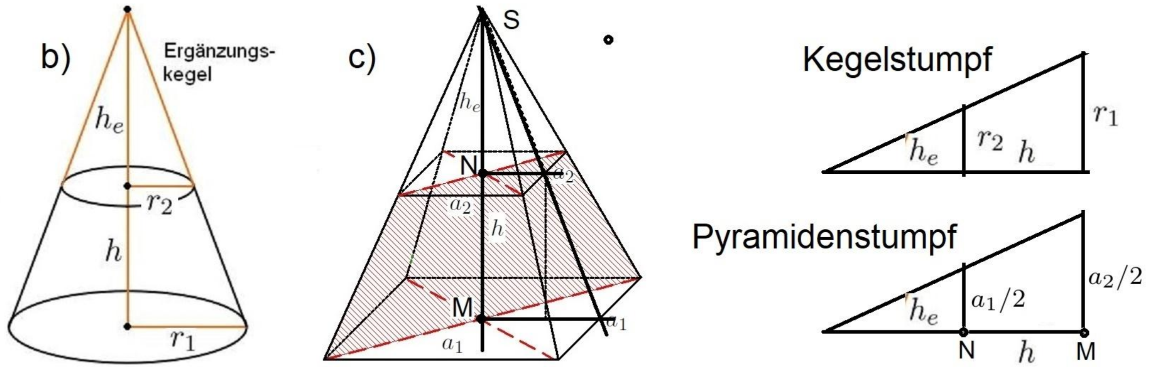


Abb. 419 Kegelstumpf Pyramidenstumpf Strahlensatz

d) $k = \frac{a_1/2}{a_2/2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{h_e+h}{h_e}$ (wie in Teil a) $h_e = \frac{h \cdot a_2}{a_1 - a_2}$.

Aufg. 233/574: a) $k = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{10}{4} = 2.5$, $k = \frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} = \frac{20}{\overline{ZA}} = 2.5 \Leftrightarrow \overline{ZA} = 20 : 2.5 = 8$, $k = \frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{ZB'}}{6} = 2.5 \Leftrightarrow \overline{ZB'} = 6 \cdot 2.5 = 15$, $\overline{BB'} = \overline{ZB'} - \overline{ZB} = 15 - 6 = 9$;

b) $k = \frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} = \frac{12}{8} = 1.5$, $k = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{10} \Rightarrow \overline{A'B'} = 10 \cdot 1.5 = 15$;
Sei $x = \overline{ZB}$, dann ist $\overline{ZB'} = 6 + x$, $k = \frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZB}} = \frac{6+x}{x} = 1.5 \Leftrightarrow 6 + x = 1.5x \Leftrightarrow 0.5x = 6 \Leftrightarrow x = 12$;

c) $k^2 = 4 \Leftrightarrow k_1 = 2, k_2 = -2$.

Aufg. 233/575: a) 1) Passante, 2) Tangente, 3) Sehne, 4) Durchmesser, 5) Sekante b) Siehe Ag 551

Aufg. 233/576: a) ΔABZ und $\Delta A'B'Z$ sind ähnlich: Nach dem Umfangswinkelsatz ist
$\sphericalangle(A, A', B') = \sphericalangle(B', B, A)$ und $\sphericalangle(A', Z, B) = \sphericalangle(A, Z, B)$ (Scheitelwinkel).
b) $k = \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB'}} = \frac{\overline{BZ}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$; der Sehnensatz lautet: $\overline{AZ} \cdot \overline{A'Z} = \overline{BZ} \cdot \overline{B'Z}$.
Man erkennt einander entsprechende Seiten am gegenüberliegenden Winkel.

c) $r = 8cm$ wird nicht benötigt. $\overline{ZA} \cdot \overline{ZA'} = 1 \cdot 3 = 3$, $\overline{ZB} \cdot \overline{ZB'} = x \cdot (4 - x) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$ $\Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = 3$; beide Ergebnisse sind möglich.

d) Wir betrachten das Viereck A, B, A', B'; in diesem Viereck halbieren sich die Diagonalen; es handelt sich also um ein Parallelogramm. Gleichzeitig hat das Viereck den Umkreis K; es handelt sich also um ein gleichschenkliges Trapez (genau diese haben nämlich einen Umkreis). Damit ist A, B, A', B' ein Rechteck oder $Z = M$ (Abb. 420).

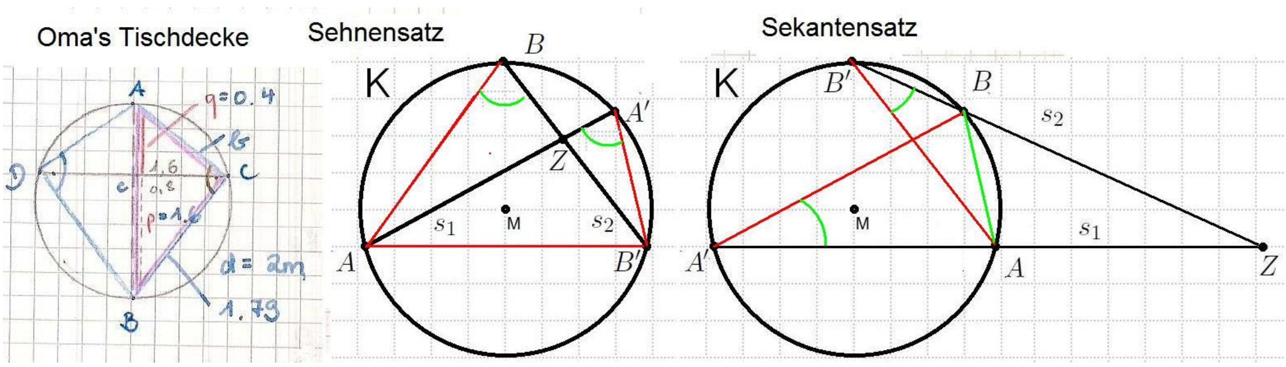


Abb. 420 Omas Tischdecke Sehnensatz Sekantensatz

Aufg. 234/577: a) $\Delta ZA'B$ und $\Delta ZAB'$ sind ähnlich: Nach dem Umfangswinkelsatz ist
$\sphericalangle(A, A', B') = \sphericalangle(A, B', B)$ und der Winkel $\sphericalangle(B, Z, A)$ kommt in beiden Dreiecken vor.
b) $k = \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZB'}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}}$; der Sekantensatz lautet: $\overline{ZA} \cdot \overline{AA'} = \overline{ZB} \cdot \overline{BB'}$ (Abb. 420).
c) $B' \to B$; der Sekanten-Tangentensatz lautet: $\overline{ZA} \cdot \overline{AA'} = \overline{ZB}^2$. d) $\overline{ZB} = 6$; sei $x = \overline{ZM}$, dann gilt mit dem Sekantensatz $(x + r)(x - r) = 36 \Leftrightarrow (x + 8)(x - 8) = 36 \Leftrightarrow x = (\pm)10cm$.

Aufg. 234/578: a) Es sind die Dreiecke ΔABC, ΔAHC und ΔBCH;
b) Das entstehende Dreieck ist rechtwinklig (Beweis später) und stellt etwa das Dreieck aus Abb. 137 dar. c) Die Dreiecke sind ähnlich, denn alle Dreiecke sind rechtwinklig und $90° - \beta = \alpha = \sphericalangle(C, A, B) = \sphericalangle(H, C, B)$ nach der Winkelsumme im Dreieck.

d) Bei einem rechtwinkligen Dreieck heißen die kurzen Seiten Katheten und die lange Seite Hypotenuse. Die Hypotenuse liegt immer gegenüber vom rechten Winkel.

e) $k = \frac{b}{a} = \frac{h}{p} = \frac{q}{h}$. Entsprechende Seiten erkennt man am gegenüberliegenden Winkel.

f) Im rechtwinkligen Dreieck gilt der Höhensatz $h^2 = p \cdot q$ (auswendig).

Aufg. 234/579: $h^2 = p \cdot q$ und $c = p + q$; a) $4^2 = 2 \cdot q \Leftrightarrow p = 8, c = 2 + 8 = 10$;

b) $12^2 = 9 \cdot p \Leftrightarrow q = 16, c = 25$;

c) $(*)$: $2^2 = p \cdot q$ und $5 = p + q$ (NLGS = Nichtlineares Gleichungssystem) also $q = 5 - p$ in $(*)$ eingesetzt: $4 = p \cdot (5 - p) \Leftrightarrow p^2 - 5p + 4 = 0 \Leftrightarrow p_1 = 1, p_2 = 4 \Rightarrow p = 1$ oder 4, $q = 4$ oder 1;

d) $(**)$: $6^2 = p \cdot q$ und $13 = p + q$ (NLGS) also $q = 13 - p$ in $(**)$: $36 = p \cdot (13 - p)$

$\Leftrightarrow p^2 - 13p + 36 = 0 \Leftrightarrow p_1 = 4, p_2 = 9 \Rightarrow p = 4$ oder 9, $q = 9$ oder 4;

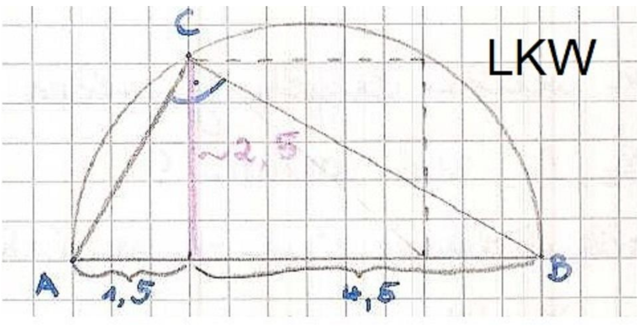
e) $5^2 = p \cdot q$ und $12.5 = p + q$: $\Leftrightarrow 25 = p \cdot (12.5 - p) \Leftrightarrow p^2 - 12.5p + 25 = 0$

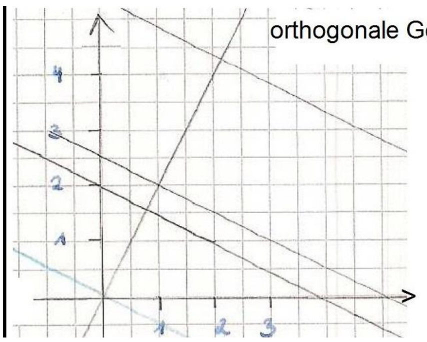
$\Leftrightarrow p_1 = 10, p_2 = 2.5 \Rightarrow p = 10$ oder 2.5, $q = 2.5$ oder 10; g) $p = 128$ oder 0.5, $q = 0.5$ oder 128;
f) $p = 28$ oder 32, $q = 32$ oder 28; Das Dreieck hat die Seitenlängen 30, 40 und 50.
bei den Teilen c) bis g) gibt es zwei Lösungspaare, die aber kongruent sind.
Bei nicht linearen Gleichungssystemen verwende man immer das Einsetzungsverfahren. Zur Lösung löse immer die einfache Gleichung nach einer Variablen auf und setze diese dann in die andere ein.

Aufg. 234/580: a) $q = 1.5m$, $p = c - q = 4.5m$, $h^2 = p \cdot q = 1.5 \cdot 4.5 = 6.75$, $\Rightarrow h = \sqrt{6.75} \approx 2.6m$. (Abb. 421)
b) (aus Känguru 2019) Sei x die Seitenlänge des Quadrates, dann gilt (aus Symmetriegründen) $2p + x = 2 \Leftrightarrow p = 1 - 0.5x$ und $q = 2 - p = 1 + 0.5x$.

Nach dem Höhensatz ist: $(1 - 0.5x) \cdot (1 + 0.5x) = x^2 \overset{BinF}{\Longleftrightarrow} 1 - 0.25x^2 = x^2 \overset{+0.25x^2 : \frac{5}{4}}{\Longleftrightarrow} x^2 = 0.8$.

Aufg. 234/581: a) Alle Geraden, die zu $f(x) = 2x$ orthogonal sind haben die gleiche Steigung $m_\perp = \frac{-1}{2}$; Sie sind also von der Form $f(x) = \frac{-1}{2}x + c$. b) $m_\perp = \frac{-1}{3}$ bzw. $m_\perp = \frac{-1}{4}$.
c-e) Zur Gerade $y = mx + c$ ist die Gerade $y = \frac{-1}{m}x + c_1$ (c_1 beliebig) orthogonal. (Abb. 421)
Zwei Geraden $y = m_1 \cdot x + c_1$ und $y = m_2 \cdot x + c_2$ sind orthogonal $\Leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$ **(Formel 28)** .
ΔOAB ist rechtwinklig. Hier gilt der Höhensatz $h^2 = p \cdot q$ mit $h = \overline{OH}$, $p = \overline{AH}$ und $q = \overline{BH}$, also $1^2 = 2 \cdot |\frac{-1}{2}|$, $1^2 = m \cdot |\frac{-1}{m}|$. f) $y = 2(x + 1) + 4 = 2x + 6$.





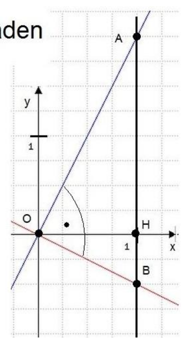


Abb. 421 LKW Aufgabe orthogonale Geraden

Aufg. 235/582: a) $k = \frac{c}{b} = \frac{b}{p} = \frac{a}{h}$; b) $\frac{c}{b} = \frac{b}{p} \Leftrightarrow b^2 = c \cdot p$ (Kathetensatz);
c) $\frac{c}{a} = \frac{a}{q} \Leftrightarrow a^2 = c \cdot q$ (auch ein Kathetensatz); d) Der Kathetensatz: Im rechtw. Dreieck (Abb. 137) gilt $a^2 = c \cdot p$ und $b^2 = c \cdot q$.

Aufg. 235/583: a) $a = 3,\ b = 4,\ c = 5,\ p = 1.8,\ q = 3.2,\ h = 2.4;$ b) $a = 12,\ b = 9,\ c = 15,\ p = 9.6,\ q = 5.4,\ h = 7.2;$ c) $a = 7,\ b = 24,\ c = 25,\ p = 1.96,\ q = 23.04,\ h = 6.72;$
d) $b^2 = c \cdot q,\ p + q = c \Leftrightarrow c - q = 92.16 \Leftrightarrow c = 92.16 + q \Leftrightarrow 28^2 = (92.16 + q) \cdot q \Leftrightarrow 784 = q^2 + 92.16 \cdot q$ $\Leftrightarrow q^2 + 92.16 \cdot q - 784 = 0 \Leftrightarrow q_1 = 7.84$ (oder $q_2 = -100$); $a = 96,\ c = 100,\ q = 7.84,\ h = 26.88;$

Aufg. 235/584: $c = 2,\ h = 0.8,\ p = 0.4,\ q = 1.6,$ (p und q können auch getauscht werden), $a = \sqrt{0.8} \approx 0.894,\ b = \sqrt{3.2} \approx 1.789.$ (Abb. 420)

15.9.3 LöVo zu Einheit 9.3 (Geometrie: Satz von Pythagoras UE 9_5)

Aufg. 235/585: a) Das Dreieck ist rechtwinklig. Es gilt $3^2 + 4^2 = 5^2$ oder $a^2 + b^2 = c^2$.
b) Das Dreieck ist wieder rechtwinklig und es gilt ebenfalls $5^2 + 12^2 = 13^2$ (Abb. 422).
c) Der Satz von Pythagoras: Sei ΔABC ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse c und Katheten a, b, dann gilt $a^2 + b^2 = c^2$.

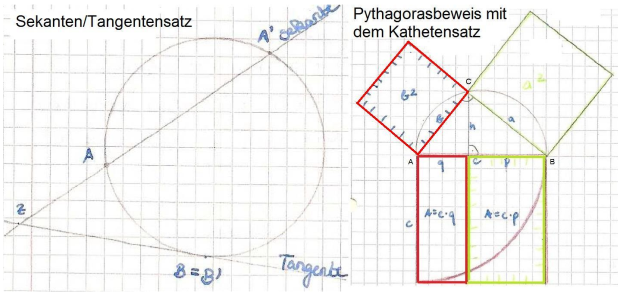


Abb. 422 Der Satz von Pythagoras

d) Nach dem Kathetensatz gilt $a^2 = c \cdot p$ und $b^2 = c \cdot q$. Beide Gleichungen addiert ergibt $a^2 + b^2 = c \cdot p + c \cdot q = c \cdot (p + q) = c^2$.

e) Die alten Ägypter machten in eine Schnur 13 (!) Knoten mit gleichem Abstand. Dieses Seil legten Sie zu einem (großen) Dreieck mit den Seitenlängen 3,4,5. Dieses Dreieck ist rechtwinklig. So konnten bei der Landvermessung rechte Winkel abgesteckt werden.

f) Drei natürliche Zahlen a, b, c heißen pythagoreisches Zahlentripel $\Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2$. $(3, 4, 5)$; $(5, 12, 13)$; $(7, 24, 25)$; $(8, 15, 17)$; $(9, 40, 41)$.

Aufg. 235/586: a) $c = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$; b) $c = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$; c) $c = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$;
d) $b = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$; e) $b = \sqrt{14^2 - 10^2} = \sqrt{96}$; f) $b = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$;
g) $b = \sqrt{41^2 - 9^2} = 40$; h) $c = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7$;

Aufg. 235/587: Die Aufgabe ist ohne Einheiten (dimensionslos) gestellt. Im Abitur notieren Sie in diesem Falle die Längen mit der Einheit LE und die Flächen mit der Einheit FE.

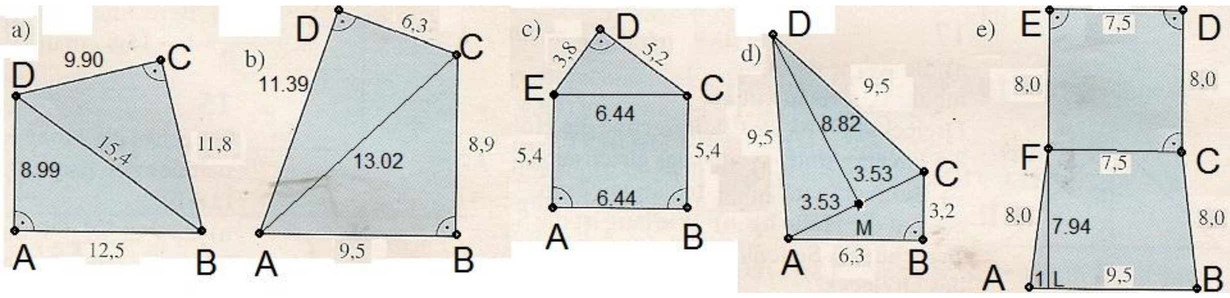


Abb. 423 Aufgaben zum Satz von Pythagoras

a) $\overline{AD} = \sqrt{15.4^2 - 12.5^2} = \sqrt{80.91} \approx 8.99$, $\overline{CD} = \sqrt{15.4^2 - 11.8^2} = \sqrt{97.92} \approx 9.90$,
$U \approx 12.5 + 11.8.8.99 + 9.90 = 43.19,\ A \approx 0.5(12.5 \cdot 8.99 + 11.8 \cdot 9.9) = 114.5975;$

b) $\overline{AC} = \sqrt{9.5^2 + 8.9^2} = \sqrt{169.46} \approx 13.02$, $\overline{AD} = \sqrt{13.02^2 - 6.3^2} = \sqrt{129.77} \approx 11.39$,
$U \approx 9.5 + 8.9 + 6.3 + 11.39 = 36.09,\ A \approx 0.5(9.5 \cdot 8.9 + 6.3 \cdot 11.39) = 78.1535;$

c) $\overline{CE} = \overline{AB} = \sqrt{5.2^2 + 3.8^2} = \sqrt{41.48} \approx 6.44$,
$U \approx 6.44 + 5.4 + 5.2 + 3.8 + 5.4 = 26.24,\ A \approx 6.44 \cdot 5.4 + 0.5(5.2 \cdot 3.8) = 44.656;$

d) $\overline{AC} = \sqrt{3.2^2 + 6.3^2} = \sqrt{49.93} \approx 7.066$, $\overline{AM} = \overline{CM} = 3.53$, $\overline{MD} = \sqrt{9.5^2 - 3.53^2} = \sqrt{77.77} \approx 8.82$,
$U = 6.3 + 3.2 + 9.5 + 9.5 = 28.5$, $A = 0.5 \cdot 6.3 \cdot 3.2 + 3.53 \cdot 8.82 = 41.2146$;

e) $\overline{AL} = \frac{9.5-7.5}{2} = 1$, $\overline{LF} = \sqrt{8^2 - 1^2} = \sqrt{63} \approx 7.94$,
$U = 9.5 + 7.5 + 4 \cdot 8 = 49$, $A = 7.5 \cdot 8 + \frac{7.5+9.5}{2} \cdot 7.94 = 127.49$ (Abb. 423);

Aufg. 235/588: a) $d = \sqrt{8^2 + (22-16)^2} = 8$, das Viereck ist ein Trapez,

$A = \frac{22+16}{2} \cdot 8 = 152$, $U = 22 + 8 + 16 + 10 = 56$;

b) $c = \sqrt{15.4^2 - 11.8^2} \approx 9.9$, $d = \sqrt{15.4^2 - 12.5^2} \approx 9.0$,

$A = \frac{9 \cdot 12.5}{2} + \frac{11.8 \cdot 9.9}{2} = 114.66$, $U = 9 + 12.5 + 11.8 + 9.9 = 43.2$;

c) $\overline{BD} = \sqrt{9.5^2 - 8.9^2} \approx 13.02$, $c = \sqrt{13.02^2 - 6.3^2} \approx 11.39$,

$A = \frac{6.3 \cdot 11.39}{2} + \frac{9.5 \cdot 8.9}{2} \approx 78.15$, $U = 6.3 + 11.39 + 9.5 + 8.9 = 36.09$;

d) $\overline{BD} = \sqrt{6.3^2 + 3.2^2} \approx 7.07$, ΔBDA ist gleichschenklig mit Höhe $h = \sqrt{9.5^2 - (\frac{7.07}{2})^2} \approx 8.82$,

$A = \frac{6.3 \cdot 3.2}{2} + \frac{7.07 \cdot 8.82}{2} \approx 41.26$, $U = 6.3 + 3.2 + 2 \cdot 9.5 = 28.5$;

Aufg. 236/589: a) M_1, M_2, M_3, M_4 ist ein Quadrat:
$\Delta M_4, A, M_1 = \Delta M_1, B, M_2 = \Delta M_2, C, M_3 = \Delta M_3, A, M_4$ nach *sws*
und der Winkel an den M_i ist $180° - \alpha - (90° - \alpha) = 90°$ mit $\alpha = \sphericalangle(A, M_1, M_4)$;
b) Dies sind die Bezeichnungen des SvP. $A = (a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}$;
c) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2$.

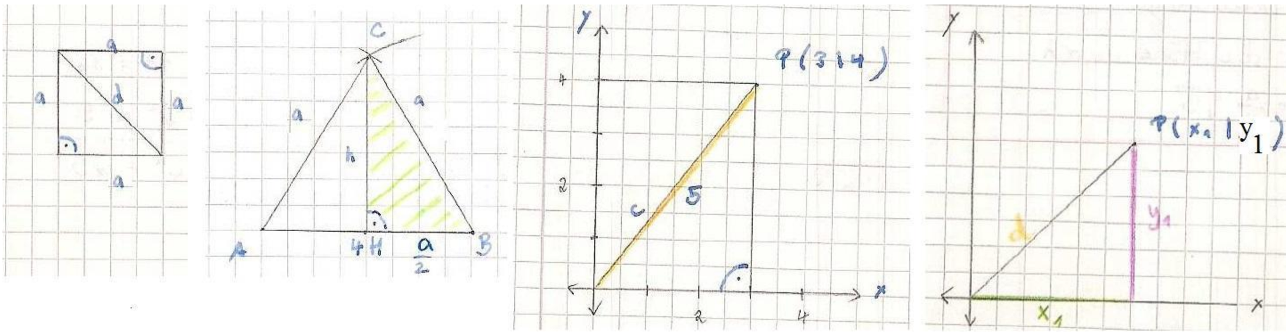


Abb. 424 Diagonale im Quadrat Höhe im gleichseitigen Dreieck Abstand im Koordinatensystem

Aufg. 236/590: $a = 1cm \Rightarrow d = \sqrt{2} \approx 1.4$, $a = 2cm \Rightarrow d = 2\sqrt{2} \approx 2.8$, $a = 5cm \Rightarrow d = 5\sqrt{2} \approx 7$,
$a = 10cm \Rightarrow d = 10\sqrt{2} \approx 14$; $d = a\sqrt{2} : d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$ (auswendig) (Abb. 424).

Aufg. 236/591: a) Im gleichseitigen Dreieck ist die Höhe gleichzeitig die Seitenhalbierende.
$a = 1cm \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$, $a = 2cm \Rightarrow h = \sqrt{3} \approx 1.732$, $a = 5cm \Rightarrow h = \frac{5\sqrt{3}}{2} \approx 4.33$,
$a = 10cm \Rightarrow h = 5\sqrt{3} \approx 8.66$, $h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} : h = \sqrt{a^2 - (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$ (ausw.) (Abb. 424);
b) $A = 6 \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}a^2$.

Aufg. 236/592: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a = \frac{2h}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x}$; $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$; i) $A = (3 + \frac{\sqrt{3}}{3})e^2$,
$U = (3 + \sqrt{3} + \sqrt{2})e$;

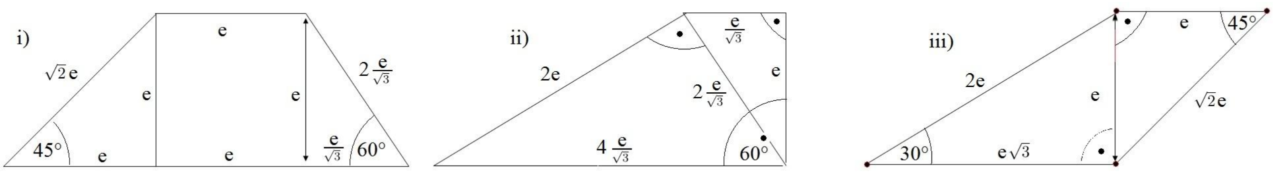


Abb. 425 Trapeze

ii) $A = \frac{5}{2\sqrt{3}}e^2$, $U = (3 + \frac{5\sqrt{3}}{3})e$; iii) $A = \frac{1+\sqrt{3}}{2}e^2$, $U = (3 + \sqrt{3} + \sqrt{2})e$. (Abb. 425)

Aufg. 236/593:

a) $d(O;P) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, b) $d(O;P_1) = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, c) $d(O;Q) = 12.5, d(O;R) = 4.1$;

Aufg. 236/594: (Abb. 424) **a)** $d(P,Q) = \sqrt{(6-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{25} = 5$;
b) i) $d = d(P,Q) = \sqrt{(3-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5}$; **ii)** $d = \sqrt{(4-3)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{17}$;
iii) $d = \sqrt{(1-6)^2 + (7-(-5))^2} = 13$; **c)** $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$;
d) i) $d(P;Q) = \sqrt{(6-1)^2 + (15-3)^2} = 13$; **ii)** $d = \sqrt{(0.5+1)^2 + (0-2)^2} = 2.5$;
iii) $d = \sqrt{(-2.1+3)^2 + (-2-2)^2} = 4.1$; **iv)** $d(P_3; P_4) = 0.5$;
e) $d(P_2, P_1) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = d(P_1, P_2)$; das Minus verschwindet durch das Quadrieren.

Aufg. 236/595: a) Ein Kreisrand ist die Menge aller Punkte, die von einem festen (Mittel-)Punkt M den gleichen Abstand r (Radius) haben. b) $P(\pm 3; \pm 4)$, $P(\pm 4; \pm 3)$, $P(0; \pm 5)$, $P(\pm 5; 0)$, $d(O;P) = 5$; c) nein (innerhalb), denn $d(O;Q) = \sqrt{(3.5-0)^2 + (3.5-0)^2} \approx 4.99 < 5$;
d) $\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25$, e) $x^2 + y^2 = r^2$; f)* $y = \pm\sqrt{r^2 + x^2}$, $y = +\sqrt{r^2 + x^2}$ entspricht dem oberen Halbkreisbogen, $y = -\sqrt{r^2 + x^2}$ dem Unteren (Abb. 426).

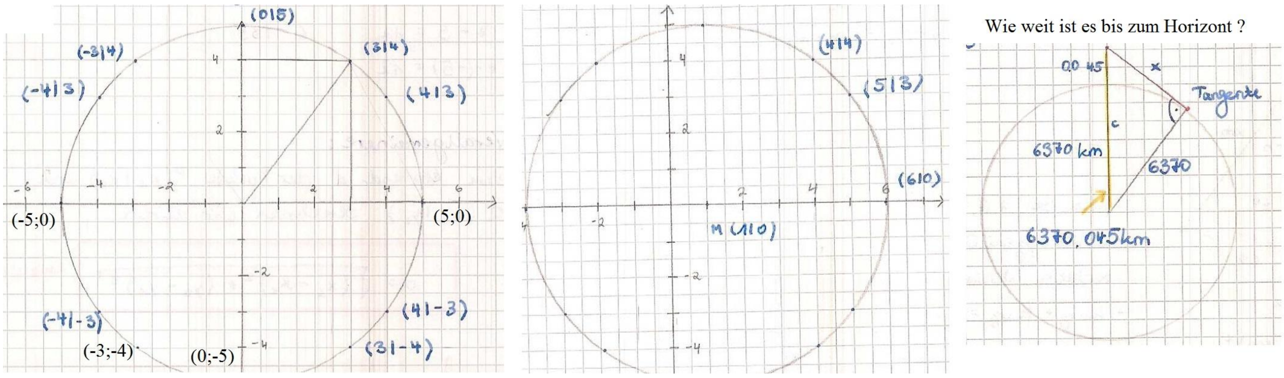


Abb. 426 Kreise im Koordinatensystem

Aufg. 236/596: a) $x^2 + y^2 = r^2$; b) $\sqrt{(4-1)^2 + (4-0)^2} = 5$; c) $\sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2} = 5$;
d) $(x - m_1)^2 + (y - m_2)^2 = r^2$; e) $y - y_1 = (x - x_1)^2$ (implizit) oder $y = (x - x_1)^2 - y_1$ (explizit);
f) x^2 wurde um m_1 nach links und um m_2 nach oben verschoben. $(x - m_1)^2 + (y - m_2)^2 = r^2$; entsteht aus $x^2 + y^2 = r^2$ durch die gleiche Verschiebung (Abb. 426).

Aufg. 237/597: Markise $=BC$; Lampe $L(2|0.5)$. Der schwingende Regenschutz ist ein Kreis K um $C(4|2.5)$ mit $r = 2.5 : (x-4)^2 + (y-2.5)^2 = 2.5^2$.

a) Das Dreieck $BCD(4|3)$ ist rechtwinklig mit dem Katheten $CD = 0.5$ und $BD = 4$;

$\alpha = \tan^{-1}(\frac{4}{0.5}) \approx 82.87°$.

b) $LC = \sqrt{(4-2)^2 + (2.5-0.5)^2} = 2\sqrt{2} \approx 2.828 > 2.5$ also 'nein', die Stablampe wird nicht berührt.

c) Die Lampe bewegt sich auf der Geraden $g : y = 0.5$.

$K \cap g$: $(x-4)^2 + (x-2.5)^2 = 2.5^2 \xrightarrow{y=0.5} (x-4)^2 + (0.5-2.5)^2 = 2.5^2 \Longrightarrow (x-4)^2 + 4 = 6.25$

$\Longrightarrow (x-4)^2 = 2.25 \xRightarrow{\sqrt{\cdot}} x - 4 = \pm\sqrt{2.25} \xRightarrow{\sqrt{\cdot}} x = 4 \pm 1.5 \Rightarrow x_1 = 2.5, x_2 = 6.5$.

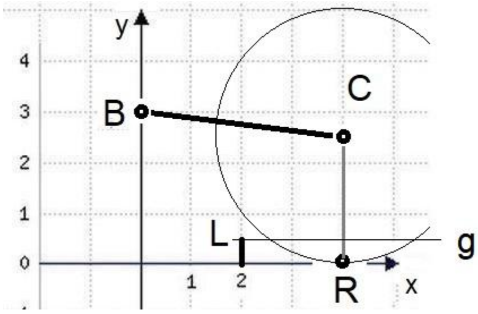


Abb. 427 Markise

Für $d = 2.5$ und $d = 6.5$ wird die Lampe gerade berührt. Damit muss $d < 2.5$ oder $d > 6.5$ gelten.

Aufg. 237/598: Es gilt $R^2 = (R-h)^2 + a^2$ und $R = \frac{h^2+a^2}{2h}$. a) $R = 100cm$, $h = 20cm$, $a = \pm 60cm$, b) $R = 100cm$, $h = 72cm$, $a = \pm 96cm$, c) $R = 100cm$, $a = 60cm$, $R - h = \pm 80cm$, $h_1 = 20cm$, oder $h_2 = 180cm$; d) $R = 17cm$, $a = 15cm$, $R - h = \pm 8cm$, $h_1 = 9cm$, oder $h_2 = 26cm$; e) $R = 36.25cm$, $h = 10cm$, $a = 25cm$. f) $R = 12.5cm$, $h = 5cm$, $a = 10cm$. (Abb. 429)

Aufg. 237/599: $w = (R+a)^2 - R^2$; a) $3.9km$; b) $23.94km$ (Abb. 426).

Tipp: Die Tangente an einen Kreis im Punkt B steht dort senkrecht auf dem Radius.

Aufg. 237/600: a) Das Dreieck BMP ist rechtwinklig ($t \perp$) auf dem Radius BM. Sei $r = |MB|$ und $x = |PA|$, dann gilt nach Pythagoras

$(x+r)^2 = (x+6)^2 + r^2 \overset{BinF}{\Longleftrightarrow} x^2 + 2rx + r^2 = x^2 + 12x + 36 + r^2 \overset{-x^2-r^2-12x}{\Longleftrightarrow} 2rx - 12x = 36 \overset{:2}{\Leftrightarrow}$ $(r-6)x = 18$. x,r sind ganzzahlig:

Damit sind folgende Kombinationen möglich: $(x; r)$: $(1; 24)$, $(2; 15)$, $(3; 12)$, $(6; 9)$, $(9; 8)$, $(18; 7)$.

Es sind 6 ($=T_{18}$ die Teilermenge von 18) Kombinationen möglich.

b) Um die Ag zu lösen, ist es sinnvoll den Baumstamm zu vierteln und dann abzuwickeln. Es entstehen Rechtecke sind 6 Fuß breit und 4.5 Fuß hoch und haben eine Diagonale von $\sqrt{4.5^2 + 6^2} = 7.5$ Fuß. Damit ist Kaa $4 \cdot 7.5 = 30$ Fuß lang.

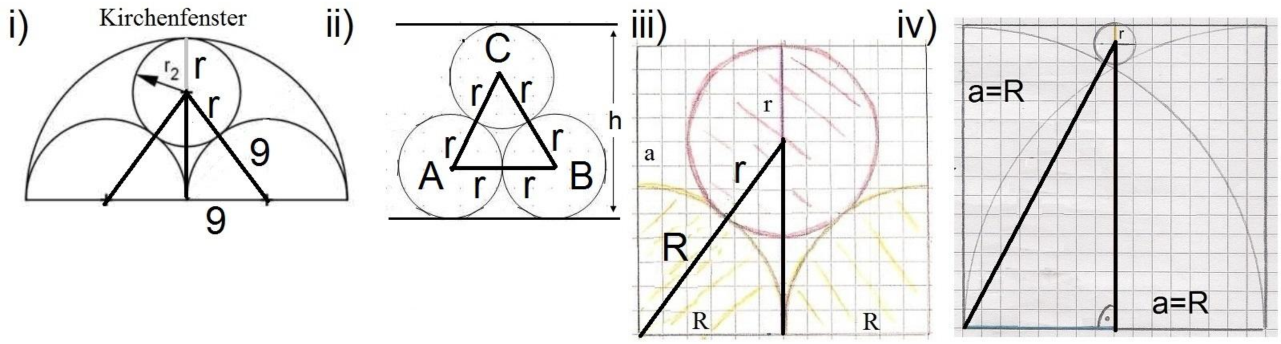


Abb. 428 Kirchenfenster

Aufg. 237/601: Bei den Teilen $b - e$ gilt immer $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (a-r)^2 = (R+r)^2$. a) Verbinden Sie u.a. die Mittelpunkte sich berührender Kreise; b) $r = 2cm$; c) $r = \frac{a}{3}$; d) $(R+r)^2 = (\frac{R}{2})^2 + (R-r)^2 \Leftrightarrow R^2 + 2rR + r^2 = \frac{R^2}{4} + R^2 - 2Rr + r^2 \Leftrightarrow 2rR = \frac{R^2}{4} - 2Rr \Leftrightarrow 4rR = \frac{R^2}{4} \Leftrightarrow r = \frac{R}{16}$, bzw. $r = 25$; e) $r = \frac{3a}{8}(2 - \sqrt{2})$; (Abb. 428), (Abb. 429).

Wenn sich zwei Kreise berühren, geht die Verbindungslinie der Mittelpunkte durch den Berührpunkt.

f) $(9+r)^2 = (18-r)^2 + 9^2 \Leftrightarrow 81 + 18r + r^2 = 324 - 36r + r^2 + 81 \Leftrightarrow 324 - 54r = 0 \Leftrightarrow r = 6$;

g) $\Delta(A, B, C)$ ist gleichseitig ($a = 2r$), $\Rightarrow h = r + \frac{2r}{2}\sqrt{3} + r = r(2 + \sqrt{3})$.

h) Denken Sie dich 2 berührende Kreise $r = 4$ mit dem Mittelpunktsabstand $d(M_1; M) = d(M_2; M)$=5. Das Dreieck $\Delta M_1, M_2, M$ hat also die Seitenlängen 5,5,8 und den Innenwinkel $\gamma = \cos^{-1}(\frac{5^2+5^2-8^2}{2\cdot5\cdot5})$ $\approx 106.26° > 90°$ also höchstens 3 Kreise, weil $90° < 106.26 < 120°$ (an M).

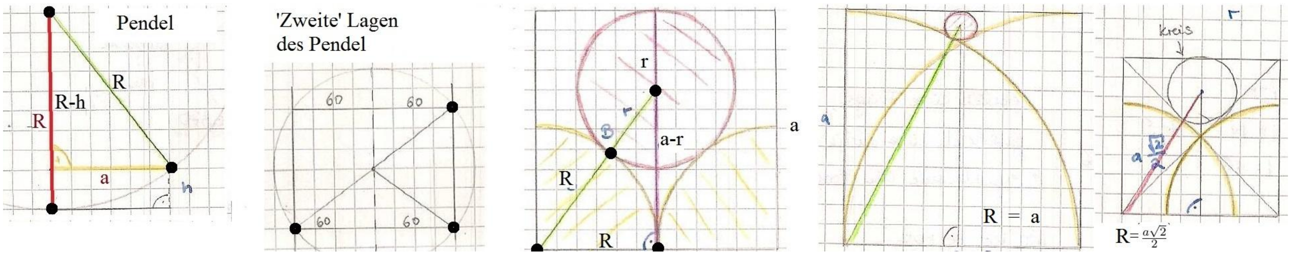


Abb. 429 Mathematisches Pendel Kirchenfenster

Aufg. 238/602: a) Wir konstruieren zuerst die Flächendiagonale d_c. b) $d_c = \sqrt{4^2 + 5.5^2} \approx 6.8$, $d = \sqrt{6.8^2 + 3^2} \approx 7.43$; c) $d_c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $d = \sqrt{d_c^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
d) i) $d = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$; ii) $d = \sqrt{2^2 + 6^2 + 9^2} = 11$; iii) $d = \sqrt{8^2 + 4^2 + 1^2} = 9$;
iv) $d = \sqrt{2^2 + 5^2 + 14^2} = 15$; v) $d = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$;

e) Vier <u>natürliche</u> Zahlen a, b, c, d heißen pythagoreisches Zahlenquadrupel $\Leftrightarrow$ $\underline{a^2 + b^2 + c^2 = d^2}$. $(1, 2, 2, 3)$; $(2, 3, 6, 7)$; $(1, 4, 8, 9)$; $(2, 6, 9, 11)$; $(9, 12, 20, 25)$; $(12, 15, 16, 25)$;

f) (aus Mathe Känguru 2019) Die eine Seite des Rechtecks ist $x\sqrt{2}$, die andere ist $\sqrt{(1-x)^2 + 1 + (1-x)^2}$; Ansatz für Quadrat: $\sqrt{(1-x)^2 + 1 + (1-x)^2} = x\sqrt{2} \Rightarrow 3 - 4x + 2x^2 = 2x^2 \xLeftrightarrow{-2x^2,+4x,:4} x = 0.75$ (Probe ok).

g) (ähnlich Mathe Känguru 2012) Es gilt $1.5^2 + 3.6^2 = 3.9^2$, damit ist $\Delta(A, B, C)$ rechtwinklig mit $\gamma = 90°$.

Sei P der Berührpunkt des Halbkreises mit $\overline{AB}$ und M dessen Mittelpunkt.

AM ist die Winkelhalbierende w_α im $\Delta(A, B, C)$. Dies liegt an der Inkreiskonstruktion: Der Inkreis ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden. Der Halbkreis ist zwar kein Inkreis von $\Delta(A, B, C)$, aber vom verdoppelten gleichschenkligen Dreieck $\Delta(A, B, D)$ (siehe Abb. 729/430) mit den Seitenlängen $\overline{AB}$ =3.9, $\overline{DB}$ =3.9 und $\overline{DA}$ =2 · 1.5=3.

Weil $\overline{MP} \perp \overline{AB}$ (Radius steht auf der Tangente ($\overline{AB}$) senkrecht) und $\gamma = 90°$ ist, ist $\Delta(A, M, C)$ nach sww kongruent zum $\Delta(M, A, P)$.

Also ist $\overline{AP} = 1.5$ und $\overline{BP} = 2.4$. Im $\Delta(M, P, B)$ gilt der Satz von Pythagoras:

$2.4^2 + r^2 = (3.6 - r)^2 \xLeftrightarrow{BinF} 5.76 + r^2 = 12.96 - 7.2r + r^2 \xLeftrightarrow{-r^2-5.76+7.2r} 7.2r = 7.2 \Leftrightarrow r = 1.$

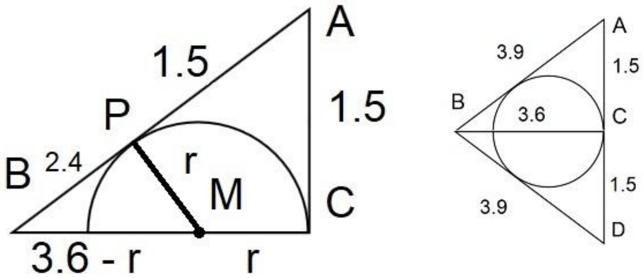


Abb. 430 In-Halb-Kreis + Ergänzung zum gleichschenkilgen Dreieck

Aufg. 238/603: b) Wir benötigen die Höhe einer Seitenfläche (= gleichschenkliges Dreieck) h_1.
c) $s^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow s \approx 5.93cm$, $h_1^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h_1 \approx 5.48cm$;
d) $O = a^2 + 4 \cdot \frac{a\cdot h_1}{2} \approx 69.6cm^2$. e) $h < h_1 < s$, oftmals sind h, h_1 und s ähnlich groß.

Aufg. 238/604:

Benutzte Formeln: $h_s^2 = (\frac{a}{2})^2 + h^2$, $s^2 = (\frac{a}{2})^2 + h_s^2$, $s^2 = (\frac{a\sqrt{2}}{2})^2 + h^2$, $O = a^2 + \frac{4 \cdot a \cdot h_s}{2} = a^2 + 2 \cdot a \cdot h_s$.

a) $h_s = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + h^2} = \sqrt{(\frac{6}{2})^2 + 4^2} = 5$, $s = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + h_s^2} = \sqrt{(\frac{6}{2})^2 + 5^2} = \sqrt{34} \approx 5.83$, $O = a^2 + 2 \cdot a \cdot h_s = 6^2 + 2 \cdot 6 \cdot 5 = 96$;

b) $h_s = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + h^2} = \sqrt{(\frac{10}{2})^2 + 12^2} = 13$, $s = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + h_s^2} = \sqrt{(\frac{10}{2})^2 + 13^2} = \sqrt{194} \approx 13.93$, $O = a^2 + 2 \cdot a \cdot h_s = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 13 = 360$;

c) $h = \sqrt{h_s^2 - (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{10^2 - (\frac{12}{2})^2} = 8$, $s = \sqrt{(\frac{12}{2})^2 + 10^2} = \sqrt{136} \approx 11.66$, $O = 12^2 + 2 \cdot 12 \cdot 10 = 384$;

d) $h = \sqrt{41^2 - (\frac{18}{2})^2} = 40$, $s = \sqrt{(\frac{18}{2})^2 + 41^2} = \sqrt{1762} \approx 41.98$, $O = 18^2 + 2 \cdot 18 \cdot 41 = 1800$;

e) $\frac{a}{2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8 \Rightarrow a = 16$, $s = \sqrt{(\frac{16}{2})^2 + 17^2} = \sqrt{353} \approx 18.79$, $O = 16^2 + 2 \cdot 16 \cdot 17 = 800$;

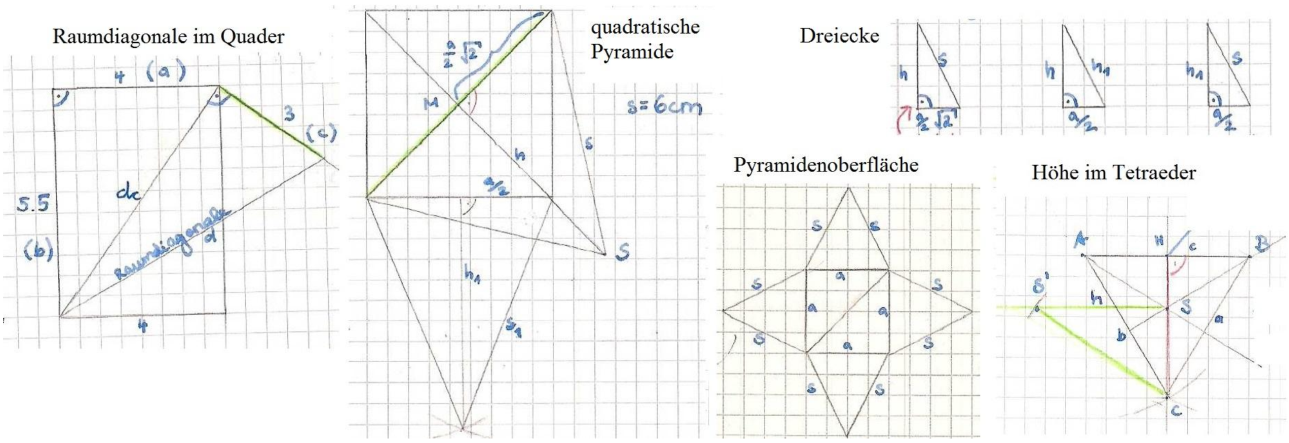


Abb. 431 Höhen in Pyramiden, Raumdiagonalen

f) $h = \sqrt{s^2 - \frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{25^2 - (14\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \sqrt{527} \Rightarrow h \approx 22.96$, $h_s = \sqrt{25^2 - (\frac{14}{2})^2} = 24$, $O = 14^2 + 2 \cdot 14 \cdot 24 = 868$;

g) $O = a^2 + 2 \cdot a \cdot h_s \Leftrightarrow 384 = 12^2 + 2 \cdot 12 \cdot h_s \Leftrightarrow 384 = 144 + 24 \cdot h_s \Leftrightarrow 244 = 24 \cdot h_s \Leftrightarrow h_s = 10$, $s = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + h_s^2} = \sqrt{(\frac{12}{2})^2 + 10^2} = \sqrt{136} \approx 11.66$, $h = \sqrt{h_s^2 - (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{10^2 - (\frac{12}{2})^2} = 8$;

h) $O = a^2 + 2 \cdot a \cdot h_s \Leftrightarrow 1440 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 26 \Leftrightarrow a^2 + 52 \cdot a - 1440 = 0 \Leftrightarrow a_{1,2} = \frac{-52 \pm \sqrt{52^2 + 4 \cdot 1440}}{2} \Leftrightarrow a_1 = 20, (a_2 = -72)$, $s = \sqrt{(\frac{20}{2})^2 + 26^2} = \sqrt{776} \approx 27.86$, $h = \sqrt{h_s^2 - (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{10^2 - (\frac{12}{2})^2} = 8$;

i) $O = a^2 + 2 \cdot a \cdot h_s \Leftrightarrow 19776 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 55 \Leftrightarrow a^2 + 110 \cdot a - 19776 = 0 \Leftrightarrow a_1 = 96, (a_2 = -206)$, $s = \sqrt{(\frac{96}{2})^2 + 55^2} = 73$, $h = \sqrt{55^2 - (\frac{96}{2})^2} = \sqrt{721} \approx 26.85$;

j) $h_s = \sqrt{50^2 - (\frac{a}{2})^2}$, $O = a^2 + 2 \cdot a \cdot h_s \Leftrightarrow 3472 = a^2 + 2 \cdot a \cdot h_s \Rightarrow 3472 = a^2 + 2 \cdot a \cdot \sqrt{50^2 - (\frac{a}{2})^2}$ das konnte ich nur numerisch (GTR) rechnen: $h_s = 28$ (Abb. 431).

AgTeil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	j)
a	6	10	12	18	18	14	12	20	96	28
h	4	12	8	40	15	22.96	8	24	26.85	45.91
h_s	5	13	10	41	17	24	10	26	55	48
s	5.83	13.93	11.66	41.98	18.79	25	11.66	27.86	73	50
O	96	360	384	1800	800	868	384	1440	19776	3472

Aufg. 239/606: a) Der Körper hat 8 Flächen. b) Sie h_p die Höhe einer Pyramide. $h_p^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$ $\Rightarrow h_p = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ oder $h = 2 \cdot h_p = a\sqrt{2}$ (dies entspricht auch der Diagonale der Grundfläche) (Abb. 431).

Aufg. 239/607: a) Der Schwerpunkt teilt die Seitenhalbierende im Verhältnis 2:1 (Abb. 431).
b) $h_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. h_1 ist gleichzeitig Schwerlinie die vom Schwerpunkt im Verhältnis 2:1 geteilt wird. Damit ist $h^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2$ oder $h = a\sqrt{\frac{2}{3}}$; für $a = 4$ ergibt sich $h \approx 3.27$.
c) Tetraeder und Oktaeder sind platonische Körper deren Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind. Beim Tetraeder sind es drei Dreiecke pro Ecke, beim Oktaeder sind es vier Dreiecke pro Ecke. 5 Dreiecke pro Ecke: Ikosaeder; Um eine Wölbung zu erzielen muss die Innenwinkelsumme der angrenzenden Flächen kleiner 360° sein; aber $6 \cdot 60° = 360°$. Hexaeder: drei Quadrate pro Ecke; Dodekaeder: drei Fünfecke pro Ecke. Platonische Körper sind Tetraeder, Hexaeder (Würfel), Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder (Abb. 432).

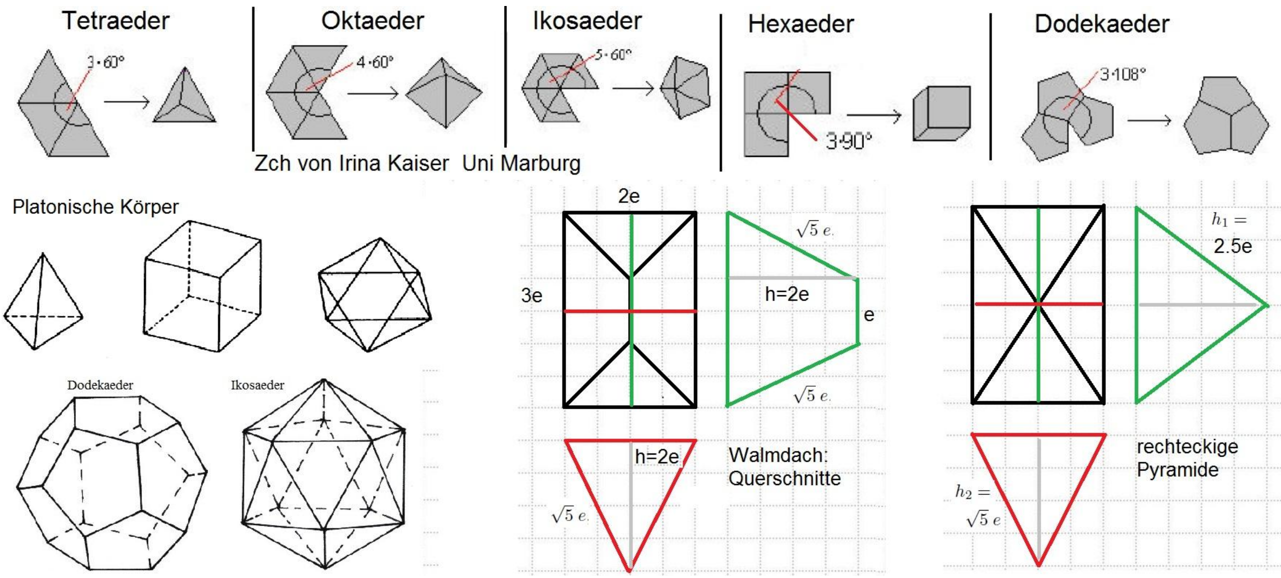


Abb. 432 Platonische Körper / Walmdach Risse

Aufg. 239/605: a) $h_1 = \sqrt{(2e)^2 + e^2} = \sqrt{5}\,e$, $s = \sqrt{(\sqrt{5}\,e)^2 + e^2} = \sqrt{6}\,e$, $g = (4\sqrt{6} + 1)e$.
$D = 2 \cdot \frac{2e}{2} \cdot \sqrt{5}\,e + \frac{3e+e}{2} \cdot \sqrt{5}\,e = 4\sqrt{5}\,e^2$; (Abb. 432)

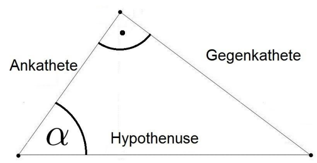
b) $h_1 = \sqrt{(4e)^2 + (3e)^2} = 5\,e = h_2$, $s = \sqrt{(5\,e)^2 + (3\,e)^2} = \sqrt{34}\,e$, $g = (4\sqrt{34} + 2)e$.
$D = 6e \cdot 5\,e + 2\frac{8e+2e}{2} \cdot 5\,e = 80\,e^2$;

c) i) $h_1 = \sqrt{(2e)^2 + (1.5e)^2} = 2.5e$, $h_2 = \sqrt{(2e)^2 + e^2} = \sqrt{5}\,e$,
Vorsicht 'Rollentausch' von h_1 und h_2. $s = \sqrt{(2.5e)^2 + e^2} = \sqrt{7.25}\,e$, oder
$s = \sqrt{(\sqrt{5}\,e)^2 + (1.5e)^2} = \sqrt{7.25}\,e \Rightarrow g = 2\sqrt{29}$; $D = 2e \cdot 2.5e + 3e \cdot \sqrt{5}\,e = (5 + 3\sqrt{5})\,e^2$.

ii) $h_{s1} = \sqrt{22.5} \cdot e$, $h_{s2} = 4e$, $s = \frac{5\sqrt{5}}{2} \cdot e$; $M = (3\sqrt{89} + 25) \cdot e^2$; Grat$=10\sqrt{5} \cdot e$.

Aufg. 239/608: $a^2 + b^2 = c^2$; i) $10^2 + 24^2 = 676 \Rightarrow c = \sqrt{676} = 26$,
ii) $82^2 - 80^2 = 324 \Rightarrow a = \sqrt{324} = 18$, iii) $65^2 - 16^2 = 3969 \Rightarrow b = \sqrt{3969} = 63$,
b) Alle Punkte $P(x; y)$, die die Gleichung $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 5^2$ erfüllen.

15.9.4 LöVo zu Einheit 9.4 (Winkelfunktionen UE 9_7)



Aufg. 239/609:
Die Dreiecke sind ähnlich. a) $k = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB}$;
b) Es kommt nur das Verhältnis $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$ in Frage: $\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$;
c) $\alpha \approx 37°$; d) $\frac{OA}{OB} = 0.8$; e) $\cos(37°) = 0.8$;
f+g) $\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}_\alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$.

Abb. 433 rechtwinkliges Dreieck

Aufg. 240/610:

$b = c \cdot \cos(\alpha)$, $a = c \cdot \cos(\beta)$, $c = \frac{b}{\cos(\alpha)}$, $c = \frac{a}{\cos(\beta)}$:

a)	$b = 6 \cdot \cos(20°) \approx 5.64cm$,	$\beta = 90° - \alpha = 70°$,	$a = 6 \cdot \cos(70°) \approx 2.05cm$;
b)	$b = 5 \cdot \cos(50°) \approx 3.21cm$,	$\beta = 40°$,	$a = 5 \cdot \cos(40°) \approx 3.83cm$;
c)	$b = 4 \cdot \cos(60°) = 2cm$,	$\beta = 30°$,	$a = 4 \cdot \cos(30°) \approx 3.64cm$;
d)	$c = \frac{b}{\cos(\alpha)} = \frac{6}{\cos(10°)} = 6.09cm$,	$\beta = 80°$,	$a \approx 6,09 \cdot \cos(80°) \approx 1.06cm$;
e)	$c = \frac{b}{\cos(\alpha)} = \frac{8}{\cos(37°)} \approx 10.02cm$,	$\beta = 53°$,	$a \approx 10.02 \cdot \cos(37°) \approx 6.03cm$;
f)	$c = \frac{4}{\cos(45°)} \approx 5.66cm$,	$\beta = 45°$,	$a = 5.66 \cdot \cos(45°) = 4cm$;
g)	$\beta = 60°$,	$c = \frac{a}{\cos(\beta)} = \frac{4}{\cos(60°)} = 8cm$,	$b = 8 \cdot \cos(30°) = 4\sqrt{3} \approx 6.93cm$.
h)	$\beta = 45°$,	$c = \frac{a}{\cos(\beta)} = \frac{6}{\cos(45°)} \approx 8.49cm$,	$b = 8.49 \cdot \cos(45°) = 6cm$.

Aufg. 240/611: a) Um aus einem Streckenverhältnis einen Winkel zu berechnen, muss man die Funktion Kosinus invertieren, weil Kosinus einen Winkel in ein Streckenverhältnis umwandelt. Dies bedeutet dass $\alpha = \underline{\cos^{-1}(\frac{a}{c})}$. b) $x^{-1} = \frac{1}{x}$.

Aufg. 240/612:

a)	$a = 3$,	$b = 4$,	$c = 5$,	$\alpha \approx 36.87°$,	$\beta \approx 53.13°$;
b)	$a = 5$,	$b = 12$,	$c = 13$,	$\alpha \approx 22.62°$,	$\beta \approx 67.38°$;
c)	$a = 8$,	$b = 15$,	$c = 17$,	$\alpha \approx 28.07°$,	$\beta \approx 61.93°$;
d)	$a = 2$,	$b = 1$,	$c = \sqrt{5}$,	$\alpha \approx 63.43°$,	$\beta \approx 26.57°$;
e)	$a = 2$,	$b = 5$,	$c = \sqrt{29}$,	$\alpha \approx 21.8°$,	$\beta \approx 68.2°$;
f)	$a = 0.7$,	$b = 2.4$,	$c = 2.5$,	$\alpha \approx 16.26°$,	$\beta \approx 73.74°$;
g)	$a = \sqrt{13}$,	$b = \sqrt{3}$,	$c = 4$,	$\alpha = 64.34°$,	$\beta = 25.66°$;
h)	$a = 4$,	$b = 4$,	$c = 4\sqrt{2}$,	$\alpha = 45°$,	$\beta = 45°$;

Aufg. 240/613: Die Formel $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$ gilt nicht, weil die Dreiecke nicht (unbedingt) rechtwinklig sind. Bei gleichschenkligen Dreiecken mit Basis c gilt $a = b$, $\alpha = \beta$, $a^2 = (\frac{c}{2})^2 + h_c^2$, $2b \cdot \cos\alpha = c$, $b \cdot \cos\frac{\gamma}{2} = h_c$, h_c ist auch Seitenhalbierende und Winkelhalbierende.

a)	$a = b = 5$,	$c = 8$,	$h_c = 3$,	$\alpha = \beta \approx 36.87°$,	$\gamma \approx 106.26°$;
b)	$a = b = 10$,	$c = 12$,	$h_c = 8$,	$\alpha = \beta \approx 53.13°$,	$\gamma \approx 73.74°$;
c)	$a = b = 13$,	$c = 10$,	$h_c = 12$,	$\alpha = \beta \approx 67.38°$,	$\gamma \approx 45.24°$;
d)	$a = b = \sqrt{5}$,	$c = 2$,	$h_c = 2$,	$\alpha = \beta \approx 63.43°$,	$\gamma \approx 53.14°$;
e)	$a = b = 6$,	$c = 6$,	$h_c = 3\sqrt{3}$,	$\alpha = \beta = 60°$,	$\gamma = 60°$;
f)	$a = b = 4\sqrt{2}$,	$c = 8$,	$h_c = 4$,	$\alpha = \beta = 45°$,	$\gamma = 90°$;
g)	$a = b = 12$,	$c \approx 8.21$,	$h_c \approx 11.28$,	$\alpha = \beta = 70°$,	$\gamma = 40°$;
h)	$a = b \approx 4.24$,	$c = 6$,	$h_c = 3$,	$\alpha = \beta = 45°$,	$\gamma = 90°$;
i)	$a = b \approx 5.53$,	$c = 10$,	$h_c \approx 2.33$,	$\alpha = \beta = 25°$,	$\gamma = 130°$;
j)	$a = b \approx 6.97$,	$c = 8$,	$h_c \approx 5.71$,	$\alpha = \beta = 55°$,	$\gamma = 70°$;
k)	$a = b \approx 6.62$,	$c \approx 5.596$,	$h_c = 6$,	$\alpha = \beta = 65°$,	$\gamma = 50°$;

L) $a = b \approx 10.15, \quad c \approx 3.53, \quad h_c = 10, \quad \alpha = \beta = 80°, \quad \gamma = 20°;$

Aufg. 240/614: a) $\overline{OA} = 1, \quad \overline{OC} = \overline{OA} \cdot \cos(\alpha) = \cos(\alpha)$. b) $\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$. c) Die Gerade durch E und T ist Tangente an K. d) ΔOAB und ΔOET sind ähnlich. $\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$.
e) G=Gegenkathete, A=Ankathete und H=Hypotenuse. $\cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$ ('Kotangens') wird hier nur zur Regel benötigt: $\sin(\alpha) = \frac{G}{H}$ $\quad \cos(\alpha) = \frac{A}{H}$ $\quad \tan(\alpha) = \frac{G}{A}$ $\quad \cot(\alpha) = \frac{A}{G}$.
f) Sinus, Kosinus und Tangens wandeln einen Winkel in ein Seitenverhältnis um.
g) ... das rechtwinklige Dreieck ... mit Hilfe des Satzes von Pythagoras ... $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.

Aufg. 240/615: a) $\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{3}{6} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}(\frac{3}{6}) = 30°;$ $\quad \beta = \cos^{-1}(\frac{3}{6}) = 60°;$

b) $\cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{3.6}{4.5} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(\frac{3.6}{4.5}) \approx 36.87°;$ $\quad \beta = \sin^{-1}(\frac{3.6}{4.5}) \approx 53.13°;$
c) $\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{2}{1} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}(\frac{2}{1}) \approx 63.43°;$ $\quad \beta = \tan^{-1}(\frac{1}{2}) \approx 26.57°;$
d) $\alpha = \cos^{-1}(\frac{2}{6}) \approx 70.53°;$ $\quad \beta = \sin^{-1}(\frac{2}{6}) \approx 19.47°;$
e) $\alpha = \tan^{-1}(\frac{4.5}{2.8}) \approx 31.89°;$ $\quad \beta = \tan^{-1}(\frac{2.8}{4.5}) \approx 58.11°;$
f) $\alpha = \cos^{-1}(\frac{3.2}{5.6}) \approx 55.15°;$ $\quad \beta = \sin^{-1}(\frac{3.2}{5.6}) \approx 34.85°;$

Aufg. 241/616: a) Vorsicht! Nachfolgendes Gefälle mit 10 % Steigung.
b+c) $\alpha \approx 5.71°, \quad \tan(\alpha) = \frac{p}{100};$ d) $p = \tan(\alpha) \cdot 100 \approx 35\%$.

e) Der Steigungswinkel kann durch eine Zeichnung ermittelt werden. $y = 2x : m \approx 63.43°$, $y = -x : m = -45°;$ f) $\alpha = \tan^{-1}(m)$ oder $\tan(\alpha) = m$.

g) $\arctan(x) + \arctan(1/x) = 90°$. Im rechtwinkligen Dreieck gilt $\alpha = \arctan(a/b)$; $\beta = 90° - \alpha = \arctan(b/a)$; $\arctan(a/b) + \arctan(b/a) = 90° - \alpha + \alpha = 90°;$

Aufg. 241/617:

$\alpha = \sin^{-1}(\frac{h}{h_1}) = \cos^{-1}(\frac{\frac{a}{2}}{h_1}), \quad \beta = \sin^{-1}(\frac{h}{s}) = \cos^{-1}(\frac{\frac{a}{2}\sqrt{2}}{s}), \quad \gamma = \sin^{-1}(\frac{h_1}{s}) = \cos^{-1}(\frac{\frac{a}{2}}{s}),$

a) $a = 6$, $s = \sqrt{34} \approx 5.83$, $\alpha = \sin^{-1}(\frac{4}{5}) \approx 53.1°$, $\beta = \sin^{-1}(\frac{4}{\sqrt{34}}) \approx 43.3°$, $\gamma = \sin^{-1}(\frac{5}{\sqrt{34}}) \approx 59.0°;$

b) $h_1 = \sqrt{20} \approx 4.47$, $s = \sqrt{24} \approx 4.9$, $\alpha = \sin^{-1}(\frac{4}{\sqrt{20}}) \approx 63.4°$, $\beta = \sin^{-1}(\frac{4}{\sqrt{24}}) \approx 54.7°$, $\gamma = \sin^{-1}(\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{24}}) \approx 65.9°;$

c) $a = 8$, $h_1 = \sqrt{20} \approx 4.47$, $\alpha = \sin^{-1}(\frac{2}{\sqrt{20}}) \approx 26.6°$, $\beta = \sin^{-1}(\frac{2}{6}) \approx 19.4°$, $\gamma = \sin^{-1}(\frac{\sqrt{20}}{6}) \approx 48.2°;$

d) $h = \sqrt{274} \approx 16.55$, $h_1 = \sqrt{299} \approx 17.29$, $\alpha = \sin^{-1}(\frac{\sqrt{274}}{\sqrt{299}}) \approx 73.2°$, $\beta = \sin^{-1}(\frac{\sqrt{274}}{18}) \approx 66.9°$, $\gamma = \sin^{-1}(\frac{\sqrt{299}}{18}) \approx 73.9°;$ (Abb. 434)
e) $h_1 = \frac{a}{2\cos(\alpha)};$ $a = 12$, $\alpha = 45°$, $h_1 = \sqrt{72} \approx 8.49$, $s = \sqrt{108} \approx 10.39$, $h = 6$,

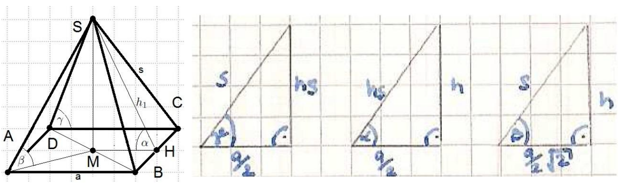


Abb. 434 Pyramiden und innere rechtwinklige Dreiecke (auswendig)

$\beta = \sin^{-1}(\frac{6}{\sqrt{108}}) \approx 35.26°$, $\gamma = \sin^{-1}(\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{108}}) \approx 53.47°;$

f) $s = \frac{h}{\sin(\beta)};$ $h = 24$, $\beta = 60°$, $s = \sqrt{768} \approx 27.71$, $a = \sqrt{384} \approx 19.6$, $h_1 = \sqrt{672} \approx 25.92$, $\alpha = \sin^{-1}(\frac{\sqrt{672}}{\sqrt{768}}) \approx 69.3°$, $\gamma = \sin^{-1}(\frac{24}{\sqrt{672}}) \approx 67.79°;$

g) $s = 20$, $\gamma = 50°$, $a \approx 25.71$, $h_1 \approx 15.32$, $h \approx 8.34$, $\alpha \approx 32.98°$, $\beta \approx 24.65°$.

Aufg. 241/618: a) $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (Höhe im gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge 1), $\sin(60°) = \frac{1}{2}$ (im gleichseitigen Dreieck ist die Höhe gleichzeitig die Seitenhalbierende), b) $\sin(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} =$

$\cos(45°)$ (ein Quadrat mit Diagonale 1 hat die Seitenlänge $a = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$), $\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (Höhe im gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge 1), $\cos(60°) = \frac{1}{2}$ (im gleichseitigen Dreieck ist die Höhe gleichzeitig die Seitenhalbierende),

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Merkregel:	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$

Aufg. 241/619: Analog zu verschiedenen Währungen gibt es mehrere Winkelmaße, z.B. das Bogenmaß. Für den Umfang eines Kreises mit Radius r gilt $U = \underline{2\pi \cdot r}$. Ein Kreis mit Umfang 2π hat also Radius $r = \underline{1}$. $180° \mathrel{\hat{=}} \pi$, $90° \mathrel{\hat{=}} \frac{\pi}{2}$, $30° \mathrel{\hat{=}} \frac{\pi}{6}$, $\alpha \mathrel{\hat{=}} \frac{2\pi \cdot \alpha}{360}$.

Aufg. 242/620: a) $\sin(30°) = 0.5$ aber auch $\sin(150°) = 0.5$; b) $\sin(45°) = \sin(135°) = 0.5\sqrt{2}$;
c) $\sin(60°) = \sin(120°) = 0.5\sqrt{3}$; d) $\sin(210°) = \sin(330°) = \sin(-30°) = -0.5$;
e) $\cos(60°) = \cos(300°) = 0.5$; f) $\cos(45°) = \cos(315°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; g) $\cos(30°) = \cos(330°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
h) $\cos(150°) = \cos(210°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; i) $\alpha_1 = 180° - \alpha_2$, oder $\sin(\alpha) = \sin(180° - \alpha)$
bzw. $\alpha_1 = 360° - \alpha_2$, oder $\cos(\alpha) = \cos(360° - \alpha)$ (für $0° \leq \alpha \leq 360°$).
j) Es gilt $\sin(\alpha) = \sin(\alpha + \underline{360°})$, man sagt deshalb $\sin(\alpha)$ ist $\underline{360°}$ periodisch. $\cos(\alpha)$ ist $360°$ periodisch; $\tan(\alpha)$ ist $180°$ periodisch! Beweis: Aufgabe 280 d).

Aufg. 242/621: ΔOAB und ΔOCD sind nach wsw kongruent:
Sei $E_y(0;1)$, dann gilt: $\overline{OB} = \overline{OD} = 1$,
$\sphericalangle (E_y, O, D) = \sphericalangle (B, O, A) = \alpha$, $\sphericalangle (O, C, D) = \sphericalangle (O, A, B) = 90°$.
$\sin(\alpha) = \overline{AB} = \overline{OC} = \cos(90° - \alpha)$,
$\cos(\alpha) = \overline{OB} = \overline{CD} = \sin(90° - \alpha)$ (Abb. 435).

Aufg. 242/622: b) Die 45° erinnern an die Diagonale in einem Quadrat in welchem $h_c = \frac{a}{\sqrt{2}}$ (Seitenlänge) einfach berechnet werden kann. c) h_c teilt ΔABC in <u>zwei rechtwinklige Dreiecke</u>.

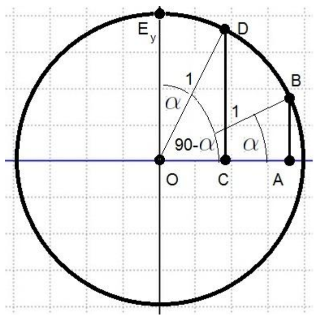


Abb. 435 Winkelfunktionen: $\cos(90° - \alpha) = \sin(\alpha)$

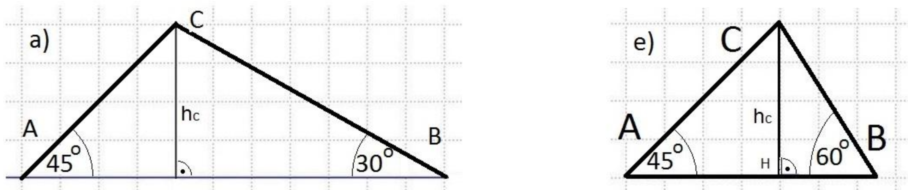


Abb. 436 Dreiecke mit speziellen Winkeln

d) $h_c = 4 \cdot \sin(45°) = 4$. $c_a = \overline{AH} = 4 \cdot \cos(45°) = 4$, $a = \frac{h_c}{\sin(30°)} = 8$; $c_b = a \cdot \cos(30°) = 4\sqrt{3}$;

e) $a = \frac{h_c}{\sin(60°)} = \frac{4}{0.5\sqrt{3}} = \frac{8}{3}\sqrt{3}$; $c_b = a \cdot \cos(60°) = \frac{4}{3}\sqrt{3}$; (Abb. 436)

Aufg. 242/623: a) $h_c = a \cdot \sin(\beta)$ und $h_c = b \cdot \sin(\alpha)$; $\frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$.

b) $\frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{a}$; $\frac{\sin(\beta)}{\sin(30°)} = \frac{3}{6} \Leftrightarrow \beta = \sin^{-1}(\frac{3 \cdot \sin(30°)}{6}) \Rightarrow \beta \approx 14.48°$.

c) $\frac{b}{a} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)}$; $\frac{b}{5} = \frac{\sin(60°)}{\sin(15°)} \Rightarrow b \approx 16.73$. d) $\frac{c}{a} = \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)}$; und $\frac{c}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\beta)}$;

e) Der Sinussatz ist mit dem Satz $\sin(\alpha) = \frac{GK}{Hy}$ verwandt. Für $\gamma = 90°$ gilt: $\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow \frac{\sin(\alpha)}{\sin(90°)} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow$ $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$ ($\sin(90°) = 1$) qed.

f) Mit dem Umfangswinkelsatz zeige man, dass $\frac{a}{\sin\alpha} = 2 \cdot R$ ist, wobei der Radius des Umkreises ist. Beweis kommt noch

g) Das Viereck (A, B, C, D) zerfällt in die Dreiecke $\Delta_1(A, B, C)$ und $\Delta_2(A, C, D)$ mit $\alpha_1 = 60°$, $\beta_1 = 59°$, $\gamma_1 = 61°$, $\alpha_2 = 59°$, $\gamma_2 = 61°$, $\delta_2 = 60°$. Nach dem Sinussatz ist die Seite am längsten, die dem größten Winkel gegenüber liegt. Damit kommen nur $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ in Frage, weil beide gegenüber von einem 61° Winkel liegen. Sei $x = \overline{AC}$, dann ist nach dem Sinussatz

im Δ_1 : $\frac{x}{\sin(59°)} = \frac{\overline{AB}}{\sin(61°)} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{x\sin(61°)}{\sin(59°)}$;

im Δ_2 : $\frac{x}{\sin(60°)} = \frac{\overline{AD}}{\sin(61°)} \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{x\sin(61°)}{\sin(60°)} < \frac{x\sin(61°)}{\sin(59°)} = \overline{AB}$. Damit ist $\overline{AB}$ am längsten.

Aufg. 242/624: a+b) Die 60° gleichseitiges Dreieck in welchem $h_c = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ einfach berechnet werden kann.
h_c teilt ΔABC in zwei rechtwinklige Dreiecke (Abb. 437).
$h_c = 4 \cdot \sin(60°) \approx 3.5$. $c_1 = \overline{AH} = 4 \cdot \cos(60°) = 2$,
$c_2 = \overline{HB} = c - \overline{AH} = 6 - 2 = 4$, $a = \sqrt{h_c^2 + c_2^2} = \sqrt{28} \approx 5.29cm$.

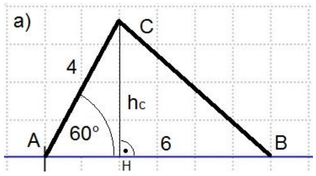


Abb. 437 Dreiecke mit speziellen Winkeln

Aufg. 242/625: a) $h_c^2 = b^2 - c_a^2 = a^2 - c_b^2$, $c_b = c - c_a$, damit gilt:
$b^2 - c_a^2 = a^2 - (c - c_a)^2 \Leftrightarrow b^2 - c_a^2 = a^2 - c^2 + 2c \cdot c_a - c_a^2 \Leftrightarrow 2c \cdot c_a = b^2 + c^2 - a^2$,
mit $c_a = b \cdot \cos(\alpha)$ ist $2bc \cdot \cos(\alpha) = b^2 + c^2 - a^2$ oder $\cos(\alpha) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.
b) $\cos(\beta) = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ und $\cos(\gamma) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$;
c) $\cos(\alpha) = \frac{3^2+4^2-6^2}{2\cdot3\cdot4} = \frac{-11}{24} \Rightarrow \alpha \approx 117.28°$;
d) $\cos(120°) = \frac{5^2+c^2-7^2}{2\cdot5\cdot c} \Leftrightarrow 5c = c^2 - 24 \Leftrightarrow c_1 = 3, (c_2 = -8)$;
e) Teil b): $\cos(\beta) = \frac{43}{48}$, $\Rightarrow \beta \approx 26.38°$, $\cos(\gamma) = \frac{29}{36}$, $\Rightarrow \gamma \approx 36.34°$;
Teil c): $\cos(\beta) = \frac{33}{42}$, $\Rightarrow \beta \approx 38.21°$, $\cos(\gamma) = \frac{65}{70}$, $\Rightarrow \gamma \approx 21.79°$;
f) Wenn von einem nicht (unbedingt) rechtwinkligen Dreieck alle Seiten bekannt sind, dann kann man mit Hilfe des Kosinussatzes jeden Winkel (direkt) berechnen.

g) Der Kosinussatz ist mit dem Satz von Pythagoras verwandt. Für $\gamma = 90°$ gilt: $\cos(\gamma) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \Leftrightarrow$ $\cos(90°) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \Leftrightarrow 0 = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \Leftrightarrow 0 = a^2 + b^2 - c^2$ (SvP) $(\cos(90°) = 0)$.

Aufg. 243/626: a) $h_c = a \cdot \sin(\beta) = 2\sqrt{2} \approx 2.82cm$, $c_2 = a \cdot \cos(\beta) = 2\sqrt{2} \approx 2.82cm$,
$\gamma = 180° - 45° - 30° = 105°$, $\gamma_2 = 180° - 90° - 45° = 45°$, $\gamma_1 = \gamma - \gamma_2 = 60°$, (Abb. 438)
$b = \frac{h_c}{\sin(30°)} = 4\sqrt{2} \approx 5.66$, $c_1 = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{24} \approx 4.9cm$, $c = c_1 + c_2 = \sqrt{24} + 2\sqrt{2} \approx 7.73cm$.

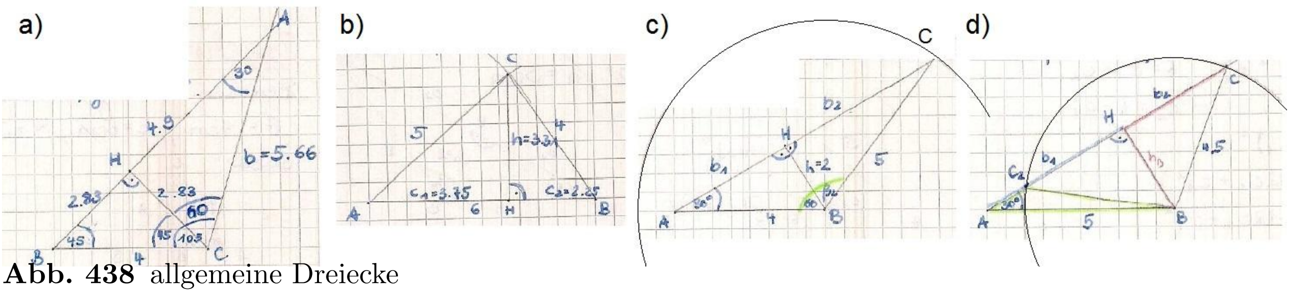


Abb. 438 allgemeine Dreiecke

b) Wir berechnen h_c auf zwei Weisen: $h_c^2 = b^2 - c_1^2 = a^2 - c_2^2$ mit $c_2 = c - c_1 \Rightarrow 5^2 - c_1^2 = 4^2 - (6 - c_1)^2 \Leftrightarrow$ $25 - c_1^2 = 16 - (36 - 12c_1 + c_1^2) \Leftrightarrow c_1 = 3.75$ und $c_2 = 6 - 3.75 = 2.25cm$, $h_c = \sqrt{5^2 - 3.75^2} \approx 3.31cm$, $\alpha = \cos^{-1}(\frac{c_1}{b}) \approx 41.41°$, $\beta = \cos^{-1}(\frac{c_2}{a}) \approx 55.77°$, $\gamma = 180° - \alpha - \beta \approx 82.82°$.

c) $h_b = c \cdot \sin(\alpha) = 4 \cdot \sin(30°) = 2cm$, $b_1 = c \cdot \cos(\alpha) = 4 \cdot \cos(30°) \approx 3.46cm$,
$b_2 = \sqrt{a^2 - h_b^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} \approx 4.58cm$, $b = b_1 + b_2 \approx 8.05cm$, $\gamma = \sin^{-1}(\frac{h_b}{a}) \approx 23.58°$,
$\beta = \cos^{-1}(\frac{h_b}{c}) + \cos^{-1}(\frac{h_b}{a}) \approx 126.42°$, (kann auch mit Winkelsumme gerechnet werden).

d) $h_b = 5 \cdot \sin(30°) = 2.5cm$, $b_1 = 5 \cdot \cos(30°) \approx 4.33cm$, $b_2 = \sqrt{4.5^2 - 2.5^2} = \sqrt{14} \approx 3.74cm$, Das Dreieck ist aber nicht eindeutig, weil nicht der gegenüberliegende Winkel der größeren Seite gegeben ist (siehe auch Zeichnung). Hier gilt $b = b_1 \pm b_2$, $\overline{AC_1} \approx 8.05cm$ und $\overline{AC_2} \approx 0.59cm$. Im Dreieck ΔABC_1 ist $\gamma \approx 56.25°$ und $\beta \approx 93.25°$; im ΔABC_2 gilt $\gamma \approx 123.75°$ und $\beta \approx 26.25°$;

e) $h_b = b \cdot \sin(\gamma) = 2cm$, $a_c = b \cdot \cos(\gamma) = 2\sqrt{3} \approx 3.464$ cm, $a_b = \sqrt{c^2 - h_b^2} = \sqrt{5} \approx 2.236$ cm,

$\Delta CAB_1 : a = a_c + a_b \approx 5.7cm$, $\beta \approx 138.2°$, $\alpha \approx 11.8°$,

$\Delta CAB_2 : a = a_c - a_b \approx 1.228cm$, $\beta \approx 41.8°$, $\alpha \approx 108.2°$;

f) $\gamma = \cos^{-1}(0.125) \approx 82.81°$, $\beta = \cos^{-1}(0.5625) \approx 55.77°$, $\alpha = \cos^{-1}(0.75) \approx 41.41°$;

g) $c = \sqrt{496} \approx 22.27cm$, $\beta \approx 68.95°$, $\alpha \approx 51.05°$; h) $\alpha = 85°$, $b \approx 5.52cm$, $c \approx 12.26cm$.

i) Sei $a = 1$, dann ist $h_c = \sin(15°)$ (genannt x) und sei H der Höhenfußpunkt, dann ist $\overline{AH} = x$, $\overline{HB} = \sqrt{1 - x^2}$, $b = x\sqrt{2}$, $c = x + \sqrt{1 - x^2}$ und $\gamma = 120°$, (Abb. 439). Nach dem Kosinussatz gilt

$\cos(120°) = \frac{(x\sqrt{2})^2 + 1^2 - (x + \sqrt{1-x^2})^2}{2 \cdot x\sqrt{2} \cdot 1} \Leftrightarrow \frac{-1}{2} = \frac{2x^2 + 1 - (x^2 + 2x\sqrt{1-x^2} + 1 - x^2)}{2\sqrt{2}x} \Leftrightarrow -\sqrt{2}x = 2x^2 - 2x\sqrt{1-x^2}$ $\overset{x \neq 0}{\Longleftrightarrow} x + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + \sqrt{2}x + \frac{1}{2} = 1 - x^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 2\sqrt{2}x - 1 \Leftrightarrow$ $x_{1,2} = \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{6}}{4}$ damit ist $0 < x = \sin(15°) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4}$.

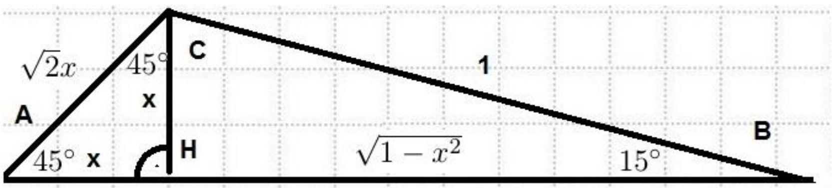


Abb. 439 Dreieck mit 15° Winkel

j) Sei $\Delta(A, B, C)$ mit $\gamma = 90°$ das Dreieck. Der Winkel β soll halbiert (Winkelhalbierende w_b) werden. Sei $W = b \cap w_b$, $\overline{AW} = 2$, $\overline{WC} = 1$, $\overline{AC} = b = 3$. Sei weiterhin $x = \overline{BW}$, dann gilt $a = \sqrt{x^2 - 1}$; $\Delta(B, C, W)$ ist rechtwinklig und $c = \sqrt{x^2 + 8}$. Im $\Delta(B, C, M)$ wird $\cos(\beta) = \frac{A}{H} = \frac{a}{w_b}$; im $\Delta(A, B, M)$ wurde der Kosinussatz $\cos(\beta) = \frac{c^2 + w_b^2 - 2^2}{2w_b c}$ angewendet.

$$(\cos\beta =)\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \frac{x^2 + x^2 + 8 - 4}{2x\sqrt{x^2 + 8}} \overset{\cdot x}{\Longleftrightarrow} \sqrt{x^2 - 1} = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 8}}$$

$$\overset{\cdot\sqrt{x^2+8}}{\Longleftrightarrow} \sqrt{x^2 - 1} \cdot \sqrt{x^2 + 8} = x^2 + 2 \overset{quad.}{\Longleftrightarrow} (x^2 - 1)(x^2 + 8) = x^4 + 4x^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 8x^2 - x^2 - 8 = x^4 + 4x^2 + 4 \overset{-x^4 - 4x^2 + 8}{\Longleftrightarrow} 3x^2 = 12 \Leftrightarrow x = (\pm)2$$

Aufg. 243/628: a) Sinussatz: $\frac{\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} = \frac{8}{7} \Leftrightarrow \gamma = \sin^{-1}\left(\frac{8 \cdot \sin(60°)}{7}\right) \approx 81.79°$ $\beta = 180° - \gamma - \alpha \approx 38.21°$; $b = \frac{a \cdot \sin(\beta)}{\sin(\alpha)} = 5$ (exakt!).

Kosinussatz: $\cos(60°) = \frac{b^2 + 8^2 - 7^2}{2b \cdot 8} \Leftrightarrow 0.5 = \frac{b^2 + 15}{16 \cdot b} \Leftrightarrow 8b = b^2 + 15 \Leftrightarrow b_1 = 3, b_2 = 5$; $\beta_1 = \cos^{-1}(\frac{a^2 + c^2 - b_1^2}{2ac}) = \cos^{-1}(\frac{7^2 + 8^2 - 3^2}{2 \cdot 7 \cdot 8}) \approx 21.79°$, $\gamma_1 = \cos^{-1}(\frac{a^2 + b_2^2 - c^2}{2ab_1}) = \cos^{-1}(\frac{7^2 + 3^2 - 8^2}{2 \cdot 7 \cdot 3}) \approx 98.21°$; $\beta_2 \approx 38.21°$, $\gamma_2 \approx 81.79°$;

Tatsächlich gibt zwei Dreiecke, denn es ist der gegenüberliegende Winkel der kleineren Seite gegeben. Damit ist der Kosinussatz dem Sinussatz überlegen. In diesem Fall muss bei Verwendung des Sinussatzes die Formel $\beta_2 = 180° - \beta 1$ (F36) angewendet werden.

b) Beim Kosinussatz sind drei Seiten und ein Winkel involviert - beim Sinussatz zwei Seiten und deren gegenüberliegende Winkel.

sss	Kosinussatz	drei Seiten gegeben - jeder Winkel kann gerechnet werden;
sws	Kosinussatz	die Seite gegenüber dem Winkel kann gerechnet werden;
wsw	Sinussatz	nur bei Sinussatz sind zwei Winkel involviert;
Ssw	Kosinussatz	eigentlich sind beide Sätze möglich; doch im sSw Fall liefert der Kosinussatz beide Lösungen, der Sinussatz nur eine. Im Zweifelsfalle also Kosinussatz!

c) Folgende Gleichungen sind eindeutig (oder gar nicht - siehe Aufgabe 544) lösbar:
$\gamma = \cos^{-1}(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab})$ (sss), also a, b, c gegeben; $a = \frac{\sin(\alpha)\cdot b}{\sin(\beta)}$ (sww), also α, b, β gegeben;
$c = (\pm)\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos(\gamma)}$ (sws), also a, b, γ gegeben;
$0 = a^2 - 2ab\cos(\gamma) + b^2 - c^2$ (Ssw), also b, c, γ gegeben ist für $b^2 - c^2 < 0$ oder $c > b$ eindeutig (positiv - die zweite Lösung ist sicher negativ) nach a auflösbar.

Aufg. 243/629: a) $\cos(\alpha) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \Leftrightarrow \cos(36.87°) = \frac{8^2+c^2-6^2}{2\cdot 8\cdot c} \Leftrightarrow \cos(36.87°) = \frac{8^2+c^2-6^2}{2\cdot 8\cdot c} \Leftrightarrow 0.8 = \frac{64+c^2-36}{16c} \Leftrightarrow 12.8c = c^2 + 28 \Leftrightarrow c_1 = 10; c_2 = 2.8$;

$\Delta_1 : c = 10,\ \gamma = 90°,\ \beta \approx 53.13°$; $\Delta_2 : c = 2.8,\ \gamma \approx 126.87°,\ \beta \approx 16.26°$;

b) $\Delta_1 : c = 8,\ \gamma = 30°,\ \beta = 120°$; $\Delta_2 : c = 4,\ \gamma = 90°,\ \beta = 60°$;

c) $\Delta_1 : c = 5 - \sqrt{6} \approx 2.55,\ \gamma \approx 14.2°,\ \beta \approx 105.8°$; $\Delta_2 : c = 5 + \sqrt{6} \approx 7.45,\ \gamma \approx 45.8°,\ \beta \approx 74.2°$;

Aufg. 243/627: a) **i)** Man darf genau dann Auto fahren, wenn man den Führerschein hat.
ii) Der heilige Abend ist genau am 24.12.
b) Wenn es regnet ist die Straße nass - Es gilt nicht: Wenn die Straße nass ist, dann regnet es.
c) **i)** Wenn sich in einem Viereck die Diagonalen halbieren, dann ist es ein Parallelogramm $\surd$.
Dies Aussage ist falsch: **ii)** Wenn sich in einem Viereck die Diagonalen halbieren, dann ist es eine Raute. **iii)** In einer Raute halbieren sich die Diagonalen orthogonal $\surd$.
d) Δ in ein Achsenkreuz $C(0|0)$, $A(b|0)$, $B(0|a)$, ist rechtwinklig ($\gamma = 90°$); $M_{ab}(\frac{b}{2}|\frac{b}{2})$,
$d(A, M_{ab}) = d(B, M_{ab}) = d(C, M_{ab}) = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$.
e) Kosinussatz: $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\cos(\gamma)$ mit $a^2 + b^2 = c^2$ ist $2ab\cos(\gamma) = 0$ oder $\gamma = 90°$.

Aufg. 243/630: a) $2^2 + \sqrt{12}^2 = 16 \Rightarrow c = \sqrt{16} = 4$; $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{2}{4}\right) = 30°$; $\beta = 60°$;

b) $\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \Leftrightarrow \sin(45°) = \frac{a}{\sqrt{18}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{3\sqrt{2}} \quad | \cdot 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{3\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2} = a \Leftrightarrow a = 3$; $b = 3, \beta = 45°$

c) $\cos(\alpha) = \frac{b}{c} \Leftrightarrow \cos(60°) = \frac{\sqrt{48}}{c} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{c} \quad | \cdot c : \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{c}{2} = 4 \Leftrightarrow c = 8$; $a = 4, \beta = 30°$.

15.9.5 LöVo zu Einheit 9.5 (Kreisflächen UE 9_9)

Aufg. 243/631: a) Sei K ein Kreis mit Umgang U und Radius r, dann ist $\pi = \frac{U}{2r}$ für alle K.

b) π ist irrational (wird in der Schule nicht bewiesen).

c) Es gibt keine letzte Ziffer, Chuck Norris kennt sie trotzdem, hat sie mir aber nicht verraten.

Aufg. 243/632: a) $40000km$, das Meter ist definiert als der 10 Millionste Teil des Abstandes N zum Äquator. b) $r = \frac{U}{2\pi} \approx 6367.4km$.

c) Die Erde ist ein Ellipsoid, deshalb ist der Äquator etwa $40075km$ lang.

d+e) Sei R der neue Radius (und r der alte Radius), dann ist $R = \frac{2\pi r+1}{2\pi} = r + \frac{1}{2\pi} \approx r + 0.1588$. Das Band ist also in einer Höhe von etwa $16cm$ (Igel!) unabhängig vom Radius des Planeten.

Aufg. 243/633: a) Rechteck mit Länge r und Breite $\approx \frac{U}{2}$; b) $A = r \cdot \frac{U}{2} = \pi r^2$.

Aufg. 244/634: a) Beide Größen entsprechen dem $\frac{\alpha}{360}$ Teil der ganzen Größe. $A = \frac{\alpha}{360} \cdot \pi r^2$, $b = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r$; (Abb. 440) **b)** i) $A = A_{\text{Quad}} - A_{\text{Kreis}} = e^2 - \pi(\frac{e}{2})^2 = e^2(1 - \frac{\pi}{4})$;

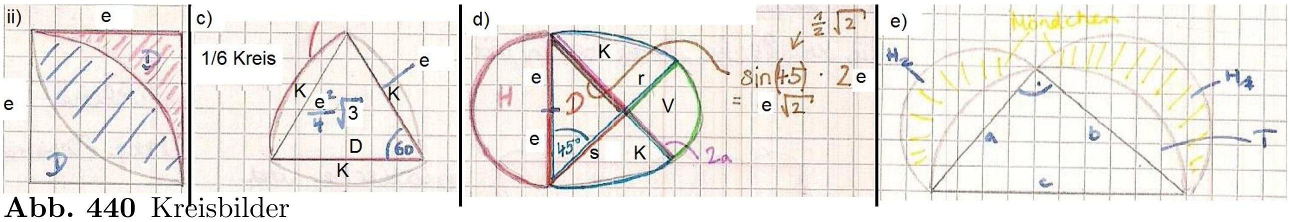


Abb. 440 Kreisbilder

ii) $D = e^2 - \frac{1}{4}\pi e^2$, $A = A_{\text{Quad}} - 2D = e^2 - 2(e^2 - \frac{\pi}{4}e^2) = e^2(\frac{\pi}{2} - 1)$;

iii) $A = 2\cdot$ Viertelkreise $+\, 2 \cdot D = \frac{a^2}{2}$;

iv) A ist 4 Mal die Fläche aus b) $A = 4 \cdot (\frac{e}{2})^2(\frac{\pi}{2} - 1) = e^2(\frac{\pi}{2} - 1)$.

c) $K = \frac{60}{360}\pi e^2 - \frac{\sqrt{3}e^2}{4}$, $A = 3K + D = \frac{3\pi}{6}e^2 - \frac{2\sqrt{3}e^2}{4} = e^2(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2})$.

d) $s + r = 2e$, $s = \sin(45°) \cdot 2e = \sqrt{2}e$, $r = 2e - s = (2 - \sqrt{2})e$, $H = \frac{\pi e^2}{2}$, $D = \frac{s^2}{2} = e^2$,

$K = \frac{45}{360} \cdot \pi(2e)^2 - e^2 = (\frac{\pi}{2} - 1)e^2$, $V = \frac{1}{4}\pi(2 - \sqrt{2})^2 e^2 = \frac{\pi}{4}(4 - 4\sqrt{2} + 2)e^2 = \pi(\frac{3}{2} - \sqrt{2})e^2$,

$A = H + D + 2K + V = \frac{\pi e^2}{2} + e^2 + 2(\frac{\pi}{2} - 1)e^2 + \pi(\frac{3}{2} - \sqrt{2})e^2 = e^2(3\pi - 1 - \pi\sqrt{2}) \approx 4e^2$.

e) $M = H_1 + H_2 + D - T = \frac{\pi}{2}(\frac{b}{2})^2 + \frac{\pi}{2}(\frac{a}{2})^2 + \frac{ab}{2} - \frac{\pi}{2}(\frac{c}{2})^2 = \frac{\pi}{8}(a^2 + b^2 - c^2) + \frac{ab}{2} = \frac{ab}{2}$.

Aufg. 244/635: a) ΔMHN : $e^2 + (2e - r)^2 = (r + e)^2 \Leftrightarrow e^2 + 4e^2 - 4re + r^2 = r^2 + 2re + e^2 \Leftrightarrow 4e^2 - 4re = 2re \Leftrightarrow r = \frac{2}{3}e\ (e \neq 0)$; $A = \pi(2e)^2 - \frac{2}{2}\pi e^2 - \pi(\frac{2e}{3})^2 = \frac{23}{9}\pi e^2$

b) Die Kreismitte des großen Kreises (mit Radius R) ist der Schwerpunkt des (gleichseitigen) Dreiecks $\Delta M_1M_2M_3$ (Abb. 441) Damit ist
$R = \frac{2}{3}h + e = \frac{(2\sqrt{3}+3)e}{3}$, $(h = e\sqrt{3})$.
$A = \pi R^2 - 3\pi e^2 = \pi e^2(\frac{(2\sqrt{3}+3)^2}{3^2} - 3)$
$= \pi e^2(\frac{12+12\sqrt{3}+9-27}{9}) = \pi e^2(\frac{4\sqrt{3}-2}{3})$.

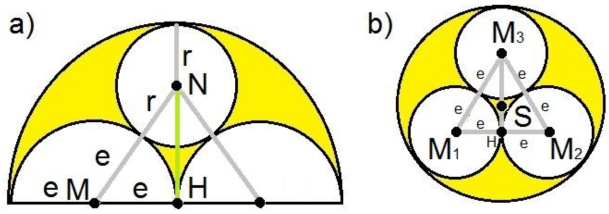


Abb. 441 Kirchenfenster Kreisbilder

Aufg. 244/636: a) Ein (senkrechter Kreis-) Kegel entsteht, wenn man alle Punkte eines Kreises mit einen Punkt $\underline{S}$ verbindet, der über dem Kreismittelpunkt liegt.

b) Der Kegelmantel ist ein Kreissektor (wie Pac-Man) (Abb. 442).

c) $A = \frac{\alpha}{360}\pi R^2$; $b = \frac{\alpha}{360}2\pi R \Leftrightarrow \frac{\alpha}{360} = \frac{b}{2\pi R} \Rightarrow A = \frac{b}{2\pi R}\pi R^2 = \frac{b \cdot R}{2}$;

d) b=Umfang des Grundkreises $= 2\pi r$, $R =$ Seitenkante des Kegels $=s = \sqrt{r^2 + h^2} \Rightarrow A = \pi r s = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$; $O = \pi r(r + s)$.
Regel: $M_{Kegel} = \underline{\pi \cdot r \cdot s}$.

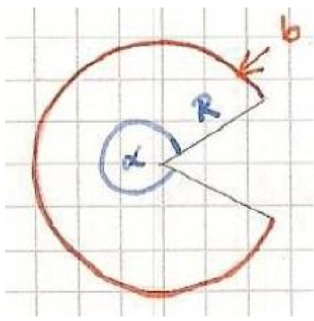


Abb. 442 Kegelmantel

Aufg. 244/637: a) $s = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$, $M = \pi \cdot 4 \cdot 4\sqrt{2} = 16\pi\sqrt{2}$, $O = M + G = 16\pi\sqrt{2} + 16\pi$;

b) $h = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$, $M = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi$, $O = M + G = 15\pi + 9\pi = 24\pi$;

c) $r = 5, h = 12; s = 13$; $M = 65\pi$; $O = 90\pi$; d) $r = 8, h = 6; s = 10$; $M = 80\pi$; $O = 144\pi$;

e)	$O = \pi(r^2 + \pi r\sqrt{r^2 + h^2})$	$\Leftrightarrow$	$1200\pi = \pi(r^2 + r\sqrt{r^2 + 10^2})$
$\Leftrightarrow$	$1200 = r^2 + r\sqrt{r^2 + 100}$	$\Leftrightarrow$	$1200 - r^2 = r\sqrt{r^2 + 100}$
$\Leftrightarrow$	$1440000 - 2400r^2 + r^4 = r^2(r^2 + 100)$	$\Leftrightarrow$	$1440000 - 2400r^2 = 100r^2$
$\Leftrightarrow$	$1440000 = 2500r^2$	$\Leftrightarrow$	$r^2 = 576 \Leftrightarrow r = (\pm)24$; $s = 26$, $M = 624\pi$.

15.9.6 LöVo zu Einheit 9.6 (Körperberechnung UE 9_{10})

Aufg. 244/638: Gleich bleiben: Volumen, Grundfläche, Höhe. Geändert haben sich: Form, Oberfläche (größer), Winkel, gewisse Längen. b) $V = G \cdot h$ (analog zum Originalquader).

Aufg. 245/639: Es gilt: $h = c \cdot \sin(\alpha)$, $O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot h + b \cdot c)$, $V = a \cdot b \cdot h$;

a) $h = 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4$, $O = 2 \cdot (4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4\sqrt{2}) = 64 + 32\sqrt{2}$, $V = 4^3 = 64$;

b) $h = 5 \cdot \sin(36.87°) = 3$, $O = 2 \cdot (3 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 82$, $V = 3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$;

c) $a = 10$, $b = 5$, $c = 13$, $h = 12$, $\alpha = 67.38°$, $O = 470$, $V = 600$;

d) $a = 2$, $b = 3$, $c = 2$, $h = \sqrt{3}$, $\alpha = 60°$, $O = 24 + 4\sqrt{3}$, $V = 6\sqrt{3}$;

e) $a = 6$, $b = 3$, $c = 10$, $h = 5$, $\alpha = 30°$, $O = 156$, $V = 90$;

f) $a = \frac{V}{b \cdot c\sin(\alpha)}$, $O = 2 \cdot (\frac{V}{b \cdot c \cdot \sin(\alpha)} \cdot b + \frac{V}{b \cdot c\sin(\alpha)} \cdot (c \cdot \sin(\alpha)) + b \cdot c) = 2 \cdot (\frac{V}{c \cdot \sin(\alpha)} + \frac{V}{b} + b \cdot c)$

$\Leftrightarrow 240 = 2 \cdot (\frac{144}{c\sin(30°)} + \frac{144}{6} + 6 \cdot c) \Leftrightarrow 120 = \frac{144}{0.5c} + 24 + 6 \cdot c \Leftrightarrow 20 = \frac{48}{c} + 4 + c \Leftrightarrow c^2 - 16c + 48 = 0$ $\Leftrightarrow c^2 - 16c + 48 = 0$ $c_1 = 12, c_2 = 4$. Damit ist $a_1 = 4, a_2 = 12$ und $h_1 = 6, h_2 = 2$.

Aufg. 245/640: a) $G = V = \pi$;

b) Wenn man beide Körper beliebiger Höhe h durchschneidet, dann sind die Schnittflächen gleich (groß). Wenn diese Eigenschaft gilt, dann sind auch deren Volumina gleich (groß).

c) Damit ist das Volumen eines säulenförmigen Körpers $\underline{V = G \cdot h}$. d) $V = G \cdot h = \pi r^2 \cdot h$.

Aufg. 245/641: a) $G = \pi(2e)^2 - \pi e^2 = 3\pi e^2$, $V = G \cdot h = 3\pi e^2 \cdot 2e = 6\pi e^3$,

$U = 2\pi(2e) + 2\pi e = 6\pi e$, $O = 2G + U \cdot h = 2(3\pi e^2) + 6\pi e \cdot 2e = 18\pi e^2$;

b) $G = \frac{1}{2}\pi(3e)^2 - \frac{1}{2}\pi(2e)^2 = 2.5\pi e^2$, $V = G \cdot h = 2.5\pi e^2 \cdot 2e = 5\pi e^3$,

$U = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi(3e) + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi(2e) + 2e = (5\pi + 2)e$,

$O = 2G + U \cdot h = 2(2.5\pi e^2) + (5\pi + 2)e \cdot 2e = (15\pi + 4)e^2$;

c) Unbekannte Seite $= c = 2e\sqrt{2}$, $G = \frac{1}{2}(2e)^2 = 2e^2$, $V = 2e^2 \cdot 2e = 4e^3$, $U = 4e + 2\sqrt{2}e$, $O = 2(2e^2) + (4 + 2\sqrt{2})e \cdot 2e = (12 + 4\sqrt{2})e^2$;

d) Basiswinkel: $\cos(\alpha) = \frac{(2e)^2 + (2\sqrt{3}e)^2 - (2e)^2}{2 \cdot (2e) \cdot (2\sqrt{3}e)} = \frac{12e^2}{8\sqrt{3}e^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, damit ist $\alpha = \cos^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 30°$.

Höhe des Dreiecks: $h = 2e\sin(30°) = e$. $G = 2\sqrt{3}e \cdot e = 2\sqrt{3}e^2$, $V = 2\sqrt{3}e^2 \cdot 2e = 4\sqrt{3}e^3$, $U = 4e + 2\sqrt{3}e$, $O = 2(2\sqrt{3}e^2) + (4 + 2\sqrt{3})e \cdot 2e = (8 + 8\sqrt{3})e^2$;

Aufg. 245/642: a+b) Optimalerweise setzen Sie die erste Pyramide mit deren quadratischer Grundfläche voraus in den Würfel. Ein Würfel besteht aus $\underline{3}$ baugleichen Pyramiden. Damit ist das Volumen der Pyramide genau $\underline{\frac{1}{3}}$ des Volumens des Würfels. c) $V = \frac{1}{3}G \cdot h$; d) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$ (beide auswendig).

e) Ein Prisma ist eine Säule mit dreieckiger Grundfläche. Wenn Sie diese Säule auf eine Seitenfläche legen und diese zur Grundfläche erklären haben Sie den gesuchten Körper.

Aufg. 245/643: a) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi(2e)^2 \cdot 2e = \frac{8\pi}{3}e^3$,

$s = \sqrt{(2e)^2 + (2e)^2} = 2\sqrt{2}e$, $O = \pi r(r + s) = \pi(2e) \cdot (2e + 2\sqrt{2}e) = \pi(4 + 4\sqrt{2})e^2$;

b) $V = \frac{1}{3}a^2 \cdot h = \frac{1}{3}(4e)^2 \cdot 2e = \frac{32}{3}e^3$,

$h_s = \sqrt{(2e)^2 + (2e)^2} = 2\sqrt{2}e$, s $O = a^2 + 4\frac{a \cdot h_s}{2} = (4e)^2 + 4\frac{4e \cdot 2\sqrt{2}e}{2} = 16(1 + \sqrt{2})e^2$;

c) $V = \frac{1}{3}G \cdot h = \frac{1}{3}\frac{(2e)^2}{2} \cdot 2e = \frac{4}{3}e^3$, schräge Fläche: $h_s = \sqrt{(e\sqrt{2})^2 + (2e)^2} = \sqrt{6}e$,

$O = \frac{(2e)^2}{2} + 2 \cdot \frac{(2e)(2e)}{2} + \frac{(2\sqrt{2}e)(\sqrt{6}e)}{2} = 2e^2 + 4e^2 + 2\sqrt{3}e^2 = (6+2\sqrt{3})e^2;$

d) $V = \frac{1}{3}G \cdot h = \frac{1}{3}\frac{2\sqrt{3}e \cdot e}{2} \cdot 2e = \frac{2\sqrt{3}}{3}e^3,$ schräge Fläche: $h_s = \sqrt{e^2 + (2e)^2} = \sqrt{5}e,$

$O = \frac{2\sqrt{3}e \cdot e}{2} + 2 \cdot \frac{(2e)(2e)}{2} + \frac{(2\sqrt{3}e)(\sqrt{5}e)}{2} = \sqrt{3}e^2 + 4e^2 + \sqrt{15}e^2 = (\sqrt{3} + 4 + \sqrt{15})e^2;$

e) $V = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\pi r_2^2 \cdot h - \frac{1}{3}\pi r_1^2 \cdot h\right) = \frac{1}{6}\pi(3e)^2 \cdot 2e - \frac{1}{6}\pi(2e)^2 \cdot 2e = \frac{5\pi}{3}e^3,$

$s_2 = \sqrt{(3e)^2 + (2e)^2} = \sqrt{13}e,\ \ s_1 = \sqrt{(2e)^2 + (2e)^2} = 2\sqrt{2}e,$

$O = G$+zwei (verschiedene) Mäntel+zwei Dreiecke$= \frac{1}{2}\left(\pi(3e)^2 - \pi(2e)^2 + \pi 3e \cdot \sqrt{13}e + \pi 2e \cdot 2\sqrt{2}e\right) + 2\frac{e \cdot 2e}{2} = (9/2\pi - 2\pi + 3/2\sqrt{13}\pi + 2\sqrt{2}\pi + 2)e^2 = ((2.5 + 1.5\sqrt{13} + 2\sqrt{2})\pi + 2)e^2;$

Aufg. 247/644: a) $V_{St} = V_K - V_{Erg} = \frac{\pi}{3}r_2^2 \cdot (h_e + h) - \frac{\pi}{3}r_1^2 \cdot h_e$

b) $G_2 = \pi r_2^2$ damit gilt: $V_{St} = \frac{\pi r_1^2 + \sqrt{\pi}r_1\sqrt{\pi}r_2 + \pi r_2^2}{3} \cdot h = \frac{G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2}{3} \cdot h;$

c) $V_{St} = \frac{a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2}{3} \cdot h.$

d) $V_K = \frac{\pi}{3}r^2 \cdot h$; $(r, h > 0)$ die eingefüllte Menge ist ähnlich zum Sektglas, kann also durch $V = \frac{\pi}{3}(k \cdot r)^2(k \cdot h)$ ($k =$ Streckfaktor) berechnet werden. $V = \frac{1}{2}V_K \Rightarrow \frac{\pi}{3}(k \cdot r)^2(k \cdot h) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{3}r^2 \cdot h$

$\overset{:\frac{\pi}{3}}{\Longleftrightarrow} k^2 \cdot r^2 \cdot k \cdot h = \frac{1}{2}r^2 \cdot h$ $\overset{:r^2:h}{\Longleftrightarrow} k^3 = \frac{1}{2}$ oder $k = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ $(r, h > 0)$.

Damit ist $h' = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \cdot h \approx 0.794 \cdot h$

e) Diese Aufgabe ist mir unter der Dusche eingefallen. Wie sieht ein 4 dim Kegelstumpf aus? Was ist c_n? Beweis durch Induktion? Wenn Sie zu dieser Aufgabe bessere Lösungsvorschläge haben, würde ich mich über dise freuen

2 Dim: Kegelstumpf = Trapez r_i= halbe Seitenlänge, $V_{St} = A_{Trapez} = (r_1 + r_2) \cdot h = \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2 - r_1} \cdot h.$

3 Dim: Kegelstumpf: $V_{St} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2 - r_1} \cdot h.$ 4 Dim: Kegelstumpf: $V_{St} = \frac{4\pi}{3 \cdot 4}$ (?) $\cdot \frac{r_2^4 - r_1^4}{r_2 - r_1} \cdot h.$

n Dim: Kegelstumpf: $V_{St} = c_n \cdot \frac{r_2^n - r_1^n}{r_2 - r_1} \cdot h.$

Aufg. 247/645: **a)** Wenn bei zwei Körpern die Schnittflächen in entsprechenden Höhen gleich groß sind, dann sind auch ihre Volumina gleich. (Abb. 443) **b)** Es entsteht ein Kreis; $r = \sqrt{R^2 - h^2}$; **c)** $r = \pi(R^2 - h^2) = \pi R^2 - \pi h^2$= Fläche eines Kreisrings.

d) Es entsteht ein Zylinder mit ausgebohrtem Kegel mit der Höhe R. Form: Kreisring.

e) $\overline{NP} = h$ (Strahlensatz), damit ist $A = \pi R^2 - \pi h^2$ siehe d). $V_z = \pi r^2 \cdot h$; $V_k = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot h$; $V = \pi R^2 \cdot R - \frac{\pi}{3}R^2 \cdot R = \frac{2\pi}{3}R^3$.

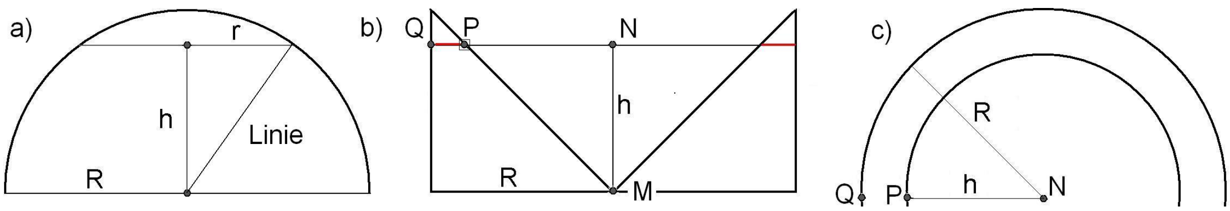


Abb. 443 Kugelvolumen / Cavallieri

f) Das Volumen einer Kugel mit Radius r ist $V = \frac{4\pi}{3}r^3$ **(Formel 42)** .

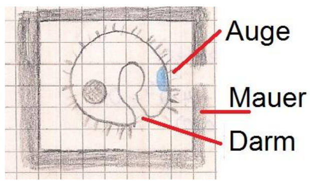
Aufg. 247/646: Eine Kreisfläche wird durch ein Polygon (Vieleck) approximiert.

a) Die Fläche des Vielecks berechnen wir als Summe von n gleichschenkligen Dreiecken mit $h \approx r$.

b) $A \approx \frac{r}{2} \cdot a_1 + \frac{r}{2} \cdot a_2 + \frac{r}{2} \cdot a_3 + .. + \frac{r}{2} \cdot a_n = \frac{r}{2}(a_1 + a_2 + a_3 + .. + a_n)$ und $a_1 + a_2 + a_3 + .. + a_n \approx U \Rightarrow A_K = \frac{r}{2} \cdot U_K \Leftrightarrow \pi r^2 = \frac{r}{2} \cdot 2\pi \cdot r \ \sqrt{}.$

Aufg. 248/647: a) Die gleichschenkligen Dreiecke werden zu Pyramiden mit $h \approx r$.

b) Approximieren Sie $\underline{V_K}$ abhängig von den Grund<u>flächen</u> $\underline{A_i}$ und dem Kugelradius r. Finden Sie so den Zusammenhang zwischen $\underline{V_K}$ und $\underline{O_K}$.
$V_K \approx \frac{r}{3} \cdot A_1 + \frac{r}{3} \cdot A_2 + \frac{r}{3} \cdot A_3 + .. + \frac{r}{3} \cdot A_n = \frac{r}{3}(A_1 + A_2 + A_3 + .. + A_n)$ und $A_1 + A_2 + A_3 + .. + A_n \approx O \Rightarrow V_K = \frac{r}{3} \cdot O_K \Leftrightarrow \frac{4\pi}{3} r^3 = \frac{r}{3} \cdot O_K$ $\Leftrightarrow O_K = 4\pi \cdot r^2$.



Aufg. 248/649:
Abb. 444 Im Reich der Komplanaren

c) i) $V =$ Halbkugel + Zylinder $= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi e^3 + e^2 \cdot e = \frac{5}{3}\pi e^3$;
$O =$ Halbkugel + Zylindermantel+Kreis$= \frac{1}{2} \cdot 4\pi e^2 + 2\pi e \cdot e + \pi e^2 = 5\pi e^2$;

ii) $V =$ Halbkugel + kleine Kugel $= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi(2e)^3 + \frac{4}{3}\pi e^3 = \frac{20}{3}\pi e^3$;
$O =$ Halbkugel + kleine Kugel + großer Kreis - 2 kleine Kreise=
$\frac{1}{2} \cdot 4\pi(2e)^2 + 4\pi e^2 + \pi(2e)^2 - 2\pi e^2 = 14\pi e^2$;

iii) $V =$ Halbkugel - Halbkugel $= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi(4e)^3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi(3e)^3 = \frac{74}{3}\pi e^3$;
$O =$ Halbkugel + Halbkugel + Kreisring $= \frac{1}{2} \cdot 4\pi(4e)^2 + \frac{1}{2} \cdot 4\pi(3e)^2 + \pi(4e)^2 - \pi(3e)^2 = 57\pi e^2$;

iv) $V =$ Halbkugel + Halbzylinder $= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi e^3 + \frac{1}{2} \cdot \pi e^2 \cdot e = \frac{7}{6}\pi e^3$;
$O =$ Halbkugel + Halbzylindermantel + Kreis + Rechteck =
$\frac{1}{2} \cdot 4\pi e^2 + \frac{1}{2} \cdot 2\pi e \cdot e + \pi e^2 + e^2 = (4\pi + 1) \cdot e^2$;

v) $V =$ Halbkugel + Kegel $= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi(5e)^3 + \frac{1}{3} \cdot \pi(5e)^2 \cdot 12e = \frac{550}{3}\pi e^3$; $s = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$;
$O =$ Halbkugel + Kegelmantel $= \frac{1}{2} \cdot 4\pi(5e)^2 + \pi \cdot 5e \cdot 13e = 115 \cdot \pi \cdot e^2$;

Aufg. 248/648: a) $V = 0.5(6+4) \cdot 4 \cdot 10 = 200$; Das Volumen der Truhe ist $200VE$ (Volumeneinheiten oder LE^3).

b) Laut ZPF gilt $m = \frac{4-6}{4-8} = 0.5$, mit der PSF ist $g : y = 0.5(x-8)+6$ oder $y = 0.5x + 2$. Damit ist $g = g_{0.5}$.

c) $x = 8$ und $y = 6$ erfüllt für alle m die Gleichung $y = m(x-8)+6$, damit gehen alle g_m durch $C(8;6)$. $\alpha = \tan^{-1}(0.5) \approx 26.57°$, $n = \tan(2 \cdot \tan^{-1}(0.5)) = \frac{4}{3}$. Damit ist $g_n : y = \frac{4}{3}(x-8)+6$.

d) Alle zu $g_{0.5}$ orthogonalen Geraden haben Steigung $\frac{-1}{0.5} = -2$. Damit ist die gesuchte Gerade g_{-2} : $y = -2(x-8)+6$. Der Abstand $DC = \sqrt{(4-6)^2 + (4-8)^2} = \sqrt{20}$.

Der Punkt D des Deckels bewegt sich entlang des Kreises $K : (x-8)^2 + (y-6)^2 = 20$.

$E = K \cap g_{-2}$: $(x-8)^2 + (-2(x-8)+6-6)^2 = 20 \Leftrightarrow (x-8)^2 + (-2)^2 \cdot (x-8)^2 = 5 \cdot (x-8)^2 = 20$

$\overset{:5}{\Leftrightarrow} (x-8)^2 = 4 \overset{\sqrt{.}}{\Longleftrightarrow} x - 8 = \pm 2$ damit ist $x_1 = 6$; $x_2 = 10$;

$x_2 = 10$ in g_{-2} eingesetzt: $y = -2(10-8)+6$=2. Damit entfällt $E_2(6;2)$, weil dann die Truhe 'nach unten' (oder um 270°) geöffnet worden wäre.

$x_1 = 6$ in g_{-2} eingesetzt: $y = -2(6-8)+6$=10. Damit ist $E_1(6;10)$.

e) i) $V = \frac{4\pi}{3} r^3 = \frac{4\pi}{3}(6e)^3 = 288\pi e^3$; $\quad O = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot (6e)^2 = 144\pi e^3$;

ii) $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot (6e)^2 \cdot 8e = 288\pi e^3$; $\quad O = 2\pi \cdot r \cdot h + 2\pi \cdot r^2 = 2\pi \cdot 6e \cdot 8e + \pi \cdot (6e)^2 = 168\pi e^2$;

iii) $V = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot h = \frac{\pi}{3} \cdot (6e)^2 \cdot 8e = 96\pi e^3$; $\quad s = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(6e)^2 + (8e)^2} = 10e$
$O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s = \pi \cdot ((6e)^2 + 6e \cdot 10e) = 96\pi e^2$;

Aufg. 248/649: siehe Abb. 444.

15.10 LöVo von Kapitel 10: Analytische Geometrie

15.10.1 LöVo zu Einheit 10.1 (Vektoren UE 10_5) Seite 742-833 bzw.846

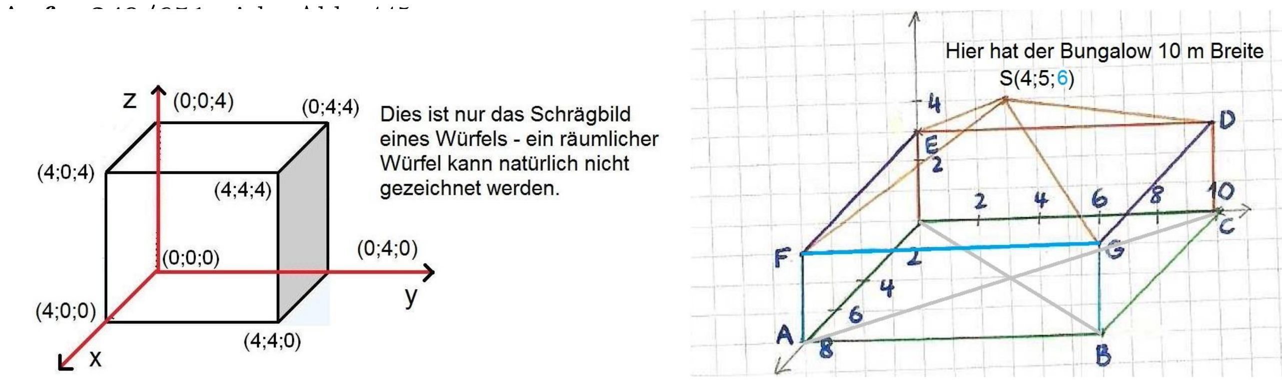


Abb. 445 Würfel / Bungalow

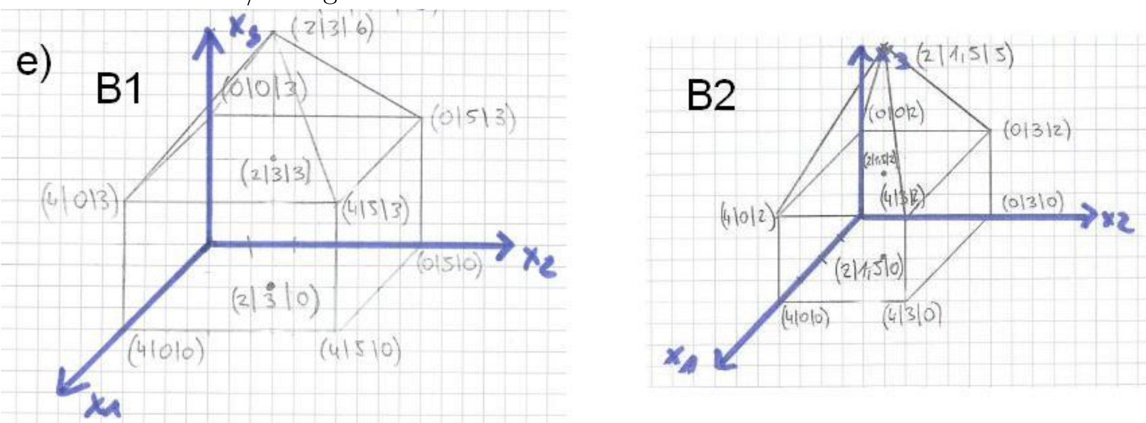


Abb. 446 Bungalows mit Spitzdach

Aufg. 249/650: a) siehe Abb. 445 b) ... auf der $\underline{y}$-Achse ... Nein.
c) Bei räumlichen Zeichnungen wird projiziert, das heißt, wenn ein Punkt P in der Zeichnung nicht auf einer Geraden g liegt, dann ist $P \notin g$ (im Raum); liegt in der Zeichnung aber P auf g so bedeutet das nicht (unbedingt) $P \in g$ (im Raum).

d) Die Spitze S liegt 6(c)m über dem Schnittpunkt der Diagonalen des Grundrechtecks (Abb. 446).

Aufg. 249/652: a) $S(2; 2.5; 3)$; b) $P(4; 3; 2)$; (Abb. 447)

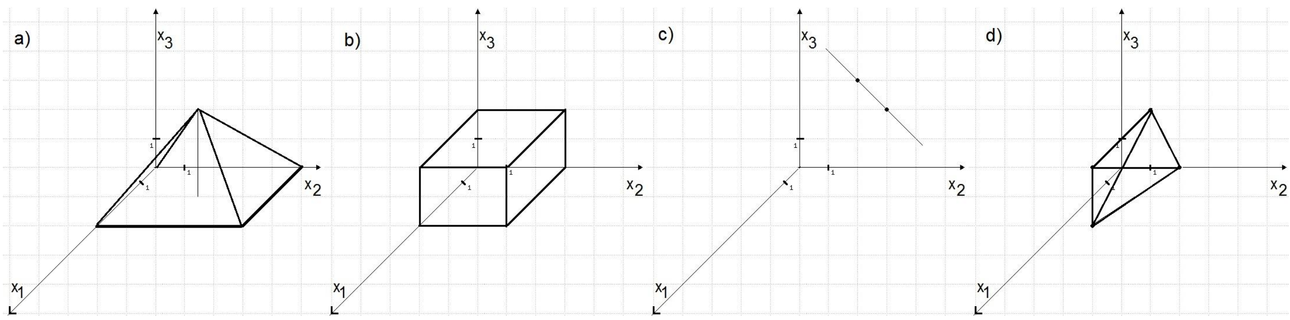


Abb. 447 Zeichnungen

Aufg. 249/653: a) 3 nach rechts und 2 nach oben;

b) Eine Verschiebung, die einen Punkt um a Einheiten nach rechts und um b Einheiten nach oben transportiert, wird durch $\binom{a}{b}$ beschrieben. Wir nennen dies einen Vektor, der durch einen Pfeil symbolisiert wird. Eine Verschiebung, die den Punkt A in den Punkt B überführt, notieren wir als $\overrightarrow{AB}$.
Motto: Ende − Anfang

Sei $R(5;2)$, $S(4;3)$, dann ist $\overrightarrow{RS} = \binom{4-5}{3-2} = \binom{-1}{1}$.

c) $\overrightarrow{CA} = -2$ nach rechts und -1 nach oben, $\overrightarrow{CD} = -2$ nach rechts und 1 nach oben; $\overrightarrow{CB} = -3$ nach rechts und -2 nach oben; d) $x_2 - x_1$ nach rechts und $y_2 - y_1$ nach oben;

e) $\overrightarrow{AA'} = -\overrightarrow{A'A}$ und die Verschiebung berechnet sich aus Ende − Anfang;

$_r$) Der Vektor $\overrightarrow{BA}$ heißt Gegenvektor (e: *opposite/negative vector*) von $\overrightarrow{AB}$. **f)** $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.

g) $\binom{0}{0}$ heißt Nullvektor. **h)** $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Aufg. 250/654:
$\overrightarrow{A_1B_1} = \binom{2-0}{3-0} = \binom{2}{3}$, $\overrightarrow{A_2B_2} = \binom{5-3}{3-2} = \binom{2}{3}$,
$\overrightarrow{A_3B_3} = \binom{7-5}{4-1} = \binom{2}{3}$, $\overrightarrow{A_4B_4} = \binom{6-4}{6-3} = \binom{2}{3}$,
$A_5(2;4) \xrightarrow{2r,3r} B_5(4;7)$, $A_6(1;7) \xrightarrow{2r,3o} B_6(3;10)$.
Jeder Vektor hat unendlich viele äquivalente Vertreter (Repräsentanten). Ein Vektor hat weder einen bestimmten Anfangspunkt noch einen bestimmten Endpunkt. (Abb. 448)

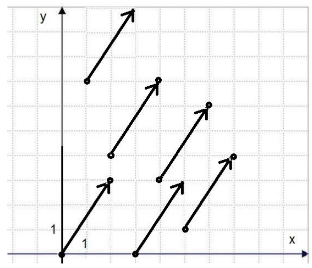


Abb. 448 Einführung Vektoren

Aufg. 250/655: **a)** $\binom{1}{3} + \binom{2}{1} = \binom{3}{4}$, induziert wird die Vektoraddition: $\binom{a_1}{a_2} + \binom{b_1}{b_2} = \binom{a_1+b_1}{a_2+b_2}$.

induziert = erzeugt. **b)** Wir definieren die Vektor-Addition komponentenweise, dass heißt

$\vec{a}\underline{+}\vec{b} = \binom{a_1}{a_2} \underline{+} \binom{b_1}{b_2} = \binom{a_1+b_1}{a_2+b_2}$.

c) $2 \cdot \binom{2}{1} = \binom{4}{2}$, $3 \cdot \binom{2}{1} = \binom{6}{3}$, $n \cdot \binom{2}{1} = \binom{2n}{n}$,
induziert wird die 'Multiplikation mit einem Skalar': $r \cdot \binom{a_1}{a_2} = \binom{r \cdot a_1}{r \cdot a_2}$.

d) Ein Skalar in der Mathematik ist eine (reelle) Zahl im Gegensatz zu einem Vektor. Den Begriff Skalar kennen wir vom Begriff Skala. Die Multiplikation mit einem Skalar definieren wir:

$r \cdot \vec{a} = r \cdot \binom{a_1}{a_2} = \binom{r \cdot a_1}{r \cdot a_2}$. Die komponentenweise Multiplikation ist immer verboten!

e) $3 \cdot \binom{1}{3} - 2 \cdot \binom{1}{2} = \binom{3}{9} - \binom{2}{4} = \binom{1}{5}$; $4 \cdot \binom{-1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \binom{-4}{-6} = \binom{-4}{8} + \binom{2}{3} = \binom{-2}{11}$.

Aufg. 250/656: Eine **abelsche Gruppe** G ist eine algebraische Struktur mit einer inneren Verknüpfung '+': $G \times G \to G$; dies sagt: zwei Elemente aus G werden verknüpft oder addiert und ein neues Element aus G entsteht.

$'+'$ muss dabei folgenden Bedingungen genügen:

(1) Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in G$ gilt $(a + b) + c = a + (b + c)$

(2) Existenz des neutralen Elementes n (oder Null) mit $a + n = n + a = a$ für alle $a \in G$

(3) Existenz des inversen Elementes '-a' (oder auch a^{-1}) mit a + -$a = n$.

(4) Kommutativgesetz: Für alle $a, b \in G$ gilt: $a + b = b + a$

a) Siehe Abschnitte 10.8.2 bis 10.8.4

b) $\mathbb{N}$: Nein, es fehlen neutrales und inverses Element, $\mathbb{N}_0$: Nein, es fehlt das inverse Element, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind Gruppen. c) (2) $n = 0$; (3) '-1'=23, '-x'=$24 - x$;

Aufg. 250/657: a) Ein Vektorraum V ist eine abelsche Gruppe in welcher zusätzlich eine Multiplikation mit einem Skalar $\mathbb{R} \times V \to V$ definiert ist mit folgenden Gesetzen:

(5) Distributivgesetz$_1$: $\underline{(r+s)\cdot\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}}$ (6) Distributivgesetz$_2$: $\underline{r\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}}$

(7) Assoziativgesetz: $\underline{(r\cdot s)\cdot\vec{a} = r\cdot(s\cdot\vec{a})}$ (8) Einsgesetz: $\underline{1\cdot\vec{a} = \vec{a}}$

$\downarrow$ $\downarrow$

b) $(r \;\cdot\; s)\cdot\vec{a}$ beinhaltet eine reelle Multiplikation $(r \;+\; s)\cdot\vec{a}$ beinhaltet eine reelle Addition

Aufg. 251/658: a) Vektor + Vektor = Vektor: ok,
Vektor − Vektor = Vektor: ok, Ortsvektor + Vektor = Ortsvektor: ok,
Ortsvektor + Ortsvektor: geht nicht, Ortsvektor- Ortsvektor = Vektor: ok, $n\cdot$ Ortsvektor: geht nicht.

Nur bei den Parallelogrammgesetzen (Ag 659 − 661) sind gewisse verbotene Operationen erlaubt.

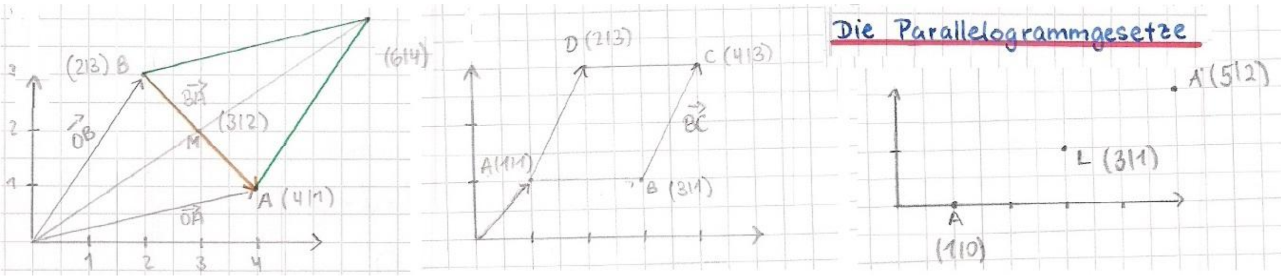


Abb. 449 Die Parallelogrammgesetze

b) $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ Hintereinanderausführung zweier Verschiebungen, $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ Hintereinanderausführung (und Umkehrung) zweier Verschiebungen, $\overrightarrow{OP} + \vec{v}$ Verschieben eines Punktes um $\vec{v}$ in einen anderen Punkt, $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}$ bestimmt die Verschiebung, die P in Q überführt;
c) ... Anfangs- oder Endpunkt. Der Ortsvektor $\binom{p_1}{p_2}$ zeigt auf $P(p_1; p_2)$; d) Punkte und Ortsvektoren sind strukturgleich (isomorph), leider müssen in BW diese (trotzdem) unterschieden werden. Dies scheint im Abi wichtiger als Logarithmenrechnen zu sein!

Ein Ortvektor ist ein Punkt, der so tut als wäre er ein Vektor.

Ein (freier) Vektor wird durch einen Pfeil symbolisiert, der keinen bestimmten Anfangspunkt hat. Vektoren haben eine Länge eine Richtung und einen Richtungssinn. Ein Ortsvektor ist ein Vektor, der im Ursprung beginnt. Ein Punkt stellt eine Position ohne Ausdehnung dar.

Aufg. 251/659: $M(3;2)$, $M(\frac{a_1+a_2}{2}; \frac{b_1+b_2}{2})$; (Abb. 449)
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + \frac{b_1-a_1}{2} \\ a_2 + \frac{b_2-a_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_1+b_1}{2} \\ \frac{a_2+b_2}{2} \end{pmatrix} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}}{2}$. d) $M_{AB}(3|4|5)$

Aufg. 251/660: a) $D(2;3)$, (Abb. 449) b) $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$; es gilt also $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ (die Summe gegenüberliegender Ortsvektoren ist gleich); c) $C(6|8|7)$; d) $D(0;2)$, $M(1.5;1.5)$.

Aufg. 251/661: a) $A'(5;2)$, (Abb. 449)
b) L liegt in der Mitte von A und A', damit gilt $\overrightarrow{OL} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA'}}{2}$ oder $\overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OA}$.

Aufg. 251/662: a) $M_{AB}(4;2;1)$, $M_{BC}(6;1;4)$, $M_{AC}(4;1;1)$, $D(2;0;-2)$, $A'(2;-2;-2)$, $B'(-2;-2;-8)$, $C'(-2;0;-8)$; b) $M_{AB}(4;1;-0.5)$, $M_{BC}(2;-1;0)$, $M_{AC}(1;0;1.5)$, $D(-3;0;5)$, $A'(-9;-2;9)$, $B'(-11;0;12)$, $C'(-5;2;8)$; c) $M_{AB}(2\sqrt{2};3\sqrt{3};0)$, $M_{BC}(\sqrt{2};\sqrt{3};1)$, $M_{AC}(0;0;3)$, $D(-3\sqrt{2};-4\sqrt{3};8)$, $A'(-7\sqrt{2};-10\sqrt{3};14)$, $B'(-9\sqrt{2};-12\sqrt{3};18)$, $C'(-5\sqrt{2};-6\sqrt{3};12)$.

d) $M_{AB}(3;2;4.5)$; $M_{AC}(3.5;1.5;5)$; $M_{BC}(2.5;2.5;4.5)$; $D(5;0;6)$; $A'(6;-1;7)$; $B'(8;-3;8)$; $C'(7;-2;7)$;

e) $M_{AB}(6.5;6;2)$; $M_{AC}(5;7.5;2)$; $M_{BC}(5.5;4.5;2)$; $D(3;12;2)$; $A'(0;15;2)$; $B'(-1;21;2)$; $C'(2;18;2)$;

f) $M_{AB}(5;4.5;4.5)$; $M_{AC}(5;5.5;2.5)$; $M_{BC}(2;7;3)$; $D(8;5;0)$; $A'(8;7;-4)$; $B'(14;4;-5)$; $C'(14;2;-1)$;

g) Die Ecken werden mit dem 2 PG $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$ berechnet, die Mitten mit dem 1 PG $\vec{m} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$.
$A(8;2;0), B(8;6;0), C(2;6;0), D(2;2;0)$, $E(8;2;6), F(8;6;6), G(2;6;6), H(2;2;6)$,
$M_a(8;4;0), M_b(5;6;0), M_c(2;4;0), M_d(5;2;0)$, $M_1(8;2;3), M_2(8;6;3), M_3(2;6;3), M_4(3;2;3)$,
$M_e(8;4;6), M_f(5;6;6), M_g(2;4;6), M_h(5.5;2;6)$, Mitte Quader: $M(5;4;4)$;

Aufg. 252/663: a) Der Schwerpunkt ist der Schnitt der Seitenhalbierenden (Schwerlinien). Der Schwerpunkt teilt die Schwerlinie im Verhältnis 2 : 1.

b) $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{m} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$, c) $S_a(\frac{14}{3}; \frac{4}{3}; 2)$, $S_b(\frac{7}{3}; 0; \frac{1}{3})$, $S_c(\sqrt{2}; \frac{7}{3}; 0; \frac{1}{3})$.

d) $\vec{d} = \vec{a} + \overrightarrow{BC}\vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$ (2PG), $\vec{m} = \frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$, (1PG).

e) $\overrightarrow{PO} = -\frac{1}{2} \cdot \vec{b} - \frac{1}{2} \cdot \vec{d}$, $\overrightarrow{CH} = \vec{e} - \vec{b}$, $\overrightarrow{GE} = -\vec{b} - \vec{d}$, $\overrightarrow{EQ} = \vec{d} + \frac{1}{2} \cdot \vec{b}$,
$\overrightarrow{CE} = \vec{e} - \vec{b} - \vec{d}$, $\overrightarrow{OQ} = \vec{d} + \vec{e} + \frac{1}{2} \cdot \vec{b}$, $\overrightarrow{FD} = \vec{d} - \vec{b} - \vec{e}$, $\overrightarrow{PQ} = \vec{e} + \frac{1}{2} \cdot \vec{d}$, $\overrightarrow{BQ} = \vec{d} + \vec{e} - \frac{1}{2} \cdot \vec{b}$.

Aufg. 252/664: a) $\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$, $\overrightarrow{OQ} = \frac{2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}$, $\overrightarrow{OR} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}}{2}$, $\overrightarrow{OS} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$, $\overrightarrow{OT} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{OU} = \frac{\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}}{2}$,
$\overrightarrow{RT} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OR} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} - \frac{\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}}{2} = -\vec{c}$, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \frac{2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2} - \frac{\vec{a}+\vec{c}}{2} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$,
$\overrightarrow{PS} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} - \frac{\vec{a}+\vec{c}}{2} = \frac{-\vec{a}+\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{SR} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}}{2} - \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} = \frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$, $\overrightarrow{ST} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} - \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} = \frac{\vec{a}-\vec{c}}{2}$,
$\overrightarrow{QR} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}}{2} - \frac{2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2} = \frac{-\vec{a}+\vec{c}}{2}$, $\overrightarrow{UQ} = \frac{2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2} - \frac{\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}}{2} = \frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{US} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} - \frac{\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}}{2} = \frac{-\vec{a}-\vec{b}}{2}$.

b) $\vec{d} := \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ (der letzte Vektor von O aus), $\overrightarrow{OX} = \vec{a} + \vec{c}$, $\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{3}$, $\overrightarrow{OQ} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{3}$,
$\overrightarrow{OR} = \frac{\vec{a}+\vec{d}}{3} = \frac{\vec{a}+(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})}{3} = \frac{2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}}{3}$, $\overrightarrow{OS} = \frac{\vec{c}+\vec{d}}{3} = \frac{\vec{c}+(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})}{3} = \frac{\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}}{3}$, $\overrightarrow{CX} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b} - \vec{c}$,
$\overrightarrow{OT} = \vec{c} + \frac{\overrightarrow{CX}+\overrightarrow{CB}}{3} = \vec{c} + \frac{\vec{a}+(\vec{b}-\vec{c})}{3} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}}{3}$, $\overrightarrow{PT} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}}{3} - \frac{\vec{b}+\vec{c}}{3} = \frac{\vec{a}+\vec{c}}{3}$;
$\overrightarrow{ST} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}}{3} - \frac{\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}}{3} = \frac{2\vec{b}}{3}$, $\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{PT} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{3} + \frac{\vec{a}+\vec{c}}{3} = \frac{2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$,
$\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{PT} = \frac{2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}}{3} + \frac{\vec{a}+\vec{c}}{3} = \frac{3\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}}{3}$, $\overrightarrow{OW} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{PT} = \frac{\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}}{3} + \frac{\vec{a}+\vec{c}}{3} = \frac{2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}}{3}$,
$\overrightarrow{RT} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OR} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}}{3} - \frac{2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}}{3} = \frac{-\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}}{3}$, $\overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OS} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{3} - \frac{\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}}{3} = \frac{2\vec{b}-2\vec{c}}{3}$,
$\overrightarrow{PU} = \overrightarrow{OU} - \overrightarrow{OP} = \frac{2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} - \frac{\vec{b}+\vec{c}}{3} = \frac{2\vec{a}}{3}$, $\overrightarrow{WQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OW} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{3} - \frac{2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}}{3} = \frac{-\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}}{3}$;

$\overrightarrow{UQ} = \frac{-\vec{a}-\vec{c}}{3}$. .

Aufg. 252/665: a) i) $\mathbb{L}\{1;2\}$; ii) + iii) $\mathbb{L}\{0;-2\}$ b) Es gilt wieder $\mathbb{L}\{1;2\}$ $5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1$ ist. Sie müssen Ihre Lösung in der nicht beachteten Gleichung $5x - 2y = 1$ verifizieren.

Beim zweiten LGS sind die Gleichungen q und 2 äquivalent + es gilt $x = 2; y = 1$.

c) Wähle zwei Gleichungen aus, löse das entstehende LGS mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten (2×2 LGS); sollte das 2×2 LGS unlösbar sein, so ist auch das zugehörige 3×2 LGS unlösbar; hat das 2×2 LGS unendlich viele Lösungen, so wähle zwei andere Gleichungen aus - haben alle Paare von 2×2 LGS unendlich viele Lösungen, so hat auch das 3×2 LGS unendlich viele Lösungen; sollte das 2×2 LGS (vom Anfang) genau eine Lösung $\mathbb{L}$ haben, so setzen Sie die Lösung in die dritte Gleichung ein: Bei Widerspruch ist das LGS unlösbar - sonst ist $\mathbb{L}$ die Lösung des LGS.

d) i) $\mathbb{L}\{3;1\}$ ii) $\mathbb{L}\{0;-1\}$ iii) $\mathbb{L} = \{\}$;

Aufg. 252/666: Identitätssatz für Vektoren: Zwei Vektoren $\binom{a}{b}$ und $\binom{c}{d}$ sind gleich $\Leftrightarrow$ $a = \underline{c}$ und $\underline{b = d}$.

b) Lösen Sie die Aufgabe erst <u>geometrisch</u>, dann algebraisch.
Beschreibung: (1) Zeichne Gerade g_1 durch den Ursprung in Richtung $\vec{s}$. Zeichne Gerade g durch $P(4/3)$ in Richtung $\vec{w}$. $A = g \cap g_1$. Lies die Anteile in Richtung $\vec{s}$ und $\vec{w}$ ab (Abb. 450).

(2) Zeichne Gerade g_2 durch den Ursprung in Richtung $\vec{w}$. Zeichne Gerade h durch $P(4/3)$ in Richtung $\vec{s}$. $A = h \cap g_2$. Lies wieder die Anteile in Richtung $\vec{s}$ und $\vec{w}$ ab.

Zu lösen ist $a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{rl} 2a+ \; b & = 4 \\ a+ \; b & = 3 \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Nimm einen Vektor 'Wind' und zwei Vektoren 'Strömung';

c) Es entsteht ein Parallelogramm; Physik: Kräfteparallelogramm - resultierende Kraft.

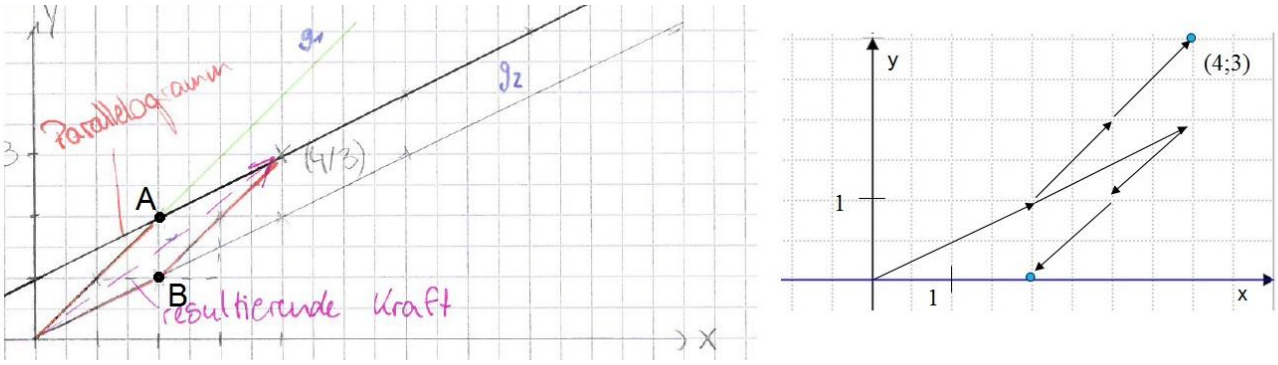


Abb. 450 Kräfteaddition

d) Zu lösen ist $a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2a+ & b & = 2 \\ a+ & b & = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

e) $r = -1,\ s = 2$; f) $r = 3,\ s = -2$;

g) LGS: $a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} a - b = -1 \\ -2a + 2b = 2 \\ 3a - 4b = -7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a = 3 \\ b = 4 \end{pmatrix}$.

$$r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} r - s = -1 \\ \boxed{-2r + 2s = 2} \\ \boxed{3r - 4s = -7} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \xrightarrow{\cdot 2} & 2r - 2s = -2 \\ \xrightarrow{\cdot 1} & -2r + 2s = 2 \\ \hline & 0 = 0 \end{matrix}$$

Indiz für ∞ viele Lösungen trifft hier aber nicht zu.

$$\begin{matrix} r - s = -1 & \xrightarrow{\cdot -3} & -3r + 3s = 3 \\ 3r - 4s = -7 & \xrightarrow{\cdot 1} & 3r - 4s = -7 \\ & & -s = -4 \\ & & s = 4 \end{matrix}$$

$$r - 4 = -1$$
$$r = 3$$

Thx Let Wie

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \checkmark$$

h) LGS: $a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 2a - 2b = -10 \\ a + 2b = 4 \\ 2a + 3b = -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a = -2 \\ b = 3 \end{pmatrix}$.

Aufg. 252/667: a) es gibt keine; b) $r - 2s = 3$, es gibt ∞ viele;

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ zeigen in die gleiche Richtung (unterschiedlich orientiert); $\vec{c}$ nicht.

d) Zwei Vektoren $\vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b}$ heißen linear abhängig (parallel) wenn sie Vielfache voneinander sind: $\vec{a} = \underline{r \cdot \vec{b}}$. Der $\vec{0}$ ist immer linear abhängig.

e) alle; f) zB aus Aufgabenteil a.

Aufg. 253/668: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 7.5 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & +3s & +t & = 4.5 \\ 2 & +3s & +2t & = 7.5 \\ 0 & +2s & +w_3 \cdot t & = 5 \end{pmatrix}$ reduziert auf $\begin{pmatrix} 3s & +t & = 3.5 \\ 3s & +2t & = 5.5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3s & +t & = 3.5 \\ -3s & -2t & = -5.5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} t & = 2 \\ s & = 0.5 \end{pmatrix}$ in $2s + w_3 \cdot t = 5$ eingesetzt ergibt:
$2 \cdot 0.5 + w_3 \cdot 2 = 5 \Leftrightarrow w_3 \cdot 2 = 4 \Leftrightarrow w_3 = 2$.
Aus $s = 0.5$ folgt die Höhe (x_3 - Koordinate) 1.

Aufg. 253/669: a) $\binom{2}{1}$, $P_2(4;3)$, $P_3(6;4)$, $P_t(2t;t+1)$; b) entlang einer Geraden $y = \frac{1}{2}x + 1$;

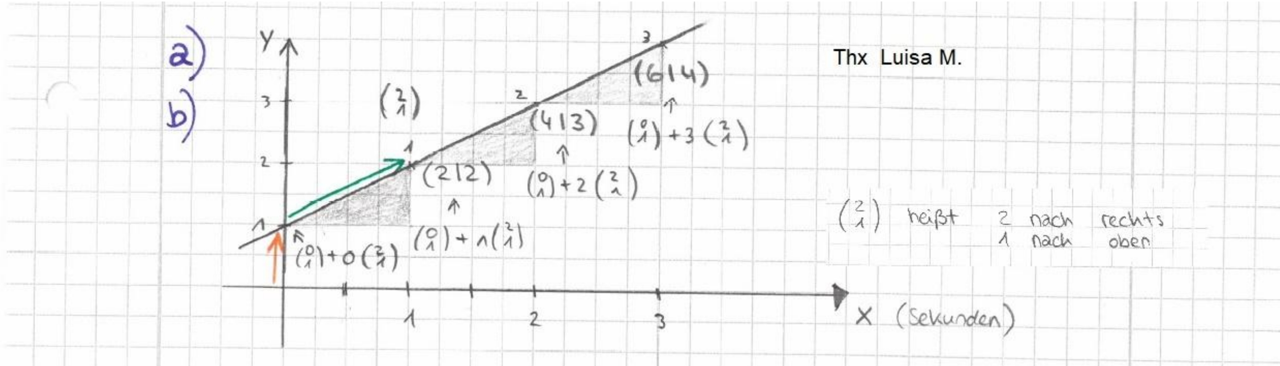


Abb. 451 Gerade in Parameterform

bzw. $\vec{x} = \binom{0}{1} + t \cdot \binom{2}{1}$, $t \in \mathbb{R}$. **c)** (Zusatzag) $\sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}\frac{km}{h}$;

d) Die Form $\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{r}$, $t \in \mathbb{R}$, $r \neq \vec{0}$ heißt Parameterform einer Geraden. $\vec{p}$ heißt dabei Aufpunkt oder Stützvektor, $\vec{r}$ heißt dabei Richtungsvektor und t ist der Parameter; (Abb. 452)

e) $g_1 : \vec{x} = \binom{1}{0} + t \cdot \binom{2}{3}$, $t \in \mathbb{R}$ und $g_2 : \vec{x} = \binom{2}{4} + t \cdot \binom{-1}{-5}$, $t \in \mathbb{R}$; $g_3 : \vec{x} = \binom{1}{-1} + t \cdot \binom{1}{5}$, $t \in \mathbb{R} \mathrel{\hat{=}} g_2$;
Die Gerade durch P und Q ist von der Form $\vec{x} = \underline{\vec{p} + t \cdot (\vec{q} - \vec{p})}$ **(Formel 66)** . Die Parameterdarstellung ist nicht eindeutig. $g_4 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$; $g_5 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$;

f) Im Raum gibt es keine Darstellung von Geraden der Form $\underline{y = mx + c}$; Geraden sind im Raum immer in Parameterform anzugeben.

g) $\vec{x} = \binom{0}{1} + t \cdot \binom{2}{1}$, $t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x_1 = 2t$ und $x_2 = t + 1$ (Elimination des Parameters:) $t = \frac{x_1}{2}$ eingesetzt ergibt $x_2 = \frac{x_1}{2} + 1$; **h)** Hauptform: $x = 1$, $\vec{x} = \binom{1}{2} + t \cdot \binom{0}{-2}$, $t \in \mathbb{R}$.

j) Die x_1-Achse geht durch (0;0;0) und (1;0;0).

x_1-Achse: $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$; x_2-Achse: $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$; x_3-Achse: $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$;

k) a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6-2 \\ 2-2 \\ 4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\overline{AB} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$;

$\overline{AC} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, $\overline{BC} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$;

b) $\overline{AB} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, $\overline{AC} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$,

$\overline{BC} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$; c) $\overline{AB} : \vec{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{3} \\ -4 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$,

$\overline{AC} : \vec{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ -4\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, $\overline{BC} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ 4\sqrt{3} \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4\sqrt{2} \\ -6\sqrt{3} \\ 6 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

Andere Geradendarstellungen sind möglich.

Aufg. 253/670: a+b) $B(9;12)$: Ja für $t = 4$, $C(-1;-3)$: Ja für $t = -1$, $D(4;5)$: Nein, $E(15;21)$: Ja für $t = 7$.

c) Ein Punkt liegt Q liegt auf der Geraden $\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{r} \Leftrightarrow$ das LGS $\vec{q} = \vec{p} + t \cdot \vec{r}$ ist lösbar $\Leftrightarrow$ es kommt nur (genau) ein Wert für t heraus.

d, e siehe Abb 748/452 .. Skalierung ...

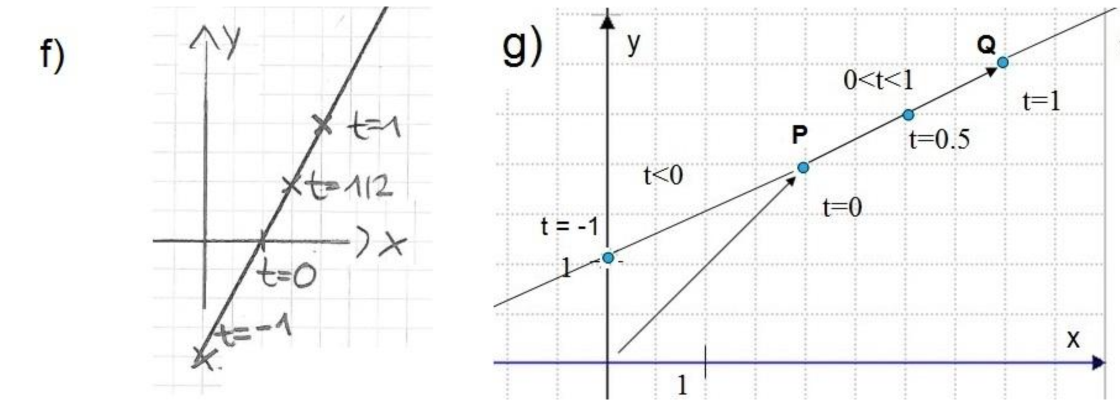


Abb. 452 Die Parameterform von Geraden

f) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 2-2 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$; $g_{AB} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, P in g_{AB} eingesetzt:
$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 = 1+3t \\ 2 = 2 \\ 5 = 3-2t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} t = -1 \\ 0 = 0 \\ t = -1 \end{pmatrix}$; ja $P \in g_{AB}$.

Weil $t < 0$ ist liegt P nicht zwischen A und B (... links von A).

Aufg. 253/671: a) $\vec{u}_5 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1037 \\ -180 \end{pmatrix}$; b) $\vec{u}_t = \begin{pmatrix} 37 \\ 1167 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -24 \\ -36 \end{pmatrix}$.

$t \geq 0$ ist die Zeit in Minuten nach dem Start.

c) $\vec{w} = \vec{u}_{100}$; das U-Boot ist also $\frac{5}{3}$ h unterwegs. d) $v = \left| \begin{pmatrix} -8 \\ -24 \\ -36 \end{pmatrix} \right| = 44 \frac{m}{min}$.

Aufg. 254/672: (Abb. 453)

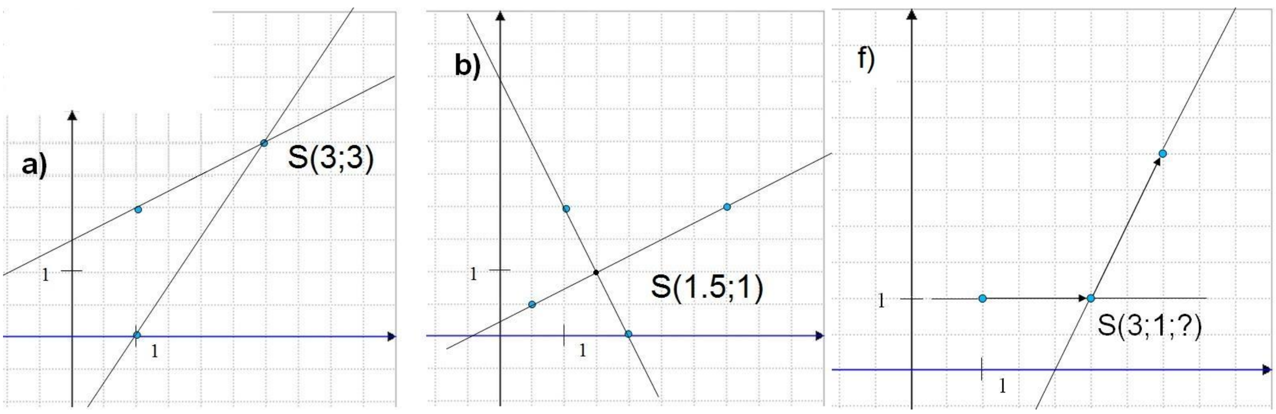


Abb. 453 Schneiden von Geraden

c) $S(4;2),\ t_g = 1,\ t_h = 1$; d) $S(2;1),\ t_g = 2,\ t_h = -3$; e) $S(1.5;2),\ t_g = 1.5,\ t_h = -2$;

f) In der Zeichnung wurde die dritte Dimension ignoriert. Die dritte Komponente muss noch errechnet werden. Hier ist $S = P_2$ also $S(3;1;8)$. Probe: Für $t = 1$ liegt S auch auf g_1.

g) $S(3;0;3),\ t_g = 2, t_h = 3$; h) $S(5;3;-2),\ t_g = 4,\ t_h = 2$;

g) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+t = 0+s \\ 2-t = -3+s \\ 3+0t = 0+s \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ s = 3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} t = 2 \\ t = 2 \\ s = 1 \end{matrix}$

$\Rightarrow \vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow S(3;0;3)$.

i) Wenn nach einem Algorithmus in der Geometrie gefragt ist, sollten Sie als erstes den beschriebenen Gebilden Namen geben. Eine Skizze kann auch hilfreich sein. Eine Gerade durch zwei (verschiedene) Punkte A und B notieren Sie optimalerweise als $\underline{g_{AB}}$.

j) Es soll $g_1 : \vec{x} = \vec{p}_1 + t\vec{r}_1,\ t \in \mathbb{R}$ und $g_2 : \vec{x} = \vec{p}_2 + t\vec{r}_2,\ t \in \mathbb{R}$ geschnitten werden. Dazu benennen wir erst den zweiten Parameter um: $g_2 : \vec{x} = \vec{p}_2 + s\vec{r}_2,\ s \in \mathbb{R}$, danach setzen wir beide Geraden gleich: $\vec{p}_1 + t\vec{r}_1 = \vec{p}_2 + t\vec{r}_2$. Dies ist ein LGS $-$ je nach Dimension 2 (Ebene) oder 3 (Raum) Gleichungen mit den zwei Unbekannten s und t. Lösen Sie das LGS und setzen Sie die Werte für s in g_2 und t in g_1 ein (im Teil c) sind $s = 0$ und $t = 1$). Es sollte der gleiche Punkt (Schnittpunkt) herauskommen.

k) Die Division durch einen Vektor ist immer verboten! (F 86)

Aufg. 254/673: a) Schnitt, Parallel, Identität (die Orthogonalität gilt hier nicht als Lagebeziehung, wäre aber auch richtig). b) Schnitt: $g_s : \vec{x} = \binom{1}{1} + t \cdot \binom{1}{2}$, $(t \in \mathbb{R})$, echt parallel: $g_p : \vec{x} = \binom{2}{2} + t \cdot \binom{-4}{-2}$, $(t \in \mathbb{R})$, Identität: $g_p : \vec{x} = \binom{3}{2} + t \cdot \binom{-4}{-2}$, $(t \in \mathbb{R})$.

c) $t = 0.5, s = 0, S_1(2; 1)$, g schneidet g_1; $\quad 0 = 0$ oder $4t = 2 - 2s$, $g = g_2$;
$0 = 1$, $g||g_3$; $\quad t = 1, s = -1, S_4(4; 0)$, g orthogonal g_4; Orthogonalität gilt aber nicht als Lage;

d) Das Schnittproblem führt auf ein LGS 2 Gln 2 Ubek. Die Geraden schneiden sich, falls das LGS genau eine Lösung hat, falls es unlösbar ist, sind die Geraden parallel und falls das LGS unendlich viele Lösungen hat, dann sind die Geraden identisch.

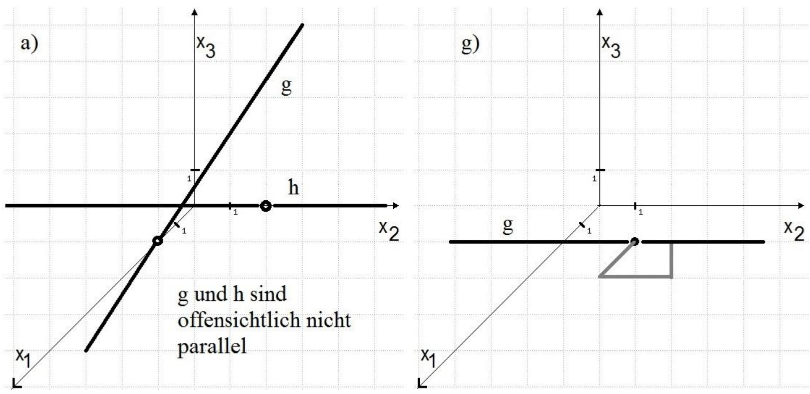


Abb. 454 Sind die Geraden parallel

Aufg. 254/674: Parallel oder identisch: Die Richtungsvektoren sind vielfache voneinander ($\vec{r}_1 = t \cdot \vec{r}_2$) $-$ im Falle des Schnittes sind sie das nicht.

i) sind parallel (oder identisch) $\Leftrightarrow$ es gibt eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit $\underline{\vec{r}_1 = a \cdot \vec{r}_2}$; die Vektoren heißen dann parallel (eigentlich linear abhängig). ii) schneiden sich $\Leftrightarrow$ $\underline{\vec{r}_1 \neq a \cdot \vec{r}_2}$;
iii) sind identisch $\Leftrightarrow$ $\vec{r}_1 = a_1 \cdot \vec{r}_2$ und $\underline{P_1 \in g_2 \text{ oder } \vec{r}_1 = a_2 \cdot (\vec{p}_2 - \vec{p}_1)}$;

iv) sind (echt) parallel $\Leftrightarrow$ $\vec{r}_1 = a_1 \cdot \vec{r}_2$ und $\underline{P_1 \notin g_2 \text{ oder } \vec{r}_1 \neq a_2 \cdot (\vec{p}_2 - \vec{p}_1)}$;

Aufg. 254/675: a) Die Geraden sind weder parallel noch identisch, weil die Richtungsvektoren nicht parallel sind (Abb.454).
b) Der Parameter t von g_2 wird in s umbenannt. Die ersten beiden Zeilen des LGS sind $2+2t = 2+2s$ und $3t = 3 \Leftrightarrow t = 1$ und $s = 1$. Setzen wir diese beiden Werte in die Geraden ein, so erhalten wir $P_1(4; 3; 4)$ und $P_2(4; 3; 2)$. Die (potentiellen) Schnittpunkte stimmen in der ersten und zweiten, aber nicht in der dritten Komponente überein $-$ damit schneiden sich die Geraden nicht. Sie sind auch nicht parallel, denn die Richtungsvektoren sind keine Vielfachen voneinander. Damit sind die Geraden auch nicht parallel. Im Raum gibt es also eine Lagebeziehung die nicht Schnitt aber auch nicht parallel ist. Man nennt diese Lage windschief (Normalfall der Lagebeziehung zweier Geraden im Raum).

c) (g) i) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} 1+3t &=& 2+2s \\ -1+4t &=& 0+3s \\ -1+5t &=& 0+4s \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} 3t-2s &=& 1 \\ 4t-3s &=& 1 \\ 5t-4s &=& 1 \end{array}$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\cdot 4} \\ \xrightarrow{\cdot(-3)} \\ \\ \end{array} \begin{array}{rcr} 12t-8s & = & 4 \\ \underline{-12t+9s} & \equiv & \underline{-3} \\ s & = & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcrcrcl} 3t-2\cdot 1 & = & 1 & \Rightarrow & 3t=3 & \Rightarrow & t=1 \\ 4t-3\cdot 1 & = & 1 & \Rightarrow & 4t=4 & \Rightarrow & t=1 \\ 5t-4\cdot 1 & = & 1 & \Rightarrow & 5t=5 & \Rightarrow & t=1 \end{array} \text{(Schnittlage)}$$

Schnittpunkt: $\vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow S(4/3/4).$

ii) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$,

damit sind die Richtungsvektoren parallel (l.a.) damit sind die Geraden parallel oder identisch.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} 1 & = & 2+2s \\ -1 & = & 0+3s \\ -2 & = & 0+4s \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcr} 2s & = & -1 \\ 3s & = & -1 \\ 4s & = & -2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcr} s & = & \frac{-1}{2} \\ 3s & = & \frac{-1}{3} \\ 4s & = & \frac{-1}{2} \end{array}.$$

Die Geraden sind parallel, weil nicht alle Werte für s identisch sind, der Aufpunkt $(1/-1/-2)$ liegt also nicht auf g.

iii) Die Richtungsvektoren sind parallel (l.a.) (damit sind die Geraden parallel oder identisch),

weil $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. $\begin{array}{rcl} 4 & = & 2+2s \\ 3 & = & 0+3s \\ 4 & = & 0+4s \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcr} 2s & = & 2 \\ 3s & = & 3 \\ 4s & = & 4 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcr} s & = & 1 \\ 3s & = & 1 \\ 4s & = & 1 \end{array}.$

Die Geraden sind identisch, weil alle Werte für s identisch sind, der Aufpunkt $(4/3/4)$ liegt also auf g.

c) (h) i) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} 1+3t & = & 2+2s \\ -1+4t & = & 3+0s \\ -1+5t & = & 1+1s \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcr} 3t-2s & = & 1 \\ 4t & = & 4 \\ 5t-s & = & 2 \end{array}$

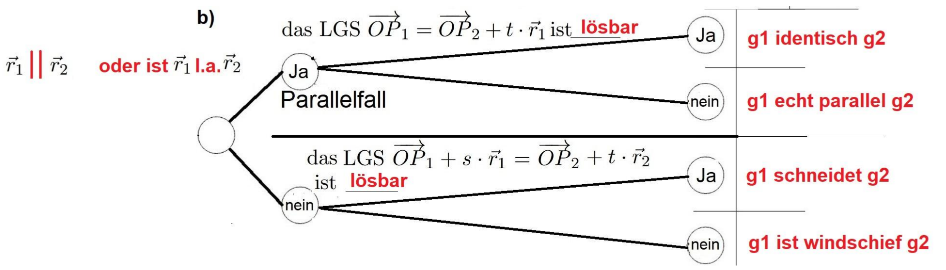
$$\Rightarrow t=1 \quad \Rightarrow \begin{array}{rcrcl} 3-2s & = & 1 & \Rightarrow & s=1 \\ 4 & = & 4 & & \\ 5-s & = & 2 & \Rightarrow & s=3 \end{array} \quad \text{(Widerspruch - windschief)}$$

ii) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} 1-2t & = & 2+2s \\ -1-3t & = & 3+0s \\ -2-4t & = & 1+1s \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcr} -2t-2s & = & 1 \\ -3t & = & 4 \\ -4t-s & = & 3 \end{array}$

$$\Rightarrow t=\frac{-4}{3} \quad \Rightarrow \begin{array}{rcrcl} -2\cdot\frac{-4}{3}-2s & = & 1 & \Rightarrow & s=\frac{-5}{6} \\ -3\cdot\frac{-4}{3} & = & 4 & & \\ -4\cdot\frac{-4}{3}-s & = & 2 & \Rightarrow & s=\frac{-10}{3} \end{array} \quad \text{(Widerspruch - windschief)}$$

iii) $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} 4+4t & = & 2+2s \\ 3+6t & = & 3+0s \\ 4+8t & = & 1+1s \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcr} 4t-2s & = & -2 \\ 6t & = & 0 \\ 8t-s & = & -3 \end{array}$

$$\Rightarrow t=0 \quad \Rightarrow \begin{array}{rcrcl} -2s & = & -2 & \Rightarrow & s=1 \\ 6\cdot 0 & = & 0 & & \\ -s & = & -3 & \Rightarrow & s=3 \end{array} \quad \text{(Widerspruch - windschief)}$$



e) Es gilt: $\vec{r}_1$ l.a. von $\vec{r}_2 \Leftrightarrow g_1 || g_2$, wenn zusätzlich das LGS $\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + t \cdot r_1$ lösbar ist, so ist $g_1 = g_2$, ansonsten sind g_1 und g_2 echt parallel.

Falls $\vec{r}_1$ l.u. von $\vec{r}_2$ so ist $g_1 \nparallel g_2$, wenn zusätzlich das LGS $\vec{p}_1 + s \cdot r_1 = \vec{p}_2 + s \cdot r_2$ lösbar ist, so schneiden sich g_1 und g_2 ansonsten sind g_1 und g_2 windschief (Abb. 455).

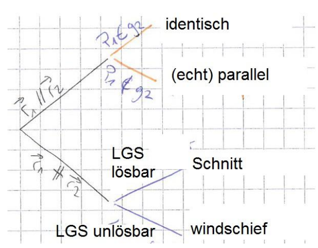


Abb. 455 Lage von Geraden (der Baum)

Aufg. 255/676: a) Siehe Formel 65 (2 PaG): $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} \Rightarrow C(-1|8|-2)$;
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} \Rightarrow E(3|2|2)$; $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} \Rightarrow H(-1|2|2)$;
$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OC} \Rightarrow G(-1|8|2)$; $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OH}}{2} \Rightarrow M(1|2|2)$; $\overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2} \Rightarrow N(1|8|-2)$;

b i) $g_1=\overline{AG}=\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-4\\6\\4\end{pmatrix}$, $h_1=\overline{BH}=\begin{pmatrix}3\\8\\-2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-4\\-6\\4\end{pmatrix}\Rightarrow s=t=\frac{1}{2}, S(1|5|0);\ (s,t\in\mathbb{R})$

ii) $g_2=\overline{BE}=\begin{pmatrix}3\\8\\-2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\-6\\4\end{pmatrix}$, $h_2=\overline{MN}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\6\\-4\end{pmatrix}\Rightarrow g_2$ (echt) $||\ h_2$;

iii) $g_3=\overline{ED}=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\-4\end{pmatrix}$, $h_3=\overline{BG}=\begin{pmatrix}3\\8\\-2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix}\Rightarrow g_3,h_3$ sind ws;

iv) g_4 (echt) $||\ h_4$; **v)** $S(1|5|0)$;

Aufg. 255/677: a) $\begin{pmatrix}4\\a\\-3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\7\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left(\begin{array}{cccl}2t & +s & & =-3-4\\ t & -2s & +a & =7-0\\ -t & -s & & =2+3\end{array}\right)\Rightarrow$

$$\begin{array}{ccl}2t & +s & =-7\\ -t & -s & =5\\ \hline t & & =-2\end{array}\xrightarrow{2t+s=-7}2(-2)+s=-7\Rightarrow s=-3\xrightarrow{t-2s+a=7}-2-2(-3)+a=7\Rightarrow a=3.$$

Die Geraden schneiden sich $a=3,\ t=-2,\ s=-3,\ S(0;1;-1)$. Sonst sind die Geraden windschief.

b) Für $a=7$ sind die Geraden identisch, sonst sind die Geraden (echt) parallel. c) siehe unten

c/ **Die Richtungsvektoren sind linear unabhängig; damit ist der Parallelfall ausgeschlossen**

Thx Nik Froe

$4-t=6+2s$
$a^2+2t=7+s$
$2+t=2-s$

$6=8+s \quad |-8$
$-2=s$

$a^2+2\cdot2=7+(-2)$
$a^2+4=5 \quad |-4$
$a^2=1 \quad |\sqrt{\ }$
$a=\pm1$

$2+t=2-(-2)$
$2+t=4 \quad |-2$
$t=2$

$4+2\cdot(-1)=2$
$1+2\cdot2=5 \qquad S(2|5|4)$
$2+2\cdot1=4$

bei $a=\pm1$ schneide sich die Gerade sonst Windschief.

d) Für $a=4$ sind die Geraden echt parallel, sonst schneiden sind die Geraden.

e) h_0 ist die x_2-Achse; h_0 scheint parallel zur Geraden g zu sein, h_2 sogar identisch. Tatsächlich ist h_a für $a\neq2$ windschief zu g.

$$\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}+t_1\cdot\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}+t_2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{array}{cccc}4t_1 & & = & a-2\\ 4t_1 & +t_2 & = & 2\\ 2t_1 & & = & 0\end{array}\Rightarrow\begin{array}{c}a=2\\ t_2=2\\ t_1=0\end{array}.$$

Aufg. 255/678: a) Bei der x_1,x_2 Ebene sind x_1 und x_2 beliebig, $x_3=0$.

g_1 :	$S_{1,2}(2.5,5,0),(t=1.5)$;	$S_{1,3}(0,0,1),(t=-1)$;	$S_{2,3}(0,0,1),(t=-1)$;
$g_{2,a}$:	$S_{1,2}(4,6,0),(t=2)$;	$S_{1,3}(-2,0,3),(t=-1)$;	$S_{2,3}(0,2,2),(t=0)$;
$g_{2,b}$:	$S_{1,2}(1.5,5,0),(t=0.25)$;	$S_{1,3}(0,0,5),(t=1.5)$;	$S_{2,3}(0,0,5),(t=1.5)$;
$g_{2,c}$:	$S_{1,2}(3,6,0),(t=0)$;	$S_{1,3}(0,0,6),(t=1.5)$;	$S_{2,3}(0,0,6),(t=1.5)$;
$g_{2,d}$:	$S_{1,2}(0,2,0),(t=0)$;	$S_{1,3}(-2,0,1),(t=1.5)$;	$S_{2,3}(0,2,0),(t=0)$;
$g_{2,e}$:	$S_{1,2}(2.5,5,0),(t=-0.5)$;	$S_{1,3}(0,0,5),(t=1/3)$;	$S_{2,3}(0,0,5),(t=1/3)$;
$g_{1,g}$:	$S_{1,2}(1,1,0),(t=0)$;	$S_{1,3}(3,0,4),(t=1)$;	$S_{2,3}(0,1.5,-2),(t=-1/2)$;
$g_{2,h}$:	$S_{1,2}(-1,7,0),(t=0)$;	$S_{1,3}(-4.5,0,-14),(t=-1.75)$;	$S_{2,3}(0,9,4),(t=-1/2)$;
$g_{2,i}$:	$S_{1,2}(-1,-1,0),(t=-1)$;	$S_{1,3}(1,0,-4),(t=-1.5)$;	$S_{2,3}(0,-1.5,2),(t=-3/4)$;
$g_{2,j}$:	$S_{1,2}(-1.25,6.5,0),(t=-1/8)$;	$S_{1,3}(-4.5,0,-13),(t=-1.75)$;	$S_{2,3}(0,9,3),(t=-1/2)$;
$g_{2,k}$:	$S_{1,2}(1,1,0),(t=-1)$;	$S_{1,3}(-1,0,4),(t=-1.5)$;	$S_{2,3}(0,1.5,-2),(t=-3/4)$;

b) $g_b : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow t = 2, a = -1, c = 4 \Rightarrow S_{1,3}(-1; 0; 4)\ (t \in \mathbb{R}).$

c) $g_c : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow t = 0.25, b = -0.5, c = 3 \Rightarrow S_{1,2}(0; -0.5; 3),\ (t \in \mathbb{R});$

d) $g_d : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow t = \lightning$ $S_{1,2}$ gibt es nicht; g_d ist parallel zur x_1, x_2 Ebene, $(t \in \mathbb{R})$.

Aufg. 255/679: = Ag 680 ohne GTR: g_1 und g_{2a}: $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{r}_{2a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sind l.u.
$\Rightarrow$ Lage= Schnitt oder windschief.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+t = 0+2s \\ 2+2t = 2+2s \\ 3-2t = 2-s \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} t = 2s-1 \\ t = s \\ s-2t = -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} t = 2t-1 \\ \\ t-2t = -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} t = 1 \\ s = t = 1 \\ t = 1 \end{pmatrix}$$

(Schnittlage);

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow S(2; 4; 1).$$

g_1 und g_{2b}: $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{r}_{2b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ sind l.a. $\Rightarrow$ Lage= parallel oder identisch.

$$P \in g?\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+t = 3 \\ 2+2t = 6 \\ 3-2t = -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} t = 2 \\ t = 2 \\ t = 2 \end{pmatrix}$$

g_1 und g_{2b} sind identisch.

g_1 und g_{2c}: $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{r}_{2c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ sind l.a. $\Rightarrow$ Lage= parallel oder identisch.

$$P \in g?\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+t = 3 \\ 2+2t = 6 \\ 3-2t = 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} t = 2 \\ t = 2 \\ t = 1.5 \end{pmatrix} \lightning$$

g_1 und g_{2c} sind parallel.

g_1 und g_{2d}: $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{r}_{2d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sind l.u. $\Rightarrow$ Lage= Schnitt oder windschief.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+t = 0+2s \\ 2+2t = 2+2s \\ 3-2t = 0-s \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} t = 2s-1 \\ t = s \\ s-2t = -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} t = 2t-1 \\ \\ t-2t = -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} t = 1 \\ s = t = 1 \\ t = 3 \end{pmatrix}$$

$\lightning$; Lage: windschief.

g_1 und g_{2e}: $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{r}_{2e} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ sind l.a. $\Rightarrow$ Lage= parallel oder identisch.

$$P \in g?\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+t = 1 \\ 2+2t = 2 \\ 3-2t = 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} t = 0 \\ t = 0 \\ t = 0 \end{pmatrix}$$

g_1 und g_{2e} sind identisch.

Aufg. 255/680:

$$\text{i)} \quad \begin{array}{rrr} t_1 & -t_2 & = -1 \\ 2t_1 & & = 2 \\ 3t_1 & -3t_2 & = 1 \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ii)} \quad (\ \vec{r}_1 \quad -\vec{r}_2 \quad \vec{p}_2 - \vec{p}_1)$$

a) Schnitt $S(2|4|1)$, b) identisch, c) parallel, d) windschief, e) identisch,
f) 0 0 0 $\Leftrightarrow$ 0 = 0 und 0 0 1 $\Leftrightarrow$ 0 = 1. g) 0 = 1 = 'nein', 0 = 0 = 'ja'. Die Frage lautet: Gibt es Schnittpunkte der Geraden? Bei 'ja' und 'nein' dominiert das 'nein' (es sei $t \in \mathbb{R}$).

h) $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\underrightarrow{\text{GTR}}$ $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 0 \end{pmatrix}$ $\underrightarrow{\text{rref}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ S(-3;3;-8)

i) $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\underrightarrow{\text{GTR}}$ $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 4 & -8 & 8 \end{pmatrix}$ $\underrightarrow{\text{rref}}$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ parallel

j) $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\underrightarrow{\text{GTR}}$ $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$ $\underrightarrow{\text{rref}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ws

k) $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$ $\underrightarrow{\text{GTR}}$ $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -1 & -2 & 2 \\ 4 & 8 & -8 \end{pmatrix}$ $\underrightarrow{\text{rref}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ id

Aufg. 256/681: Bei dieser Aufgabe ist x ein beliebiger Wert ungleich 0 und $*$ ist ein beliebiger Wert. a) windschief: $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) Schnittlage: $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; c) parallel: $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; d) identisch: $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & x & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. e) Wäre $a_{11} = 0$, dann wäre der Richtungsvektor $\vec{r}_1 = \vec{0}$, gewesen. f) $a_{12} = 0$ (muss); g) falsche Zeilenreihenfolge; h) Bei den Lagen parallel oder identisch ist $a_{12} \neq 0$, sonst wäre $\underline{r_2 = \vec{0}}$, was nicht sein darf. i) So wäre $r_2 = \vec{0}$; j) So wäre $r_1 = \vec{0}$;

Aufg. 256/682: a) Schnitt, b) parallel, c) identisch, d) und e) Schnitt, f) geht nicht; g) Der Schnittpunkt ist $p_1 = p_2$ also ist der Schnittpunkt bei beiden Geraden der Aufpunkt.

Aufg. 256/683: a) $\left|\binom{4}{3}\right| = 5$; $|\binom{a}{b}| = \sqrt{a^2 + b^2}$, (Diagonale im Rechteck).
b) $\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = 3$; $\left|\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, (Diagonale im Quader).
c) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{5} \approx 2.24$; $|\overrightarrow{AC}| = 3\sqrt{2} \approx 4.42 < 4.48 \approx \sqrt{5} + \sqrt{5}$.
Es gilt die Dreiecksungleichung $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| > |\overrightarrow{AC}|$.
d) $\binom{4/5}{3/5}$ (eventuell auch $\binom{-4/5}{-3/5}$). $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ hat die Länge 1.

e) $|\vec{x}| = \sqrt{t^2 + 3^2} = 5 \Leftrightarrow t^2 = 5^2 - 3^2 = 6 \Leftrightarrow t = \pm 4$; .

f) $\left|\begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{t^2 + t^2 + 1^2} = \sqrt{2t^2 + 1}$; $\quad \sqrt{2t^2 + 1} = 3 \Rightarrow 2 \cdot t^2 + 1 = 9 \Leftrightarrow t = \pm 2$ (Probe: o.k.).

g) $\left|\begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix}\right| = \sqrt{t^2 + (-t)^2 + t^2} = \sqrt{3t^2}$; $\quad \sqrt{3t^2} = \sqrt{27} \Rightarrow 3 \cdot t^2 = 27 \Leftrightarrow t = \pm 3$ (Probe: o.k.).

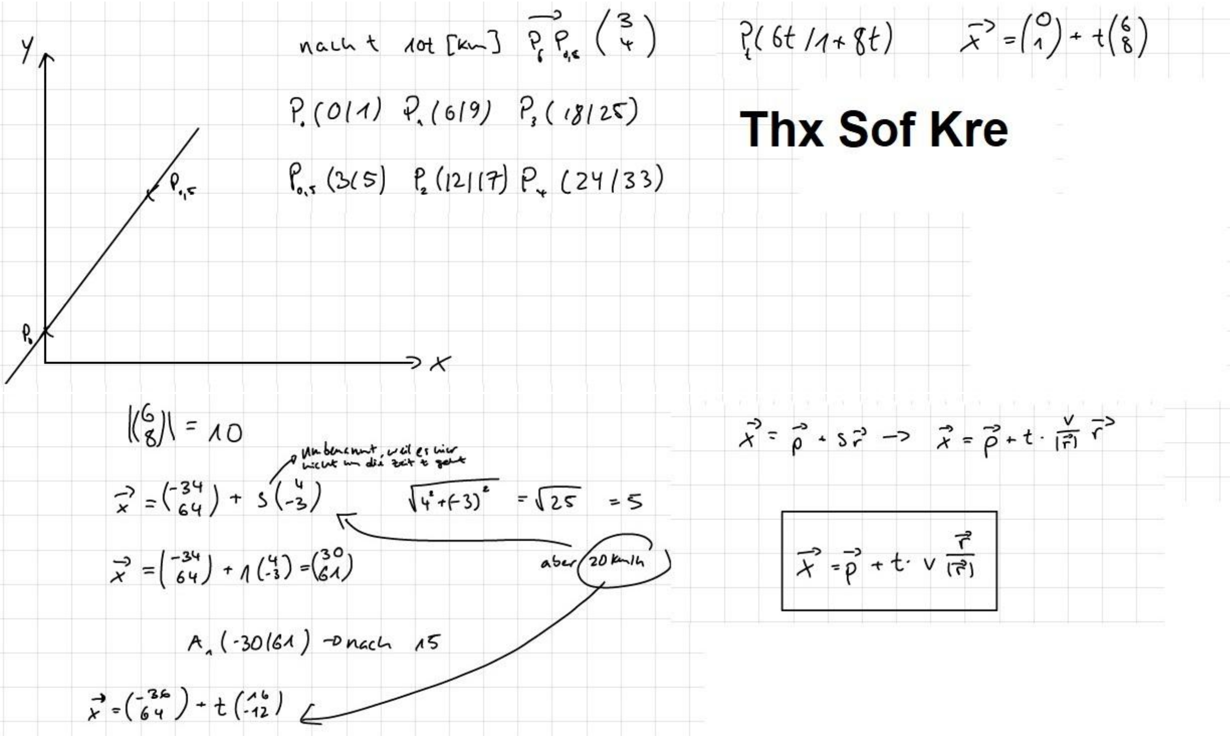
Aufg. 256/684: a) $P_1(1.6|0.8)$, $P_2(2.2|1.6)$, $P_3(2.8|2.4)$, $P_d(1 + d \cdot 0.6|d \cdot 0.8)$, $\vec{x} = \binom{1}{0} + \frac{d}{5} \cdot \binom{3}{4}$.

b) $g : \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \frac{d}{|\vec{r}|} \cdot \vec{r}$.

c) i) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{d}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, ii) $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{d}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, iii) $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{d}{9} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$.

d) Wenn man in die Bogenlängenparametrisierung für d den Wert 5 einsetze, dann erhalte ich den Punkt Q, der von $\underline{P}$ in Richtung $\underline{\vec{r}}$ den Abstand $\underline{d}$ hat. ii) $\vec{x} = \overrightarrow{OP} + \frac{-5}{|\vec{r}|} \cdot \vec{r}$ e) $C(7|1|1), D(9|5|5)$.

Aufg. 257/685: **a)** $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$; $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.



$|\overrightarrow{P_0\,P_1}| = |\binom{3}{4}| = 5$; es fährt also $5km$ in $0.5h$ oder mit $10\frac{km}{h}$. $\vec{p}_t = \binom{0}{1} + t\cdot\binom{6}{8}$ (t in h).

b) Normalerweise kommt es auf die Länge des Richtungsvektors bei Geraden nicht an - bei Bewegungsdarstellungen ist aber $|\vec{r}| = \underline{v}$ (Objektgeschwindigkeit).

c) $|\overrightarrow{Q_0,\,A_1}| = |\binom{4}{-3}| = 5$, also ist B_2 im Punkt A_1 nach $\frac{1}{4}h$ (A_2 nach $\frac{1}{2}h$).

Nach einer Stunde ist B_2 im Punkt $Q_1(-18;52)$ weil $\binom{-18}{52} = \binom{-34}{64} + \frac{20}{5}\cdot\binom{4}{-3}$.

Nach t Stunden ist B_2 in $\vec{x} = \binom{-34}{64} + t\cdot\frac{20}{5}\cdot\binom{4}{-3}$.

d) Bewegungsgleichung (Zeit-Ort-Gleichung) $\vec{x} = \vec{p} + t\cdot\frac{v}{|\vec{r}|}\cdot\vec{r}$ (auswendig).

e) $\binom{0}{1} + t\cdot\binom{6}{8} = \binom{-34}{64} + s\cdot\binom{16}{-12} \;\Leftrightarrow\; \begin{array}{rcl} 0+6t &=& -34+16s \\ 1+8t &=& 64-12s \end{array} \;\Leftrightarrow\; \begin{array}{rcl} 6t-16s &=& -34 \\ 8t+12s &=& 63 \end{array}$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{rrcl} \xrightarrow{\cdot 4} & 24t-64s &=& -136 \\ \xrightarrow{\cdot(-3)} & -24t-36s &=& -189 \\ \hline & -100s &=& -325 \end{array} \Rightarrow s = 3.25 \qquad 6t - 16\cdot 3.25 = -34 \;\Leftrightarrow 6t = 18 \;\Leftrightarrow t = 3$$

$\vec{p}_3 = \binom{18}{25} = \vec{q}_{3.25}$. Die Boote stoßen nicht zusammen, denn B_1 erreicht P_3 nach $3h$, B_2 nach $3.25h$.

f) $\vec{d}_0 = \binom{-34}{63}$; $\vec{d}_1 = \begin{pmatrix} -18-0 \\ 49-1 \end{pmatrix} = \binom{-18}{48}$; $\vec{d}_t = \binom{-34+16t}{64-12t} - \binom{0+6t}{1+8t} = \binom{-34+10t}{63-20t}$;

h) $d(0) = \sqrt{5125}$, $d(1) = \sqrt{2425}$, $d(t) = \sqrt{(-34+10t)^2 + (63-20t)^2} = \sqrt{500t^2 - 3200t + 5125}$.

g) $S(\frac{-b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a})$.

i) $|\vec{d}_t|^2 = \left|\binom{-34+10t}{63-20t}\right|^2 = (-34+10t)^2 + (63-20t)^2$ $= 100t^2 - 680t + 1156 + 400t^2 - 2520t + 3969 = 500t^2 - 3200t + 5125$; der Scheitel der Parabel ist $S(3.2;5)$. Nach 3.2 Stunden kommen sich die Boote am nächsten.

B_1: $\vec{p}_{\,3.2} = \binom{0}{1} + 3.2\cdot\binom{6}{8} = \binom{19.2}{26.6}$ $\qquad$ B_2: $\vec{q}_{\,3.2} = \binom{-34}{64} + 3.2\cdot\binom{16}{-12} = \binom{17.2}{25.6}$

Ihr Abstand ist dann $d_{min} = d(3.2) = \left|\binom{17.2}{25.6} - \binom{19.2}{26.6}\right| = \sqrt{5}$.

Aufg. 257/686: a i) $\vec{x}_t = \binom{1}{3} + t\cdot\frac{13}{\sqrt{12^2+5^2}}\cdot\binom{12}{5} = \binom{1}{3} + t\cdot\binom{12}{5}$;

a ii) $\vec{x}_t = \binom{1}{2} + t \cdot \frac{51}{\sqrt{8^2+15^2}} \cdot \binom{8}{15} = \binom{1}{2} + t \cdot \binom{24}{45}$;

a iii) $|\vec{r}| = \left|\binom{24}{7}\right| = \sqrt{24^2+7^2} = 25$, $\vec{x}_t = \binom{2}{3} + t \cdot \frac{100}{25} \cdot \binom{24}{7} = \binom{2}{3} + t \cdot \binom{96}{28}$;

b i) $\vec{x}_t = \binom{1.5}{2} + t \cdot \frac{10}{\sqrt{4^2+3^2}} \binom{4}{3} = \binom{1.5}{2} + t \cdot \binom{8}{6}$ b ii) $\vec{x}_t = \binom{3}{4} + t \cdot \frac{20}{\sqrt{8^2+6^2}} \binom{8}{6} = \binom{3}{4} + t \cdot \binom{16}{12}$

b iii) $\vec{x}_t = \binom{6}{8} + t \cdot \frac{30}{\sqrt{12^2+9^2}} \binom{12}{9} = \binom{3}{4} + t \cdot \binom{24}{18}$

Sondererkenntnis: Vervielfachen von Geschwindigkeit + Richtungsvektorkomponenten erzeugt immer den gleichen Vorfaktor (hier 2); Die Vervielfachung der Komponenten der Aufpunkte hat sonst keine Auswirkung.

c i) $\vec{x}_t = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t \cdot \frac{30}{\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}} \cdot \begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-20\\20\\10\end{pmatrix}$

c ii) $\vec{x}_t = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t \cdot \frac{30}{\sqrt{(-4)^2+4^2+2^2}} \cdot \begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-20\\20\\10\end{pmatrix}$

c iii) $\vec{x}_t = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t \cdot \frac{30}{\sqrt{(-6)^2+6^2+3^2}} \cdot \begin{pmatrix}-6\\6\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-20\\20\\10\end{pmatrix}$

c iv) $\vec{x}_t = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t \cdot \frac{30}{\sqrt{2^2+(-2)^2+^3}} \cdot \begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}20\\-20\\-10\end{pmatrix}$

Sondererkenntnis: Positives Vervielfachen von allein der Richtungsvektorkomponenten erzeugt identische Geraden, die identische Zeit Ort Gleichungen erzeugen. Identische Bewegungen haben identische Zeit Ort Gleichungen. Negatives VErvielfachen erzeugt eine Zeit-Ort-Gleichung in die andere Richtung.

Aufg. 258/687: a+b) Die Richtungsvektoren der Geraden müssen linear abhängig sein. Damit kommt für die Lage parallel /identisch $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ in Frage.

$Q(2/2/0)$ liegt nicht auf g: $\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\begin{matrix}\Rightarrow 2 = 0 + t & \Rightarrow t = 2 \\ \Rightarrow 2 = 0 + 0 & \Rightarrow 0 = 2 \ ↯ \\ \Rightarrow 0 = 3 + t & \Rightarrow t = -3 \ ↯\end{matrix}$

damit ist g (echt) || h (identisch geht nicht).

c) Wir wählen Q und den Ursprung als Punkte einer Gerade g_{OQ}, dann gilt g_{OQ}: $\vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$, $(s \in \mathbb{R})$; $\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ sind nicht linear abhängig (parallel);

Schnittansatz $g_{OQ} \cap g$: $s \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\begin{matrix}\Rightarrow 2s = 0 + t & \Rightarrow \text{ von unten } 2 \cdot 0 = -3 \ ↯ \\ \Rightarrow 2s = 0 + 0 & \Rightarrow s = 0 \\ \Rightarrow 0 = 3 + t & \Rightarrow t = -3\end{matrix}$

$\Rightarrow g$ und g_{OQ} sind windschief.

d) $\begin{pmatrix}-4\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\begin{matrix}\Rightarrow -4 = 0 + t & \Rightarrow t = -4 \\ \Rightarrow 0 = 0 + 0 & \Rightarrow 0 = 0 \\ \Rightarrow -1 = 3 + t & \Rightarrow t = -4\end{matrix}$ $\Rightarrow S(-4|0|-1)$ liegt auf g.

Sei $P(0;0;3)$; wähle $\vec{v} = \overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix}-4\\0\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\-2\\-1\end{pmatrix}$;

e) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2-3\\-4-0\\-2-1\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-1\\-4\\-3\end{pmatrix}$;

Der gesuchte Punkt heiße $R(a;a;a) \Rightarrow$ LGS: (1): $3 - t = a$; (2): $0 - 4t = a$; (3): $1 - 3t = a$;

(1) und (2) gleichgesetzt: $3 - t = -4t \Leftrightarrow t = -1$

in (1): $3 - t = a \Leftrightarrow 3 - (-1) = 4 = a$;

in (3) $1 - 3t = a \Leftrightarrow 1 - 3(-1) = 4_{\surd} \Rightarrow R(4;4;4)$.

f) $g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ a-4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$;

i) Für die x_1x_2-Ebene gilt $x_3 = 0$. Bei der Gerade ist $x_3 = 4 + t$ also $t = -4$.
$\vec{s}_a = \begin{pmatrix} 2 \\ a-4 \\ 4 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ a+4 \\ 0 \end{pmatrix}$; damit ist $S_a(-6; a+4; 0)$.

ii) x_3-Achse: $\vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$; x_3-Achse $\cap g_a$ erzeugt das LGS $2 + 2t = 0; a - 4 - 2t = 0; 4 + t = s$.
Diese wird gelöst von $t = -1$, $a = 2$; $s = 3$; damit ist $R(0;0;3)$.

g) Wir legen ein Achsenkreuz in die Pyramide mit Ursprung O = Lotfußpunkt von S.
Es gilt: $P(1|-1|0)$, $Q(1|1|0)$, $R(-1|1|0)$ und $T(-1|-1|0)$, $S(0|0|2)$, $A(1|-0.5|0)$ und $B(1|0.5|0)$.
$\overrightarrow{OD} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OS}}{2} \Rightarrow D(0.5|-0.25|1)$ und $C(0.5|0.25|1)$. Der Boden ist die x_1, x_2 Ebene $x_3 = 0$.

i) Fläche $\Delta PQS = \frac{|\overrightarrow{PQ}|\cdot|\overrightarrow{SM}|}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{5}\ (m^2)$.

Fläche $ABCD = \frac{(|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{CD}|}{2} \cdot \frac{\overrightarrow{SM}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|\right) \cdot \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \frac{3}{8} \cdot \sqrt{5}\ (m^2)$.

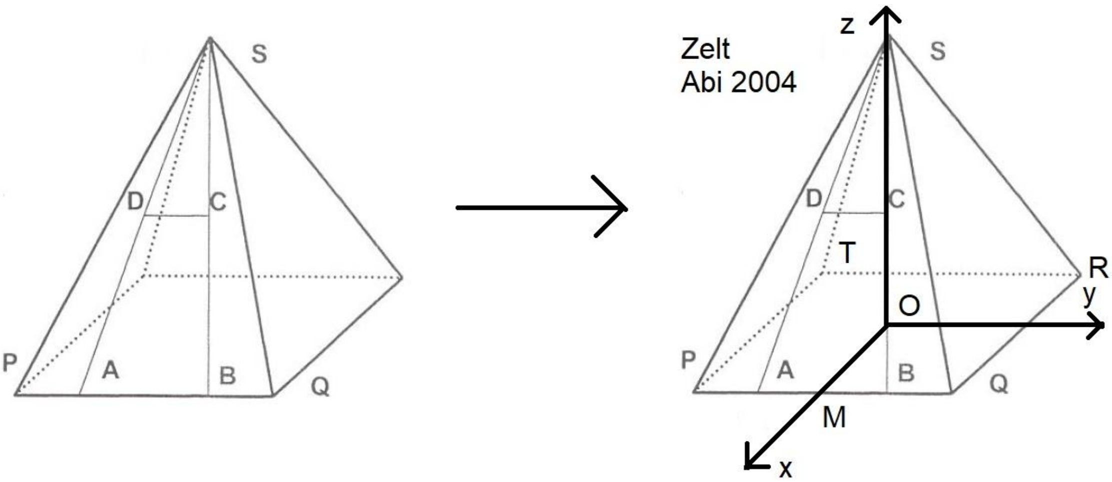


Abb. 456 Abi 2004: Pyramide mit eingebautem Achsenkreuz

Damit hat das Trapez 37.5% der Fläche des Dreiecks.

Einfacherer Ansatz mit Strahlensätzen und $A = \frac{1}{2}$ Grundseite $\cdot$ Höhe:

$|\Delta ABS| = \frac{1}{2}|\Delta PQS|$ und $|\Delta DCS| = \frac{1}{4}|\Delta ABS| = \frac{1}{8}|\Delta PQS|$.

Damit ist $|ABCD| = \frac{1}{2}|\Delta PQS| - \frac{1}{8}|\Delta PQS| = \frac{3}{8}|\Delta PQS|$ ($\Rightarrow 37.5\%$).

ii) Die Lampe hängt im Punkt $L(0|0|1.75)$. Die relevanten Strahlen sind

$g_{LD} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.75 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.25 \\ -0.75 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ und $g_{LC} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.75 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.25 \\ -0.75 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

$g_{LD} \cap x_1, x_2$ Ebene $x_3 = 1.75 + t \cdot (-0.75) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{7}{3}$.

Damit ist $D'(\frac{7}{6}|\frac{-7}{12}|0)$ und $C'(\frac{7}{6}|\frac{7}{12}|0)$ und $|\overrightarrow{C'D'}| = \frac{7}{6}$. Die Länge der Strecke beträgt $1.1\bar{6}m$.

Aufg. 258/688: a) $\vec{m} = \frac{\vec{a}+\vec{f}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M = D(2;3;1)$;

b) $\vec{k} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow K(0;-3;3)$;

c) $\vec{a}' = 2 \cdot \vec{z} - \vec{a} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A' = F(6;5;-1)$;

d) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, $g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, $g_4: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$,

i) $\vec{r}_1 = 2 \cdot \vec{r}$; $\Rightarrow$ parallel oder id; $P_1 \in g$?
$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 = -2+2t \\ -2 = 1+t \\ 2 = 3-t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} t=2 \\ t=-3 \\ t=1 \end{pmatrix}$ $(P_1 \notin g) \Rightarrow g_1 || g$ (echt $||$);

ii) $\vec{r}_2 = 3 \cdot \vec{r}$; $\Rightarrow$ parallel oder id; $P_2 \in g$?
$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 = -2+2t \\ 3 = 1+t \\ 1 = 3-t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} t=2 \\ t=2 \\ t=2 \end{pmatrix}$ $(P_2 \in g) \Rightarrow g_2 = g$;

iii) $\vec{r}_3 \neq c \cdot \vec{r}$; $\Rightarrow$ Schnitt oder windschief; g_3 und g gleichgesetzt:
$\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6-4s = -2+2t \\ 5-7s = 1+t \\ -1+3s = 3-t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} s=0 \\ t=4 \\ 0=0 \end{pmatrix} \Rightarrow g_3 \cap g = S(6;5;-1)$;

iv) $\vec{r}_4 \neq c \cdot \vec{r}$; $\Rightarrow$ Schnitt oder windschief; g_4 und g gleichgesetzt:
$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2-2s = -2+2t \\ -2+2s = 1+t \\ 2-2s = 3-t \end{pmatrix}$

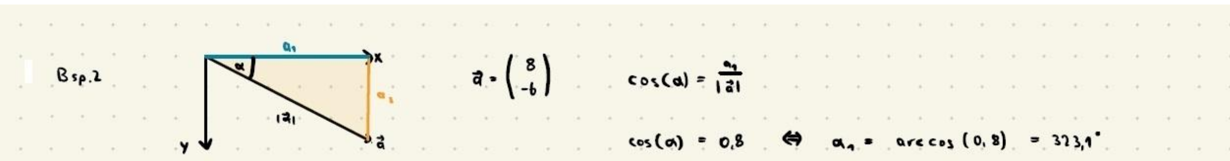
die unteren Gleichungen widersprechen einander (addiert 0=4) $\Rightarrow$ windschief;

e) Auf der x_1-Achse liegen der Ursprung und der Punkt $(1;0;0)$

$\Rightarrow$ x_1-Achse: $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, x_2-Achse: $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, x_3-Achse: $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

15.10.2 LöVo zu Einheit 10.2 (Skalarprodukt UE 11_6)

Aufg. 258/689: a) $a_1 = |\vec{a}| \cos(\alpha)$, $a_2 = |\vec{a}| \sin(\alpha)$



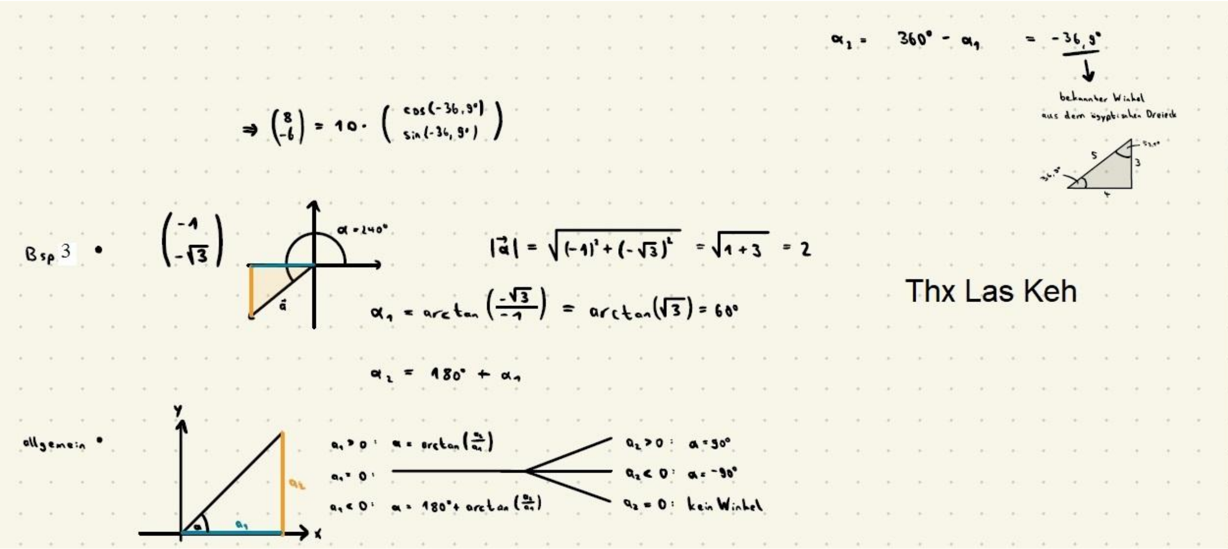


Abb. 457 LöVo zur Ag 258/689;

b) $\binom{2}{2}$: $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$, $\alpha = 45°$; $\binom{2}{2} = 2\sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix}\cos(45°)\\ \sin(45°)\end{pmatrix}$. $\quad \binom{0}{-2} = 2 \cdot \begin{pmatrix}\cos(270°)\\ \sin(270°)\end{pmatrix}$.

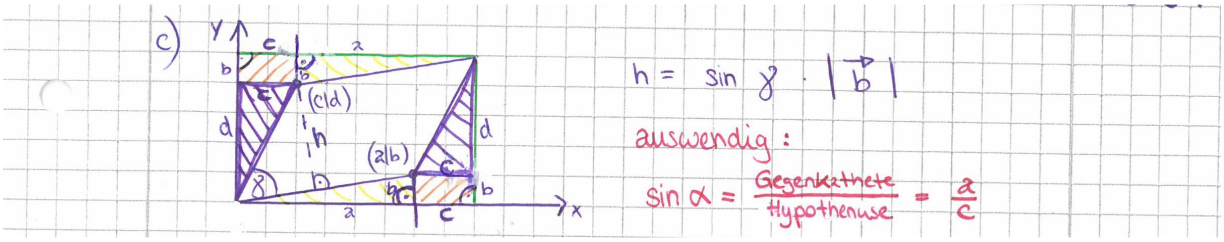
Aufg. 258/690: a) $h = |\vec{b}|\sin(\gamma) \Rightarrow A = |\vec{a}| \cdot h = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\gamma)$.

b) $\sin(\beta - \alpha) = \sin(\beta)\cos(\alpha) - \cos(\beta)\sin(\alpha)$. $\quad$ c) $A = |a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1|$.

d) Die Determinante $\det(\vec{a}, \vec{b}) = \underline{a_1 b_2 - a_2 b_1}$ entspricht dem <u>orientierten</u> <u>Flächeninhalt</u> des Parallelogramms, dass von <u>$\vec{a}$ und $\vec{b}$</u> erzeugt wurde.

e) Das LGS $x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} = \vec{c}$ ist eindeutig lösbar $\Leftrightarrow$ $\underline{\det(\vec{a}, \vec{b}) \neq 0}$.

Aufg. 258/691: **a)** $\det\left(\binom{2}{1}\binom{1}{2}\right) = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3 \Rightarrow A = 3$; **b)** $\det\left(\binom{3}{4}\binom{3}{1}\right) = -9$ $\Rightarrow A = |-9| = 9$. **c)** Die Fläche kann berechnet werden, da die x_3-Koordinaten 0 sind. $A = 5$.



Aufg. 258/692:

$$\text{a+b)} \quad \cos(\beta - \alpha) = \cos(\beta)\cos(\alpha) + \sin(\beta)\sin(\alpha) = \frac{b_1}{|\vec{b}|} \cdot \frac{a_1}{|\vec{a}|} + \frac{b_2}{|\vec{b}|} \cdot \frac{a_2}{|\vec{a}|} = \frac{b_1 \cdot a_1 + b_2 \cdot a_2}{|\vec{b}| \cdot |\vec{a}|}.$$

c) i) $\vec{b} = \binom{1}{0} : \gamma = 45°$; $\quad$ ii) $\vec{b} = \binom{0}{-1} : \gamma = 135°$; $\quad$ iii) $\vec{b} = \binom{1}{-1}$: $\gamma = 90°$;

iv) $\vec{b} = \binom{-1}{-1}$: $\gamma = 180°$; $\quad$ v) $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$: $\gamma = 15°$; $\quad$ vi) $\vec{b} = \begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\ -1\end{pmatrix}$: $\gamma = 165°$;

vii) $\quad$ 1) $\binom{1}{1} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}\cos(45°)\\ \sqrt{2}\sin(45°)\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cos(60°)\\ 2\sin(60°)\end{pmatrix}$, damit ist $\gamma = 15°$.

2) $\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)$. Damit gilt $\cos(15°) = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)$; $\sin(15°) = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)$.

d) i) $\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$: $\gamma = \cos^{-1}(\frac{48}{49}) \approx 11.595°$; ii) $\begin{pmatrix}6\\4\\12\end{pmatrix}$: $\gamma = \cos^{-1}(\frac{96}{98}) \approx 11.595°$;
iii) $\begin{pmatrix}12\\8\\24\end{pmatrix}$: $\gamma = \cos^{-1}(\frac{192}{196}) \approx 11.595°$; iv) $\begin{pmatrix}-3\\-2\\-6\end{pmatrix}$: $\gamma = \cos^{-1}(\frac{-48}{49}) \approx 168.405°$;
v) $\begin{pmatrix}-6\\-4\\-12\end{pmatrix}$: $\gamma = \cos^{-1}(\frac{-96}{98}) \approx 168.405°$; vi) $\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}$: $\gamma = \cos^{-1}(1) = 0°$;
vii) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$: $\gamma = \cos^{-1}(-1) = 180°$;

Seien $\vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b}$. Winkel$(\vec{a}, k\cdot\vec{b})$ = Winkel$(\vec{a},\vec{b})$ (falls $k > 0$);
Winkel$(\vec{a}, k\cdot\vec{b}) = 180°-$Winkel$(\vec{a},\vec{b})$ (falls $k < 0$); Winkel$(\vec{a},\vec{a}) = 0°$; Winkel$(\vec{a},-\vec{a}) = 180°$;

Die Aufgaben stammen oftmals aus der Fortbildung (welche) vom Großmeister Trs selbst :)

e) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$:

90°: i) $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, ii) $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, iv) $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, **allgemein:** $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}0\\a\\b\end{pmatrix}$
(falls a und b nicht beide Null sind $\Leftrightarrow |a| + |b| > 0$).

0°: iii) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, **allgemein:** Sei $\vec{a} \neq \vec{0}$, dann ist Winkel$(\vec{a},\vec{a})$=0°.

45°: v) $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, vi) $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, (Flächendiagonale im Quadrat / Würfel)

$\approx 54.74°$: vii) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ (Winkel einer Raumdiagonale im Würfel gegen eine Seite).

f) $\vec{a} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$:

Winkel$\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) \approx 35.26°$; Diagonale im Quader gegen die Flächendiagonale.

Winkel$\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = 60°$; Die drei Flächendiagonalen $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$
eines Würfels bilden ein gleichseitiges Dreieck.

Winkel$\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right) \approx 50.77°$;

Winkel$\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}\right) \approx 47.87°$; (für wachsende x_3 Koordinate wird der Winkel kleiner);

Winkel$\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\right) \approx 31.48°$; Winkel$\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right) \approx 18.11°$; Winkel$\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}\right) \approx 30.96°$.

g) $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$:

90°: i) $\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$, ii) $\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$, Tatsächlich bilden die drei Vektoren $\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$
eine Orthogonalbasis siehe Abs 288/10.9.5; (kein Abistoff mehr)

$\approx 15.79°$: iii) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, iv) $\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$; **allgemein:** für $k > 0$ gilt Winkel$(\vec{a}, k\cdot\vec{b})$=Winkel$(\vec{a},\vec{b})$.

$\approx 164.21°$: v) $\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, vi) $\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$; **allgemein:** für $k < 0$ gilt Winkel$(\vec{a}, k\cdot\vec{b})$=180°− Winkel$(\vec{a},\vec{b})$.

vii) Ein Winkel zum Nullvektor ist nicht definiert.

c) $\binom{a_1}{a_2} \circ \binom{b_1}{b_2} := \underline{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}$ $\quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} := a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3.$

d) $\mathbb{D} = V \times V \to \mathbb{R} = \mathbb{B}$. Das Skalarprodukt ist keine innere Verknüpfung, weil diese aus dem Verknüpfungsbereich <u>heraus</u> führt.

e) Multiplizieren Sie zwei Vektoren niemals <u>komponenten</u>weise.

f) a) $\binom{2}{1} \cdot \binom{1}{2} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 4$, $\alpha = \cos^{-1}(\frac{4}{(\sqrt{5})^2}) \approx 36.87°$; b) $3 \cdot 3 + 4 = 13$; $\alpha \approx 34.70°$ c) 5, $\alpha = 45°$.

g) Sei $\vec{b} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 4-2 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$;

$\vec{c} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 5-2 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|\vec{c}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 0^2} = 5$ und

$\vec{d} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 5-4 \\ 3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $|\vec{d}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$.

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{b} \circ \vec{c}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 0}{3 \cdot 5}\right) \approx 48.2°.$$

Beim Winkel β verwenden wir die Vektoren $\overrightarrow{BA} = -\vec{b}$ und $\overrightarrow{BC} = \vec{d}$.

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{-\vec{b} \circ \vec{d}}{|-\vec{b}| \cdot |\vec{d}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{(-1) \cdot 3 + (-2) \cdot 1 + (-2) \cdot (-2)}{3 \cdot \sqrt{14}}\right) \approx 95.1°.$$

Beim Winkel γ verwenden wir die Vektoren $\overrightarrow{CA} = -\vec{c}$ und $\overrightarrow{CB} = -\vec{d}$.

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{(-\vec{c}) \circ (-\vec{d})}{|-\vec{c}| \cdot |-\vec{d}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{(-4) \cdot (-3) + (-3) \cdot (-1) + 0 \cdot 2}{5\sqrt{14}}\right) \approx 36.7°.$$

Δ_2 :
$A_2(-1; 3; 4)$,
$B_2(3; 1; 0)$,
$C_2(-2; 5; 2)$

$$\alpha_2 = \cos^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-4-4+8}{6 \cdot 3}\right) = 90°;$$

$$\beta_2 = \cos^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{20+8+8}{6 \cdot \sqrt{45}}\right) \approx 26.6°;$$

$$\gamma_2 = \cos^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}\right|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{5+8-4}{3 \cdot \sqrt{45}}\right) \approx 63.4°;$$

Δ_3 :
$A_3(0; 1; 2)$,
$B_3(2; -1; 1)$,
$C_3(2; 3; 6)$

$$\alpha_3 = \cos^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{4-4-4}{3 \cdot \sqrt{24}}\right) \approx 105.8°;$$

$$\beta_3 = \cos^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\4\\5\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\4\\5\end{pmatrix}\right|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{0+8+5}{3\cdot\sqrt{41}}\right) \approx 47.4°;$$

$$\gamma_3 = \cos^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix}-2\\-2\\-4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\-4\\-5\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}-2\\-2\\-4\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\-4\\-5\end{pmatrix}\right|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{0+8+20}{\sqrt{24}\cdot\sqrt{41}}\right) \approx 26.8°;$$

Aufg. 259/693:

a) $\left|\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right| = 5;\ \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = 25.\ \left|\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right|^2 = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}.$

Beweis: $\left|\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right|^2 = (\sqrt{a^2+b^2})^2 = a^2+b^2 = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}.$

$\vec{a}\circ\vec{a} = \underline{a_1^2+a_2^2} = |\vec{a}|^2.$

b) $\left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right| = \left|\frac{1}{|\vec{a}|}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}a_1/|\vec{a}|\\a_2/|\vec{a}|\\a_3/|\vec{a}|\end{pmatrix}\right| = \sqrt{\frac{a_1^2}{|\vec{a}|^2}+\frac{a_2^2}{|\vec{a}|^2}+\frac{a_3^2}{|\vec{a}|^2}} = \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} = 1.$

c) Kommutativgesetz: $\vec{a}\circ\vec{b} = \vec{b}\circ\vec{a}$, 'Assoziativgesetz': $(r\vec{a})\circ\vec{b} = r(\vec{a}\circ\vec{b})$, Distributivgesetz: $\vec{a}\circ(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\circ\vec{b}+\vec{a}\circ\vec{c}$, Das echte Assoziativgesetz gilt nicht.

d) $\vec{x}\circ\vec{x} = x_1^2+x_2^2+x_3^2 = |\vec{x}|^2$. Das Skalarprodukt ist positiv definit: $\vec{x}\circ\vec{x} = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2} > 0$, falls $\vec{x} \neq \vec{0}$.

Aufg. 259/694: $\vec{F}_Z$ wirkt nach <u>aussen</u>), $\vec{G}$ wirkt nach <u>unten</u>). $\vec{F}_N$ ergibt sich als <u>Summe</u> von $\vec{F}_Z$ und $\vec{G}$. $\vec{F}_N = \vec{F}_Z + \vec{G} = \begin{pmatrix}\frac{m\cdot v^2}{r}\\0\end{pmatrix} + \binom{0}{-mg} = \begin{pmatrix}\frac{m\cdot v^2}{r}\\-mg\end{pmatrix};$

$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{F}_N\circ\vec{G}}{|\vec{F}_N|\cdot|\vec{G}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{m^2g^2}{\sqrt{\frac{m^2\cdot v^4}{r^2}+m^2g^2}\ \cdot\ mg}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{v^4}{g^2r^2}+1}}\right);$

oder (Mittelstufe) $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{|\vec{F}_Z|}{|\vec{G}|}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{m\cdot v^2}{r}}{mg}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{r\cdot g}\right).$

Aufg. 259/695: a) 90°; b) 90°; $\vec{a}\circ\vec{b} \neq 0$ und $\vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b}$.
c) Der Satz vom Nullprodukt gilt nicht für Vektoren. Deshalb: Teile nie durch einen Vektor!

Aufg. 259/696: a) siehe Aufgaben 659 − 661;

b) $|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix}4\\8\\1\end{pmatrix}\right| = 9 = \left|\begin{pmatrix}7\\-4\\4\end{pmatrix}\right| = |\overrightarrow{BC}|;\ \begin{pmatrix}4\\8\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}7\\-4\\4\end{pmatrix} = 0.$

c) $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}10\\6\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\10\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-2\\6\end{pmatrix};\ |ABCD| = 9\cdot 9 = 81$

Aufg. 259/697: a) $\binom{3}{-6}\circ\binom{4}{2} = 12-12 = 0$. b) $a = 1\ 4a+2b = 0$, damit $\binom{t}{-2t}$; (d: Gerade)

c) $2a+6b-4c = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2c-3b\\b\\c\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}$; (d: Ebene − später).

d) Sei $P_t(t;0;0)$ (beliebig) auf der x-Achse. Es muss $\overrightarrow{P_tA} \perp \overrightarrow{P_tB} \Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix}6-t\\1\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2-t\\3\\0\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (6-t)\cdot(2-t)+1\cdot 3 = 0 \Leftrightarrow 12-8t+t^2+3 = 0 \Leftrightarrow t^2-8t+15 = 0 \Leftrightarrow$
$t_1 = 3$, $t_2 = 5$; damit sind die Punkte $P_3(3;0;0)$ und $P_5(5;0;0)$.

Aufg. 259/698: c) a) $b_{||} = \binom{1}{1}$, $b_\perp = \binom{1}{-1}$,
b) $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ hat Länge 1. Die Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ hat die Länge $|\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$. Damit ist

$$\vec{b}_{||} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha) = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{b}| \cdot \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}$$

$\vec{b}_\perp = \vec{b} - \vec{b}_{||}$:). (Abb. 458)

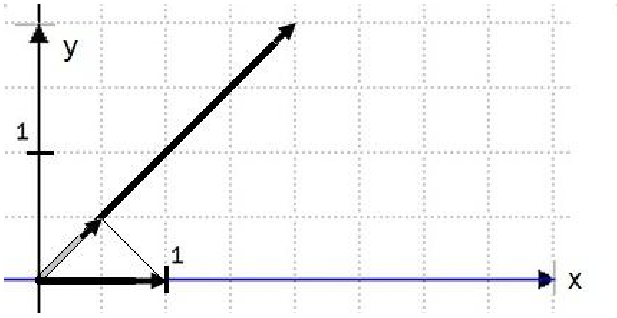


Abb. 458 orthogonale Zerlegung

$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$; $\vec{b}_1$: $\vec{b}_{||} = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} = \frac{-9}{9} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{b}_\perp = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$;
$\vec{b}_2$: $\vec{b}_{||} = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} = \frac{18}{9} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\vec{b}_\perp = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$;

Aufg. 260/699: $\vec{a} = \binom{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$; $\vec{G} = \binom{0}{-mg}$;
$\vec{F}_H = \vec{F}_{G||} = \left(\binom{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \circ \binom{0}{-mg}\right) \cdot \binom{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = -mg\sin(\alpha) \cdot \binom{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$;
$\vec{F}_N = \vec{G} - \vec{F}_H = \binom{0}{-mg} + mg\sin(\alpha) \cdot \binom{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = mg\cos(\alpha) \binom{\sin(\alpha)}{-\cos(\alpha)}$;

Aufg. 260/700: a) Bei der Raute ist die Diagonale gleichzeitig Winkelhalbierende.
b) **i)** $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2.6$. **ii)** $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind gleich lang weil nur die Komponenten getauscht wurden. **iii)** $\vec{w} = \binom{3.4}{3.4}$ **iv)** Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gleich lang, dann ist $\vec{w} = \vec{a} + \vec{b}$ ein winkelhalbierender Vektor.

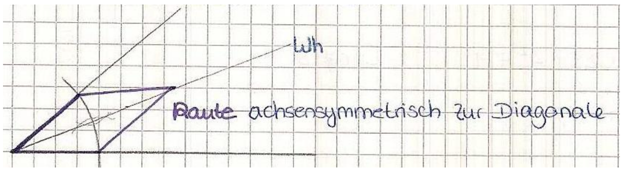


Abb. 459 Konstruktion der Winkelhalbierenden

c) Sei $\vec{a} = \binom{1}{2.4}$ und $\vec{b} = \binom{4.8}{2}$. $\vec{w}$ ist zB. $\vec{w}$ aus Teil b). Sei $\vec{a} \neq \vec{0}$, dann hat $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ Länge 1. iii) $\vec{w} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

d) i) $\vec{w} = \binom{1}{1}$; ii) $\vec{w} = \binom{1}{\sqrt{3}}$; iii) $\vec{w} = \binom{3}{4}$; iv) $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4/3 \\ 1 \end{pmatrix}$; v) $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 1.2 \\ 0.8 \end{pmatrix}$;

e) $\binom{0}{0}$; dies ist kein winkelhalbiernder Vektor. Von den Vektoren $\vec{a}$ und $k \cdot \vec{a}$ $(k < 0)$ kann so keine Winkelhalbierende berechnet werden.

f) P_1 $\quad \vec{x} = \vec{p}_1 + t\left(\frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|} \pm \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|}\right)$ (Abb. 459).

g) Zeigen Sie, dass g und h orthogonal sind.

$\left(\frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|} + \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|}\right) \circ \left(\frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|} - \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|}\right) = \left(\frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|}\right)^2 - \left(\frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|}\right)^2 = \frac{\vec{r}_1 \circ \vec{r}_1}{|\vec{r}_1|^2} - \frac{\vec{r}_2 \circ \vec{r}_2}{|\vec{r}_2|^2}$ (Ag 259/693 c) $= \frac{|\vec{r}_1|^2}{|\vec{r}_1|^2} - \frac{|\vec{r}_2|^2}{|\vec{r}_2|^2} = 0$. (qed)

f) $\vec{x} = \binom{2}{8} + t \cdot \binom{3}{4}$ $\quad \vec{x} = \binom{2}{8} + s \cdot \binom{7}{24}$ $\quad \left|\binom{3}{4}\right| = 5$ $\quad \left|\binom{7}{24}\right| = 25$ $\quad$ Thx Jac Pat

$\vec{x} = \binom{2}{8} + t \left(\frac{\binom{3}{4}}{\left|\binom{3}{4}\right|} + \frac{\binom{7}{24}}{\left|\binom{7}{24}\right|} \right)$ $\quad \vec{x} = \binom{2}{8} + t\left(\binom{3/5}{4/5} + \binom{7/25}{24/25}\right) = \binom{2}{8} + t\binom{0.88}{1.76}$

$\vec{x} = \binom{2}{8} + t \cdot \left(\binom{3/5}{4/5} - \binom{7/25}{24/25}\right) = \binom{2}{8} + t\binom{0.32}{-0.16}$ $\quad \binom{0.88}{1.76} \cdot \binom{0.32}{0.16} = 0.2816 - 0.2816 = 0$

h) $g_{AB} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbb{R})$, $\quad g_{AC} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbb{R})$.

$\vec{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2+0^2}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{7^2+0^2+24^2}} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7/25 \\ 0 \\ 24/25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.88 \\ 0.8 \\ 0.96 \end{pmatrix}$;

$\vec{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2+0^2}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{7^2+0^2+24^2}} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7/25 \\ 0 \\ 24/25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.32 \\ 0.8 \\ -0.96 \end{pmatrix}$;

$w_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0.88 \\ 0.8 \\ 0.96 \end{pmatrix}$; $w_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0.32 \\ 0.8 \\ -0.96 \end{pmatrix}$;

Aufg. 260/701: ($\approx$ WT Abi 2010) a) hier ist $x_3 = \underline{0} \Leftrightarrow 3 + 1 \cdot t = 0 \Leftrightarrow t = -3 \Leftrightarrow S(2/6/0)$.

b) $P(5/0/3)$ und $Q(6/-2/4)$ liegen auf g; 3 PaG: $\vec{p}' = 2 \cdot \vec{a} - \vec{p}$,

$\vec{p}' = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4.5 \\ 6 \\ 3.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\vec{q}' = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix}$;

$\Rightarrow h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

c) $|\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$; $|\overrightarrow{BC}| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5}$;

Damit ist $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$ und D liegt gegenüber von B.

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Winkel: $\frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}{2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}} = \frac{-4}{20} = -0.2$

$\Rightarrow \alpha = \gamma = \arccos\,(-0.2) \approx 101.5°$. und $\beta = \delta = \arccos\,(0.2) \approx 78.5°$.

d) $g_{CD} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$; damit ist $T_a(5 + a|3|5)$. Es muss $\overrightarrow{T_aA} \circ \overrightarrow{T_aB} = 0$ gelten:

$\begin{pmatrix} -3 - a \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 - a \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = (-3 - a)^2 - 4 + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -3.$

Damit ist $T(2|3|5)$. $|\Delta ABT| = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{TA}| \cdot |\overrightarrow{TB}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2} = 4.$

Die Fläche des ΔABT ist 4 (FE).

e) i) $|\overrightarrow{M_1M_2}| = 6$ $|\overrightarrow{BM_1}| = \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2 + 2.5^2} = \sqrt{51.25} = |\overrightarrow{BM_2}|$.

Damit ist $U = 6 + 2\sqrt{51.25} \approx 20.32$ (LE).

$g_{BS} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$; $Q_a(6 - 6a|0|5a)$,

$\overrightarrow{Q_aM_1} \circ \overrightarrow{Q_aM_2} = \begin{pmatrix} 6a - 6 \\ -3 \\ 2.5 - 5a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6a - 6 \\ 3 \\ 2.5 - 5a \end{pmatrix} = (6a - 6)^2 - 9 + (2.5 - 5a)^2 = 61a^2 - 97a + 33.25 = 0$

$\Leftrightarrow a_1 = 0.5, a_2 = \frac{133}{122} \approx 1.09$. Weil der Punkt zwischen B und S liegen soll, gilt $0 < a < 1$.

Damit ist a_1 die Lösung und a_2 entfällt und $Q_{0.5}(3|0|2.5)$ ist der gesuchte Punkt.

Der Fall $\overrightarrow{M_1Q_a} \circ \overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix} 6 - 6a \\ 3 \\ 5a - 2.5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 18 \neq 0$ ergibt keinen Beitrag.

f) i) Geraden $g_{AB} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $g_{AC} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$.

ii) Die Aufpunkte sind identisch; die Richtungsvektoren sind linear unabhängig; daher haben die Geraden g_{AB} und g_{AC} Schnittlage.

iii) Die Gerade g muss durch den Punkt A gehen.
Weil $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ gleich lang sind, kann $\vec{r}$ als Summe also $\vec{r} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}$ (also ohne normieren) gebildet werden. Damit ist eine Parameterform von g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. Tatsächlich gibt es aber zwei Geraden dieser Art, nämlich noch mit Richtungsvektor $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$; Geraden haben zwei Winkelhalbierende.

iv) Die Ebene E muss durch den Punkt A gehen und orthogonal zur von g_{AB} und g_{AC} aufgepannten Ebene F sein. $F : x_3 = 1$. Damit ist $\vec{s}_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Ein weiterer Spannvektor ist (wie bei Teil iii) der Vektor $\vec{r}$. Damit ist eine Parameterform von E:
$\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. Mit $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ ist eine Koordinatenform von E: $x_1 - x_2 = 0$.
Wieder gibt es zwei mögliche Spiegelebenen die zweite wird nicht von $\vec{r}$ sondern von $\vec{r}_2$ erzeugt. Diese ist von der Form $x_1 + x_2 = 2$.

Aufg. 261/702: a) Vor: $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AS}$ und $\overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{SB}$ Beh: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$; Sei $\vec{a} = \overrightarrow{SC}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{SB}$, dann ist $\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{DC}$.

c) (und damit auch b)) Sei $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{BC}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$, dann ist $\overrightarrow{DA} = -(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. Damit ist $\overrightarrow{M_1 M_2} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} = \frac{(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-\vec{c}}{2} = \overrightarrow{M_4 M_3}$ (Abb. 460).

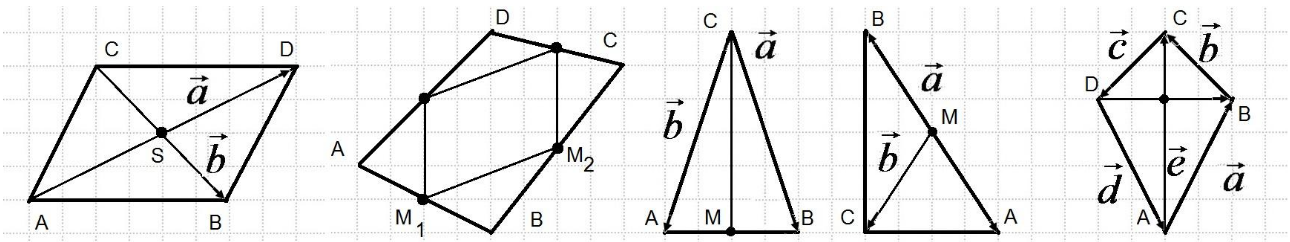


Abb. 460 Beweise mit Vektoren

Aufg. 261/703: a) Sei $\vec{a} = \overrightarrow{CB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{CA}$, dann ist $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{CM} = \frac{\vec{a}-\vec{b}}{2} \cdot \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} = \frac{\vec{a}^2}{4} - \frac{\vec{b}^2}{4} = \frac{|\vec{a}|^2}{4} - \frac{|\vec{b}^2|}{4} = 0$
$|\vec{a}| = |\vec{b}|$ (Vor $A, B; C$ gleichschenklig) (Abb. 460).

b) $M \in AB \to 2\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA}$. Sei $\vec{a} = \overrightarrow{MB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{MC}$
$\overrightarrow{BC} \circ \overrightarrow{CA} = (\vec{a} - \vec{b}) \circ (-\vec{b} - \vec{a}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$, weil beim Umkreis $r = |\vec{a}| = |\vec{b}|$ ist (Thales).

c) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 0$, $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2$ (Pythagoras).

e) (Nach Ste Bar) Sei A, B, C, D ein Parallelogramm und sei $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, dann gilt $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ und $\overrightarrow{BD} = \vec{a} - \vec{b}$. Beachten Sie $|\vec{a}|^2 = (\vec{a})^2$

$|\overrightarrow{AC}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = |\overrightarrow{BD}|^2$ damit ist

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 \Leftrightarrow (\vec{a})^2 + 2\vec{a} \circ \vec{b} + (\vec{b})^2 = (\vec{a})^2 - 2\vec{a} \circ \vec{b} + (\vec{b})^2$$
$$\xLeftrightarrow{-(\vec{a})^2-(\vec{b})^2} +2\vec{a} \circ \vec{b} = -2\vec{a} \circ \vec{b} \Leftrightarrow \qquad 4\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$

f)* Sei $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, (usw.) $\vec{e} = \overrightarrow{AC}$ und $\vec{f} = \overrightarrow{DB}$, dann gilt $\vec{b} = \vec{a} - \vec{e}$ also $|\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \circ \vec{e} + |\vec{e}|^2$ und $\vec{c} = \vec{e} + \vec{d}$ also $|\vec{c}|^2 = |\vec{e}|^2 - 2\vec{d} \circ \vec{e} + |\vec{d}|^2$. Beide Gleichungen subtrahiert ergibt (mit $|\vec{b}| = |\vec{c}|$ und $|\vec{a}| = |\vec{d}|$)

$$|\vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 - |\vec{d}|^2 + 2\vec{e} \circ (\vec{d} - \vec{a}) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \vec{e} \circ (\vec{d} - \vec{a}) = \vec{e} \circ \vec{f} \quad \text{damit ist } \vec{e} \perp \vec{f}.$$

Aufg. 261/704: a) $\cos(\alpha_1) = \frac{\overrightarrow{A_1B_1} \circ \overrightarrow{A_1C_1}}{|\overrightarrow{A_1B_1}| \cdot |\overrightarrow{A_1C_1}|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right|} = \frac{-4+2+2}{3 \cdot 3} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \cos^{-1}(0) = 90°;$

$$\cos(\beta_1) = \frac{\overrightarrow{B_1A_1} \circ \overrightarrow{B_1C_1}}{|\overrightarrow{B_1A_1}| \cdot |\overrightarrow{B_1C_1}|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{8+2-1}{3 \cdot \sqrt{18}} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45°;\ \gamma_1 = 45°;$$

$$\cos(\alpha_2) = \frac{\overrightarrow{A_2B_2} \circ \overrightarrow{A_2C_2}}{|\overrightarrow{A_2B_2}| \cdot |\overrightarrow{A_2C_2}|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \cos^{-1}(-0.5) = 120°;$$

$$\cos(\beta_2) = \frac{\overrightarrow{B_2A_2} \circ \overrightarrow{B_2C_2}}{|\overrightarrow{B_2A_2}| \cdot |\overrightarrow{B_2C_2}|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{2+0+1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30°;\ \gamma_2 = 30°;$$

$$\cos(\alpha_3) = \frac{\overrightarrow{A_3B_3} \circ \overrightarrow{A_3C_3}}{|\overrightarrow{A_3B_3}| \cdot |\overrightarrow{A_3C_3}|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}\right|} = \frac{12+12+3}{3 \cdot 9} = 1 \Rightarrow \alpha_1 = \cos^{-1}(1) = 0°;$$

$$\cos(\beta_3) = \frac{\overrightarrow{B_3A_3} \circ \overrightarrow{B_3C_3}}{|\overrightarrow{B_3A_3}| \cdot |\overrightarrow{B_3C_3}|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right|} = \frac{-8-8-2}{3 \cdot 6} = -1 \Rightarrow \alpha_1 = \cos^{-1}(-1) = 180°;\ \gamma_3 = 0°;$$

A_3, B_3, C_3 ist kein Dreieck.

b) $\vec{b}_{||} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \cdot \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \cdot |\vec{b}| = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right|} \cdot \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right|} \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2+0+1}{\sqrt{2}} = 1.5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0 \\ -1.5 \end{pmatrix},$

$$\vec{b}_\perp = \vec{b} - \vec{b}_{||} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0 \\ -1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

c) $\frac{\overrightarrow{A_2B_2}}{|\overrightarrow{A_2B_2}|} + \frac{\overrightarrow{A_2C_2}}{|\overrightarrow{A_2C_2}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

15.10.3 LöVo zu Einheit 10.3 (Ebenenberechnung UE 12_1)

Aufg. 261/705: a) Erklären Sie die erzeugte Skalierung; Siehe Aufgabe 669.

b) $(0; 3; 0), ..$ alle Punkte haben x_2 Koordinate 3. c) $x_1 = s$, $x_2 = 3$, $x_3 = t$ (s, t beliebig).

d+e) Eine Gerade im Raum ist von der Form $\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{r}$. Ebene: $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{s}_1 + t \cdot \vec{s}_2$. Eine Ebene ist zweidimensional und hat deshalb zwei nicht kollineare Spannvektoren.

f) Gerade: $\vec{x} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})$; Ebene: $\vec{x} = \vec{a} + s(\vec{b} - \vec{a}) + t(\vec{c} - \vec{a})$.

g) (i) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; Der Ursprung liegt in der Ebene mit $s = -1$ und $t = 2$.

(ii) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; Der Ursprung liegt nicht in der Ebene.

h) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$; Die Spannvektoren sind parallel (lin. abh.). A, B, C sind kollinear.

Aufg. 262/706: a) Die Ebenen werden gleichgesetzt (3 G 4 U → 1G 2 U)

Gl 1	1r	+	1t	−	0a	−	2b	=	1	
Gl 2	0r	+	1t	−	1a	−	0b	=	3	
Gl 3	0r	+	0t	−	1a	−	b	=	−1	

Stufenform

Thx Luisa M.

Abb. 461 'Zufällig' ist das LGS gleich in Stufenform ($a = u$), ($b = v$)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{lcl} 1 + r + t & = & 2 + 0u + 2v \\ 0 + 0r + t & = & 3 + u + 0v \\ 3 + 0r + 0t & = & 2 + u + v \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underrightarrow{\text{rref}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ z.B. mit GTR}$$

Damit ist $u + v = 1 \Leftrightarrow u = 1 - v$ (letzte Zeile). In E_2 eingesetzt:
$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + (1 - v)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 \\ 3+1 \\ 2+1 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 2-0 \\ 0-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Das $\underline{3} \times \underline{4}$ LGS ist u<u>nterbestimmt</u>. Damit ist die Lösungsmenge nicht ei<u>nelementig</u>. ($u - g = p = \underline{1}$), idR <u>ein</u> dimensional (geometrisch: Eine <u>Gerade</u>).

b) ... mit Hilfe eines $\underline{3} \times \underline{3}$ <u>LGS</u>, $s = 1$, $r = t = -1$, $S(-1/3/0)$; die KF (später) der Ebene ist $E : x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5$.

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ LGS: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$r\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{rrrcr} 4r & +2s & -1t & = & -1 \\ -2r & & -2t & = & 4 \\ & -1s & -2t & = & 1 \end{array}\right) (\cdot 2)\downarrow + \Rightarrow \left(\begin{array}{rrrcr} 4r & +2s & -1t & = & -1 \\ & 2s & -5t & = & 7 \\ & -1s & -2t & = & 1 \end{array}\right) (\cdot 2)\downarrow +$$

$$\left(\begin{array}{rrrcr} 4r & +2s & -1t & = & -1 \\ & 2s & -5t & = & 7 \\ & & -9t & = & 1 \end{array}\right)$$

$t = -1$

$2s + 5 = 7$

$\rightarrow s = 1$

$4r + 2 + 1 = -1$

$\rightarrow r = -1$

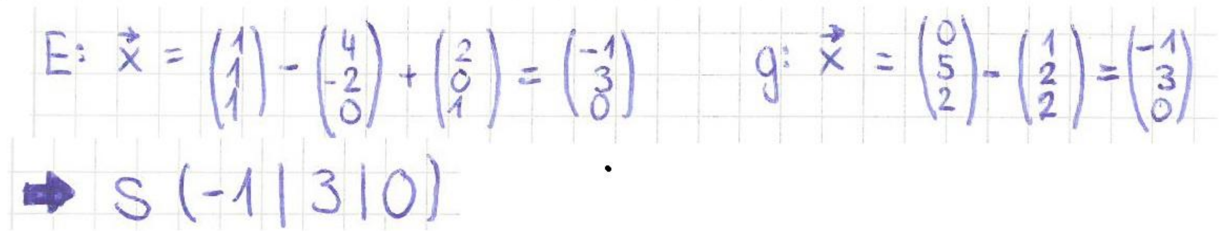


Abb. 462 Rechnung zum Schnitt von Gerade und Ebene mit Hilfe eines LGS

Eine Koordinatenform der Ebene ist E: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5$

Aufg. 262/707: a-c) .. genannt N<u>ormalen</u>vektor .. Alle Vektoren zeigen nach oben (sind also parallel). $\overrightarrow{PX}\ \vec{n} = 0$.

Es gibt $\underline{\infty}$ viele Vektoren, die zu einer Ebene senkrecht stehen. Diese sind alle <u>linear abhängig</u>.

d) $\overrightarrow{XP} \circ \vec{n} = 0$ ist die (Punkt) Normalenform (PNF).

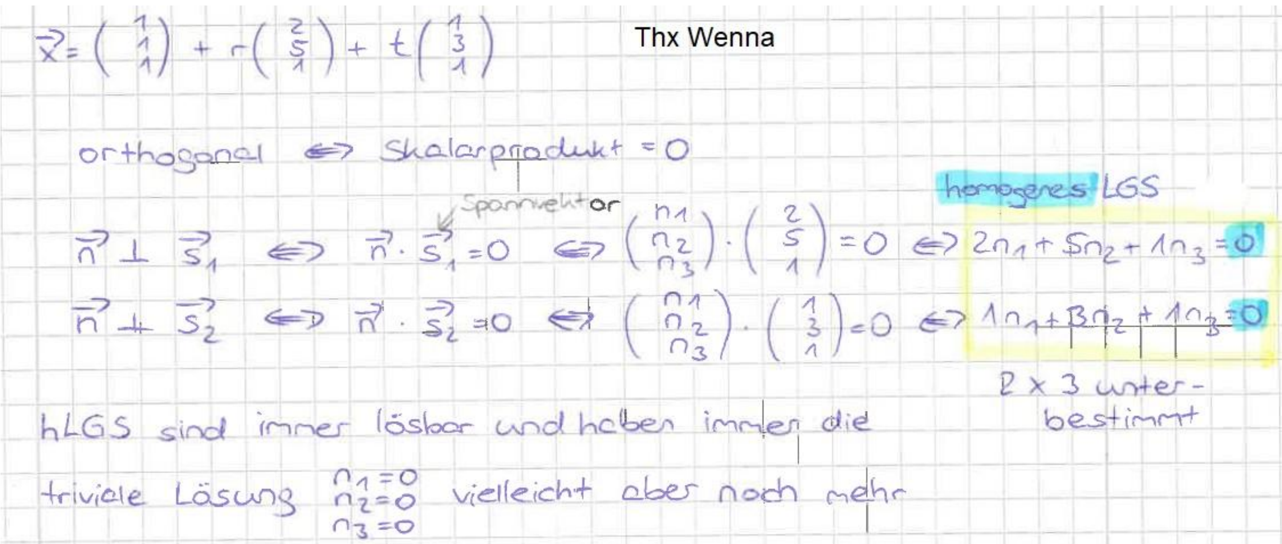
e) (i) $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = 0;\quad A, B \in E;\ C \notin E.$ Später: (KF) $2x_1 - x_2 + x_3 = 3$

(ii) $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix}7\\2\\1\end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = 0;\quad B, C \in E;\ A \notin E.$

(iii) $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} = 0;\quad A, C \in E;\ B \notin E.$

Aufg. 262/708: a+b) Sei $E: \vec{x} = \vec{p} + r\vec{s}_1 + t\vec{s}_2$. $\vec{s}_1 \circ \vec{n} = 0 = \vec{s}_2 \circ \vec{n} \Leftrightarrow 2n_1 + 5n_2 + n_3 = 0$ und $n_1 + 3n_2 + n_3 = 0$. Dies ist ein homogenes unterbestimmtes LGS; Bsp für $\vec{n}$: $\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Beachten Sie, dass der $\vec{0}$ nicht als orthogonal gilt.



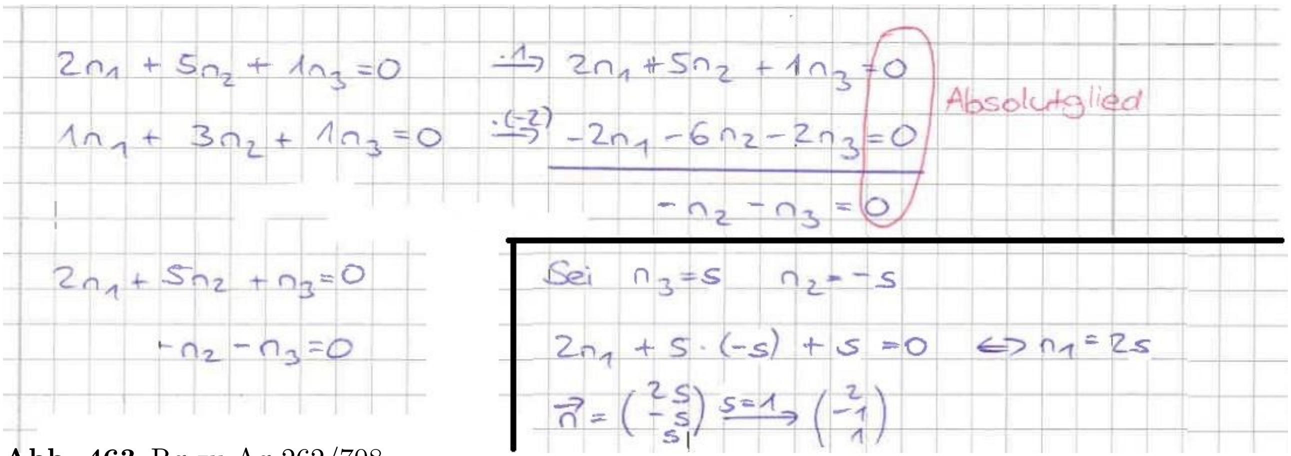


Abb. 463 Rg zu Ag 262/708

b) PNF: $(\vec{x}-\vec{p})\circ\vec{n}=0$ ist hier: $\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right)\circ\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=0.$

c) Um $\vec{n}$ zu finden erzeugt jeder Spannvektor $\vec{s}_1, \vec{s}_2$ eine Gleichung $\underline{\vec{n}\circ\vec{s}_i}=\underline{0}$.

d) Das Gleichungssystem hat immer das Absolutglied $\underline{0}$ und heißt deshalb <u>homogen</u>.

e) HLGS haben <u>immer</u> die (<u>triviale</u>) Lösung $\vec{x}=\underline{\vec{0}}$; sind also <u>immer</u> <u>lösbar</u>.

$\vec{n}$ wird also von einem (<u>unterbestimmten</u>) HLGS mit $\underline{2}$ Gleichungen und $\underline{3}$ Unbekannten gefunden. Es gibt also $\underline{\infty}$ viele Normalenvektoren.

f) **Beweis (Thx Man Heg):** Die Ebenen $E_\infty: a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=a_4$ (nicht unbedingt ein Element der Schar) und $E_0: b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=b_4$ sind entweder parallel (dann gibt es keine gemeinsamen Punkte) oder identisch (dann sind alle Ebenen identisch und haben ∞ viele Schnittgeraden; dieser Fall wird hier nicht weiter betrachtet) oder diese haben eine Schnittgerade der Form $\vec{x}=\overrightarrow{OP}+t\cdot\vec{r}$. Der Richtungsvektor $\vec{r}$ kann als
$\vec{r}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ gewählt werden. Es gilt $\vec{r}\circ\begin{pmatrix}a_1t+b_1\\a_2t+b_2\\a_3t+b_3\end{pmatrix}=t\vec{r}\circ\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\vec{r}\circ\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=t\cdot0+0=0$. Damit ist $\vec{r}$ orthogonal zu allen Normalenvektoren der Schar.

Weil $P\in E_0$ und $P\in E_\infty$ ist, gilt $a_1p_1+a_2p_2+a_3p_3=a_4$ und $b_1p_1+b_2p_2+b_3p_3=b_4$. Mit t multipliziert und addiert ergibt sich:

a_1tp_1	$+a_2tp_2$	$+a_3tp_3$	$=a_4t$
b_1p_1	$+b_2p_2$	$+a_3p_3$	$=a_4$
$(a_1\cdot t+b_1)p_1$	$+(a_2\cdot t+b_2)p_2$	$+(a_3\cdot t+b_3)p_3$	$=a_4\cdot t+b_4$

Damit liegt P in allen Ebenen E_t und damit liegt auch die Gerade g in allen Ebenen E_t.

Aufg. 262/709: In den LöVo wird das Vektorprodukt (Ag 725; Abs 10.4) verwendet.

1) $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1)\cdot1-1\cdot0\\1\cdot1-1\cdot1\\1\cdot0-(-1)\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$; $\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)\circ\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=0;$

2) $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-2)\cdot1-1\cdot(-3)\\1\cdot3-1\cdot1\\1\cdot(-3)-(-2)\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$; $\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right)\circ\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=0;$

1) KF: $-x_1+x_3=0$; 2) KF: $x_1+2x_2+3x_3=4$.

Aufg. 262/710: $\vec{x}-\vec{p}$ komponentenweise dargestellt:

$$\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right)\circ\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-1\\x_2-1\\x_3-2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=2(x_1-1)-(x_2-1)+(x_3-2)=0\ \Leftrightarrow\ 2x_1-x_2+x_3=3$$

b) $(\vec{x}-\vec{p})\circ\vec{n}=0=n_1(x_1-p_1)+n_2(x_2-p_2)+n_3(x_3-p_3)\Leftrightarrow n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3=n_1p_1+n_2p_2+n_3p_3$.

c) Die KF einer Ebene mit Normalenvektor $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ist $\underline{ax_1 + bx_2 + cx_3 = e}$ $(e \in \mathbb{R})$.

Ein Normalenvektor der Ebene steht als <u>Faktoren</u> vor den x_i.

d) $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$. Weil $' = 0'$ herauskommt liegt der Ursprung in der Ebene.

e) Die Punkte einer Menge, deren Koordinaten die Gleichung $ax_1+bx_2+cx_3 = e$ erfüllen $\underline{a, b, c \neq (0, 0, 0)}$, stellen eine Ebene dar. Diese Darstellungsform heißt <u>Koordinaten</u>form, wobei der Vektor $\underline{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}$ <u>senkrecht</u> auf E steht.

f) i) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, ii) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, iii) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, iv) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, v) $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

g) Welche Darstellungsform (im Zweifel) nehmen? Antwort: Die KF.

h_e) Folgende Objekte (Punkte, Geraden) legen eine Ebene fest. i) <u>3</u> nicht <u>kollineare</u> Punkte,
ii) eine Gerade g und ein Punkt P mit $P \notin g$. iii) zwei <u>schneidende</u> oder (echt) <u>parallele</u> Geraden.

Aufg. 263/711: a) $E_a : 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2$; b) $E_b : 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 5$; c) $E_c : -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$;

e) i) $x_1 = 1$, ii) $x_2 = 6$, iii) $x_3 = 7$,

f) i) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$, iii) $4x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$, iv) $2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$.

Genau die Ebenen, die den Ursprung beinhalten haben das Absolutlied 0.

g) $E_1 : 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 1$; $E_2 : 2x_1 - 2x_2 - x_3 = -1 \Leftrightarrow -2x_1 + 2x_2 + x_3 = +1$

h) i) $4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2$; ii) x_1 Koeffizient negiert: $-4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2$;
iii) x_2 Koeffizient negiert: $4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2$; iv) x_3 Koeffizient negiert: $4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2$.

iv) die Punkte liegen auf einer Parallelen zur x_3-Achse. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sind bei den Punkten jeweils eine Koordinate x_n $(n = 1, 2, 3)$ gleich, so erzeugen die Punkte eine Parallele zu Koordinatenebene $x_n = 0$. Sind hingegen wie im Teil iv) zwei Koordinaten gleich, so liegen die drei Punkte (höchstens) auf einer Geraden.

i) i) $E : 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$; ii) $E : \frac{5}{2} \cdot x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$;
iii) $E : 5x_1 - \frac{1}{3} \cdot x_2 + 2x_3 = 6$; iv) $E : 5x_1 - x_2 + \frac{2}{2} \cdot x_3 = 6$;

Erkenntnis: $P_n(a_i|b_i|c_n)$ $n = 1, 2, 3$ liegen auf der Ebene $E : ax_1+bx_2+cx_3 = e$, dann liegen $Q_n(a_i|b_i|k \cdot c_n)$ $n = 1, 2, 3$ auf der Ebene $E : ax_1 + bx_2 + \frac{c}{k}x_3 = e$, $k \neq 0$ (Beweis durch Einsetzen).

Multipliziert man alle Koordinaten aller Punkte mit -1, so ändert sich bei der entstehenden Ebene nur das Vorzeichen des Absolutgliedes (oder alle anderen).

j) $E_1 : x_2 - 2x_3 = -1$; $E_2 : x_2 - 2x_3 = -2$;

Erkenntnis: Vervielfacht man die Koordinaten aller Punkte mit dem Faktor n so ist
$E_n : x_2 - 2x_3 = -1 \cdot n$; Es ver n-facht sich also nur das Absolutglied der Ebene.

k) i) $\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{1} = 1 \Leftrightarrow 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 6$; ii) $\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{2} = 1 \Leftrightarrow 6x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 12$; iii) $\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3} = 1 \Leftrightarrow 9x_1 + 6x_2 + 6x_3 = 18$; iv) $\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{4} = 1 \Leftrightarrow 12x_1 + 8x_2 + 6x_3 = 24$;

Verallgemeinert: n) $A(2|0|0)$, $B(0|3|0)$, $C(0|0|n)$; $\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{n} = 1 \Leftrightarrow 3n \cdot x_1 + 2n \cdot x_2 + 6x_3 = 6 \cdot n$;

L) Die Punkte liegen auf einer Geraden: i) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; ii) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;

m) Interpretation: Alle Punkte P_i liegen auf der Geraden $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
$P_1(-2|0|2), t = -2; P_2(1|2|3), t = -1; P_3(4|4|4), t = 0; P_4(7; 6; 5), t = 1; P_5(10; 8; 6), t = 2.$

$g \cap h = P_3$, bei g und h handelt sich also um schneidende Geraden.

Die folgende Rechnung gilt für P_4. Die Rechnung für P_1, P_2 und P_5 gehen analog und ergeben das gleiche (bzw. ein äquivalentes) Ergebnis. P_3 liegt auf g, damit wird keine Ebene erzeugt. Drei nicht kollineare Punkte erzeugen also eine Ebene.

$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

$E : x_1 + x_2 - 5x_3 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-5) = -12,$ $\quad E : x_1 + x_2 - 5x_3 = -12.$

n) (i bis v) Interpretation: Alle Geraden h_i $(i = 1..5)$ sind parallel zur Geraden g. $h_3 \equiv g$, h_1, h_2, h_4 und h_5 sind echt parallel zu g. Dabei spielt die Länge oder Orientierung des Richtungsvektors keine Rolle. Die Gerade g ist dieselbe, wie in Teil m) alle Aufpunkte der Geraden h_i entsprechen den Punkten P_i aus Teil m). Deshalb ist die erzeugte Ebene auch gleich, nämlich
$E_i : x_1 + x_2 - 5x_3 = -12$, $(i = 1, 2, 4, 5)$.

Zwei (echt) parallele Geraden erzeugen also eine Ebene, aber zwei identische Geraden erzeugen keine eindeutige Ebene.

n vi) Die Geraden g und h_6 haben den gleichen Aufpunkt, schneiden sich also. Die Gerade h_6 und damit auch die Ebene E_6 enthalten den Ursprung. Damit ist eine Parameterform der aufgespannten Ebene:

$E_6 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$. Ok das Vektorprodukt ist zu diesem Zeitpunkt noch nicht bekannt. Anders formuliert: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ also kann $\vec{n}_6 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ als Normalenvektor gewählt werden.
$E_6 : 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \cdot 2 - 1 - 3 = 0$; damit ist $E_6 : 2x_1 - x_2 - x_3 = 0$.

Zwei schneidende Geraden erzeugen eine Ebene.

n vii) Die Geraden g und h_7 schneiden sich im Punkt $S(4|4|4)$. Damit ist eine Parameterform der aufgespannten Ebene: $E_7 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; Weil E_6 und E_7 die gleichen Spannvektoren haben, kann auch $\vec{n}_6 = \vec{n}_7 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ gewählt werden.
$E_7 : 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \cdot 4 - 4 - 4 = 0$; damit ist $E_7 : 2x_1 - x_2 - x_3 = 0$.

n viii) Die Geraden g und h_8 sind windschief. Damit gibt es keine gemeinsame aufgespannte Ebene.

Aufg. 263/712: Die Parameterform hat Koordinaten und Parameter, die Koordinatenform hat keine Parameter.

$$\begin{array}{rcl} x_1 &=& 1 + r + t \\ x_2 &=& 2 + r + 2t \\ x_3 &=& 2r - t \end{array} \rightarrow \begin{array}{rcl} 2x_1 &=& 2 + 2r + 2t \\ 2x_2 &=& 4 + 2r + 4t \\ -x_3 &=& -2r + t \end{array} \rightarrow \begin{array}{rcl} 2x_1 - x_3 &=& 2 + 3t \\ 2x_2 - x_3 &=& 4 + 5t \end{array} \rightarrow \begin{array}{rcl} 10x_1 - 5x_3 &=& 10 + 15t \\ -6x_2 + 3x_3 &=& -12 - 15t \end{array}$$

$\rightarrow 10x_1 - 6x_2 - 2x_3 = -2$ oder $-5x_1 + 3x_2 + x_3 = 1$.

Aufg. 263/713: Stellen Sie g komponentenweise dar, $t = -2$, $S(2; -1; 1)$.

.. Schnittpunkt .. Hier sind einige Geaden g_{AB} gelistet:

$g_{a1} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbb{R})$, $\quad g_{b1} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbb{R})$,

$g_{c1} : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbb{R})$, $\quad g_{d1} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbb{R})$,

$g_e : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbb{R})$, $\quad g_f : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbb{R})$,

a$_1$**)** g_{AB} in Ebene: $(3-t)-2(5-2t)+4(-5+3t)=3 \Leftrightarrow 3-t-10+4t-20+12t=3 \Leftrightarrow 15t=30 \Leftrightarrow t=2 \Rightarrow S(1;1;1)$; ; Teil a$_2$: $t=-2$;
Tauschen der Punkte A und B erzeugt die selbe Gerade g_{AB}; sprich g_{AB}=g_{BA}. Der Schnittpunkt bleibt natürlich auch gleich, nur der Parameter (t) ändert sein Vorzeichen. Wegen $t=2$ liegt S 'rechts' von B (nicht zwischen A und B).

b$_1$) g_{AB} in Ebene: $1-2(1+2t)+4t=3 \Leftrightarrow -1=3$, (Widerspruch - Lage: Echt parallel);

c$_1$) g_{AB} in Ebene: $2(-1+t)-(2-t)-(-2+3t)=-2 \Leftrightarrow -2=-2$, (Tautologie - Lage: $g\subset E$);

d$_1$) g_{AB} in Ebene: $3(1+3t)+(1+t)-2(1-2t)=2 \Leftrightarrow 14t=0 \Leftrightarrow t=0$, (Lage: Schnittpunkt $A(1;1;1)$);

e$_1$**)** g_{AB} in Ebene: $2(-1+t)-1-(-3+2t)=0 \Leftrightarrow -2+2t-1+3-2t=0 \Leftrightarrow 0=0 \Rightarrow g\subset E$;

e) Wenn die Ebene durch den Ursprung geht und g_{AB} in E liegt, dann liegt auch g_{2A2B} (Punkte mit verdoppelten Koordinaten in E). Es gilt sogar genau dann, wenn: $g_{AB}\subset E$: $O\in E \Leftrightarrow g_{2A2B}\in E$.

$x_1-4x_2+3x_3=2$ $A(1|2|3)$ $B(-1|0|1)$

$g_{AB}: \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1-1\\0-2\\1-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$

$1-2-4(2-2t)+3(3+t)=2$

$1-2t-8+8t+9-6t=2 \Leftrightarrow 2=2$

Thx Jac Pat g liegt in E

f) Die Richtung $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ erzeugt die Ebene. Die Gerade g_2 wurde in diese Richtung verschoben deshalb liegen sowohl g_1 als auch g_2 in der Ebene.

g) i) $S(-1|-1|1), t=2$; ii) $S(1|1|-1), t=2$; Wegen $t=2$ liegt S 'rechts' von B (nicht zwischen A und B).

h) i) $S(3|2|1), t=0$; ii) $S(-5|-2|-7), t=-2$; Wegen $t=-2$ liegt S 'links' von A (nicht zwischen A und B).

Die Teile g und h sind zusammen zu sehen und doch getrennt. Sei der Ursprung in E, dass gilt: Sei $S=g_{AB}\cap E$ mit Parameter $t=t_0$, dann schneidet $g_{-A,-B}$ (die Gerade durch die Punkte (Ortsvektoren) $-\overrightarrow{OA}$ und $-\overrightarrow{OB}$) E im Punkt (Ortsvektor) $-\overrightarrow{OS}$ mit dem Parameter $t=-t_0$ oder kürzer: $-S=g_{-A,-B}\cap E$. Wie wir im Teil i) sehen, gilt das nur, wenn der Ursprung in E ist.

j) Alle Geraden liegen in der Ebene E oder alle Punkte der Form $P(a|a-1|b)$ liegen in E.

k) Eigentlich ist Teil k ($\bar{T}$) also ohne Interpretation. i) $S(5|4|2), t=\frac{1}{3}$; ii) $S(1|-1|0), t=\frac{1}{2}$; S liegt wegen $0<t<1$ zwischen A und B.

Aufg. 264/714: a) 1) Definitionsphase: Sei $E: ax_1+bx_2+cx_3=e$ und sei $g: \vec{x}=\vec{p}+t\cdot\vec{r}$.

2) Rechnungsphase: Schreiben Sie g komponentenweise und setzen Sie die Gleichungen in E ein. Versuchen Sie, die entstehende Gleichung nach t aufzulösen.

3) Interpretationsphase: Wenn Sie die Gleichung $t=*$ erhalten, dann schneiden sich g und E, bei einem Widerspruch $1=0$ sind g und E parallel und bei einer Tautologie $0=0$ gilt $g\subset E$.

b) Sei $E: (\vec{x}-\vec{q})\circ\vec{n}=0$ und $g: \vec{x}=\vec{p}+t\cdot\vec{r}$.

Normalfall: g schneidet $E \Leftrightarrow \vec{r}\circ\vec{n}\neq 0 \Leftrightarrow \vec{r}\not\perp\vec{n}$.

Sonderfall: g echt $||$ $E \Leftrightarrow \vec{r}\circ\vec{n}=0$ und $(\vec{p}-\vec{q})\circ\vec{n}\neq 0$ (echt parallel).

Supersonderfall: $g\subseteq E \Leftrightarrow \vec{r}\circ\vec{n}=0$ und $(\vec{p}-\vec{q})\circ\vec{n}=0$.

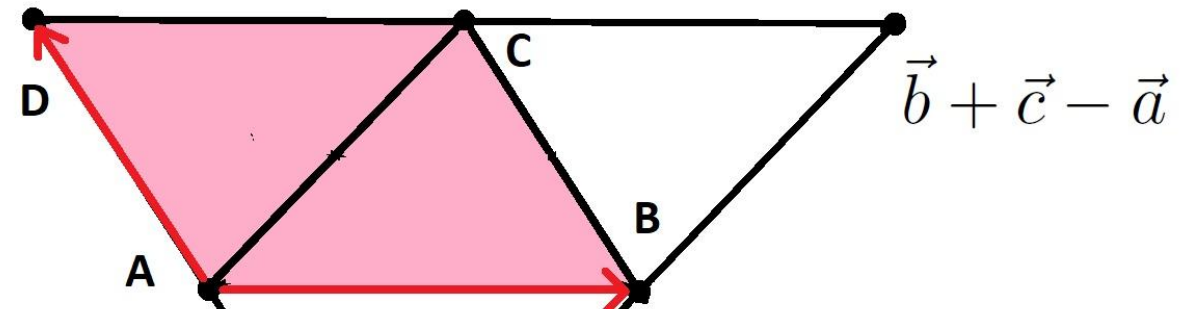


Abb. 464 Verschiedene Ergänzungen zum Parallelogramm

Aufg. 264/715: $\vec{d} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$; $D(1 + 11 - 5; 13 + 2 - 10; 3 - 4 + 1) \Rightarrow D(7; 5; 0)$; $E_{ABC} = E_{ABD}$

E_{ABD}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(r, s \in \mathbb{R})$; $g_{PQ} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbb{R})$;

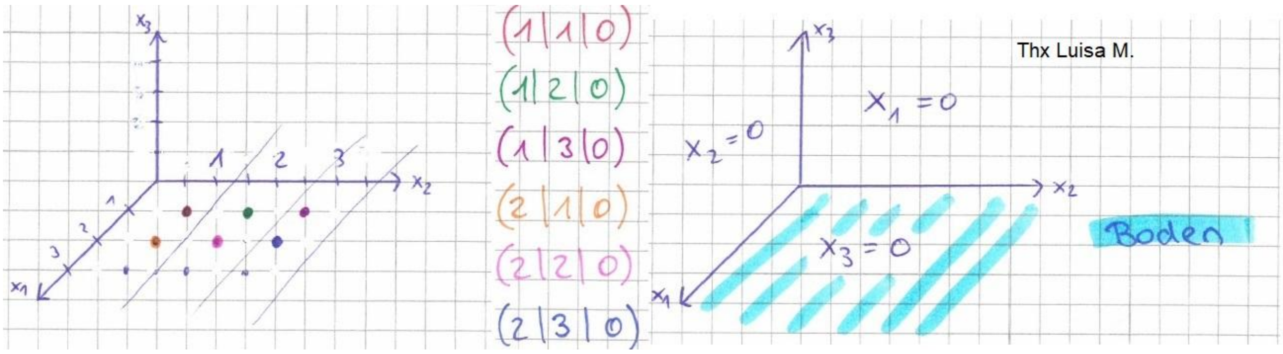


Abb. 465 Die Koordinatenebene $x_3 = 0$

$$E_{ABD} \cap g_{PQ} : \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix};$$

$$t \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} - r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 2-3 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}; \Rightarrow t = 1/3,\ r = 1/4,\ s = 1/3,$$

Weil $0 < r, s < 1$ ist, gilt dass $S(4; 5; 1)$ innerhalb des Parallelogramms $ABCD$ liegt.

Bei dieser Aufgabe muss die Parameterform der Ebene verwendet werden, um (über die Parameter) auf die Lage von S zu schließen.

Für jeden Punkt P innerhalb eines Parallelogramms, mit dem Eckpunkten $ABCD$ gilt
$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AD}$ mit $0 < r, s < 1$.

Hätten Sie die Parameterform aus A, B und C gebildet so würden Sie mit dieser Ungleichung das Parallelogramm $A, B, \vec{b} + \vec{c} - \vec{a}, C$ betrachten (Abb 772/464).

Aufg. 264/716: a) (1;1;0), (1;2;0), (1;3;0), (2;1;0), (2;2;0), (2;3;0), (3;1;0), (3;2;0), (3;3;0).

b) x_3 Koordinate ist 0. $x_3 = 0$; c) x_2x_3 Ebene: $x_1 = 0$, x_1x_3 Ebene: $x_2 = 0$;

d) PNF: $(\vec{x} - \vec{p}) \circ \vec{n} = 0$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 0$.

Aufg. 264/717: a) Die x_1- Achse ist $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, in E eingesetzt: $t + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 6 \Leftrightarrow t = 6 \Rightarrow S_1(6;0;0)$, analog gehen $S_2(0;3;0)$, $S_3(0;0;2)$.

Wir erhalten ein Spurdreieck, welches die Ebene darstellen soll (Abb 466).

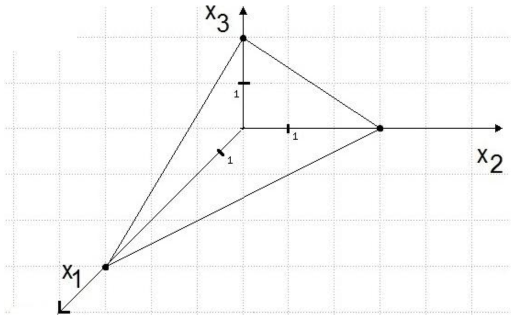


Abb. 466 Spurdreieck

k) E_e ist parallel zur x_2-Achse, weil das x_2 fehlt (Abb. 467). Wenn bei einer Ebene zB. die x_1 Koordinate fehlt, dann ist sie parallel zur x_1 Koordinatenachse, wenn gar zB. die x_1 und die x_2 Koordinaten fehlen, dann ist sie parallel zur x_1x_2 Koordinatenebene.

L) $S_1(4;0;0)$; $S_2(0;2;0)$; $S_3(0;0;-4)$; $|\overrightarrow{S_1\,S_2}| = \sqrt{20} = |\overrightarrow{S_2, S_3}|$.

Aufg. 264/718:

b) Die Spurpunkte einer Geraden sind deren Schnittpunkte mit einer Koordinatenebene.

c)

i)	$S_{2,3}: -;$	$S_{1,3}(1\|0\|-1), t = -2;$	$S_{1,2}(1\|0.5\|0), t = -1.5;$
ii)	$S_{2,3}(0\|2\|-1), t = -0.5;$	$S_{1,3}: -;$	$S_{1,2}(-5\|0.5\|0), t = -3;$
iii)	$S_{2,3}(0\|1.5\|3), t = -0.5;$	$S_{1,3}(-3\|0\|1), t = -2;$	$S_{1,2}: -;$

Geraden der Form $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ e \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, $(|d| + |e| > 0)$ haben keinen Spurpunkt $\underline{S_2}$ und liegen komplett in der Ebene $\underline{x_2 = b}$.

d)

i)	$S_{2,3} = S_{1,3}(0\|0\|-3), t = -1,$	$S_3(0.5\|1\|0), t = -0.5;$
ii)	$S_{2,3} = S_{1,2}(0\|1.5\|0), t = -0.5,$	$S_2(-3\|0\|-9), t = -2;$
iii)	$S_{2,3}(0\|-2\|-1.5), t = -0.5,$	$S_{1,2} = S_{1,3}(-\frac{1}{3}\|0\|0), t = -\frac{1}{3};$

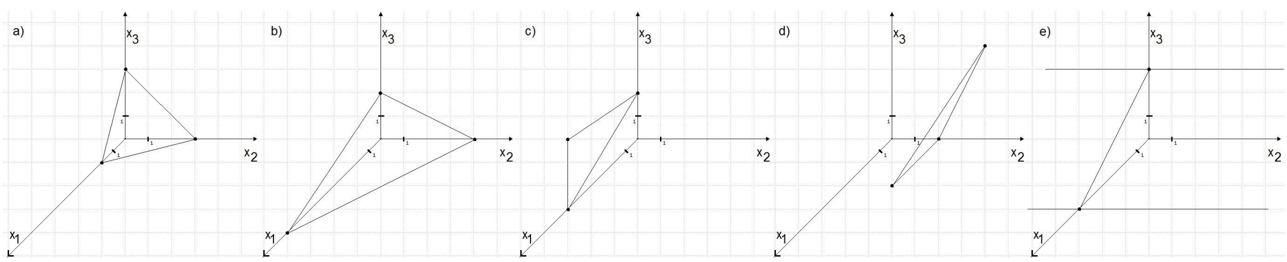
Geraden der Form $\vec{x} = \begin{pmatrix} k \cdot d \\ k \cdot e \\ a \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} d \\ e \\ b \end{pmatrix}$, haben den Spurpunkt $S_1 = S_2(0|0|a - b \cdot k)$ für $t = -k$.

Genau diese Geraden schneiden die x_3-Achse.

Aufg. 265/719: E_1 und E_2 werden als LGS vom Typ 2 Gleichungen, 3 Unbekannten interpretiert. $'E_1 - E_2'$ ergibt $x_2 + 2x_3 = 1$, mit $x_3 = t$ ist $x_2 = 1 - 2t$ und $x_1 = 3 - 2(1 - 2t) - 3t = 1 + t \Rightarrow$ die Schnittgerade könnte etwa folgende Form haben:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + t \\ 1 - 2t \\ t \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beachten Sie, dass die Darstellung von Geraden nicht eindeutig ist ($t \in \mathbb{R}$).



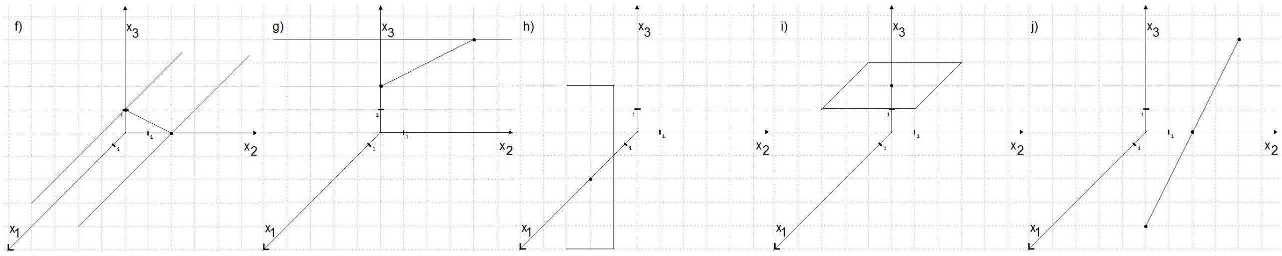


Abb. 467 Viele Spurdreiecke

Aufg. 265/720: a) $F_1 \equiv F_2$, damit ist $g_1 \equiv g_2$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

E: I $x_1 + x_2 + x_3 = 3$

F_2: II $2x_2 - 2x_3 = 0$ ← x_1 schon eliminiert

Sei $x_2 = t$ in II $2t - 2x_3 = 0$

$\Leftrightarrow x_3 = t$

alles in I

$x_1 + t + t = 3 \Leftrightarrow x_1 = 3 - 2t$ Schnittgeraden

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2t \\ 0+t \\ 0+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Thx Jac Pat

b) Alle Ebenen E, F_1, F_2 enden auf $= 0$, enthalten also den Ursprung. Damit enthalten auch die Schnittgeraden $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ und $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ den Ursprung.

c) Die Ebenen F_1 und F_2 sind parallel und gehen durch Punktspiegelung am Ursprung auseinander hervor. Die Schnittgeraden $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind aber 'nur' parallel $(-2|0|0) \notin F_2$.

d) Die Ebene F_{j+1} entsteht aus der Ebene F_j durch Addition der Ebene E. Die Schnittgerade g_1 : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (Video: $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $g_1 \equiv g_2$) bleibt aber gleich: $g = E \cap F_j$ oder die Addtion zweier Ebenen erzeugt eine dritte Ebene mit der gleichen Schnittgerade.

E: I $1x_1 + x_2 - x_3 = 1$ $\xrightarrow{\cdot 3}$ $3x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 3$

F_3: II $-3x_1 + 3x_2 - x_3 = -1$ $\xrightarrow{\cdot 1}$ $-3x_1 + 3x_2 - x_3 = -1$

$0 + 6x_2 - 4x_3 = 2$

Sei $x_2 = t$

$6t - 4x_3 = 2 \Leftrightarrow 4x_3 = 6t - 2 \Leftrightarrow x_3 = 1{,}5t - 0{,}5$

$x_1 + t - (1{,}5t - 0{,}5) = 1 \Leftrightarrow x_1 + t - 1{,}5t + 0{,}5 = 1 \Leftrightarrow x_1 - 0{,}5z = 0{,}5 \Leftrightarrow x_1 = 0{,}5z + 0{,}5$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5+0{,}5t \\ 0+1\cdot t \\ -0{,}5+1{,}5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$

Thx Jac Pat

e) Bei dieser Aufgabe werden nur Ebenen betrachtet, die parallel zu einer Koordinatenachse sind. Wenn man Brüche akzeptiert, kann hier die gemeinsame Koordinate bei i) ist das x_1 als Parameter t gewählt werden.

i) $E : x_1 + 2x_2 = 5$, $F_1 : x_1 + x_3 = 4$: Sei $x_1 = t$ in $E : t + 2x_2 = 5 \Leftrightarrow x_2 = 2.5 - 0.5t$; in $F_1 : t + x_3 = 4 \Leftrightarrow x_3 = 4 - t$. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.5 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbb{R})$;

ii) $E : x_1 + 2x_2 = 5$, $F_2 : x_2 + x_3 = 4$: Sei $x_2 = t$ in $E : x_1 + 2t = 5 \Leftrightarrow x_1 = 5 - 2t$; in $F_2 : t + x_3 = 4 \Leftrightarrow x_3 = 4 - t$. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbb{R})$;

iii) $E : x_1 + 2x_2 = 5$, $F_3 : x_1 + x_2 = 4$: Sowohl E als auch F_3 ist parallel zur x_3-Achse damit die das auch die Schnittgerade. E, F_3 können als 2x2 LGS interpretiert $\mathbb{L}\{3; 1\}$ werden. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbb{R})$;

b1) $E_1: x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \quad E_2: -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$

$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \xrightarrow{\cdot 1} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$

$-x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \xrightarrow{\cdot 1} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$

$4x_2 - 2x_3 = 0$

Sei $x_3 = t$

$4x_2 - 2t = 0$

$4x_2 = 2t$

$x_2 = \frac{1}{2}t$

$x_1 + 2 \cdot \frac{1}{2} - t = 0$

$x_1 + 1 - t = 0$

$x_1 = t - 1$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \xrightarrow{\cdot 2} 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 4$

$2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4 \xrightarrow{\cdot(-1)} -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -4$

$-2x_2 = 0 \quad |:(-2)$

$x_2 = 0$

$x_1 - 2x_2 + x_3 = 2$

$x_2 = -1$

Thx Wenna

Sei $x_3 = t$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x_1 - 2 \cdot 0 + t = 2$

$x_1 - 0 + t = 2$

$x_1 = 2 - t$

$x_1 = 2 - t$

$x_2 = 0$

$x_3 = t$

d1) $E_1: x_1 + x_2 - x_3 = 1 \quad E_2: -5x_1 + x_2 + x_3 = -3$

$x_1 + x_2 - x_3 = 1 \xrightarrow{\cdot 5} 5x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 5$

$-5x_1 + x_2 + x_3 = -3 \xrightarrow{\cdot 1} -5x_1 + x_2 + x_3 = -3$

$6x_2 - 4x_3 = 2$

Thx Wenna

Sei $x_3 = t$

$6x_2 - 4t = 2$

$6x_2 = 2 + 4t$

$x_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}t$

$x_1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}t - t = 1$

$x_1 = \frac{1}{3}t - \frac{2}{3}$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Thx Jac Pat

f) $E: -2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 2 \xrightarrow{\cdot 6} -12x_1 + 24x_2 - 36x_3 = 12$

$F_1: 6x_1 - 12x_2 + 18x_3 = 6 \xrightarrow{\cdot 2} 12x_1 - 24x_2 + 36x_3 = 12$

$0 \quad 0 \quad 0 = 24$

=> Die Ebenen sind parallel

Das LGS nicht lösbar.

g1) $E_1: x_1 + 2x_2 = 5 \qquad E_2: x_1 + x_3 = 4$

sei $x_2 = t$

$x_1 + 2t = 5$

$x_1 = 5 - 2t$

$5 - 2t + x_3 = 4$

$x_3 = 2t - 5$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

g2) $3x_1 + 6x_2 - 6x_3 = 3 \xrightarrow{\cdot 2} 6x_1 + 12x_2 - 12x_3 = 6$

$-2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 2 \xrightarrow{\cdot 3} -6x_1 - 12x_2 + 12x_3 = 6$

$0 = 12$

falsche Aussage

E_1 echt $\parallel E_2$

$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ linear abhängig

h1) $E_1: -x_1 = 4 \qquad E_2: x_3 = 2$

$x_1 = -4$

Sei $x_2 = t$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Buch S.258I720i2

Thx Jac Pat

$E: 2x_1 - 4x_2 = 4 \xrightarrow{\cdot 1} 2x_1 - 4x_2 = 4$

$F_2: x_1 - 2x_2 = 2 \xrightarrow{\cdot(-2)} -2x_1 + 4x_2 = -4$

$0 = 0 \iff E = F_2$

(720j2)

Thx Jac Pat

$E: -x_1 = 4$

$F_2: x_3 = 3$

Angabe einiger Punkte als Ortsvektoren, die in beiden Ebenen liegen:

$\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ t \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ansatz mit Sei $x_2 = t$

L) $E_1: -2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 2 \xrightarrow{\cdot(-3)} 6x_1 - 12x_2 + 18x_3 = -6$

$E_2: -3x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 6 \xrightarrow{\cdot 2} -6x_1 + 12x_2 - 18x_3 = 12$

Thx Mil Ber

$0 = 6 \quad \mathbb{L} = \{ \}$ => E_1 und E_2 sind echt parallel

$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig.

$\boxed{\vec{n}_1 \text{ l.a. } \vec{n}_2 \iff E_1 \text{ echt } \parallel E_2 \text{ oder } E_1 \equiv E_2}$

Abb. 468 Rg zu Ag 265/720 b, c, d, f1, g1, g2, h1

Genau bei identischen oder parallelen Ebenen sind die Normalenvektoren linear abhängig.

g) i) und ii) $[\![E \cap F_1]\!]$ $x_3 = 0$; Sei $x_1 = t \Leftrightarrow x_2 = 2 - 2t$; Schnittgerade: $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Erkenntnis: E und F_k haben (für $k \neq 3$) die Schnittgerade die Spurgerade g.

h)
$$\begin{array}{rrrrcrrrrl} 3x_1 & +6x_2 & -6x_3 & =3 & \xrightarrow{\cdot 2} & 6x_1 & +12x_2 & -12x_3 & = 6 & \\ -2x_1 & -4x_2 & +4x_3 & =-2 & \xrightarrow{\cdot 3} & -6x_1 & -12x_2 & +12x_3 & =-6 & \\ \hline & & & & & & & 0 & = 0 & \Rightarrow E_1 = E_2. \end{array}$$

i) Parallel, Schnitt, identisch, Schnitt

j) $x_1 = -4$, $x_3 = 2$, sei $x_2 = t \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ t \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbb{R})$.

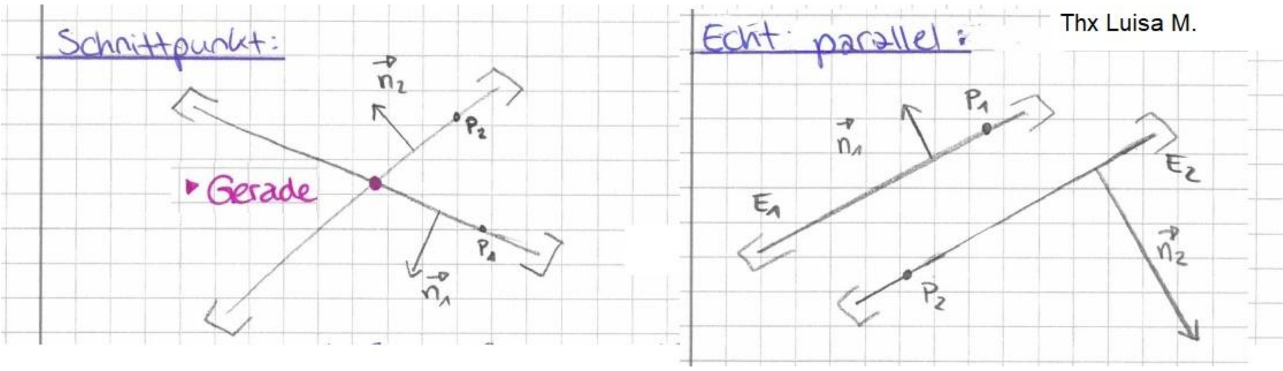


Abb. 469 Lage von Ebenen

Der Schnitt zweier Koordinatenebenen paralleler Ebenen ist (im Falle der Schnittlage) parallel zu einer Koordinatenebene.

Aufg. 265/721: a) Normalfall: E_1 schneidet $E_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ sind l.u.
Sonderfall: $E_1 \parallel E_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ sind l.a. $(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) \circ \vec{n} \neq 0$ (echt parallel).
Supersonderfall: $E_1 = E_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ sind l.a. $(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) \circ \vec{n} = 0$.

b) Echt parallel: $0 = 1$; identisch: $0 = 0$; Schnitt: sonst.

Aufg. 265/722: a) Drei Ebenen schneiden sich (allgemein) in einem Punkt. ZB Fensterwand, Tafelwand und Boden schneiden sich in einer Zimmerecke.

$$\text{b)} \left(\begin{array}{rrrr} x_1 & +x_2 & -x_3 & =1 \\ & 3x_2 & -2x_3 & =1 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & =0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr} x_1 & +x_2 & -x_3 & =1 \\ & 3x_2 & -2x_3 & =1 \\ & 3x_2 & -2x_3 & =0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr} x_1 & +x_2 & -x_3 & =1 \\ & 3x_2 & -2x_3 & =1 \\ & & 0 & =0 \end{array}\right)$$

Durch die Nullenzeile hat das LGS ∞ viele Lösungen. Die Ebenen schneiden sich in der Geraden $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbb{R})$ Die drei Ebenen liegen wie ein Buch (Schnittgerade = Buchrücken).

Aufg. 265/723: **a)** $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, (I):$\vec{n} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$, (II):$\vec{n} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$
homogenes LGS (I): $-n_1 + n_2 = 0 \Leftrightarrow n_1 = n_2$, (II): $n_1 + 2n_2 - n_3 = 0$, (I) in (II)

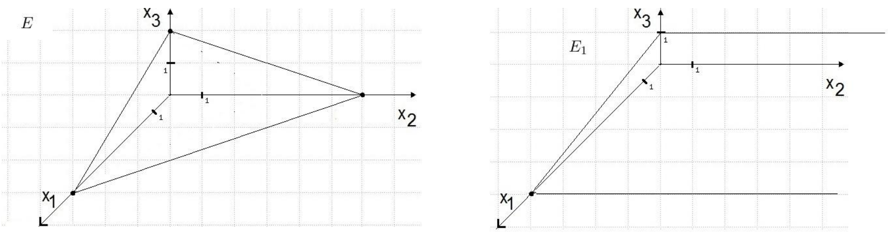


Abb. 470 Einige Spurdreiecke

$\to$ (III): $3n_2 - n_3 = 0$, sei $n_2 = t \Rightarrow n_1 = t$ mit (I) $\Rightarrow n_3 = 3t$ mit (III), $\Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 3t \end{pmatrix}$;

Koordinatenform von E: $x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 + 1 + 3 \cdot 1 \Leftrightarrow E : x_1 + x_2 + 3x_3 = 6$.

b) Spurpunkte $S_1(6;0;0)$, $S_2(0;6;0)$ und $S_3(0;0;2)$; (Abb. 470)

c) x_1, x_2 Ebene: $x_3 = 0$, x_1, x_3 Ebene: $x_2 = 0$, x_2, x_3 Ebene: $x_1 = 0$; **d)** $G(2;5;3) \Rightarrow x_3 = 3$;

e) E_1 ist echt parallel zur x_2-Achse, hat also keinen Spurpunkt S_2.

f) $g_{DL} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbb{R})$, $g_{IJ} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbb{R})$,

$g_{IL} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbb{R})$;

$g_{DL} \cap E$: $(4 + 3t) + 2 + 3(0 - t) = 6 \Leftrightarrow 6 = 6 \Rightarrow \overline{DL} \subset E$;

$g_{IJ} \cap E$: $(4 - t) + (7 + t) + 3(5 + 0t) = 6 \Leftrightarrow 26 = 6$ Wid. $\Rightarrow \overline{IJ} || E$ (echt parallel);

$g_{IL} \cap E$: $(4 + 3t) + (7 + 5t) + 3(5 - 6t) = 6 \Leftrightarrow -10t = -20 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow \overline{IL} \cap E = S(7;2;-1)$;

g₁)
$$\begin{array}{rrrrr} E: & x_1 & +x_2 & +3x_3 & =6 \\ E_5: & -x_1 & -x_2 & & =0 \\ \hline & & & 3x_3 & =6 \end{array}$$

g₂)
$$\begin{array}{rrrrr} E: & x_1 & +x_2 & +3x_3 & =6 \\ E_6: & -x_1 & +2x_2 & -2x_3 & =-2 \\ \hline & & 3x_2 & +x_3 & =4 \end{array}$$

g₁) $x_3 = 2$, $x_1 = -x_2$, sei $x_2 = t$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} -t \\ t \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Schnittgerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbb{R})$;

g₂) Sei $x_2 = t$ $x_3 = 4 - 3x_2 = 4 - 3t$ $x_1 = 6 - x_2 - 3x_3 = 6 - t - 3(4 - 3t) = -6 + 8t$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} -6+8t \\ t \\ 4-3t \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Schnittgerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbb{R})$;

Bitte beachten Sie, dass Ihre Lösung äquivalent zu meiner Lösung sein kann, ohne dass man das sofort sieht. Siehe dazu Abs 10.1.11 Lage von Geraden.

h) $E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $E_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$,

$E_4 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\vec{n}_2 = \vec{n}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$

($(s, t \in \mathbb{R})$ mit Vektorprodukt aus Abs. 10.4 gerechnet). Aus Teil a) : $E : x_1 + x_2 + 3x_3 = 6$

$\Rightarrow E_2 : x_1 + x_2 + 3x_3 = 6$, $E_3 : x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$, $E_4 : x_1 + x_2 + 3x_3 = 26$

$\Rightarrow E = E_2$, $E||E_4$ (Absolutglieder 6 bzw. 26) und E schneidet E_3 (in der Geraden $\overline{AB}$).

Aufg. 265/724: a) i) Volumen der Truhe Mit dem Prismavolumen $V = G \cdot h_G$ und der Trapezformel $G = 0.5(a + b) \cdot h_{ab}$ ergibt sich $V = 0.5 \cdot (|\overrightarrow{BQ}| + |\overrightarrow{AP}|) \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}|$

Koordinatengleichung der Ebene mit Deckel: Mögliche Richtungsvektoren sind $\overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Als Normalenvektor $\vec{n} = \overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{PQ}$ ergibt sich $\begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ -40 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Aus der Normalengleichung $E : \vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{p}) = 0$ ergibt sich $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$.

Ausmultiplizieren ergibt die Koordinatengleichung $E : x_2 - 2x_3 = -4$.

Mit $|\overrightarrow{BQ}|$=6, $|\overrightarrow{AP}| = 4$, $|\overrightarrow{AB}| = 4$, $|\overrightarrow{BC}|$=10 ergibt sich $V = 0.5 \cdot (6 + 4) \cdot 4 \cdot 10 = 200$.
Das Volumen der Truhe beträgt 200 VE.

Deckel: Mit $a = 2$ ergibt sich aus E_a die Koordinatengleichung der Deckelebene. Rückwand: Eine Koordinatengleichung der Ebene der Rückwand lautet $x_2 = 8$ (Normalenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und B als Element der Ebene). Mit $a = 0$ ergibt sich aus E_a die Koordinatengleichung der Rückwandebene.

ii) **Gemeinsame Gerade der Ebenenschar:** E_a Zu vermuten ist, dass die Gerade durch Q und R in der Schar E_a liegt. Die Gerade g durch Q und R hat eine Parameterdarstellung $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$. Einsetzen der Gerade g in E_a liefert die wahre Aussage $8 - 6a = 8 - 6a$ (man erhält die Gerade auch durch den Schnitt von E_{a_1} und E_{a_2}, dies liefert durch Subtraktionsverfahren $(-a_1 + a_2)x_3 = -6(a_1 - a_2)$, $x_3 = 6$, $x_2 = 8$ und $x_1 = x_1$ und damit die Gerade g).

b) Nachweis des Parallelogramms Da E, F, G und H in einer Ebene liegen, genügt es zu zeigen, dass zwei gegenüberliegende Vektoren gleich sind. Für $\overrightarrow{HE}$ und $\overrightarrow{GF}$ ergibt sich jeweils der Vektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$. Die Dachfläche $EFGH$ ist demnach ein Parallelogramm.

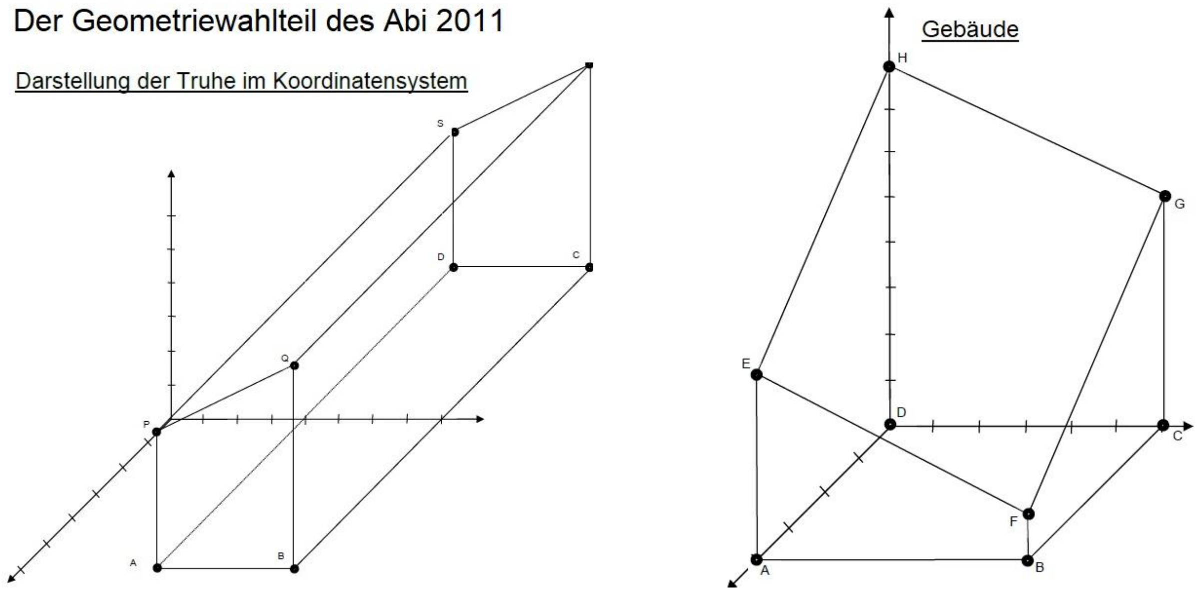


Abb. 471 Abitur 2011 Truhe und Gebäude

Die Koordinatengleichung der Ebene E_{EFH}, in der die Dachfläche liegt:
Mit den Punkten E, F und H ergibt sich eine Parametergleichung von E_{EFH} zu $E_{EFG} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$ Mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ folgt eine Koordinatengleichung $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 16$. Punktprobe für G ergibt, dass G in E_{EFH} liegt.

ii) (Meine Interpretation - die Abi-LöVo argumentieren anders) Sei $A(5|1 + a|1.7)$ das Auge und $(g_{EF} =)W(4|0 + 2t|4 - t)$ der Wanderpunkt der Geraden EF. Im ersten 'Erblickensfall' Liegen A, W und H auf einer Geraden, es gilt also $\overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AW} = \overrightarrow{OH}$, oder $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 + a \\ 1.7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 - 5 \\ 2t - (1 + a) \\ 4 - t - 1.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$. Dieses nicht lineare GS lösen wir schrittweise: Erst die Gleichung 1 ($r = 5$), mit diesem Ergebnis in Gleichung 3 folgt $t = 1.04$ und alles in Gl 2 eingesetzt ergibt $a = 1.6$. Er muss also 1.6 m laufen.

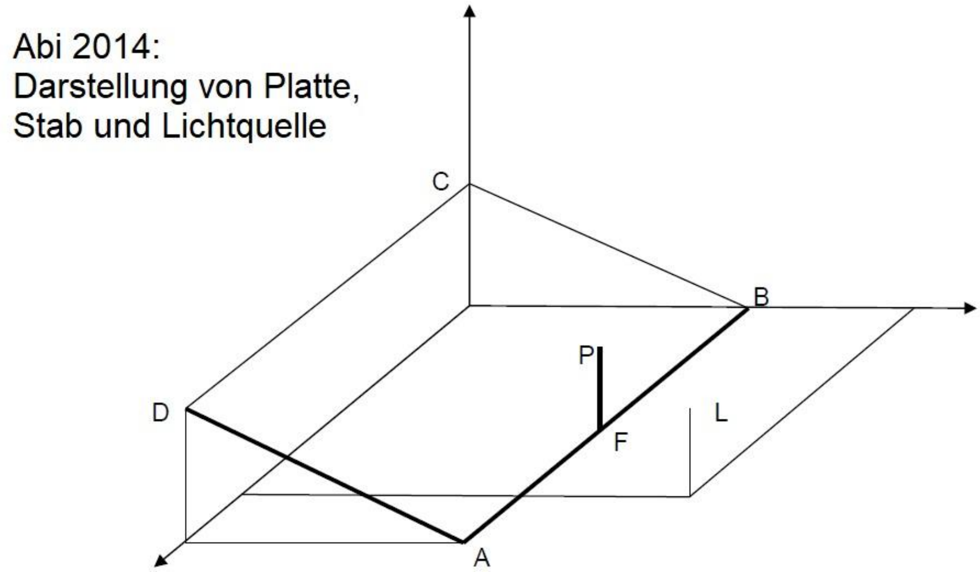
c) i) Die Ermittlung der Gleichung der Ebene F kann über die Parameterform und Elimination der Parameter erfolgen oder über das Einsetzen von A, B und C in die allgemeine Koordinatenform. Eine mögliche Gleichung ist $2x + 5z = 30$. Die Nutzfläche ist $20 \cdot \sqrt{261} \approx 323m^2$.

ii) Die Höhe der Wand über C bis zum Dach muss größer als 2.5 m sein. Der Punkt D habe die Koordinaten $D(0|20|z)$. D muss in E liegen, also Einsetzen von D in E. Das liefert $z = 9$. Damit liegt D $3m$ über C und der Sicherheitsabstand ist erfüllt.

d) i) **Koordinatengleichung der Ebene E mit A, B, C und D:** Eine Parametergleichung der Ebene E lautet $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$. Ein Normalenvektor lautet $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Eine Koordinatengleichung lautet demnach $E : x_2 + 2x_3 = 6$.

ii) Der gesuchte Schattenpunkt G ergibt sich aus dem Schnitt der Ebene E mit der Geraden h_{LP} durch die Lichtquelle $L(8|10|2)$ und dem Stabende $P(5|6|2)$. Eine Parametergleichung von h_{LP} lautet $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $t \in \mathbb{R}$. Einsetzen von h_{LP} in E ergibt $10 + 4r + 4 = 6$ und damit $r = -2$. Eingesetzt in h_{LP} ergibt sich für den Schattenpunkt $G(2|2|2)$.

Begründung, dass der Stabschatten vollständig auf der Platte liegt: Es ist zu zeigen, dass der Fußpunkt F des Stabs und der Schattenpunkt G auf der Platte liegen. Der Fußpunkt F liegt laut Aufgabenstellung auf der Platte. Die Platte wird aufgespannt durch die beiden Vektoren $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, und $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$. Der Vektor $\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ lässt sich darstellen als $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{15}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. Da beide Faktoren zwischen 0 und 1 liegen, befindet sich der Schattenpunkt G auf der rechteckigen Platte. Da sowohl der Fußpunkt F als auch der Schattenpunkt G auf der rechteckigen Platte liegen, liegt der Stabschatten vollständig in der Ebene E.



e) Sei $S(8;3;h)$ die Spitze des Mastes, dann ist die Schattengerade der Spitze

$$g_s : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7.8 \\ 3 \\ h \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}. \qquad g_s \cap g_{OA} : \begin{pmatrix} 7.8 \\ 3 \\ h \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = u \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -9t & -4u & & = -7.8 \\ t & -6u & & = -3 \\ -4t & -10u & +h & = 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} t = 0.6; \\ u = 0.6; \\ h = 8.4; \end{matrix} \text{ der Stab ist also } 8.4\ m \text{ hoch}$$

15.10.4 LöVo zum Abschnitt 10.4 (Spatprodukt UE 12_2)

Aufg. 266/725: a) $\vec{a} \circ \vec{n} = 0 = \vec{b} \circ \vec{n}$. **b)** $\vec{a} \circ \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 2n_1 + n_2 - n_3 = 0$; $\vec{b} \circ \vec{n} = 0 \Leftrightarrow -3n_1 + 6n_3 = 0$;

$$\begin{pmatrix} 2n_1 & +n_2 & -n_3 & = 0 \\ -3n_1 & & +6n_3 & = 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{\cdot 3} \\ \xrightarrow{\cdot 2} \end{matrix} \begin{pmatrix} 6n_1 & +3n_2 & -3n_3 & = 0 \\ -6n_1 & & +12n_3 & = 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 3n_2 + 9n_3 = 0;$$

Sei $n_3 = t \Rightarrow n_2 = -3t; n_1 = 2t; \Rightarrow \vec{n} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c+d) (∗) Die Gleichung $ax + by = 0$ wird von $x = b$, $y = -a$ bzw. von $x = -b$, $y = a$ gelöst.

$$\begin{array}{llll} a_1 \cdot n_1 & +a_2 \cdot n_2 & +a_3 \cdot n_3 & = 0 \\ b_1 \cdot n_1 & +b_2 \cdot n_2 & +b_3 \cdot n_3 & = 0 \end{array} \begin{matrix} \xrightarrow{\cdot b_1} \\ \xrightarrow{\cdot(-a_1)} \end{matrix} \begin{array}{llll} +a_1 \cdot b_1 \cdot n_1 & +a_2 \cdot b_1 \cdot n_2 & +a_3 \cdot b_1 \cdot n_3 & = 0 \\ \underline{-a_1 \cdot b_1 \cdot n_1} & \underline{-a_1 \cdot b_2 \cdot n_2} & \underline{-a_1 \cdot b_3 \cdot n_3} & \underline{= 0} \\ & (a_2b_1 - a_1b_2) \cdot n_2 & +(a_3b_1 - a_1b_3) \cdot n_3 & = 0. \end{array}$$

Diese Gleichung wird nach (∗) von $n_2 = a_3b_1 - a_1b_3$ und $n_3 = a_1b_2 - a_2b_1$ gelöst.

$$\begin{array}{llll} a_1 \cdot n_1 & +a_2 \cdot n_2 & +a_3 \cdot n_3 & = 0 \\ b_1 \cdot n_1 & +b_2 \cdot n_2 & +b_3 \cdot n_3 & = 0 \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot b_3} \\ \xrightarrow{\cdot(-a_3)} \end{array} \begin{array}{rrrr} +a_1 \cdot b_3 \cdot n_1 & +a_2 \cdot b_3 \cdot n_2 & +a_3 \cdot b_3 \cdot n_3 & = 0 \\ \underline{-a_3 \cdot b_1 \cdot n_1} & \underline{-a_3 \cdot b_2 \cdot n_2} & \underline{-a_3 \cdot b_3 \cdot n_3} & \underline{= 0} \\ (a_1b_3 - a_3b_1) \cdot n_1 & +(a_2b_3 - a_2b_3) \cdot n_2 & & = 0. \end{array}$$

wird nach (∗) von $n_1 = a_2b_3 - a_3b_2$ und $n_2 = a_3b_1 - a_1b_3$ gelöst; damit ist $\vec{a} \perp \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \perp \vec{b}$.
Der Vorfaktor ist eine Determinante (siehe Aufgabe 690).

e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$,
$\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2) \cdot (-2) - 4 \cdot 0 \\ 4 \cdot 4 - (-4) \cdot (-2) \\ (-4) \cdot 0 - (-2) \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$,
$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Rest: Siehe Ag 709.

f) $$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1)$$

$= a_1a_2b_3 - a_1b_2a_3 + b_1a_2a_3 - a_1a_2b_3 + a_1b_2a_3 - b_1a_2a_3 = 0$ $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$ geht analog.

Aufg. 267/726: b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 2 - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; Verallgemeinerung siehe Teil c).

c) ⇒: $\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{0} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0b_3 - 0b_2 \\ 0b_1 - 0b_3 \\ 0b_2 - 0b_1 \end{pmatrix} = \vec{0}$. Sei $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, dann gilt $\vec{a} \times \lambda\vec{a} = \begin{pmatrix} a_2\lambda a_3 - a_3\lambda a_2 \\ a_3\lambda a_1 - a_1\lambda a_3 \\ a_1\lambda a_2 - a_2\lambda a_1 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

⇐: $\vec{0} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \Rightarrow a_2b_3 - a_3b_2 = 0$, $a_3b_1 - a_1b_3 = 0$ und $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$. Sei $\lambda = \frac{a_2}{b_2}$, dann gilt $a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \Leftrightarrow a_1 = \frac{a_2b_1}{b_2} = \lambda b_1$. $a_2b_3 - a_3b_2 = 0 \Leftrightarrow a_3 = \frac{a_2b_3}{b_2} = \lambda b_3 \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda b$ (qed).

d) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \begin{pmatrix} a_2(b_3 + c_3) - a_3(b_2 + c_2) \\ a_3(b_1 + c_1) - a_1(b_3 + c_3) \\ a_1(b_2 + c_2) - a_2(b_1 + c_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2c_3 - a_3c_2 \\ a_3c_1 - a_1c_3 \\ a_1c_2 - a_2c_1 \end{pmatrix} = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$. (Distrubutivgesetz).

e) Es ist kein Assoziativgesetz, weil die Malpunkte eine andere Bedeutung haben.
$r \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = r \cdot \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r \cdot a_2) \cdot b_3 - (r \cdot a_3) \cdot b_2 \\ (r \cdot a_3) \cdot b_1 - (r \cdot a_1) \cdot b_3 \\ (r \cdot a_1) \cdot b_2 - (r \cdot a_2) \cdot b_1 \end{pmatrix} = (r \cdot \vec{a}) \times \vec{b}$.

f) $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 3 - 6 \cdot 2 \\ 6 \cdot 1 - 4 \cdot 3 \\ 4 \cdot 2 - 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$; Verallgemeinerung siehe Teil g).

g) Es gilt $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$; $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ bilden eine Rechtssystem.

Aufg. 267/727: (Nur LK)

a) Parameterform: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ a-1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 \\ -2a \\ -1 \end{pmatrix}$;

$E_a : (a+1) \cdot x_1 - 2a \cdot x_2 - x_3 = -a$. Alle Ebenen enthalten die Gerade durch A und B:

$g_{AB} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbb{R})$ (die Ebenenschar ist ein 'Buch').

b) PF: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a-1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} a-1 \\ 0 \\ a-1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 \\ a-1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a-1 \\ 0 \\ a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-1)^2 \\ a-1 \\ -(a-1)^2 \end{pmatrix}$;

$E_a : (a-1)^2 \cdot x_1 + (a-1) \cdot x_2 - (a-1)^2 x_3 = a - 1$. Für $a \neq 1$: $E_a : (a-1) \cdot x_1 + x_2 - (a-1)x_3 = 1$; Für $a = 1$ handelt es sich nicht um eine Ebene.

Alle Ebenen enthalten A und Punkte der Form $P_r(r|1|r)$ oder g_r:

$g_r : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbb{R})$ (die Ebenenschar ist auch ein 'Buch').

c) Parameterform: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} a-1 \\ 0 \\ a-1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a-1 \\ 0 \\ a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 \\ a-1 \\ a-1 \end{pmatrix}$;

$E_a : (a-1) \cdot x_1 + (a-1) \cdot x_2 + (a-1) \cdot x_3 = 3a - 3$ oder $E : x_1 + x_2 + x_3 = 3$ $(a \neq 1)$.

Alle Ebenen sind identisch und für $a = 1$ sind die Punkte kollinear.

d) Der Punkt C_a kann auch als Gerade (Wanderpunkt w) interpretiert werden.

Im Teil a) ist dies $w : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, Die gesuchte Ebene ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ beachten Sie dabei, dass weder A noch B auf w liegen.

im Teil c) ist w $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Hier ist das Problem, dass $A(1|1|1)$ auf der Geraden w liegt, so dass es keine Ebene der Art geben kann.

Eine Ebene, die w enthält wäre $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(r, s \in \mathbb{R})$.

e) i) Wir verfolgen den Ansatz aus Ag 97/246 und schneiden E_1 und E_2 (zwei relativ beliebige Ebenen der Schar).

$E_1 : 3x_1 - 1 \cdot x_2 + 3 \cdot 1 \cdot x_3 = 6 \cdot 1 + 3 \Leftrightarrow 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 9$;

$E_2 : 3x_1 - 2 \cdot x_2 + 3 \cdot 2 \cdot x_3 = 6 \cdot 2 + 3 \Leftrightarrow 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 15$; (LGS 2 Gln 3 U)

↳ LGS unterbestimmt 3U, 2Gl

$3x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \longrightarrow 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 9$

$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 15 \xrightarrow{\cdot(-1)} -3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = -15$

$x_2 - 3x_3 = -6$

sei $x_3 = t$ $\quad x_2 - 3t = -6$ $\quad 3x_1 - (-6 + 3t) + 3t = 9$

$\underline{\underline{x_2 = -6 + 3t}}$ $\quad 3x_1 = 3$

$\underline{\underline{x_1 = 1}}$

zwei belieb. G.

Thx Luisa M.

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 + 3t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

E_a: $3x_1 - ax_1 + 3ax_3 = 6a + 3$

$3(1 + 0t) - a(-6 + 3t) + 3a(0 + t) = 6a + 3$

$3 + 6a - 3at + 3at = 6a + 3$

$0 = 0$ → Gerade liegt in jeder Ebene E_a

Die Lösung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbb{R})$ in E_a einsetzen und $0 = 0$ erhalten. Sollte hier eine Bedingung für a herauskommen ist die gefundene Gerade keine gemeinsame Gerade.

ii) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbb{R})$; Nachweis: $(a+2)(1+t) - a(-t) - (a+1)(2t) = a + 2$; $\Leftrightarrow$ $a + 2 + at + 2t + at - 2at - 2t = a + 2$; $\Leftrightarrow a + 2 = a + 2 \surd$;

iii) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; Nachweis: $3(1+t) - 3a(1+2t) + (2a-1) \cdot (1+3t) = 2 - a \Leftrightarrow 3 + 3t - 3a - 6at - 1 - 3t + 2a + 6at = 2 - a \Leftrightarrow 2 - a = 2 - a \surd$

iv) $(a^2 - 1)x_1 - (2a - a^2)x_2 + (a - a^2)x_3 = 6a$; Die Ebenen der Schar schneiden sich nur im Punkt $P(0|2|-1)$.

Gegeben sei die Ebenenschar $E_k: 3x_1 + kx_2 - kx_3 = 6$. Untersuchen Sie, welche Punkte der x_2x_3-Ebene in keiner Ebene der Schar E_k liegen. 16.12.2021

Thx Mil Ber

x_2x_3 Ebene: $x_1 = 0$ $\qquad$ $x_2x_3 E \cap E_k: kx_2 - kx_3 = 6$

beliebiger Punkt $P(0|1|2)$ $\qquad$ P in E_k: $3\cdot 0 + k\cdot 1 - k \cdot 2 = 6 \iff k = -6$

allgemein $Q(0|a|b) \in E$ $\qquad$ In welcher E_k liegt Q?

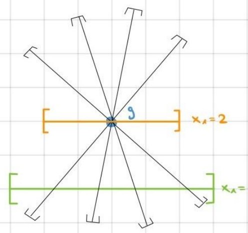
$3\cdot 0 + k\cdot a - k\cdot b = 6 \iff k(a-b) = 6 \iff k = \frac{6}{a-b}$ $\quad a \neq b$

$R(0|1|1) \notin E_k$ $\quad 3\cdot 0 + k\cdot 1 - k\cdot 1 = 6 \iff 0 = 6$ ↯

Alle $T(0|a|a) \iff \vec{x} = a\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ liegen nicht in E_k

$3x_1 + \infty x_2 - \infty x_3 = 6$

$\frac{3x_1}{k} + x_2 - x_3 = \frac{6}{k} \longrightarrow \underbrace{\frac{3x_1}{\infty}}_{0} + x_2 - x_3 = \underbrace{\frac{6}{\infty}}_{0} \iff x_2 = x_3$



Aufg. 267/728: a) $\vec{b} = r\vec{a}$. Die Vektoren liegen 'auf einer Geraden'. Dies ist nicht wirklich so, weil Vektoren ja freie Vektoren sind. Dieses Bild soll nur das Verständnis für l.A. unterstützen.

b) Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind l.u. . $\; r\vec{a} + s\vec{b} = \vec{0}$ ist ein (homogenes) LGS und kann nur (genau) durch $r = s = 0$ (triviale Lösung) gelöst werden.

Bei linear unabhängigen Vektoren hat das hLGS <u>genau eine Lösung</u> <u>$r = s = 0$</u>.

c) Für $\vec{c}$ gilt: $2\vec{a} = \vec{c} - \vec{a}$ und $\vec{c}$ sind l.a. Das LGS $r\vec{a} + s\vec{c} = \vec{0}$ kann auch nichttrivial (für $r = -2s$) gelöst werden.

Bei <u>linear abhängigen</u> Vektoren hat das hLGS <u>unendlich viele Lösungen</u>.

d) Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind l.u. $\Leftrightarrow r\vec{a} + s\vec{b} = \vec{0}$ kann nur trivial gelöst werden oder $r\vec{a} + s\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow r = s = 0$.

e) $r\vec{a} + s\vec{b} = \vec{0}$ erzeugt das LGS $\quad r + s = 0;\; 0r + 2s = 0 \;\; 3r + 3s = 0.$ $\quad$ Aus der zweiten Gleichung folgt $s = 0$, durch Einsetzen in die erste Gleichung ergibt sich $r = 0$. Damit sind die Vektoren l.u.

Aufg. 267/729: a) Drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ heißen linear abhängig (nach Sd), wenn diese 'in einer Ebene liegen'. Drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ sind l.u. $\Leftrightarrow r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} = \vec{0}$ kann nur trivial gelöst werden oder $r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow r = s = t = 0$.

b) Das zugehörige LGS lautet: $r + s + t = 0 \;\; r + 2s + 3t = 0$. Es ist unterbestimmt und hat deshalb immer (nicht triviale) Lösungen zB $r = -1,\; s = 2,\; t = -1$. Deshalb sind drei zweidimensionale Vektoren immer l.a. . $\qquad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind als <u>Tripel</u> linear abhängig, obwohl sie <u>paarweise</u> l.u. sind.

c) $\vec{d}, \vec{e}$ und $\vec{f}$ sind l.a., weil $\vec{d} - 2\vec{e} + \vec{f} = \vec{0}$ gilt. $\qquad$ d) $\vec{d}, \vec{e}$ und $\vec{f}$ sind l.u..

Aufg. 267/730: a) $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \cap 2x_2 - 4x_3 = -2$: Sei $x_3 = t \Rightarrow x_2 = 2t - 1 \;\; x_1 = 3x_3 - 2x_2 = 3t - 2(2t - 1) = -t + 2 \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$; $\qquad$ b) $\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\2\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\4\\2\end{pmatrix}$, $(t \in \mathbb{R})$.

c) Beweisen Sie: Der Richtungsverktor der Schnittgeraden $\vec{r}_g$ ist <u>l.a. (parallel)</u> von $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$: Die Schnittgerade liegt in beiden Ebenen, ist also orthogonal zu $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2 \Rightarrow \vec{r}_g$ ist l.a. von $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

Aufg. 268/731: a+b) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix}0\\0\\a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1\end{pmatrix}$.

Zeigen Sie: $|\vec{a}\times\vec{b}|$ = die Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

$$\text{b)}\left|\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\0\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\0\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2+0^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2} = |a_1b_2-a_2b_1|.$$

c) Die Fläche F eines Dreiecks $\Delta(A,B,C)$ berechnen wir durch $F=|\Delta|=\underline{\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)}$.

d) i) $|\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}|=|\begin{pmatrix}2\\-3\\6\end{pmatrix}|=7$; Es gilt $\vec{b}_j=j\cdot\vec{b}_1$. $A=|\vec{a}\times(j\cdot\vec{b}_1)|=j\cdot(\vec{a}\times\vec{b}_1)=j\cdot 7$.

e) i) $|\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}|=|\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}|=3$; Es gilt $\vec{b}_j=\vec{b}_1+(j-1)\cdot\vec{a}$ (Scherung).

Damit ist $\vec{a}\times\vec{b}_j=\vec{a}\times(\vec{b}_1+(j-1)\cdot\vec{a})=\vec{a}\times\vec{b}_1+\vec{a}\times(j-1)\cdot\vec{a})=\vec{a}\times\vec{b}_1+\vec{0}=\vec{a}\times\vec{b}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$. Die zu berechnenden Flächen sind natürlich gleich.

f) i) $|\begin{pmatrix}2\\-4\\6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}|=|\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}|=0$; Klar, das Vektorprodukt linear abhängiger Vektoren ist $\vec{0}$.

ii) $|\begin{pmatrix}2\\-4\\6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}|=|\begin{pmatrix}24\\12\\0\end{pmatrix}|=\sqrt{720}\approx 26.8$; Sorry: ($\overline{\text{RP}}$) . Die '0' in der x_3 Komponente stammt von der linearen Abhängigkeit der 'Teilvektoren' $\binom{2}{-4}$ und $\binom{1}{-2}$.

iii) $|\begin{pmatrix}2\\-4\\6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}|=|\begin{pmatrix}0\\-12\\-8\end{pmatrix}|=\sqrt{208}\approx 14.4$; Sorry: ($\overline{\text{RP}}$) . Die '0' in der x_1 Komponente stammt von der linearen Abhängigkeit der 'Teilvektoren' $\binom{-4}{6}$ und $\binom{-2}{3}$.

iv) $|\begin{pmatrix}2\\-4\\6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}|=|\begin{pmatrix}24\\0\\-8\end{pmatrix}|=\sqrt{640}\approx 25.3$; Sorry: ($\overline{\text{RP}}$) . Die '0' in der Mitte stammt von der linearen Abhängigkeit der 'Teilvektoren' $\binom{2}{6}$ und $\binom{1}{3}$.

g) $D(12;9;-1)$; $A=12$: $\vec{d}=\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\7\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\7\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\5\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\9\\-1\end{pmatrix}$ (2 PaG);

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\5\\9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\7\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-2\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a}=\begin{pmatrix}8\\7\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\7\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\-2\end{pmatrix}$,

i) $A=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\left|\begin{pmatrix}-4\\-2\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\0\\-2\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}4\\8\\8\end{pmatrix}\right|=\sqrt{4^2+8^2+8^2}=12.$

ii) $D(-1|3|5)$; $|\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}|=|\begin{pmatrix}3\\-6\\6\end{pmatrix}|=9$

Aufg. 268/732: a) $V=G\cdot h$. b) $G=\underline{\vec{a}\times\vec{b}}$; G entspricht der Grundfläche des Spates. $\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{\vec{g}\cdot\vec{c}}{|\vec{g}|\cdot|\vec{c}|}\right)$ c) $G=|\vec{a}\times\vec{b}|$, $\vec{x}=\vec{a}\times\vec{b}$, $\delta=90°-\gamma$, $h=|\vec{c}|\sin(\gamma)$. $\gamma=90°-\sphericalangle(\vec{c};(\vec{a}\times\vec{b}))$. $\underline{V=|(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}|}$.

d) $\left(\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\circ\begin{pmatrix}3\\3\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1-1\cdot1\\-1\cdot1-1\cdot3\\3\cdot1-1\cdot(-1)\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}3\\3\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-4\\4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}3\\3\\-3\end{pmatrix}=-24$;
Das Spatprodukt berechnet ein orientiertes Volumen.

e) ... Rechtssystem. f) $V=\frac{1}{6}|(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}|$.

g) $(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}=0\Rightarrow(\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{c}\Rightarrow\vec{c}$ liegt in der Ebene, die von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erzeugt wird.
$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ sind linear abhängig $\Rightarrow$ die Vektoren liegen in einer Ebene $\Rightarrow$ sein Volumen ist 0.

h)* Im n-dimensionalen entspricht die Determinante der Vektoren $\vec{x}_1, .., \vec{x}_n$ dem orientierten n-dim Volumen des (n-dim) Spates, das von den Vektoren $\vec{x}_1, .., \vec{x}_n$ erzeugt (aufgespannt) wird.

i) $(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \circ \vec{c}$. Der Wert bleibt vom Betrag her gleich, nur das Vorzeichen kann sich ändern, weil immer der selbe Spat aufgespannt wird.

j) $(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} = +(\vec{b} \times \vec{c}) \circ \vec{a} = +(\vec{c} \times \vec{a}) \circ \vec{b} = -(\vec{a} \times \vec{c}) \circ \vec{b} = -(\vec{c} \times \vec{b}) \circ \vec{a} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \circ \vec{c}$ (zyklisch).

Aufg. 269/733: a) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \circ \overrightarrow{AD} = -6 \quad \Rightarrow \; V = \frac{1}{6} \cdot |-6| = 1;$

Thx Ann Zel

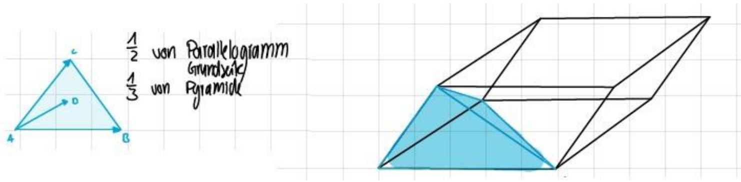


Abb. 472 Warum ein Tetraeder nur 1/6 des Volumens des Spates hat

b) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \circ \overrightarrow{AD} = 24 \quad \Rightarrow \; V = \frac{1}{6} \cdot |24| = 4;$

c) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$, $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \circ \overrightarrow{AD} = 6 \quad \Rightarrow \; V = \frac{1}{6} \cdot |6| = 1;$

d) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \circ \overrightarrow{AD} = 0 \quad \Rightarrow \; V = 0.$

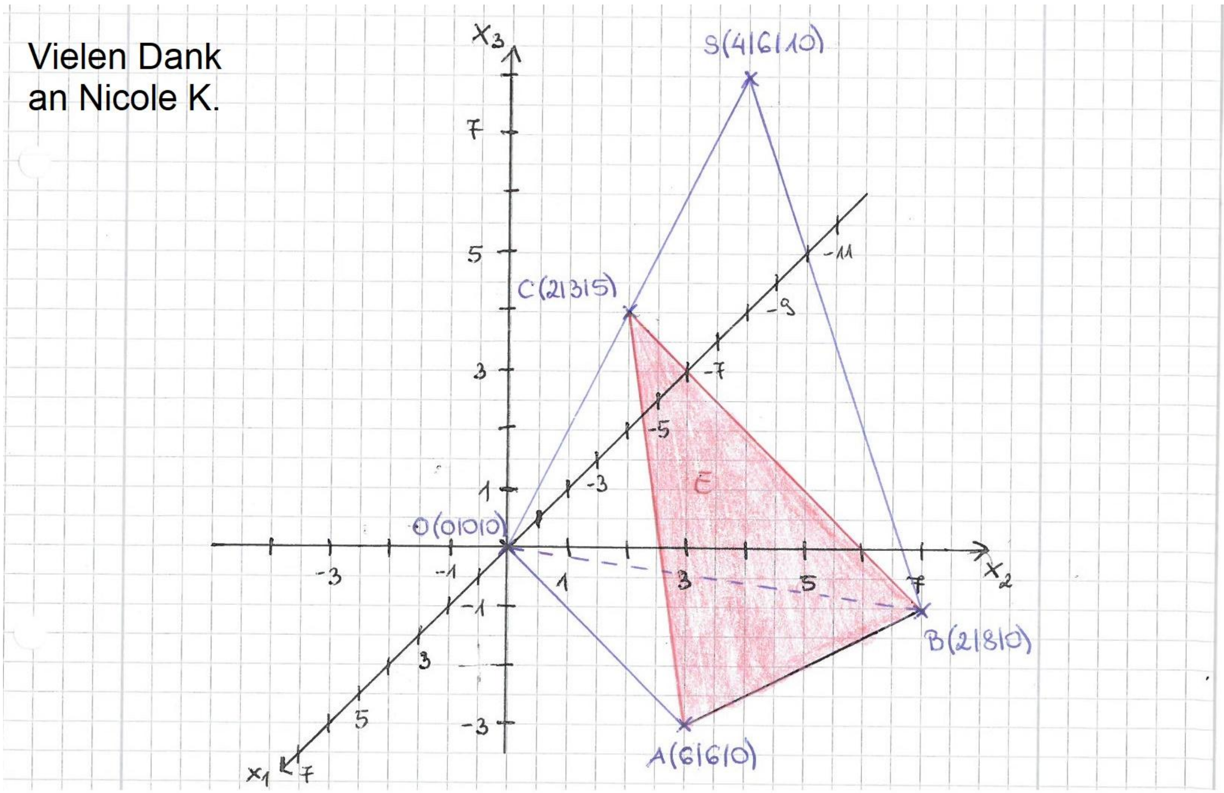


Abb. 473 Fläche eines Parallelogramms

Aufg. 269/734: Die Vektoren sind l.a. $\Leftrightarrow$ deren Spatprodukt ist 0.

zu Aufgabe 729 c $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = 0$ die Vektoren sind also l.a.

zu Aufgabe 729 d $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 5$ die Vektoren sind also l.u.

b) $a = \pm 1$, c) $a = 0, 1, 2$.

c) $(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} = \left(\begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 \\ -a^2 \\ a^2 - a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 3a^2 - 4a^2 + 2(a^2 - a) = a^2 - 2a = 0 \Leftrightarrow$
$a = 0, a = 2$

Aufg. 269/735: a) Darstellung der Pyramide siehe Abb 785/473.
Berechnung einer Koordinatengleichung von E_{ABC} mit Hilfe einer Parameterform von E :

Parameterform: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$;

$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R},$

$\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$; damit kann $\vec{n} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Normalenvektor gewählt werden.

Alternativ kann auch das (homogene) lineare Gleichungssystem $\vec{n} \circ \overrightarrow{AB} = 0$ und $\vec{n} \circ \overrightarrow{AC} = 0$ gelöst werden:

$\begin{aligned} -4 \cdot n_1 + 2 \cdot n_2 + 0 \cdot n_3 &= 0 \\ -4 \cdot n_1 - 3 \cdot n_2 + 5 \cdot n_3 &= 0 \end{aligned}$ wird gelöst von $\{\vec{n} \in \mathbb{R}^3 | (0.5t, 0.5t, t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}$.

Damit ist E von der Form $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = b$;

Einsetzen des Punktes $A(6|6|0)$ in E ergibt $b = 6 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 0 = 18$;

Koordinatengleichung von E: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 18$;

Das Volumen der Pyramide kann mit dem Spatprodukt $V = \frac{1}{6} \cdot |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \circ \overrightarrow{AS}|$ berechnet werden.

$V = \frac{1}{6} \cdot \left| \left(\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot |-20 + 200| = 30$

Alternativ kann das Volumen auch mit der Formel $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ berechnet werden:

Das Dreieck ΔABC ist gleichschenklig. Dazu berechnen wir die Länge der Dreiecksseiten:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{20};$

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{50};$

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2 + 5^2} = \sqrt{50};$ damit ist das Dreieck gleichschenklig.

Sei $M_{AB}(4|7|0)$ die Mitte von A und B. Weil ΔABC gleichschenklig ist, gilt $G = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{M_{AB}C}|$

$G = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{45} = 15.$

Die Abstandsform (HNF) der Ebene E:

$\left| \frac{x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 18}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} \right| = d$; $S(4|6|10)$ eingesetzt ergibt $d(S; E) = \left| \frac{4 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 10 - 18}{3} \right| = 6;$

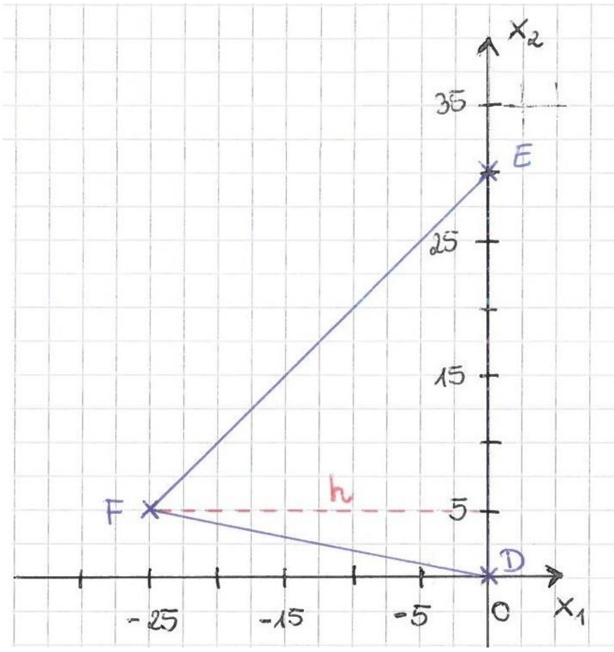
$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 15 \cdot 6 = 30.$

Das Volumen der Pyramide ist also 30 Volumeneinheiten.

b) i) Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC : Das Dreieck ΔABC liegt in der Ebene $x_3 = 15$.
Es gibt mehrere Möglichkeiten, den Flächeninhalt des Dreiecks zu bestimmen.

1.Möglichkeit: Lotebene L durch F orthogonal zu g_{AB}: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -25 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_2 = 5$;

$g_{AC} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbb{R})$; $g_{AC} \cap L = H(0|0|15)$.



Darstellung der Bodenfläche in der Ebene $x_3 = 15$.

Damit ist $A = 0.5 \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AL}| = 0.5 \cdot 30 \cdot 25 = 375\ (m^2)$.

2.Möglichkeit: Die Fläche eines beliebigen Dreiecks ΔDEF kann mit Hilfe des Vektorproduktes ermittelt werden:

$$|\Delta ABC| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -25 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \cdot 25 \end{pmatrix}\right| = 375\ (m^2).$$

Gesucht ist das Volumen der Pyramide $ABCD$.

Die Pyramidenhöhe entspricht dem Abstand von D von der Ebene durch A, B und C, $E_{ABC} : x_3 = 15$. Damit sind $h = 35 - 15 = 20$ und $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 375 \cdot 20 = 2500 (m^3)$.

Auch das Volumen kann mit Hilfe des Vektorproduktes (Spatproduktes) berechnet werden:
$V = \frac{1}{6} \cdot |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \circ \overrightarrow{AD}|$.

ii) Wir berechnen die Koordinatengleichung der Ebene E_{ABC}:

Parameterform für E_{ABC}: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -25 \\ -25 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ 20 \end{pmatrix},\ r, s \in \mathbb{R}.$$

Ein Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E_{ABC} ist

$$\vec{n}_1 := \begin{pmatrix} -25 \\ -25 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -500 \\ 500 \\ 250 \end{pmatrix} = 250\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$ Damit kann $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ gewählt werden.

Alternativ kann auch das lineare Gleichungssystem $\vec{n} \circ \overrightarrow{AB} = 0$ und $\vec{n} \circ \overrightarrow{AC} = 0$ gelöst werden:

$$\begin{aligned} -25 \cdot n_1 - 25 \cdot n_2 + 0 \cdot n_3 &= 0 \\ -10 \cdot n_1 - 20 \cdot n_2 + 20 \cdot n_3 &= 0 \end{aligned}$$ wird gelöst von $\{\vec{n} \in \mathbb{R}^3 | (-2t, 2t, t)$ für alle $t \in \mathbb{R}\}$.

E_{ABC} ist von der Form $-2x_1 + 2x_2 + x_3 = b$

Punktprobe mit $E(0|30|15)$ ergibt $E_{ABC}: -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 75$.

ii) Die Geraden g_{DF} durch $D(-10|10|35)$ und $F(-5|5|15)$.

g_{DF}: $\vec{x} = \overrightarrow{OD} + t \cdot \overrightarrow{DF}$: oder $\vec{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 35 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -20 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbb{R})$;

Bei dieser Darstellung gilt, dass ein Punkt zwischen D und F liegt, wenn dessen Parameter einen Wert zwischen 0 und 1 hat.

Gesucht ist ein Punkt zwischen D und F (also auf g_{GR}), der von der Ebene E_{ABC} den Abstand 8 besitzt.

Die Abstandsform (HNF) von E_{ABC} ist $\left|\frac{-2x_1+2x_2+x_3-75}{\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}}\right| = d.$

g_{FR} als Wanderpunkt ist $W(-10+5t|10-5t|35-20t)$ in die Abstandsform $(d=8)$ eingesetzt:

$\left|\frac{-2(-10+5t)+2(10-5t)+(35-20t)-75}{3}\right| = 8 \Leftrightarrow \left|\frac{-40t}{3}\right| = 8$

Der Betrag wurde aufgelöst: $\frac{40t}{3} = \pm 8 \Leftrightarrow t = \pm 0.6$ (Probe: Die Betragsgleichung wird gelöst).

Für $t = -0.6$ ergibt sich $W_{-0.6}(-13|13|47)$. Dieser Punkt liegt nicht zwischen D und F $(t < 0)$ und kommt daher nicht in Frage. Für $t = 0.6$ ergibt sich $W_{0.6}(-7|7|23)$. $W_{0.6}$ liegt zwischen G und R $(0 < t < 1)$ und damit ist $W_{0.6}(-7|7|23)$ die gesuchte Position des Scheinwerfers.

Aufg. 269/736:

a)
$$\begin{array}{rrrll} x_1\vec{a} & +x_2\vec{b} & +x_3\vec{c} & = \vec{d} & |\times\vec{b} \\ x_1\vec{a}\times\vec{b} & +x_2\vec{b}\times\vec{b} & +x_3\vec{c}\times\vec{b} & = \vec{d}\times\vec{b} & |\circ\vec{c} \\ x_1(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c} & +x_2(\vec{b}\times\vec{b})\circ\vec{c} & +x_3(\vec{c}\times\vec{b})\circ\vec{c} & = (\vec{d}\times\vec{b})\circ\vec{c} & \end{array}$$

$x_1 = \frac{(\vec{d}\times\vec{b})\circ\vec{c}}{(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}}$ zu b) $x_2 = \frac{(\vec{a}\times\vec{d})\circ\vec{c}}{(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}}$, $x_3 = \frac{(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{d}}{(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}}$.

noch a) $\vec{b}\times\vec{b} = \underline{\vec{0}}$, weil $\vec{b}$ linear abhängig von $\vec{b}$ ist.
$(\vec{c}\times\vec{b})\circ\vec{c} = \underline{0}$, weil der von $\vec{c}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ erzeugte Spat Volumen 0 hat.
Damit ist das LGS (teilweise) gelöst.

noch b) Die Lösung eines LGS kann direkt mit Hilfe von 4 Spatprodukten angegeben werden.

c) (Reminder): Division oder teilen durch einen Vektor (allein) ist verboten!

d) Die Formel gilt nicht, falls $(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c} \underline{=0}$.

e) Das LGS $x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c} = \vec{d}$ ist eindeutig lösbar $\Leftrightarrow$ $(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c} \neq 0$.

f) $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -28 \\ 14 \end{pmatrix}$, $(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c} = \begin{pmatrix} 14 \\ -28 \\ 14 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = 140$,
$\vec{d}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -36 \\ 28 \end{pmatrix}$, $(\vec{d}\times\vec{b})\circ\vec{c} = 280$, $\Rightarrow x_1 = \frac{280}{140} = 2$,
$x_2 = 1$ und $x_3 = 1$ (selbst nachrechnen).

g) $\begin{pmatrix} x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = 5 \\ 2x_1 & +6x_2 & +3x_3 & = 14 \\ -3x_1 & +4x_2 & & = 5 \end{pmatrix}$ vektoriell: $x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\underline{A} = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & 3 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+18 \\ -6-4 \\ 6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}$;

$\det(\underline{A}) = \begin{pmatrix} 26 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = -78 - 30 + 0 = -108 \neq 0$ $\Rightarrow$ das LGS ist eindeutig lösbar;

$(\vec{b}\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 14 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$; $\quad \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56-30 \\ 10-20 \\ 30-28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}$;

$\det(\vec{b}\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3) = \begin{pmatrix} 26 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = -78 - 30 + 0 = -108;$ $\quad \boxed{x_1 = \frac{\det(\vec{b}\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3)}{\det(\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3)} = \frac{-108}{-108} = 1;}$

$(\vec{a}_1\,\vec{b}\,\vec{a}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 14 & 3 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$; $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10+42 \\ -15-5 \\ 14-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52 \\ -20 \\ 4 \end{pmatrix}$;

$\det(\vec{a}_1\,\vec{b}\,\vec{a}_3) = \begin{pmatrix} 52 \\ -20 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = -156 - 60 + 0 = -216;$ $\quad \boxed{x_2 = \frac{\det(\vec{a}_1\,\vec{b}\,\vec{a}_3)}{\det(\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3)} = \frac{-216}{-108} = 2;}$

$(\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 6 & 14 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+18 \\ -6-4 \\ 6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}$;

$\det(\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{b}) = \begin{pmatrix} 26 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix} = 130 - 140 + 10 = 0;$ $\quad \boxed{x_3 = \frac{\det(\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{b})}{\det(\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3)} = \frac{0}{-108} = 0;}$

h) **Ag 736:** $\underline{A} = (\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \\ -5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$; $\quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+20 \\ -10-18 \\ 12+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -28 \\ 14 \end{pmatrix}$;

$\det(\underline{A}) = \begin{pmatrix} 14 \\ -28 \\ 14 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = -14 + 56 + 98 = 140 \neq 0 \quad \Rightarrow$ das LGS ist eindeutig lösbar;

$(\vec{b}\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3) = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$; $\quad \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-12 \\ 6-42 \\ 28-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -36 \\ 28 \end{pmatrix}$;

$\det(\vec{b}\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3) = \begin{pmatrix} -12 \\ -36 \\ 28 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = 12 + 72 + 196 = 280$ $\quad \boxed{x_1 = \frac{\det(\vec{b}\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3)}{\det(\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3)} = \frac{280}{140} = 2;}$

$(\vec{a}_1\,\vec{b}\,\vec{a}_3) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ -5 & 7 & 7 \end{pmatrix}$; $\quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-0 \\ -35-9 \\ 0+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -44 \\ 7 \end{pmatrix}$;

$\det(\vec{a}_1\,\vec{b}\,\vec{a}_3) = \begin{pmatrix} -3 \\ -44 \\ 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = 3 + 88 + 49 = 140$ $\quad \boxed{x_2 = \frac{\det(\vec{a}_1\,\vec{b}\,\vec{a}_3)}{\det(\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3)} = \frac{140}{140} = 1;}$

$(\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{b}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -1 & 4 & 0 \\ -5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$; $\quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+20 \\ -10-18 \\ 12+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -28 \\ 14 \end{pmatrix}$;

$\det(\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{b}) = \begin{pmatrix} 14 \\ -28 \\ 14 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 98 + 0 + 42 = 140$ $\quad \boxed{x_3 = \frac{\det(\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{b})}{\det(\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3)} = \frac{140}{140} = 1;}$

Ag 776 a): $\underline{A} = \vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3) = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \\ 12 & -4 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16-24 \\ 36+36 \\ 18+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 72 \\ 30 \end{pmatrix}$;

$\det(\underline{A}) = \begin{pmatrix} -8 \\ 72 \\ 30 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -8 - 72 + 30 = -50 \neq 0 \quad \Rightarrow$ das LGS ist eindeutig lösbar;

$(\vec{b}\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3) = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32-0 \\ 0-12 \\ -6-24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 \\ -12 \\ -30 \end{pmatrix}$;

$\det(\vec{b}\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3) = \begin{pmatrix} -32 \\ -12 \\ -30 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -32 + 12 - 30 = -50;$ $\quad \boxed{x_1 = \frac{\det(\vec{b}\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3)}{\det(\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3)} = \frac{-50}{-50} = 1;}$

$(\vec{a}_1\,\vec{b}\,\vec{a}_3) = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 1 \\ -4 & 8 & -1 \\ 12 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-96 \\ -36-0 \\ 72-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -96 \\ -36 \\ 60 \end{pmatrix}$;

$\det(\vec{a}_1\,\vec{b}\,\vec{a}_3) = \begin{pmatrix} -96 \\ -36 \\ 60 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -96 + 36 + 60 = 0;$ $\quad \boxed{x_2 = \frac{\det(\vec{a}_1\,\vec{b}\,\vec{a}_3)}{\det(\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3)} = \frac{0}{-50} = 0;}$

$(\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{b}) = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -3 \\ -4 & 2 & 8 \\ 12 & -4 & 0 \end{pmatrix}$; $\quad \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16-24 \\ 36+36 \\ 18+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 72 \\ 30 \end{pmatrix}$;

$\det(\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{b}) = \begin{pmatrix} -8 \\ 72 \\ 30 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = 24 + 576 + 0 = 600;$ $\quad \boxed{x_3 = \frac{\det(\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{b})}{\det(\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3)} = \frac{600}{-50} = -12;}$

Ag 776 b): $\underline{A} = \vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3) = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2 \\ -4+3 \\ -6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$;

$\det(\underline{A}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 - 3 - 2 = 0 \quad \Rightarrow$ das LGS ist mit der Cramerregel nicht lösbar;

Ag 762 c): $\underline{A} = (\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+8 \\ 4-6 \\ -4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}$;

$\det(\underline{A}) = \begin{pmatrix} 17 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -51 - 2 + 14 = -39 \neq 0 \quad \Rightarrow$ das LGS ist eindeutig lösbar;

$(\vec{b}\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 6 & -2 & 1 \\ 16 & 3 & -2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 16 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18+32 \\ 16-15 \\ -10-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 1 \\ -16 \end{pmatrix}$;

$\det(\vec{b}\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3) = \begin{pmatrix} 50 \\ 1 \\ -16 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -150 + 1 + 32 = -117$; $\boxed{x_1 = \frac{\det(\vec{b}\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3)}{\det(\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3)} = \frac{-117}{-39} = 3;}$

$(\vec{a}_1\,\vec{b}\,\vec{a}_3) = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 3 & 6 & 1 \\ 4 & 16 & -2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48-24 \\ 20-32 \\ 12-15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix}$;

$\det(\vec{a}_1\,\vec{b}\,\vec{a}_3) = \begin{pmatrix} 24 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -72 - 12 + 6 = -78$; $\boxed{x_2 = \frac{\det(\vec{a}_1\,\vec{b}\,\vec{a}_3)}{\det(\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3)} = \frac{-78}{-39} = 2;}$

$(\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{b}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 6 \\ 4 & 3 & 16 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+8 \\ 4-6 \\ -4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}$;

$\det(\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{b}) = \begin{pmatrix} 17 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -51 - 2 + 14 = -39$; $\boxed{x_3 = \frac{\det(\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{b})}{\det(\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3)} = \frac{-39}{-39} = 1;}$

Ag 768 j): $\underline{A} = (\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+10 \\ 10-4 \\ -8-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 6 \\ -14 \end{pmatrix}$;

$\det(\underline{A}) = \begin{pmatrix} 13 \\ 6 \\ -14 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 13 + 12 + 42 = 67 \neq 0 \quad \Rightarrow$ das LGS ist eindeutig lösbar;

$(\vec{b}\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3) = \begin{pmatrix} 23 & 2 & 1 \\ 21 & -2 & 2 \\ 16 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 23 \\ 21 \\ 16 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21+32 \\ 32-23 \\ -46-42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 53 \\ 9 \\ -88 \end{pmatrix}$;

$\det(\vec{b}\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3) = \begin{pmatrix} 53 \\ 9 \\ -88 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 53 + 18 + 264 = 335$; $\boxed{x_1 = \frac{\det(\vec{b}\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3)}{\det(\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3)} = \frac{335}{67} = 5;}$

$(\vec{a}_1\,\vec{b}\,\vec{a}_3) = \begin{pmatrix} 4 & 23 & 1 \\ 3 & 21 & 2 \\ 5 & 16 & -3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 23 \\ 21 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48-105 \\ 115-64 \\ 84-69 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -57 \\ 51 \\ 15 \end{pmatrix}$;

$\det(\vec{a}_1\,\vec{b}\,\vec{a}_3) = \begin{pmatrix} -57 \\ 51 \\ 15 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = -57 + 102 - 45 = 0$; $\boxed{x_2 = \frac{\det(\vec{a}_1\,\vec{b}\,\vec{a}_3)}{\det(\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3)} = \frac{0}{67} = 0;}$

$(\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{b}) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 23 \\ 3 & -2 & 21 \\ 5 & 1 & 16 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+10 \\ 10-4 \\ -8-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 6 \\ -14 \end{pmatrix}$;

$\det(\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{b}) = \begin{pmatrix} 13 \\ 6 \\ -14 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 23 \\ 21 \\ 16 \end{pmatrix} = 299 + 126 - 224 = 201$; $\boxed{x_3 = \frac{\det(\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{b})}{\det(\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3)} = \frac{201}{67} = 3;}$

Aufg. 269/737: a) Sd: $360000 \cdot \frac{7}{7+5} = 210000$, Bruder 150000. b) S, T und Z liegen auf einer Geraden. $\overrightarrow{ST} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{SZ}$. Teilstrecke=$\frac{|\overrightarrow{ST}|}{|\overrightarrow{SZ}|}$. Teilstrecken finden sich auch bei der Definition einer Geraden.

c) $S_1(1;0)$, $T_1(3;0)$ und $Z_1(4;0)$ oder $S_2(0;1)$, $T_2(0;5)$ und $Z_2(0;7)$.

d) Es genügt das Teilverhältnis (die Teilstrecke) von <u>einer</u> <u>Koordinate</u> zu berechnen.

e) $TS(S,Z,T) = \frac{|\overrightarrow{ST}|}{|\overrightarrow{SZ}|} = \frac{\sqrt{30}}{4\sqrt{30}} = 0.25$. $TV(S,Z,T) = \frac{1}{3}$;

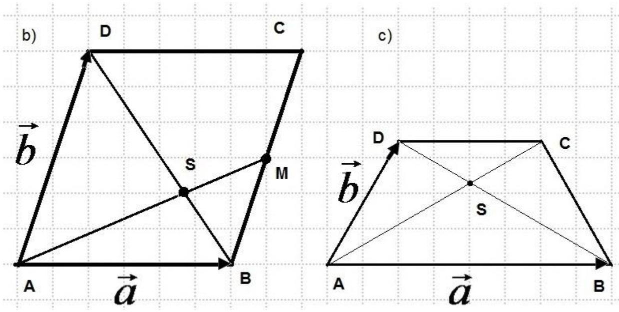
f) $TV(S,Z,T) = \frac{|\overrightarrow{ST}|}{|\overrightarrow{TZ}|}$; $TV_b = \frac{2}{1}$, $TS_b(S,Z,T) = \frac{2}{3}$; $TV_c = \frac{1}{2}$, $TS_c(S,Z,T) = \frac{1}{3}$.

g) Sei (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) $\overrightarrow{SZ} = 1$ $a = |\overrightarrow{ST}|$ (orientiert, dass heißt $a < 0$, falls S zwischen T und Z liegt), dann gilt $a = TS(S,Z,T)$ und $\frac{a}{1-a} = TV(S,Z,T)$ und damit $TV = \frac{TS}{1-TS}$ und $TS = \frac{TV}{1+TV}$

Aufg. 270/738: a) Sei $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ unser Vieleck sei ASD. $\overrightarrow{AS} = r \cdot \overrightarrow{AC} = r \cdot (\vec{a} + \vec{b})$, $\overrightarrow{SD} = t \cdot \overrightarrow{BD} = t \cdot (\vec{b} - \vec{a})$, Es gilt $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{AD}$ oder

$$\begin{array}{lll} r \cdot (\vec{a} + \vec{b}) & +t \cdot (\vec{b} - \vec{a}) & = \vec{b} \\ r\vec{a} + r\vec{b} & +t\vec{b} - t\vec{a} & = \vec{b} \\ \vec{a}(r - t) & +\vec{b}(r + t - 1) & = \vec{0} \end{array}$$

Da $\vec{a}$ und $\vec{b}$ l.u. sind gilt, dass der Nullvektor nur trivial linearkombiniert werden kann, dass heißt, dass die Faktoren vor $\vec{a}$ und $\vec{b}$ null sind $\Leftrightarrow r - t = 0$ und $r + t - 1 = 0 \Leftrightarrow r = t = \frac{1}{2}$, (Abb. 474).



b) Sei $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ unser Vieleck sei ASD. $\overrightarrow{AS} = r \cdot \overrightarrow{AM} = r \cdot (\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b})$, $\overrightarrow{SD} = t \cdot \overrightarrow{BD} = t \cdot (\vec{b} - \vec{a})$, Es gilt $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{AD}$ oder

$$\begin{array}{lll} r \cdot (\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}) & +t \cdot (\vec{b} - \vec{a}) & = \vec{b} \\ r\vec{a} + \frac{1}{2}r\vec{b} & +t\vec{b} - t\vec{a} & = \vec{b} \\ \vec{a}(r - t) & +\vec{b}(\frac{1}{2}r + t - 1) & = \vec{0} \end{array}$$

Abb. 474 Parallelogramm und Trapez

$\Leftrightarrow r - t = 0$ und $\frac{1}{2}r + t - 1 = 0 \Leftrightarrow r = t = \frac{2}{3}$.

c) Sei $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ unser Vieleck sei ASD.

$\overrightarrow{AS} = r \cdot \overrightarrow{AC} = r \cdot (\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b})$, $\overrightarrow{SD} = t \cdot \overrightarrow{BD} = t \cdot (\vec{b} - \vec{a})$, Es gilt $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{AD}$ oder

$$\begin{array}{lll} r \cdot (\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}) & +t \cdot (\vec{b} - \vec{a}) & = \vec{b} \\ \frac{1}{2}r\vec{a} + r\vec{b} & +t\vec{b} - t\vec{a} & = \vec{b} \\ \vec{a}(\frac{1}{2}r - t) & +\vec{b}(r + t - 1) & = \vec{0} \end{array}$$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}r - t = 0$ und $r + t - 1 = 0 \Leftrightarrow (r = 2t)$ und $r = \frac{2}{3}$, $t = \frac{1}{3}$.

d) Sei $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ unser Vieleck sei ASC.

$\overrightarrow{AS} = r \cdot \overrightarrow{AM} = r \cdot (\vec{a} + \vec{b})$, $\overrightarrow{SC} = t \cdot \overrightarrow{BC} = t \cdot (\vec{b} - \vec{a})$, Es gilt $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{AC}$ oder

$$\begin{array}{lll} r \cdot (\vec{a} + \vec{b}) & +t \cdot (\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}) & = \vec{b} \\ r\vec{a} + r\vec{b} & +t\vec{b} - \frac{t}{2}\vec{a} & = \vec{b} \\ \vec{a}(r - \frac{t}{2}) & +\vec{b}(r + t - 1) & = \vec{0} \end{array}$$

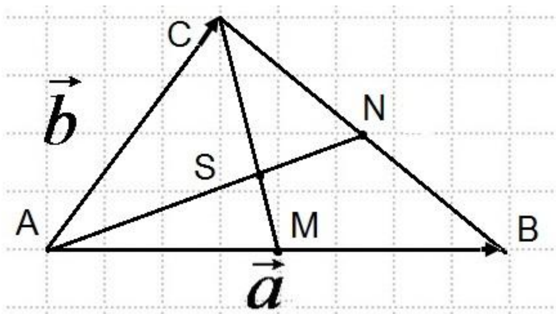
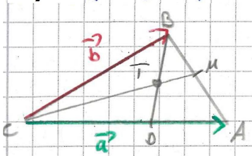


Abb. 475 Schwerpunkt im Dreieck

$\Leftrightarrow r - \frac{1}{2}t = 0$ und $r + t - 1 = 0 \Leftrightarrow (t = 2r)$ und $r = \frac{1}{3}$, $t = \frac{2}{3}$ (Abb 475).
Beachten Sie, dass $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AN}$ ist.

e) HT 2004:



Es gilt:

$\overrightarrow{CT} = \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{CM}$ (I)

$\overrightarrow{CD} = t \cdot \vec{a}$ (II)

$\overrightarrow{BD} = t\vec{a} - \vec{b}$ (III)

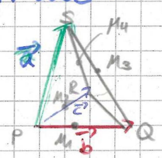
$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ (IV)

(IV) in (I): $\overrightarrow{CT} = \frac{3}{8}\vec{a} + \frac{3}{8}\vec{b}$

$\overrightarrow{BT} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CT} = -\vec{b} + \frac{3}{8}\vec{a} + \frac{3}{8}\vec{b} = \frac{3}{8}\vec{a} - \frac{5}{8}\vec{b}$

$\overrightarrow{BD} = s \cdot \overrightarrow{BT} = \frac{3}{8}s \cdot \vec{a} - \frac{5}{8}s \cdot \vec{b}$ (V)

f) HT 2005:



Es gilt: $\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{OM_2} = \frac{1}{2}\vec{c}$

$\overrightarrow{OM_3} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$

$\overrightarrow{OM_4} = \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}$

$\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{M_3M_4} = \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b} = \overrightarrow{M_1M_2}$

qed

(III) = (V): $t \cdot \vec{a} - \vec{b} = \frac{3}{8}s \cdot \vec{a} - \frac{5}{8}s \cdot \vec{b}$

Koeffizientenvergleich: $1 = \frac{5}{8}s \Leftrightarrow s = \frac{8}{5}$

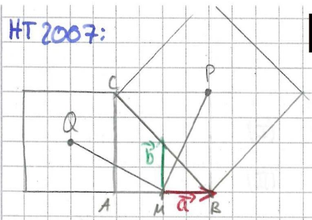
$t = \frac{3}{8}s \Rightarrow t = \frac{3}{5}$

Aus $s = \frac{8}{5}$ folgt: $\frac{\overline{BT}}{\overline{TD}} = \frac{5}{3}$

Fortsetzung Teil e HT 2004

Thx Manuel

h) HT 2007:



Es gilt: $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ und $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$:

$\overrightarrow{MP} = \vec{a} + 2\vec{b}$ und $\overrightarrow{MQ} = \vec{b} - 2\vec{a}$

Zu beweisen: $|\overrightarrow{MP}| = |\overrightarrow{MQ}|$ und $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = 0$

I: Satz des Pythagoras:

$|\overrightarrow{MP}| = |\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 = 5|\vec{a}|^2$

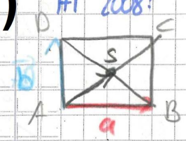
$|\overrightarrow{MQ}| = 4|\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 = 5|\vec{a}|^2 = |\overrightarrow{MP}|$ ✓

II: Orthogonalität:

$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = (\vec{a} + 2\vec{b})(\vec{b} - 2\vec{a}) = \vec{a}\vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{a} - 4\vec{a} \cdot \vec{b}$

$= 2|\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}|^2 = 0$

i) HT 2008:



$\overrightarrow{AC} = 0{,}4\,\vec{a} + \vec{b}$

$\overrightarrow{BD} = \vec{b} - \vec{a}$

$t \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BD}$

$0{,}4t\,\vec{a} + t \cdot \vec{b} = \vec{a} + s\vec{b} - s \cdot \vec{a}$

$0{,}4t \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b} = (1-s) \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$

Koeffizientenvergleich: (I) $t = s$

(II) $0{,}4t = 1 - s$

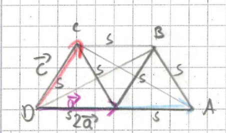
(I) in (II): $0{,}4s = 1 - s$

$\Leftrightarrow 1{,}4s = 1$

$\Leftrightarrow s = \frac{5}{7} \Rightarrow \frac{\overline{AS}}{\overline{SC}} = \frac{5}{2}$

Thx Manuel

g) HT 2006: ||



$\overrightarrow{DB} = \vec{c} + \vec{a}$

$\overrightarrow{AC} = \vec{c} - 2\vec{a}$

to be continued

j) HT 2009:

Es gilt: $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{9}\overrightarrow{OA}$ $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ $|\vec{a}| = 3|\vec{b}|$

Zu beweisen ist: $\overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$

$\overrightarrow{CT} = \frac{1}{9}\vec{a} - \vec{b}$ $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$ to be continued

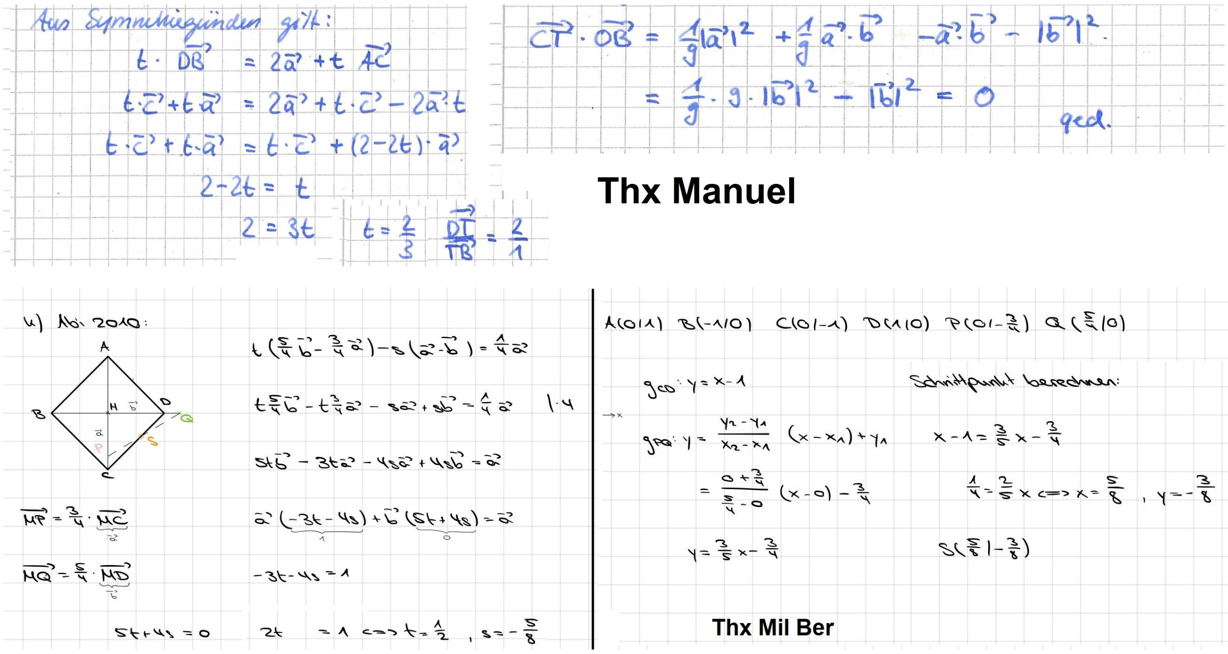


Abb. 476 Abituraufgaben 2004 bis 2010 zum Teilverhältnis

k) T teilt die Strecke BD im Verhältnis 5 : 3; g) 2:1; k) S teilt die Strecke CD im Verhältnis 5:3

Aufg. 270/739: $\vec{d} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$;

$G = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2 + 3^2} = 9$;

$V = \frac{1}{3} \cdot \left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \circ \overrightarrow{AS}\right| = \frac{1}{3} \cdot \left|\begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{3} \cdot |(-6) \cdot (-4) + (-6) \cdot (-1) + 3 \cdot 0| = 8$;

15.10.5 LöVo zu Einheit 10.5 (Abstände + Schnittwinkel UE 12_4)

Aufg. 271/740: a) $\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$; b) $S(1; 2; 3)$, $\alpha \approx 180° - 96.38° = 83.62°$;

Die Geraden haben Schnittlage: Gleicher Aufpunkt (Schnittpunkt); linear unabhängige Richtungsvektoren. c) $\cos(\alpha) = |\frac{\vec{r}_1 \circ \vec{r}_2}{|\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2|}|$.

Aufg. 271/741: a) $\alpha \approx 180° - 141.06° = 38.94°$; b) $\cos(\alpha) = |\frac{\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}|$.

Aufg. 271/742: a) Skizze; Problem, Es ist nicht klar, in welche Richtung (der Ebene) der Winkel gemessen wird bzw wie man auf diese Richtung kommt.

b) $\beta : \cos(\beta) = \frac{\vec{r} \circ \vec{n}}{|\vec{r}| \cdot |\vec{n}|}$ c) $\beta = 90° - \alpha$. d) Additionstheorem:

$\cos(90° - \alpha) = \cos(90°)\cos(\alpha) + \sin(90°)\sin(\alpha) = \sin(\alpha)$. Damit ist $\sin(\alpha) = \left|\frac{\vec{r} \circ \vec{n}}{|\vec{r}| \cdot |\vec{n}|}\right|$.

Aufg. 271/743: $\underline{\sphericalangle (g_1, g_2) = \cos^{-1}\left(\frac{|\vec{r}_1 \circ \vec{r}_2|}{|\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2|}\right)}$ $\underline{\sphericalangle (E_1, E_2) = \cos^{-1}\left(\frac{|\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}\right)}$

$\underline{\sphericalangle (g_1, E_1) = \sin^{-1}\left(\frac{|\vec{r}_1 \circ \vec{n}_1|}{|\vec{r}_1| \cdot |\vec{n}_1|}\right)}$

Bei gleichen Objekten benutzt man $\underline{\cos^{-1}}$, bei ungleichen $\underline{\sin^{-1}}$ und im Zweifelsfalle $\underline{\cos^{-1}}$.

c) $$\sphericalangle(E_1,E_2):\cos(\alpha)=\left|\frac{\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right|}\right|=\frac{2+2-1}{3\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\alpha=\cos^{-1}(0.5773)\approx 54.74°;$$

$$\sphericalangle(E_2,E_3):\cos(\alpha)=\left|\frac{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\right|}\right|=\frac{2-1+2}{\sqrt{3}\cdot 3}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\alpha=\cos^{-1}(0.5773)\approx 54.74°;$$

$$\sphericalangle(E_1,E_3):\cos(\alpha)=\left|\frac{\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\right|}\right|=\frac{4-2-2}{3\cdot 3}=0\Leftrightarrow\alpha=\cos^{-1}(0)=90°;$$

$$g_{AB}:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix};\ g_{AC}:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix};\ g_{BC}:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\-3\end{pmatrix};$$

$$\sphericalangle(g_{AB},g_{AC}):\cos(\alpha)=\left|\frac{\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\right|}\right|=\frac{4-2-2}{3\cdot 3}=0\Leftrightarrow\alpha=\cos^{-1}(0)=90°;$$

$$\sphericalangle(g_{AB},g_{BC}):\cos(\alpha)=\left|\frac{\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\3\\-3\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\3\\-3\end{pmatrix}\right|}\right|=\frac{0+6+3}{3\cdot 3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\alpha=\cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})=45°;$$

$$\sphericalangle(g_{AC},g_{BC}):\cos(\alpha)=\left|\frac{\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\3\\-3\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\3\\-3\end{pmatrix}\right|}\right|=\left|\frac{0-3-6}{3\cdot 3\sqrt{2}}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\alpha=\cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})=45°;$$

hier kann auch über die Winkelsumme im $\Delta A,B,C$ argumentiert werden.

$$\sphericalangle(g_{AB},E_1):\sin(\alpha)=\left|\frac{\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\right|}\right|=\frac{4+4+1}{3\cdot 3}=1\Leftrightarrow\alpha=\sin^{-1}(1)=90°;$$

$$\sphericalangle(g_{AB},E_2):\sin(\alpha)=\left|\frac{\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right|}\right|=\frac{2+2-1}{3\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\alpha=\sin^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}})\approx 54.74°;$$

$$\sphericalangle(g_{AB},E_3):\sin(\alpha)=\left|\frac{\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\right|}\right|=\frac{4-2-2}{3\cdot 3}=0\Leftrightarrow\alpha=\sin^{-1}(0)=0°;$$ g_{AB} liegt in E_3.

$$\sphericalangle(g_{AC},E_1):\sin(\alpha)=\left|\frac{\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\right|}\right|=\frac{4-2-2}{3\cdot 3}=0\Leftrightarrow\alpha=\sin^{-1}(0)=0°;$$ g_{AC} liegt in E_1.

$$\sphericalangle(g_{AC}, E_2) : \sin(\alpha) = \left| \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} \right| = \frac{2-1+2}{3 \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \alpha = \sin^{-1}(\tfrac{1}{\sqrt{3}}) \approx 54.74°;$$

$$\sphericalangle(g_{AC}, E_3) : \sin(\alpha) = \left| \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right|} \right| = \frac{4+1+4}{3 \cdot 3} = 1 \Leftrightarrow \alpha = \sin^{-1}(1) = 90°;$$

$$\sphericalangle(g_{BC}, E_1) : \sin(\alpha) = \left| \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right|} \right| = \frac{0+6+3}{3\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \alpha = \sin^{-1}(1) = 45°;$$

$$\sphericalangle(g_{BC}, E_2) : \sin(\alpha) = \left| \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} \right| = \frac{0+3-3}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \sin^{-1}(0) = 0°;$$

g_{BC} ist echt parallel zu E_2.

$$\sphericalangle(g_{BC}, E_3) : \sin(\alpha) = \left| \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right|} \right| = \left| \frac{0-3-6}{3\sqrt{2} \cdot 3} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \alpha = \sin^{-1}(\tfrac{1}{\sqrt{2}}) = 45°;$$

d) $g_{AC} \perp E_3$, $g_{AB} \perp E_1$ e) $g \perp E \Leftrightarrow \vec{r}$ l.a. oder $||\ \vec{n}$; $g||E \Leftrightarrow \vec{r} \perp \vec{n}$.

$E_1||E_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \ || \ \vec{n}_2$ (oder l.a.). $E_1 \perp E_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$.

Aufg. 271/744: a) $L_1(-1;-1), t = -1, d = 5$; b) $L_2(3;2)$, $d = 5$; $L_3(-5;-2), d = 0$, $L_4(-0.36; 1.48), t = -0.84$, $d = \sqrt{2.64^2 + (-3.52)^2} = 4.4$.
Aufg. 271/745: a) $t = -2, L_1(1;1;-1), d = 6$; (Abb. 477) b) $\downarrow$ **c)** $t = -1, L_2(0;-1;1), d = 3$; $t = -3, L_3(1;-1;0)$, $d = 9$; $t = 1, L_4(0;-1;1), d = 3$. (Abb. 477)

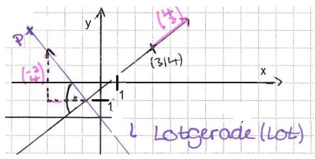
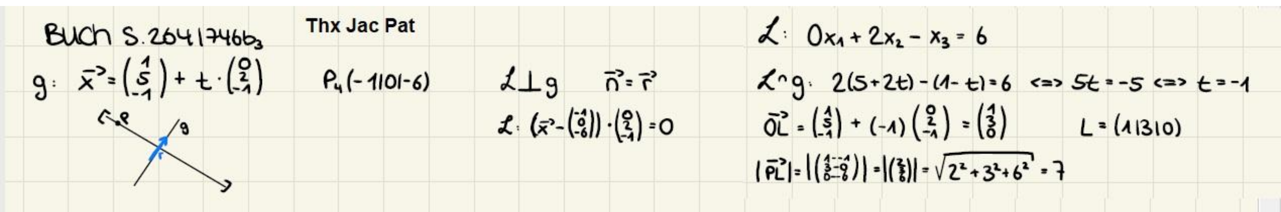


Abb. 477 Lotgerade

b) Sei $P(p_1, p_2, p_3)$ und $E : (\vec{x} - \vec{q}) \circ \vec{n} = 0$; gesucht ist $d(P, E)$. Definieren Sie die Lotgerade $l : \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{n}$. Der Punkt $L = l \cap E$ ist der Lotfußpunkt von P auf E; $d(P, E) = |\overrightarrow{PL}|$.

Aufg. 271/746: a) $t = 2, L_1(1;6;5), d = 7$;
b) $t = -1, L_2(1;3;0), d = 3$; $t = 0, L_3(1;5;-1), d = 9$; $t = 1, L_4(1;3;0), d = 7$.



Aufg. 271/746: c) i) $g_{AB} = \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbb{R})$; Lotebene $E_L : (\vec{x} - \vec{p}) \circ \vec{r} = 0$ damit ist $E_L : (\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}) \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ oder $E_L : -3x_1 + x_2 = -1$;

Lotfußpunkt $L := E_L \cap g_{AB} : -3(7-3t)+t = -1 \Leftrightarrow -21+9t+t=-1 \Leftrightarrow t=2 \Rightarrow L(1;2;3)$;

$d = |\overrightarrow{LP}| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+36+81} = 11.$

Spiegelung von P an g_{AB}: $\vec{p}' = 2\vec{l} - \vec{p} = 2\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow P'(-1;-4;-6)$.

Aufg. 271/746: c) ii) $g_{AB} = \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(t\in\mathbb{R})$; Lotebene $E_L : (\vec{x}-\vec{p})\circ\vec{r} = 0$ damit ist $E_L : (\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix})\circ\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ oder $E_L : -2x_1 - 2x_2 = -2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 1$;

Lotfußpunkt $L := E_L \cap g_{AB} : 3-2t-2t = 1 \Leftrightarrow -4t=-2 \Leftrightarrow t=0.5 \Rightarrow L(2;-1;1)$;

$d = |\overrightarrow{LP}| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-4)^2+4^2+7^2} = 9.$

Spiegelung von P an g_{AB}: $\vec{p}' = 2\vec{l} - \vec{p} = 2\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow P'(6;-5;-6)$.

Aufg. 271/747: $W(t)$ entsteht durch 'Zusammenrechnen' von Aufpunkt und Richtungsvektor der Geraden. Die Gerade wird als Punktmenge interpretiert.
a) $f(t) = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2+2t \\ 3+t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 2t-7 \\ 4+t \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-2)^2+(2t-7)^2+(4+t)^2} = \sqrt{5t^2-20t+69}$. $f(t)$ ist minimal, wenn $(5t^2-20t+69)' = 10t-20 = 0$ also wenn $t=2$ ist (die Wurzel ist monoton - die Ableitung kann auch mit der Kettenregel erfolgen). Damit ist $L = W(2) = (1;6;5)$. $d = |\overrightarrow{LP}| = \left|\begin{pmatrix} 3-1 \\ 9-6 \\ -1-5 \end{pmatrix}\right| = 7.$

b) $\overrightarrow{LP}$ und $\vec{r}$ sind orthogonal oder $\overrightarrow{LP}\circ\vec{r} = 0$. $\quad \overrightarrow{LP}\circ\vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2t-7 \\ 4+t \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$ $2(2t-7)+(4+t) = 5t-10 = 0$ falls $t=2$. Damit ist $d=7$ (siehe a).

Aufg. 272/748: a) $|(\vec{q}-\vec{p})\times\vec{r}|$ ist die Fläche des Parallelogramms, dass von den Vektoren $\vec{r}$ und $\overrightarrow{PQ}$ aufgespannt wird. Es könnte zB die Eckpunkte $P, \vec{p}+\vec{r}, \vec{q}+\vec{r}, Q$ haben, wenn die Summe aus Ortsvektor und Punkt als Punkt gedeutet wird. b) $d = h = \frac{\text{Fläche}}{\text{Grundseite}} = \frac{|(\vec{q}-\vec{p})\times\vec{r}|}{|\vec{r}|}$.

Aufg. 272/749: a+b) Sei $g : \vec{x} = \vec{p}+t\cdot\vec{r}$ $(t\in\mathbb{R})$, Definiere die Hilfsebene H durch $(\vec{x}-\vec{a})\circ\vec{r} = 0$, dann ist $g \perp H$. $L = g\cap H$ ist der Lotfußpunkt von A auf g. Der Abstand von g zu A=$d(g,A)$=$d(L,A)$=$|\overrightarrow{AL}|$. Es gibt noch viele weitere äquivalente Verfahren.

Aufg. 272/750: a) $P'(0;3)$; b) L liegt in der Mitte von P und P'. $\vec{p}' = 2\vec{l}-\vec{p}$ (3. Parallelogrammgesetz). c) Ag 744 $P_1'(1;-3), P_2'(0;8), P_3'(-5;-2)$; Ag 745 $P_1'(-3;0;-5), P_2'(-2;-2;-1), P_3'(-5;-4;-6), P_4'(2;0;3)$; Ag 746 $P_1'(-1;-2;-5), P_2'(-1;2;-2), P_3'(0;1;-9), P_4'(3;6;6)$. d) Wenn man eine ganze Gerade spiegeln möchte spiegelt man <u>zwei Punkte</u> und verbindet diese danach.

Aufg. 272/751: a) Sei $E : (\vec{x}-\vec{q})\circ\vec{n} = 0$; definiere $h : \vec{x} = \vec{p}+t\cdot\vec{n}$, $(t\in\mathbb{R})$ ist die Lotgerade zu E durch A. $L = h\cap E$ ist der Lotfußpunkt. $\overrightarrow{OP'} = \vec{p}' = 2\vec{l}-\vec{p}$ (drittes Parallelogrammgesetz).

b) Sei $g : \vec{x} = \vec{p}+t\cdot\vec{r}$, $(t\in\mathbb{R})$; sei $H : (\vec{x}-\vec{a})\circ\vec{r} = 0$ die Lotgerade zu g durch A, $L = H\cap g$ ist der Lotfußpunkt. $\overrightarrow{OA'} = \vec{a}' = 2\vec{l}-\vec{a}$ (drittes Parallelogrammgesetz).

c) Sei $E : (\vec{x}-\vec{s})\circ\vec{n} = 0$ und $g : \vec{x} = \vec{s}+t\cdot\vec{r}$, dann ist S der Schnittpunkt von E und g; sei $\vec{a} = \vec{s}+\vec{r}$ der Punkt von g mit dem Parameterwert 1 (also insbesondere $A \neq S$). Spiegle A an E analog zu Aufgabe 751 (Spiegelpunkt A'); $g' : \vec{x} = \overrightarrow{OS} + t\cdot\overrightarrow{SA'}$.

Aufg. 272/752: $\vec{v} = \binom{2}{0} : \vec{v}_0 = \binom{1}{0}$, $\vec{v} = \binom{-3}{0} : \vec{v}_0 = \binom{-1}{0}$, $\vec{v} = \binom{4}{3} : \vec{v}_0 = \binom{0.8}{0.6}$, $\vec{v} : \vec{v}_0 = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$.

a) $\cos(\alpha) = \dfrac{\overrightarrow{XP} \circ \overrightarrow{XL}}{|\overrightarrow{XP}| \cdot |\overrightarrow{XL}|}$.

b) $|\overrightarrow{XP}| = \frac{d}{\cos(\alpha)}$ (falls $\alpha < 90°$) und $d \cdot \vec{n}_0 = \overrightarrow{XL}$. Eingesetzt ergibt sich:

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{XP} \circ (d \cdot \vec{n}_0)}{\frac{d}{\cos(\alpha)} \cdot |d \cdot \vec{n}_0|} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{d\overrightarrow{XP} \circ \vec{n}_0}{d} \quad \Leftrightarrow \quad d = \overrightarrow{XP} \circ \vec{n}_0$$

b) Weil $\overrightarrow{XL}$ l.a. von (es gilt auch parallel zu) $\vec{n}_0$ ist ebenfalls $\alpha = \sphericalangle\,(\overrightarrow{X\underline{P}}, \overrightarrow{X\underline{L}})$.

c) Berechnen Sie im Dreieck $\Delta \underline{X, P, L}$ ...

c) Diese Formel stimmt nur bedingt, denn d ist hier orientiert. Das Vorzeichen sagt etwas über die Lage des Punktes X bezogen die Ebene und $\vec{n}_0$ aus: $d > 0$ falls X in Richtung von $\vec{n}_0$ liegt.

$$\text{Es gilt also} \quad d_{\text{orient}} = \overrightarrow{XP} \circ \vec{n}_0 \quad \text{oder} \quad d_{\text{orient}} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 - e}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \qquad \text{(auswendig).}$$

Aufg. 272/753: a) Alle Punkte P_j liegen auf der Geraden $l_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + j \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
$l \perp E_a$ und $l_a \cap E_a = L(1|1|1)$. Damit ist $d_j = 3 \cdot j$. $\text{HNF}_a : \frac{2x_1 - 2x_2 + x_3 - 1}{3} = d$,
$L_1(1;1;1), d_1 = 3; d_2 = 5, d_3 = 9, d_3 = 12$. Weil alle Punkte auf einer Geraden orthogonal zur Ebene liegen, sind alle Lotfußpunkte gleich. Die Abstände können mit Hilfe einer Zeit Ort Gleichung (Formel 68) $l_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{j}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $3 = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right|$.

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ verläuft parallel zu E_b. Die Gerade $g_b : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + j \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ enthält alle Punkte P_j. $\text{HNF}_b : \frac{3x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 1}{7} = d$,
$L_1(-1;1;0), d_j = 7; L_2(1;1;1), L_3(3;1;2), L_3(5;1;3)$ oder $\overrightarrow{OL_j} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + j \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Weil alle Punkte auf einer Geraden liegen, die parallel zur Ebene ist, sind die Abstände aller Punkte gleich. Die Lotfußpunkte verlaufen auf einer Geraden innerhalb der Ebene.

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \vec{n}$ oder $\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ verläuft parallel zu E_c, $\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} = \vec{b}$.
Die Gerade $g_c : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + (j-2) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$ enthält alle Punkte P_j.
$\text{HNF}_c : \frac{8x_1 - x_2 - 4x_3 - 3}{9} = d, d_1 = \left|\frac{8\cdot(-6) - 2 - 4\cdot 7 - 3}{9}\right| = |-9| = 9$.
$d_1 = 9$, $d_2 = 0$ ($P_2 \in E_c$), $d_3 = 9$, $d_4 = 18$; $\overrightarrow{OL_j} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + (j-2) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Betrachten wir die Orthogonalprojektion des Vektors $\vec{b}$ auf $\vec{n}$. Es gilt $\vec{b}_{||} = \vec{n}$ und $\vec{b}_\perp = \vec{a}$. Tatsächlich hängt der Abstand von $\vec{b}_{||}$ ab, nein er ist sogar $|\vec{b}_{||}|$. Sei $L_0 = g_c \cap E_c$. Alle Lotfußpunkte liegen auf einer Gerade (in der Ebene) mit Richtungsvektor $\vec{b}_\perp$, mehr: Es gilt $\overrightarrow{OL_j} = \overrightarrow{OL_0} + \vec{b}_\perp$.

d) $l : \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbb{R})$

$l \cap E_c : 8(9 + 8t) - (-t) - 4(-3 - 4t) = 3 \Leftrightarrow 72 + 64t + t + 12 + 16t = 3 \Leftrightarrow 81t = -81 \overset{:81}{\Longleftrightarrow} t = -1$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; d = \left|\begin{pmatrix} 9-1 \\ 0-1 \\ -3-1 \end{pmatrix}\right| = 9.$

Die anderen Lotfußpunkte stehen bei den entsprechenden Aufgaben.

e) i) E_{a_1} und E_{a_2} sind echt parallel falls $a_1 \neq a_2$ ist und $E_{a_1} \equiv E_{a_2}$ falls $a_1 = a_2$.

Für alle E_a ist der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

ii) $|\vec{n}| = |\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3$ HNF von E_a: $\frac{2x_1+x_2-2x_3-a}{3} = d$. Ein beliebiger Punkt von E_1 ist $P(0|1|0)$ in die HNF mit Betrag: $\left|\frac{2\cdot0+1-2\cdot0-a}{3}\right| = d = 3 \overset{\cdot 3}{\Leftrightarrow} |1-a| = d = 9$

$\Leftrightarrow (1-a) = 9$ oder $-(1-a) = 9 \Leftrightarrow a_1 = -8; a_2 = 10$. Probe: $|1-(-8)| = 9$, $|1-10| = 9$ $\surd$.

f) Der Normalenvektor von g_a $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3.5 \end{pmatrix}$ muss orthogonal zum Richtungsvektor $\vec{r_a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ 2/a \end{pmatrix}$ sein:

$\vec{n} \circ \vec{r_a} = 3.5 \cdot 2/a \neq 0$ für alle a. $g_a \cap F$ $x_3 = 3.5 + t \cdot \frac{2}{a} \overset{!}{=} 3.5 \overset{-3.5}{\Longleftrightarrow} t \cdot \frac{2}{a} = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Für einen Normalenvektor $\vec{n}_W = \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ muss gelten $\vec{n}_W \circ \vec{r_a} = 0$ (für alle $a > 0$)

$\begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ 2/a \end{pmatrix} = -10ac + \frac{2d}{a} = 0$, falls c und d beide 0 sind und b beliebig $\neq 0$ ist. Damit liegen alle g_a in der Ebene $W: x_1 = 2.5$: Setzt man die Komponenten $x_1 = 2.5$, $x_2 = -10at$ und $x_3 = 3.5 + t \cdot 2/a$ in W ein, so erhält man die wahre Aussage 2.5=2.5.

$T \cap U$: $'T - U'$: $10x_1 = 25 \Leftrightarrow x_1 = 2.5$ in die Gleichungen: in U:

$12.5 + 4x_2 + 5x_3 = 30 \overset{-12.5}{\Longleftrightarrow} 4x_2 + 5x_3 = 17.5$; sei $x_2 = t$: $4t + 5x_3 = 17.5 \overset{-4t,\ :5}{\Longleftrightarrow} x_3 = 3.5 - 0.8t$;

damit ist $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 0 \\ 3.5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0.8 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbb{R})$;

$c \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ 2/a \end{pmatrix}$ ergibt: $c = -10a$ und $-0.8c = 2/a$ eingesetzt: $(-0.8) \cdot (-10a) = 2/a \overset{\cdot a}{\Leftrightarrow} 8a^2 = 2$ $\overset{:8}{\Leftrightarrow} a^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = \pm\frac{1}{2}$ also $a = 0.5$ (und $c = -5$), weil $a > 0$ ist. Damit ist $h = g_{0.5}$.

g) **i)** Berechnung der Schnittgeraden s zweier beliebiger Ebenen hier $E_4 \cap E_2$:

E_4: $4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$ E_2: $2x_1 + x_3 = 4$

Sei $x_1 = t$ (mit $t \in \mathbb{R}$), eingesetzt in die zweite Gleichung (E_2): $2 \cdot t + x_3 = 4 \Leftrightarrow x_3 = 4 - 2 \cdot t$;

in (E_4): $4 \cdot t + 2x_2 + 4 - 2 \cdot t = 4 \Leftrightarrow x_2 = -t$.

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ 4-2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Damit ist $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Eine äquivalente Lösung (mit Wahl von $x_3 = t$) ist $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbb{R})$.

s in E_a: $a \cdot x_1 + (a-2) \cdot x_2 + x_3 = 4$: $a \cdot t + (a-2) \cdot (-t) + (4-2t) = 4 \Leftrightarrow 4 = 4$ $\surd$.

Damit liegt s in allen Ebenen E_a.

ii) Eine Ebene schneidet alle drei Koordinatenachsen, wenn die Ebene zu keiner Koordinatenachse parallel ist. Dies ist der Fall, wenn ein Koeffizient vor x_1, x_2 oder x_3 null ist, das Absolutglied (hier ist es 4) aber $\neq 0$ ist.

$E_a: ax_1 + (a-2)x_2 + x_3 = 4$

Fall $a = 0$: E_0 ist parallel zur x_1 -Achse. Fall $a = 2$: E_2 ist parallel zur x_2 -Achse.

Für $a \in \mathbb{R}\backslash\{0;2\}$ schneidet die E_a alle drei Koordinatenachsen.

Bei dieser speziellen Lage der Pyramide kann das Volumen einfach über die Spurpunkte gerechnet werden: Es sind $S_1(\frac{4}{a}|0|0)$, $S_2(0|\frac{4}{a-2}|0)$ und $S_3(0|0|4)$.

$V = \left|\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{a} \cdot \frac{4}{a-2} \cdot 4\right| = \left|\frac{64}{6 \cdot a \cdot (a-2)}\right|$. Das Volumen soll 6 sein: $\left|\frac{64}{6 \cdot a \cdot (a-2)}\right| = 6.$

Der Betrag wurde aufgelöst: $\frac{64}{6 \cdot a \cdot (a-2)} = \pm 6 \Leftrightarrow 64 = \pm 36 \cdot a \cdot (a-2)$.

Die Gleichung $64 = 36 \cdot a \cdot (a-2)$ hat die Lösungen $a_1 = \frac{8}{3}$ und $a_2 = -\frac{2}{3}$ (Probe: stimmt).

Die Gleichung $64 = -36 \cdot a \cdot (a-2)$ hat keine Lösung.

iii) Die Abstandsform (HNF) von E_a ist $\left|\frac{ax_1 + (a-2)x_2 + x_3 - 4}{\sqrt{a^2 + (a-2)^2 + 1^2}}\right| = d.$

$P(0|0|1)$ in die Abstandsform eingesetzt ergibt:

$\left|\frac{-3}{\sqrt{a^2 + (a-2)^2 + 1^2}}\right| = d(a)$ (also der Abstand abhängig von a).

$\frac{-3}{\sqrt{a^2 + (a-2)^2 + 1^2}} < 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$, damit ist

$d(a) = \frac{+3}{\sqrt{a^2 + (a-2)^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2a^2 - 4a + 5}} = 3 \cdot (2a^2 + 4a + 5)^{-0.5}$; $d'(a) = -1.5 \cdot (4a - 4) \cdot (2a^2 - 4a + 5)^{-1.5}$

$d'(a) = 0 \Leftrightarrow 4a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 1.$ $d(1) = \frac{3}{\sqrt{1+1+1}} = \sqrt{3}.$

Der Abstand wird für a = 1 maximal. Der maximale Abstand beträgt $d(1) = \sqrt{3}$.

iv) Warum enthält die Schar keine parallelen Geraden?

Ein Normalenvektor von E_a ist $\vec{n}_a = \begin{pmatrix} a \\ a-2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sei $a_1 \neq a_2$: $E_{a_1} || E_{a_2} \Leftrightarrow \vec{n}_{a_1} = k \cdot \vec{n}_{a_2}$.

Ansatz für parallele Ebenen: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 - 2 \\ 1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ a_2 - 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$

$$\begin{array}{rll} \text{(I)} & a_1 = k \cdot a_2 & \\ \text{(II)} & a_1 - 2 = k \cdot (a_2 - 2) & \text{nach (III) gilt } k = 1 \text{ in (I) eingesetzt folgt } a_1 = a_2; \\ \text{(III)} & 1 = k \cdot 1 & \end{array}$$

Widerspruch zu $a_1 \neq a_2$. Damit gibt es kein Paar paralleler Ebenen in dieser Schar.

h) i) P in $E_a : x_2 - ax_3 = 8 - 6a$: $4 - 4a = 8 - 6a \overset{+6a-4}{\Longleftrightarrow} 2a = 4 \overset{:2}{\Leftrightarrow} a = 2$;

Q in $E_2 : x_2 - 2x_3 = -4$: $8 - 2 \cdot 6 = -4\surd$; R in $E_2 : 8 - 2 \cdot 6 = -4\surd$; S in $E_2 : 4 - 2 \cdot 4 = -4\surd$; (damit ist insbesondere gezeigt, dass die Punkte P, Q, R, S in einer Ebene $F = E_2$ liegen).

ii) $E_2 \cap E_0$: $x_2 - 2x_3 = -4$ und $x_2 = 8 \Rightarrow 8 - 2x_3 = -4 \Leftrightarrow x_3 = 6$, x_1 ist beliebig definiert als t. Damit kann g höchstens $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbb{R})$ sein. g in E_a: $8 - a \cdot 6 = 8 - 6a\surd$.

iii) $\vec{n}_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -a \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor von E_a. Zu berechnen ist der Winkel

zwischen $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$: $\cos(\alpha) = \left|\frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right|}\right| = \left|\frac{1}{1 \cdot \sqrt{5}}\right| \Rightarrow \alpha \approx 63.43°.$

iv) $\frac{1}{\sqrt{5}} = \left|\frac{\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\1\\a\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\1\\a\end{pmatrix}\right|}\right| = \left|\frac{1-2a}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{1+a^2}}\right| \Rightarrow \frac{\pm 1}{\sqrt{5}} = \frac{1-2a}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{1+a^2}} \xLeftrightarrow{\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{1+a^2}} \pm\sqrt{1+a^2} = 1-2a$

$\Rightarrow$ (quadriert) $1 + a^2 = (1-2a)^2 = 1 - 4a + 4a^2 \Leftrightarrow 4a + 3a^2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0,\ a_2 = -\frac{-4}{3}$. Probe $\surd$

Damit ist die zweite Ebene: $E_{-4/3} : x_2 - 4/3x_3 = 16$ oder $3x_2 - 4x_3 = 48$.

Aufg. 273/754: b) $\overrightarrow{L_1\,L_2}$ ist senkrecht auf $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$. $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ sind l.u. weil die Geraden windschief sind. $\vec{n}_0 = \frac{\vec{r}_1\times\vec{r}_2}{|\vec{r}_1\times\vec{r}_2|}$. $\vec{n}_0$ und $\overrightarrow{L_1\,L_2}$ sind linear abhängig. c) $\vec{p}_1 + t_1\vec{r}_1 + d\vec{n}_0 + t_2\vec{r}_2 = \vec{p}_2$.

d) $\vec{r}_i \perp \vec{n}_0, \vec{n}_0\circ\vec{n}_0 = |\vec{n}_0|^2 = 1;$

$$\begin{array}{llllll} \vec{p}_1 & +t_1\vec{r}_1 & +d\vec{n}_0 & +t_2\vec{r}_2 & =\vec{p}_2 & |\circ\vec{n}_0 \\ \vec{p}_1\vec{n}_0 & +t_1\vec{r}_1\vec{n}_0 & +d\vec{n}_0\vec{n}_0 & +t_2\vec{r}_2\vec{n}_0 & =\vec{p}_2\vec{n}_0 & |-\vec{p}_2\vec{n}_0 \\ (\vec{p}_1-\vec{p}_2)\vec{n}_0 & +t_1\cdot 0 & +d\cdot 1 & +t_2\cdot 0 & =\vec{0} & | \\ & & d=(\vec{p}_2-\vec{p}_1)\circ\vec{n}_0 & & & \end{array}$$

Die ist die HNF der Ebene $\vec{x} = \vec{p}_1 + s\vec{r}_1 + t\vec{r}_2\ (s,t\in\mathbb{R})$. $d = |(\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_2})\cdot\vec{n}_0|$.

e) Das Fünfseit beginnt normalerweise beim Ursprung O. Damit sind die (i.a. nicht in einer Ebene liegenden) Punkte O, P_1, P_2, L_1, L_2 beteiligt.

f) Formel F 97 entspricht eigentlich der Hessenormalform einer Ebene. $E : \vec{x} = \vec{p}_1 + s\cdot\vec{r}_1 + t\cdot\vec{r}_2$.

Aufg. 273/755: a) $\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-5\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\10\\-10\end{pmatrix},\quad \vec{n}_0 = \frac{1}{15}\begin{pmatrix}5\\10\\-10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3\\2/3\\-2/3\end{pmatrix}$.

$d = |(\vec{p}_2 - \vec{p}_1)\circ\vec{n}_0| = \left|\left(\begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\8\\3\end{pmatrix}\right)\circ\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\-2/3\end{pmatrix}\right| = |\frac{5}{3} + \frac{-14}{3} + 0| = 3.$

b) L_1 und L_2 berechnen wir mit dem Ansatz $\overrightarrow{L_1\,L_2}$ ist l.a. von $\vec{n}$. Dazu interpretieren wir L_1 und L_2 als Wanderpunkte W_1 und W_2: $\vec{w}_1(r) = \begin{pmatrix}5+2r\\1\\3+r\end{pmatrix}$ und $\vec{w}_2(t) = \begin{pmatrix}2t\\8-5t\\3-4t\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{L_1\,L_2} = \vec{w}_2(t) - \vec{w}_1(r) = \begin{pmatrix}2t-5-2r\\7-5t\\-4t-r\end{pmatrix}$. Also ist $\begin{pmatrix}-2r+2t-5\\0r-5t+7\\-r-4t+0\end{pmatrix} = z\begin{pmatrix}5\\10\\-10\end{pmatrix}$ oder

$$\begin{pmatrix}-2 & 2 & -5 & 5\\ 0 & -5 & -10 & -7\\ -1 & -4 & +10 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0.2\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad r=-2;\ t=1;\ z=0.2.$$

Damit ist $\vec{l}_1 = \vec{w}_1(-2) \Rightarrow L_1(1;1;1)$ und $\vec{l}_2 = \vec{w}_2(1) \Rightarrow L_2(2;3;-1)$ und

$$\overrightarrow{L_1\,L_2} = 0.2\begin{pmatrix}5\\10\\-10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix},\quad d = |\overrightarrow{L_1\,L_2}| = 3.$$

Bemerkung: rref ist der alte GTR Befehl um LGS zu lösen. In Zeiten des WTR müssen die das LGS notgedrungen von Hand lösen.

c_1) $t_1 = 0$, $L_1(2;1;0)$, $t_2 = 1$, $L_2(3;5;8)$, $d = 9$.
c_2) $t_1 = -1$, $L_1(0;20;9)$, $t_2 = 3$, $L_2(2;23;3)$, $d = -7$.

$$\text{zu } c_2)\ \begin{array}{rrrrcr} 3 & 3t & -\frac{2}{7} & +3s & = & 11\\ 0 & -20t & -\frac{3}{7} & +0s & = & 23\\ 0 & -9t & +\frac{6}{7} & +1s & = & 6 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrrcr} 3t & -\frac{2}{7} & +3s & = & 8\\ -20t & -\frac{3}{7} & +0s & = & 23\\ -9t & +\frac{6}{7} & +1s & = & 6 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} t=-7\\ d=-7\\ s=3 \end{array}$$

Aufg. 273/756:

a+b) $S_1 : \vec{x} = \binom{0}{10} + t\binom{20}{10}, (t\in\mathbb{R})$ $\quad S_2 : \vec{x} = \binom{-20}{100} + t\binom{20}{-40}, (t\in\mathbb{R})$

$v_1 = \sqrt{500}\ \frac{km}{h} \approx 22.36\frac{km}{h}$, $v_2 = \sqrt{2000}\ \frac{km}{h} \approx 44.72\frac{km}{h}$. Für $t_1 = 1$ und $t_2 = 2$ gilt $SP(20;20)$.
S_1 und S_2 werden als Wanderpunkt betrachtet. Der Zeitpunkt, wann sich S_1 und S_2 am nächsten kommen kann als Minimum der Funktion $d(t) = \left|\binom{0}{10} + t\binom{20}{10} - \left(\binom{-20}{100} + t\binom{20}{-40}\right)\right|$ berechnet werden.
$d(t) = \left|\binom{20}{-90} + t\binom{0}{50}\right| = \sqrt{20^2 + (50t-90)^2}$.
Weil $\sqrt{x}$ streng monoton ist, genügt es das Minimum von $20^2 + (50t-90)^2$ zu berechnen.
$(20^2 + (50t-90)^2)' = 2 \cdot 50 \cdot (50t-90) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{9}{5} = 1.8$. Nach 1.8 Stunden (also um 13.48 Uhr) kommen sich S_1 und S_2 am nächsten. S_1 befindet sich in $A_1(36;28)$, S_2 in $A_2(18;28)$, $d = 18$. Die Gleichheit des $y-$ Wertes von A_1 und A_2 ist Zufall (aber gut für RP-Aufgaben).

c+d) Es gilt $v = s/t$ (bei konstanter Geschwindigkeit). Da $\left|\binom{3}{4}\right| = 5$ und $v = 25$km/h legt S_1 pro Stunde $\frac{25}{5} = 5$ Vektoren $\vec{r}_1$ zurück. Die allgemeine Bewegungsgleichung lautet:

$$\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \frac{v}{|\vec{r}|} \cdot \vec{r} \text{ (auswendig). Damit ist } S_1 : \vec{x} = \binom{-3}{1} + t \cdot \frac{25}{5} \cdot \binom{3}{4} \quad S_2 : \vec{x} = \binom{2}{2} + t \cdot \frac{20}{1} \cdot \binom{-1}{0}.$$

$d(t) = |\overrightarrow{S_1\,S_2}| = \left|\binom{2-20t}{2} - \binom{-3+15t}{1+20t}\right| = \sqrt{(5-35t)^2 + (1-20t)^2} = \sqrt{26 - 390t + 1625t^2}$. $d(t)$ hat sein Minimum für $t = \frac{390}{3250} = 0.12$ (exakt). Damit kommen die Schiffe sich nach $0.12 \cdot 60$ Minuten $=7.2$ Minuten am nächsten. Die Proxima sind: $A_1(-1.2;3.4)$ und $A_2(-0.4;2)$. $d = \sqrt{2.6} \approx 1.6$ km.

Aufg. 274/757:

$$\text{a) } B_1(t): \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \frac{6}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad B_2(t): \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \frac{6}{1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d(t) = |\overrightarrow{B_1(t)B_2(t)}| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2t \\ 4t \\ 9-4t \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-2t)^2 + (-4t)^2 + (10t-9)^2}$$
$$= \sqrt{120t^2 - 180t + 81}.$$

$d(t)$ wird bei $t = 0.75$ minimal, also nach 45 Minuten.
Die Proxima sind $A_1(1.5;3;6)$ und $A_2(0;0;4.5)$. $d_{\text{min}} = \sqrt{13.5} \approx 3.67$.

$$\text{b) } B_1(t): \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -29 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \frac{12}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B_2(t): \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \frac{6}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$d(t) = |\overrightarrow{B_1(t)B_2(t)}| = \left|\begin{pmatrix} 2t \\ 4t \\ 4t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8t \\ -29+8t \\ 8+4t \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(10t)^2 + (-4t+29)^2 + (-8)^2}$$
$$= \sqrt{116t^2 - 232t + 905}.$$

$d(t)$ wird bei $t = 1$ minimal, also nach 1 Stunde.
Die Proxima sind $A_1(-8;-21;12)$ und $A_2(2;4;4)$. $d_{\text{min}} = \sqrt{789} \approx 28.09$.

$$\text{c) } B_1(t): \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \frac{10}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B_2(t): \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \frac{9}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d(t) = |\overrightarrow{B_1(t)B_2(t)}| = \left|\begin{pmatrix} 6t \\ 6t \\ 3t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6t \\ -2+8t \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(0)^2 + (2-2t)^2 + (3t-3)^2}$$
$$= \sqrt{13t^2 - 26t + 13}.$$

$d(t)$ wird bei $t = 1$ minimal, also nach 1 Stunde.
Die Proxima sind $A_1(6;6;3)$ und $A_2(6;6;3)$. $d_{\text{min}} = 0$. Die Ballons sind zusammengestoßen.

Aufg. 274/758: a+b) $F_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(s \in \mathbb{R})$; $\quad \left|\begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{18^2 + 24^2 + 0^2} = 30;$

damit fliegt F_1 in 2 Minuten 30 km oder $15\frac{km}{min}$.

Die Bewegungsgleichung von F_1 ist $\vec{F_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \frac{15}{30} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit Formel 68.

$F_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(s \in \mathbb{R})$; $\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3$;

Die Bewegungsgleichung von F_2 ist $\vec{F_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \frac{9}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Sei h die x_3-Koordinate des Richtungsvektors der Bewegungsgleichung, dann gilt
$h > 0 \Rightarrow$ Steigflug ($F_2 : h = 1$), $h = 0 \Rightarrow$ waagrechter Flug ($F_1 : h = 0$), $h < 0 \Rightarrow$ Sinkflug.

d) $d = |\vec{F_2} - \vec{F_1}| = \left|\begin{pmatrix} 5+6t \\ 17-6t \\ 1+3t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3+9t \\ -2+12t \\ 6 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2-3t \\ 19-18t \\ -5+3t \end{pmatrix}\right|$

$= \left|\sqrt{(2-3t)^2 + (19-18t)^2 + (-5+3t)^2}\right| = \left|\sqrt{390 - 726t + 342t^2}\right|$

Zur Info $x_s = \frac{121}{114} \approx 1.0614; 0 < d(x_s) = \sqrt{\frac{179}{38}} \approx 2.17 < \sqrt{6} \approx 2.45$

$\sqrt{390 - 726t + 342t^2} = \sqrt{6} \Rightarrow 390 - 726t + 342t^2 = 6 \Leftrightarrow 342t^2 - 726t + 384 = 0 \Leftrightarrow$

$t_{1,2} = \frac{726 \pm \sqrt{726^2 - 4 \cdot 342 \cdot 384}}{2 \cdot 342} = \frac{726 \pm \sqrt{1764}}{684} = \frac{726 \pm 42}{684}$

$\Rightarrow t_1 = 1$, $t_2 = \frac{64}{57}$; Bei $t = 1$ muss F_2 den Kurs ändern.

e) $\vec{F_1}(1) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + 1 \cdot \frac{15}{30} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$ Damit ist F_2 an der Stelle $\begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ x \end{pmatrix}$;

Ansatz $\vec{F_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ x \end{pmatrix}$: $\begin{array}{ll} 5 + 6t = 12 & \Leftrightarrow t = \frac{7}{6} \\ 17 - 6t = 10 & \Leftrightarrow t = \frac{7}{6} \\ 1 + 3t = x & \Rightarrow 1 + 3 \cdot \frac{7}{6} = 4.5 = x \end{array}$

Nach 1 Min ist also F_2 an der Stelle (12/10/4.5);

$v_{2neu} = \left|\begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 4.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 3.5 \end{pmatrix}\right| = 10.5 \ (\frac{km}{min})$.

Aufg. 274/759: a) Wenn nach einem Verfahren in der Geometrie gefragt ist, sollten Sie als erstes den beschriebenen Gebilden Namen geben. Wenn Ebenen vorkommen, stellen Sie diese bitte wenn möglich in der Punkt-Normalenform $(\vec{x} - \vec{q}) \circ \vec{n} = 0$ dar. Eine Skizze kann auch hilfreich sein. Definieren Sie alle eigenen Variablen oder Objekte genau. Alle (bekannten) Größen (eigene und aus dem Aufgabentext) sollten in der Skizze erwähnt werden. Eine Gerade durch zwei (verschiedene) Punkte A und B notieren Sie optimalerweise als g_{AB}; eine Ebene durch die drei (nicht kollineare) Punkte A, B, C als E_{ABC}; Antwortsätze sollten (wenn nicht anders definiert) die Einheiten LE für Längen, FE für Flächen und VE für Volumina haben. Beachten Sie, dass vom Zweitkorrektor beim Imperativ (Operator) **'beschreiben'** oder **'begründen'** Prosatext (vollständige Sätze) und nicht 'nur' mathematische Formeln erwartet werden (Thx Mk, Hmb).

b) Die Mitte M von A und B berechnen wir als $\vec{m} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ (1 PaG). $E \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow E : (\vec{x} - \vec{m}) \circ (\vec{b} - \vec{a}) = 0$.

c) Sei $E : (\vec{x} - \vec{p}) \circ \vec{n} = 0$ und $h : \vec{x} = \vec{s} + t \cdot \vec{n}$, $(t \in \mathbb{R})$, dann ist h orthogonal zu E; $h \cap E = M$, der Mittelpunkt des Grundkreisradius und $|\overrightarrow{PM}| = r$.

d) Sei $E : (\vec{x} - \vec{p}) \circ \vec{n} = 0$ und $g : \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{r}$, $(t \in \mathbb{R})$, dann ist $\vec{r} \perp \vec{n}$; Sei $\vec{s} := \vec{r} \times \vec{n}$, dann verläuft $h : \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{s}$ in E und ist orthogonal zu g.

e) Sei $E : (\vec{x} - \vec{q}) \circ \vec{n} = 0$ und M die Mitte der Kugel, dann definieren wir $h : \vec{x} = \vec{m} + t \cdot \vec{n}$, $(t \in \mathbb{R})$, als Lotgerade durch M; $h \cap E = L$ ist der Lotfußpunkt und gleichzeitig der Berührpunkt der Kugel an E; $|\overrightarrow{ML}| = r$.

f) $\vec{b} = \vec{m}_1 + r_1 \cdot \frac{\vec{m}_2 - \vec{m}_1}{|\vec{m}_2 - \vec{m}_1|}$. $\frac{\vec{m}_2 - \vec{m}_1}{|\vec{m}_2 - \vec{m}_1|}$ hat Länge 1 und geht von M_1 aus in Richtung M_2.

g) Sei $E : (\vec{x} - \vec{p}) \circ \vec{n} = 0$.
1) Bestimme $l : \vec{x} = \vec{s} + t \cdot \vec{n}$ die Lotgerade durch S zu E.
2) Schneide l mit E: $l \cap E = M$. M ist der Mittelpunkt des Grundkreises.
3) Spiegel P an M: $\vec{q} = 2 \cdot \vec{m} - \vec{p}$.

Aufg. 275/760: Sollten Kugelgleichungen wider erwarten wieder in den Lehrplan kommen, wird der Zusatz zum Stoff.

a) (2020) $F(-5|4|2), r = 18$; Zusatz: $K : (x_1 + 13)^2 + (x_2 - 20)^2 + (x_3 - 0)^2 = 18^2$.

b) (2014) Zusatz: $K : (x_1 + 3)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 7)^2 = 7^2$. $Q(-9|0|10)$; $d(M, x_1x_2\text{Ebene}) = 7 = r$;

c) (2018) Zusatz: $K : (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 0)^2 = 6^2$. i) $P(5|1|p)$ liegt genau dann auf der Kugel, wenn der Abstand des Punktes P zum Mittelpunkt M der Kugel dem Radius entspricht. $d(M,P) = \left|\overrightarrow{MP}\right| = \left|\begin{pmatrix} 5-1 \\ 1-1 \\ p-0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4^2 + (0)^2 + p^2} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{4^2 + p^2} = 5 \Leftrightarrow p = \pm 3$; Probe $\surd$.

ii) $\vec{r_g} \perp \overrightarrow{BM}$; damit liegt g in der Ebene $(\vec{x} - \vec{b}) \circ \overrightarrow{BM} = 0$. $|\overrightarrow{BM}| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = 6$ (damit ist $B \in K$).
$\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$; damit ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine mögliche Gerade.

d) (Probeabi) Vermutlich ist da ein Fehler drin $M \notin E_m$ i) $E_1 || E_2$; Abstandsform $E_1 : \frac{3x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 12}{7} = d_{orient}$ $(0|7|0) \in E_2$ $d_{orient} = \frac{3 \cdot 0 - 6 \cdot 7 + 2 \cdot 0 - 12}{7} = -6 \Rightarrow r = 3$ $(4|0|0) \in E_1$ $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 3/7 \\ -6/7 \\ 2/7 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow M(19/7|18/7|-6/7)$. Zusatz: $K : (x_1 - 19/7)^2 + (x_2 - 18/7)^2 + (x_3 + 6/7)^2 = 3^2$.

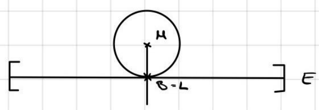
ii) $E_1 : 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = -42$; damit ist $e = 0.5(-42 + 12) = -15$. Der Ort aller Mittelpunkte ist die Mittelparallele Ebenen zwischen E_1 und E_2 $E_m : 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = -15$;

Definition Kreis: Menge aller Punkte, die zu einem gegebenen Punkt M den gleichen Abstand r haben. $|\overrightarrow{XM}| = r$ $\boxed{\begin{pmatrix} x_1 - m_1 \\ x_2 - m_2 \\ x_3 - m_3 \end{pmatrix}^2 = r^2}$ Kugelgleichung

Thx Mil Ber

a) $M(-13/20/0)$ $E: 4x_1 - 8x_2 + x_3 = -50$ $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$

$l: \vec{x} = \begin{pmatrix} -13 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$



$4(-13+4t) - 8(20-8t) + t = -50$

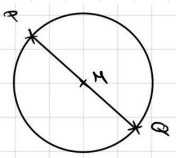
$-52 + 16t - 160 + 64t + t = -50$

$-212 + 81t = -50$ $81t = 162$ $t = 2$

Kugelgleichung: $\begin{pmatrix} x_1 + 13 \\ x_2 - 20 \\ x_3 \end{pmatrix}^2 = 324$

$l: \vec{x} = \begin{pmatrix} -13 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -16 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $L(-5/4/2)$ $|\overrightarrow{ML}| = \left|\begin{pmatrix} -13+5 \\ 20-4 \\ 0-2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -8 \\ 16 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-8)^2 + 16^2 (-2)^2} = 18$ $r = 18$ LE

b) i) $M(-3/2/7)$ $P(3/4/4)$ Q... $\overline{PQ}$ durch M



Thx Mil Ber

$g_{MP}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$g_{MQ}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ $Q(-9/0/10)$

Kugelgleichung: $\begin{pmatrix} x_1 + 3 \\ x_2 - 2 \\ x_3 - 7 \end{pmatrix}^2 = 7^2$

$|\overrightarrow{MP}| = \left|\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = 7$

ii) $x_3 = 0$ $l: \vec{x} = \overrightarrow{OM} + t\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ $B(-3|2|0)$ Abstandsform der x_1x_2-Ebene: $\left|\frac{x_3 - 0}{1}\right| = d$

c) i) $K: M(1|1|0)$ $r = 5$ $P(5|1|p) \in K$ g berührt Kugel in $B(-3|8|2)$ $|\overrightarrow{PM}| = r$

$\left|\begin{pmatrix}5-1\\1-1\\p-0\end{pmatrix}\right| = 5 \iff \sqrt{4^2 + p^2} = \sqrt{25} \quad |\,^2$

$16 + p^2 = 25 \quad |-16$

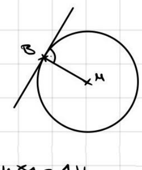
$p^2 = 9 \qquad p = \pm 3$

Thx Mil Ber

ii) $B(-3|8|2)$

$\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix}-3\\8\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\7\\2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-4\\7\\2\end{pmatrix} \cdot \vec{r} = 0 \qquad \begin{pmatrix}-7\\-4\\0\end{pmatrix}$

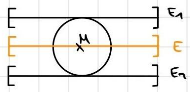


Kugelgleichung: $\left|\begin{pmatrix}x_1 - 1\\x_2 - 1\\x_3 - 0\end{pmatrix}\right| = 5$

d) $E_1: 6x_1 - 12x_2 + 4x_3 = -84$ $E_2: 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 12$ $S_2(0|7|0)$

$E_1 \parallel E_2$

$n = \begin{pmatrix}6\\-12\\4\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}3\\-6\\2\end{pmatrix}$



i) $d(E_1, E_2)$ $r = \frac{d(E_1, E_2)}{2}$

$d_{orient} = \frac{3x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 12}{\sqrt{3^2 + (-6)^2 + 2^2}}$

$d(S_2, E_1) = \left|\frac{3 \cdot 0 - 6 \cdot 7 + 2 \cdot 0 - 12}{7}\right| = \left|-\frac{54}{7}\right| = \frac{54}{7}$ $r = \frac{27}{7}$

$E \parallel E_1, E_2$ in der Mitte

$3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = -42$

$\frac{-42 + 12}{2} = -15$

$3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 12$

$M(-5|0|0)$

$3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = -15$

$\left(\vec{x} - \begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}\right)^2 = \left(\frac{27}{7}\right)^2$

Thx Mil Ber

e) $A(10|2|0)$ $\underline{B}(10|8|0)$ $\underline{C}(10|4|3)$ $R(2|2|0)$ $\underline{S}(2|8|0)$ $\underline{T}(2|4|3)$ **Thx Mil Ber**

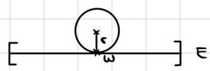
i) $\vec{x} = \begin{pmatrix}10\\8\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2-10\\8-8\\0-0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2-10\\4-8\\3-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\8\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-8\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-8\\-4\\3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-8\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-8\\-4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \cdot 3 - 0 \cdot (-4)\\0 \cdot (-8) - (-8) \cdot 3\\-8 \cdot (-4) - 0 \cdot (-8)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\24\\32\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix} \Rightarrow E: 3x_2 + 4x_3 = 24$

C in E:
$3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 24$

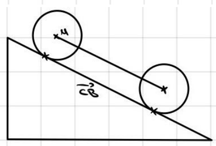
ii) $M(5|6{,}5|3)$

$r = d(M, E) = \frac{3 \cdot 6{,}5 + 4 \cdot 3 - 24}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1{,}5$



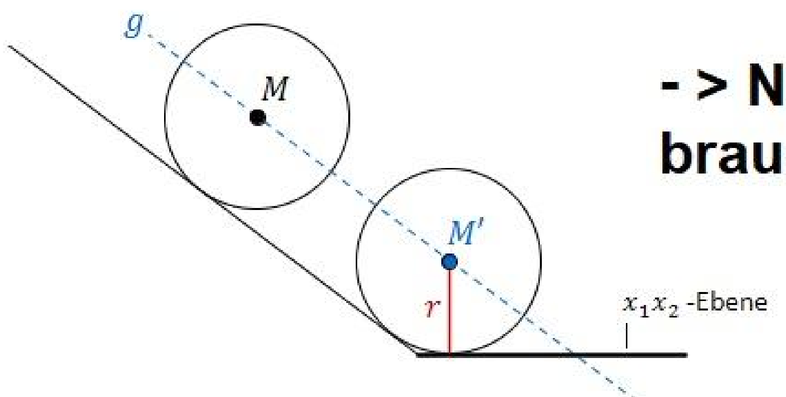
$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\6{,}5\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}$ $3 \cdot (6{,}5 + 3s) + 4(3 + 4s) = 24 \iff s = -0{,}3$ $\begin{pmatrix}5\\6{,}5\\3\end{pmatrix} - 0{,}3\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\5{,}6\\1{,}8\end{pmatrix}$ $W(5|5{,}6|1{,}8)$

iii) $g_{\overrightarrow{CB}}: \vec{x} = \begin{pmatrix}10\\4\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix}10-10\\8-4\\0-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}$ $g_m: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\6{,}5\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}$



iv) x_1x_2-Ebene $\rightarrow x_3 = 0$ $\overset{\text{wegen } r = 1{,}5}{x_3 = 1{,}5}$ $3 - 3t = 1{,}5 \iff t = 0{,}5$ $g_m: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\6{,}5\\3\end{pmatrix} + 0{,}5\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\8{,}5\\1{,}5\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix}5-5\\8{,}5-6{,}5\\1{,}5-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\-1{,}5\end{pmatrix}$ $|\overrightarrow{MP}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-1{,}5)^2} = 2{,}5$ LE



- > Nicole: Die Zch brauche ich auch

Abb. 478 LöVo zur Ag 275/760; BY Abitur 2012

e) (2012) s$E_{BSTC}: 3x_2+4x_3-24=0$; $W(5|5.6|1.8)$, $r=1.5$, $M'(5|8.5|1.5)$, $g: \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\6.5\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}$;

$|\overrightarrow{MM'}|=2.5$, Zusatz: $K: (x_1+3)^2+(x_2-2)^2+(x_3-7)^2=7^2$.

Aufg. 275/761: $\vec{n}=\overrightarrow{CD}\times\overrightarrow{CF}=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}7\\-5\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-6\\-3\end{pmatrix}\Rightarrow$

E: $-6\cdot x_1-6\cdot x_2-3\cdot x_3=(-6)\cdot(-6)+(-6)\cdot 4+(-3)\cdot(-3)\cdot 7=-9\Leftrightarrow 2\cdot x_1+2\cdot x_2+x_3=3$;

HNF: $\left|\frac{2x_1+2x_2+x_3-3}{3}\right|=d$ (orientierter Abstand in Richtung $(2;2;1)^T$;

b) $d(A,E)=\left|\frac{2\cdot 6+2\cdot 7+4-3}{3}\right|=9$;

c) Lotgerade l: $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$, $(t\in\mathbb{R})$, $l\cap E: 2\cdot(2t+2)+2\cdot(2t+3)+(t+2)=3\Leftrightarrow$ $4t+4+4t+6+t+2=3\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow L(0;1;1)$ (war in der Ag aus technischen Gründen ang.).

3. PaG: $\vec{b'}=2\cdot\vec{l}-\vec{b}=2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}$;

d) $d_o(A,E)=9$, $d_o(B,E)=\frac{2\cdot 2+2\cdot 3+2-3}{3}=3$; A und B liegen auf der gleichen Seite von E.

e) $g: \vec{x}=\begin{pmatrix}6\\7\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-4\\-4\\-2\end{pmatrix}$, $(t\in\mathbb{R})$, Lotebene H durch C: $-4x_1-4x_1-2x_1=-6\Leftrightarrow 2x_1+2x_2+x_3=3$,

$H\cap g$: $2(6-4t)+2(7-4t)+(4-2t)=3\Leftrightarrow 12-8t+14-8t+4-2t=3\Leftrightarrow -18t=-27\Leftrightarrow t=1.5\Rightarrow$ $S=L(0;1;1)$, $d(g;C)=|\overrightarrow{SC}|=\sqrt{(-6-0)^2+(4-1)^2+(7-1)^2}=9$,

HNF von g: $\left|\frac{(\vec{x}-\vec{p})\times\vec{r}}{|\vec{r}|}\right|\Leftrightarrow\left|\frac{\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}6\\7\\4\end{pmatrix}\right)\times\begin{pmatrix}-4\\-4\\-2\end{pmatrix}}{6}\right|=d$.

f) $\vec{c'}=2\cdot\vec{l}-\vec{c}$: $\vec{c'}=2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-6\\4\\7\end{pmatrix}\Rightarrow C'(6;-2;-5)$; $D'(4;-1;-3)$;

g) Gerade $g_3=\overline{AK}: \vec{x}=\begin{pmatrix}6\\7\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$, $(t\in\mathbb{R})$, Gerade $g_2=\overline{CD}: \vec{x}=\begin{pmatrix}-6\\4\\7\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$,

g_2 echt $||g_3$. Ebene H_1 durch A orthogonal zu $\overrightarrow{CD}$: $2x_1-x_2-2x_3=-3$,

$H_1\cap g_2$: $2(-6+2t)-(4-t)-2(7-2t)=-3\Leftrightarrow t=3\Rightarrow T=L(0;1;1)\Rightarrow d=9$.

h) Gerade $g_1=\overline{AG}: \vec{x}=\begin{pmatrix}6\\7\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$, Gerade $g_2=\overline{CD}: \vec{x}=\begin{pmatrix}-6\\4\\7\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-6\\-3\end{pmatrix}$, $(\vec{p_2}-\vec{p_1})\circ(\vec{r_2}\times\vec{r_1})=\begin{pmatrix}-12\\-3\\3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-6\\-6\\-3\end{pmatrix}=81$, $\left|\begin{pmatrix}-6\\-6\\-3\end{pmatrix}\right|=9$,

$d(g_1,g_2)=\left|\frac{(\vec{p_2}-\vec{p_1})\circ(\vec{r_2}\times\vec{r_1})}{|\vec{r_2}\times\vec{r_1}|}\right|=\frac{81}{9}=9$.

Proxima: Lösen Sie das LGS des vollständigen Fünfseits: $\vec{p_1}+t\vec{r_1}+d\vec{n_0}-s\vec{r_2}=\vec{p_2}$

$$\begin{pmatrix}1 & 2/3 & -2 & -12\\ -2 & 2/3 & 1 & -3\\ 2 & 1/3 & 2 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{[rref] (GTR Befehl)}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -9\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{array}{l}\text{Prox}_1=A(6;7;4),\\ \text{Prox}_2=L(0;1;1).\end{array}$$

i) $\vec{r_4}=\overrightarrow{DM}=\begin{pmatrix}8\\2\\-2\end{pmatrix}$, $|\vec{r_4}|=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$, $\vec{r_5}=\overrightarrow{DC}=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$, $|\vec{r_5}|=3$, , $\vec{r_4}\circ\vec{r_5}=-18$,

$\cos(\alpha)=\left|\frac{\vec{r_4}\circ\vec{r_5}}{|\vec{r_4}|\cdot|\vec{r_5}|}\right|=\left|\frac{-18}{6\sqrt{2}\cdot 3}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\alpha=45°$.

j) $E_1: \vec{n_1}=\overrightarrow{AG}\times\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-12\\-3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-27\\-27\end{pmatrix}$, $\vec{n_1}=27\sqrt{2}$,

$E_2 : \vec{n}_2 = \overrightarrow{AG} \times \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_2 = 9$, $\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2 = 243$,

$\cos(\alpha) = \left| \frac{\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \right| = \left| \frac{243}{27\sqrt{2} \cdot 9} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45°$.

k) $E_2 : \vec{n}_2 = \overrightarrow{AG} \times \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$, $g_2 : |\vec{n}_2| = 9$, $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $|\vec{r}_2| = 3$, $\vec{n}_2 \circ \vec{r}_2 = 27$,

$\sin(\alpha) = \left| \frac{\vec{r}_2 \circ \vec{n}_2}{|\vec{r}_2| \cdot |\vec{n}_2|} \right| = \left| \frac{27}{9 \cdot 3} \right| = 1 \Rightarrow \alpha = 90°$.

15.10.6 LöVo zu Einheit 10.6 (LGS UE 11_5)

Aufg. 276/762: a+d) (Abb. 481)

Hauptrechnung / Nebenrechnung

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{\cdot 3} \\ \xrightarrow{\cdot(-2)} \end{matrix} \begin{pmatrix} 6 & -12 & 18 \\ -6 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & -14 & 14 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & -14 & 14 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{\cdot \frac{1}{2}} \\ \xrightarrow{\cdot \frac{-1}{14}} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dies bedeutet $y = -1$ und $x + 2 \cdot (-1) = 3$ also $x = 1$. EZU (Elementare Zeilen Umformungen) finden Sie in Abschnitt 11.2.4. Sei $x = x_1, y = x_2$ und $z = x_3$. Die Addition der Spalte x_1 zur Spalte x_2 ergäbe eine Spalte mit dem Variablenwert $x_1 + x_2$ (die müsste man sich merken) – außerdem ist die letzte Spalte eine Spalte ohne Variablenbezug und müsste gesondert behandelt werden.

b) Ignorieren Sie vorerst die erste Gleichung. $L = \{(5; 1; -1)\}$;

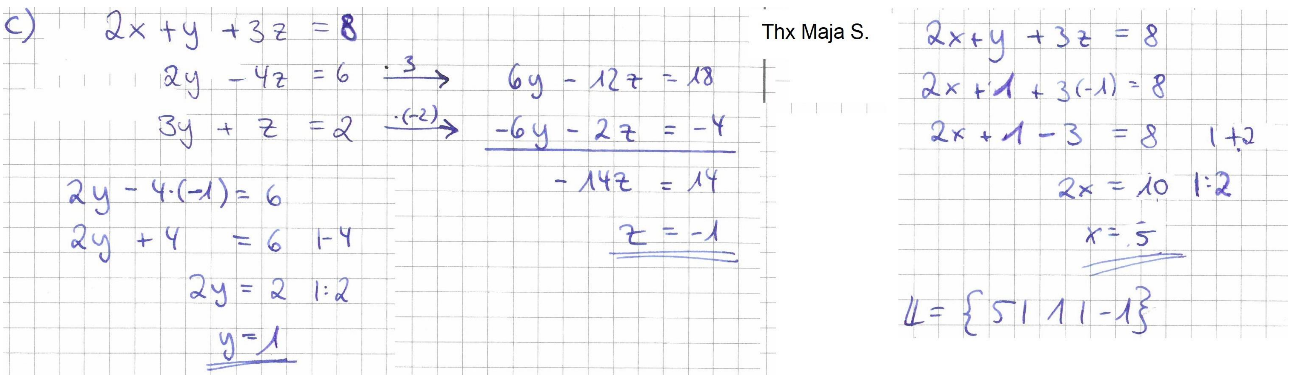
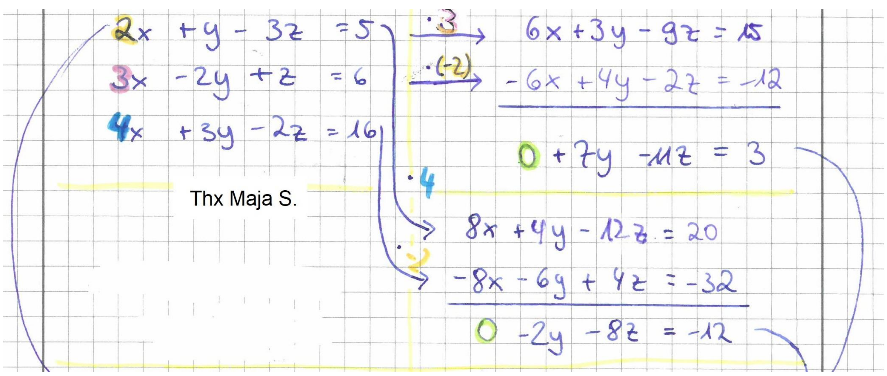


Abb. 479 LGS Rechnung von Aufgabe 276/762c (1. Teil)



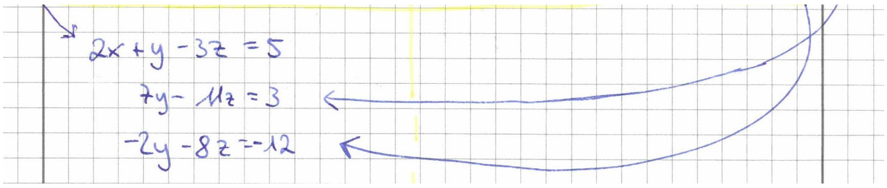


Abb. 480 LGS Rechnung von Aufgabe 276/762c (2. Teil)

c) Sie können 3x3 LGS lösen, wenn das x nur in der ersten Zeile vorkommt. Eliminieren Sie zuerst das x in der zweiten und dritten Zeile. $L = \{(3;2;1)\}$:

Algorithmus zur Lösung eines 3x3 LGS:

1) Eliminieren Sie zuerst das x in der zweiten und dritten Zeile.

2) Lösen Sie dann das entstehende 2x2 LGS durch Elimination von y in der dritten Zeile.

3) Das LGS hat jetzt Dreiecksform und die Variable z kann bestimmt werden.

4) Bestimmen Sie jetzt erst y und dann x durch Einsetzen.

c) Hauptrechnung

$$\begin{array}{rrrl} 2x & +y & -3z & =5 \\ 3x & -2y & +z & =6 \\ 4x & +3y & -2z & =16 \end{array}$$

Nebenrechnung

$$\begin{array}{lrrrl} \cdot 3: & 6x & +3y & -9z & = 15 \\ \cdot(-2): & -6x & +4y & -2z & =-12 \\ \hline & & +7y & -11z & = 3 \\ \cdot 2: & 4x & +2y & -6z & = 10 \\ \cdot(-1): & -4x & -3y & +2z & =-16 \\ \hline & & -y & -4z & =-6 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrl} 2x & +y & -3z & = 5 \\ & 7y & -11z & = 3 \\ & -y & -4z & =-6 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrrl} \cdot 1: & +7y & -11z & = 3 \\ \cdot 7: & -7y & -28z & =-42 \\ \hline & & -39z & =-39 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrl} 2x & +y & -3z & = 5 \\ & 7y & -11z & = 3 \\ & & -39z & =-39 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrlll} 2x & +2 & -3 & = 5 & \Rightarrow & x=3 \\ & 7y & -11 & = 3 & \Rightarrow & y=2 \\ & & z & = 1 & \Rightarrow & \mathrm{IL}=\{(3,2,1)\} \end{array}$$

Abb. 481 LGS Rechnung

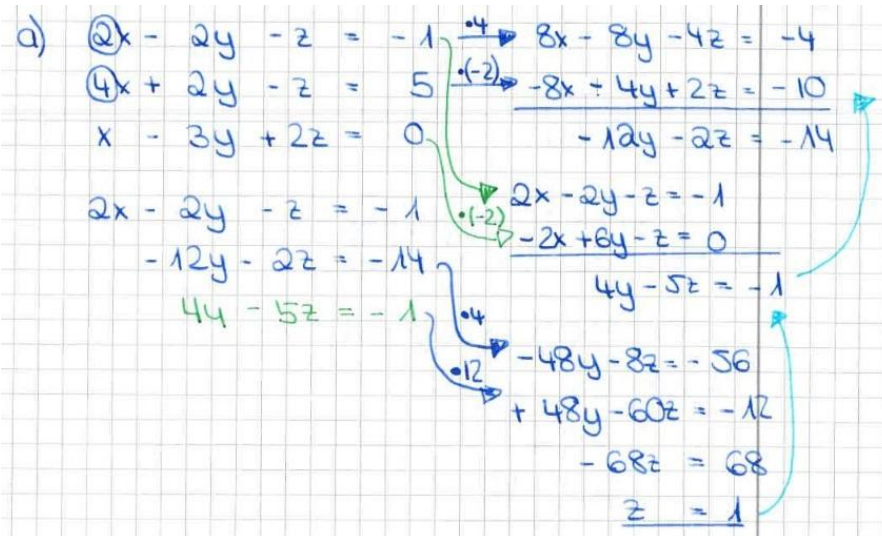


Abb. 482 LGS Rechnung 276/763a

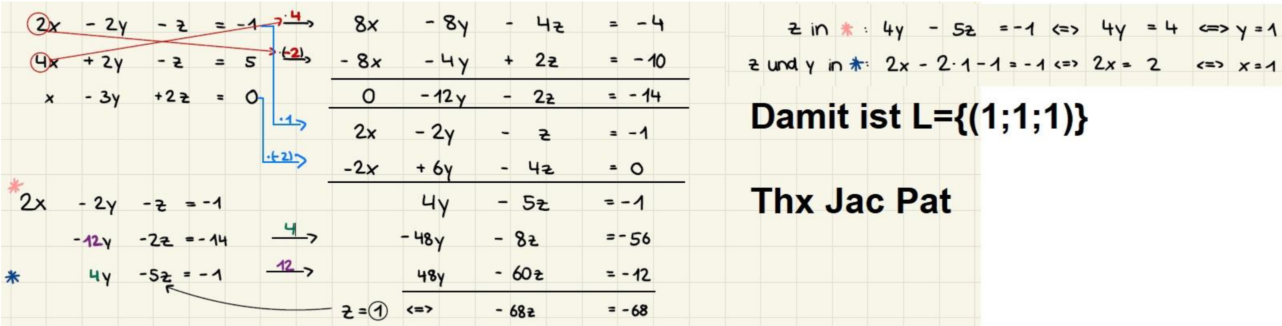
e) Eine elementare Zeilenumformung ist eine Umformung der Matrix $\underline{A\vec{b}}$, bei welcher die Lösungsmenge des zugehörigen LGS gleich bleibt.

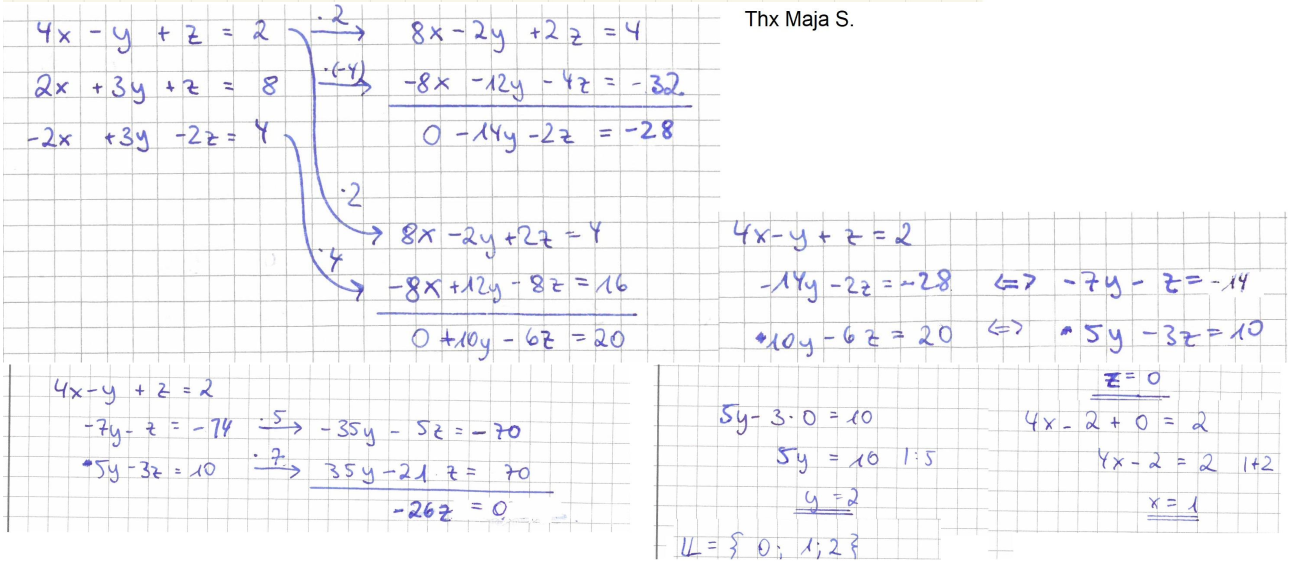
1) Multiplikation einer Zeile mit einem Faktor $a \neq 0$.

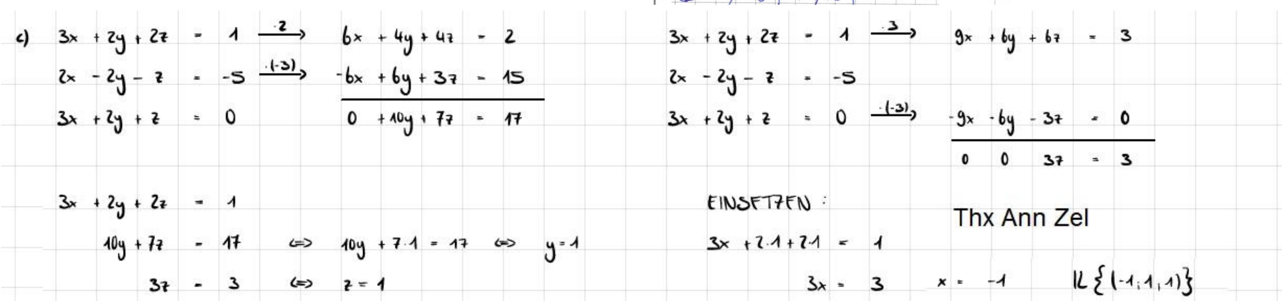
2) Addition einer Zeile zu einer mit einem beliebigen Faktor multiplizierten Zeile.

3) Vertauschen zweier Zeilen.

Aufg. 276/763: *a*) (1; 1; 1); siehe Abb. 482 *b*) (1; 2; 0);







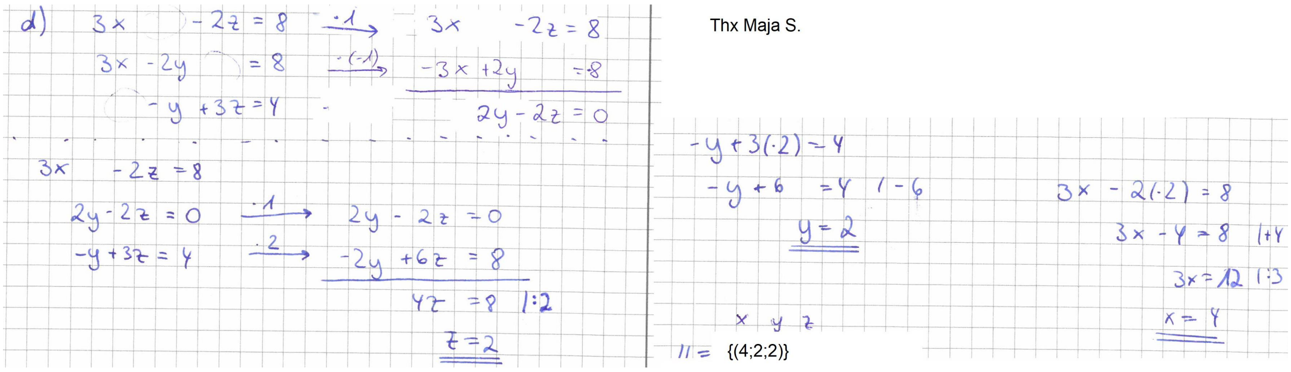


Abb. 483 LGS Rechnung von Aufgabe 276/763b,c,d

c) $(-1;1;1)$; *d*) $(4;2;2)$; siehe Abb. 483; e) (1/1/1) Rg Abb. 484,

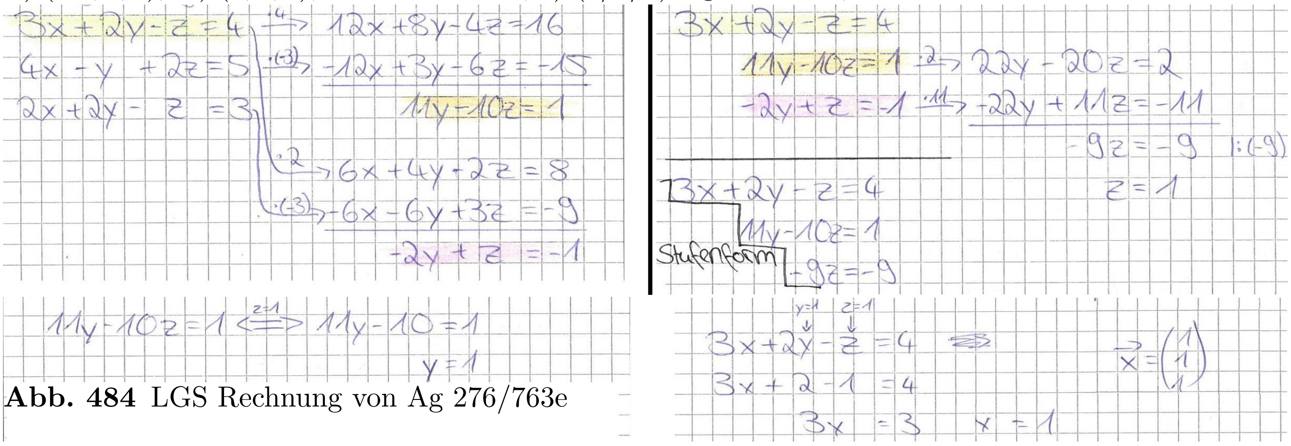


Abb. 484 LGS Rechnung von Ag 276/763e

f) $\mathbb{L} = \{(1;1;1)\}$; g) $\mathbb{L} = \{(1;0;-1)\}$; h) $\mathbb{L} = \{(-1;-1;1)\}$; i) $\mathbb{L} = \{(-2;2;1)\}$;

Aufg. 277/764: a) (1): $(1,1,1)$; (2): $(1,2,3)$;
(3): $x = t, y = 2x - 1 = 2t - 1, z = 2y - 1 = 2(2t - 1) - 1 = 4t - 3$; $\mathbb{L} = \{(t, 2t - 1, 4t - 3)|\ t \in \mathbb{R}\}$;

b) Es muss keine Addition von Zeilen mehr vorgenommen werden. Die Ergebnisse können von unten nach oben 'zurückgerechnet' werden.

Stufenform (1) $\begin{pmatrix} x & -2y & +2z & =1 \\ & 2y & +3z & =5 \\ & & 6z & =6 \end{pmatrix}$, (2) $\begin{pmatrix} 4x & -y & +3z & =11 \\ & 3y & +2z & =12 \\ & & 4z & =12 \end{pmatrix}$, (3) $\begin{pmatrix} 2x & -y & & =1 \\ & 2y & -z & =1 \\ & & 0 & =0 \end{pmatrix}$

Abb. 485 Stufenform der LGS

c) i) Ein $n \times n$ LGS (mit den Unbekannten $x_1, ..x_n$) hat *Dreiecksform* $\Leftrightarrow$ $n = m$ und wenn in der Zeile k die Variable $\underline{x_k}$ und dann höchstens noch die die Variablen $\underline{x_{k+1}, x_{k+2}, ...x_n}$ vorkommen.

ii) *Stufenform* $\Leftrightarrow$ wenn in jeder Zeile mindestens eine Variable w<u>eniger</u> vorkommt, als den Zeilen zuvor. Aus optischen Gründen sollte die Reihenfolge der Variablen sinnvoll gewählt werden.

d) Ein $m \times n$ LGS heißt *überbestimmt* $\Leftrightarrow$ $\underline{m > n}$ und *unterbestimmt* $\Leftrightarrow$ $\underline{m < n}$.

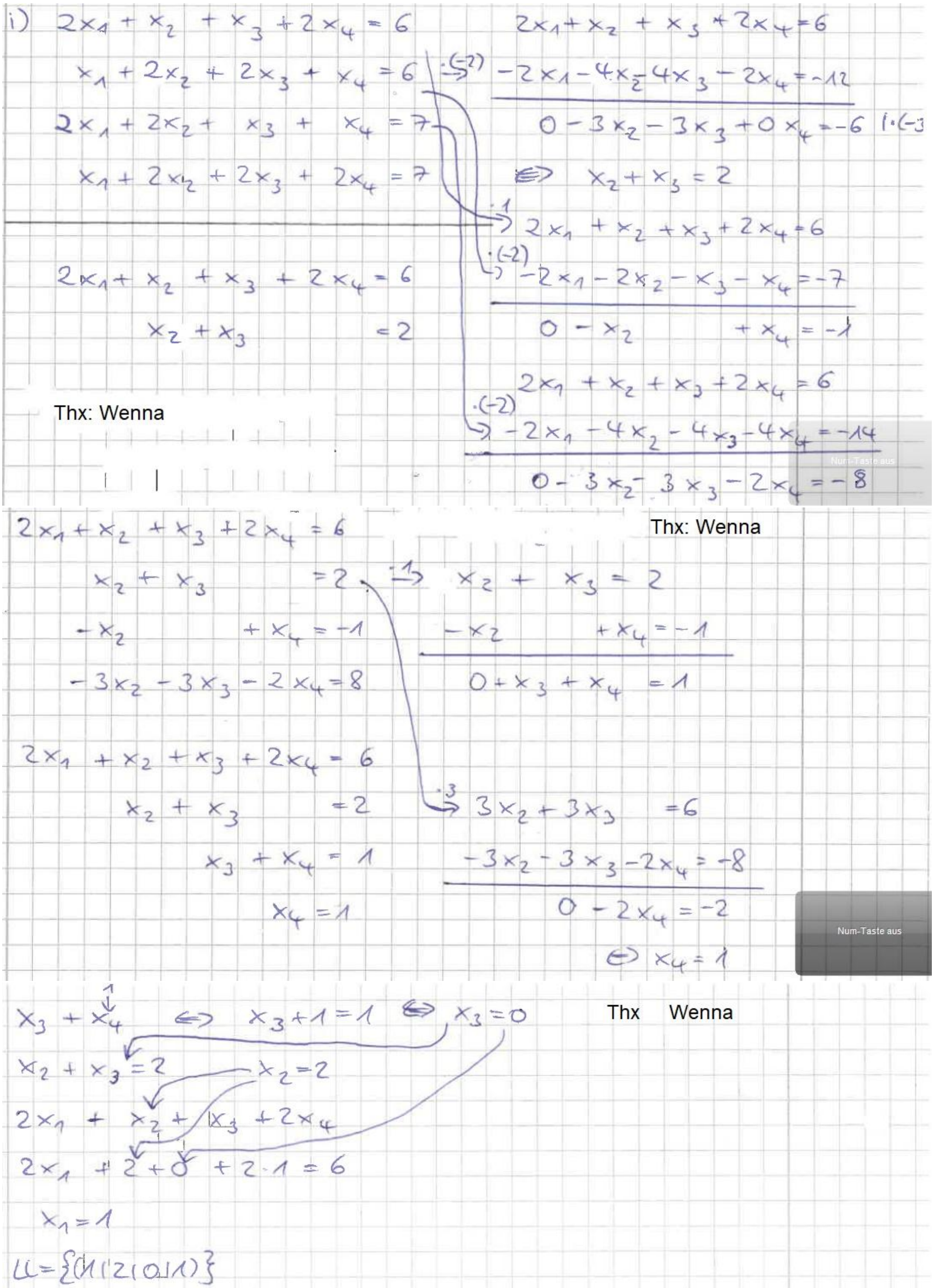


Abb. 486 Lösung des einen 4x4 LGS

e) (1) Dreiecks- und Stufenform; (2) Dreiecks- und Stufenform; (3) nur Stufenform;

276/763d weder noch; 276/763m nur Stufenform; 276/763r nur Stufenform;

e) $\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = a_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = a_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = a_4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = a_1 \\ 0\ \ x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4 = b_2 \\ 0\ \ x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 + b_{34}x_4 = b_3 \\ 0\ \ x_1 + b_{42}x_2 + b_{43}x_3 + b_{44}x_4 = b_4 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = a_1 \\ 0\ \ x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4 = b_2 \\ 0\ \ x_1 + 0\ \ x_2 + c_{33}x_3 + c_{34}x_4 = c_3 \\ 0\ \ x_1 + 0\ \ x_2 + c_{43}x_3 + c_{44}x_4 = c_4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = a_1 \\ 0\ \ x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4 = b_2 \\ 0\ \ x_1 + 0\ \ x_2 + c_{33}x_3 + c_{34}x_4 = c_3 \\ 0\ \ x_1 + 0\ \ x_2 + 0\ \ x_3 + d_{44}x_4 = d_4 \end{pmatrix}$

f) i) 1 2 0 1; ii) 2 1 1 0 siehe Abb. 810/486 und 812/487

ii)

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7 \quad \overset{\cdot 2}{\Rightarrow} \quad 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 14$

$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 8 \quad \overset{\cdot(-1)}{\Rightarrow} \quad -2x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -8$

$3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 9 \qquad 3x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 6 \quad |:3$

$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 7 \qquad \Leftrightarrow x_2 + x_3 + 2x_4 = 2$

$\overset{\cdot 3}{\Rightarrow} 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 12x_4 = 21$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7 \qquad \overset{\cdot(-1)}{\Rightarrow} -3x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 = -9$

$x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \qquad 4x_2 + 8x_3 + 10x_4 = 12 \quad |:2$

$2x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 6 \qquad \Leftrightarrow 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 6$

$-x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$

Thx Wenna

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7$

$-x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -7$

$-x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7$

$x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \quad \overset{\cdot 2}{\Rightarrow} \quad 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 4$

$2x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 6 \quad \overset{\cdot(-1)}{\Rightarrow} \quad -2x_2 - 4x_3 - 5x_4 = -6$

$-x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \qquad -2x_3 - x_4 = -2$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7 \qquad \overset{\cdot 1}{\Rightarrow} x_2 + x_3 + 2x_4 = 2$

$x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \qquad -x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$

$2x_3 + x_4 = 2 \qquad 2x_3 + 4x_4 = 2 \quad \overset{:2}{\Leftrightarrow} x_3 + 2x_4 = 1$

$x_3 + 2x_4 = 1 \qquad 2x_3 + x_4 = 2$

$-2x_3 - 4x_4 = -2$

$-3x_4 = 0 \Leftrightarrow x_4 = 0$

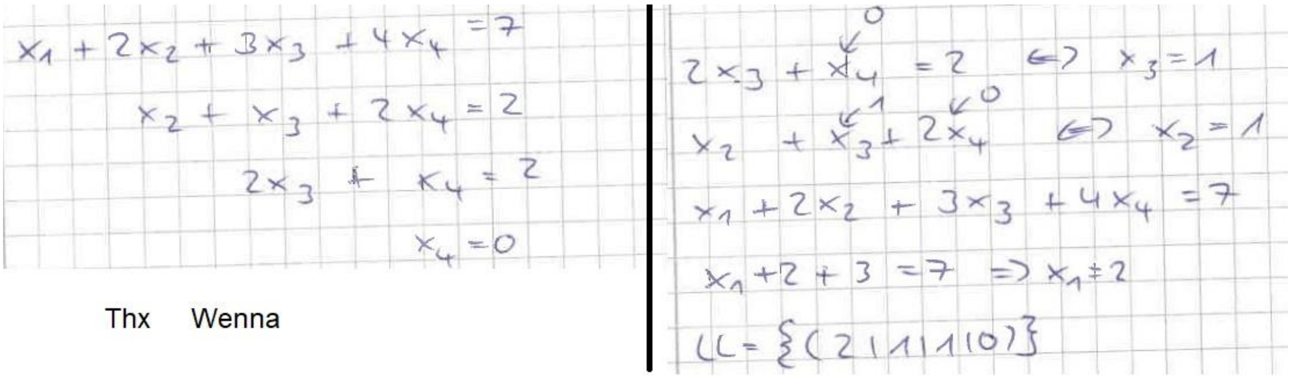


Abb. 487 Lösung des anderen 4x4 LGS

Aufg. 277/765: a) $x^2 - 3x + 4$, b) $x^3 - 3x^2 + x + 1$, c) $-x^3 + 3.5x + 3.5$, d) $x^3 - 9x^2 +^5 x - 1$, e) $x^4 - 2x^2 + 2$, f) $3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 7$.

g) Eine ganzrationale Funktion zweiten Grades hat die Form $h(x) = ax^2+bx+c$. Die gesuchte Funktion h hat die Gleichung $h(x) = x^2 + 2x - 3$.

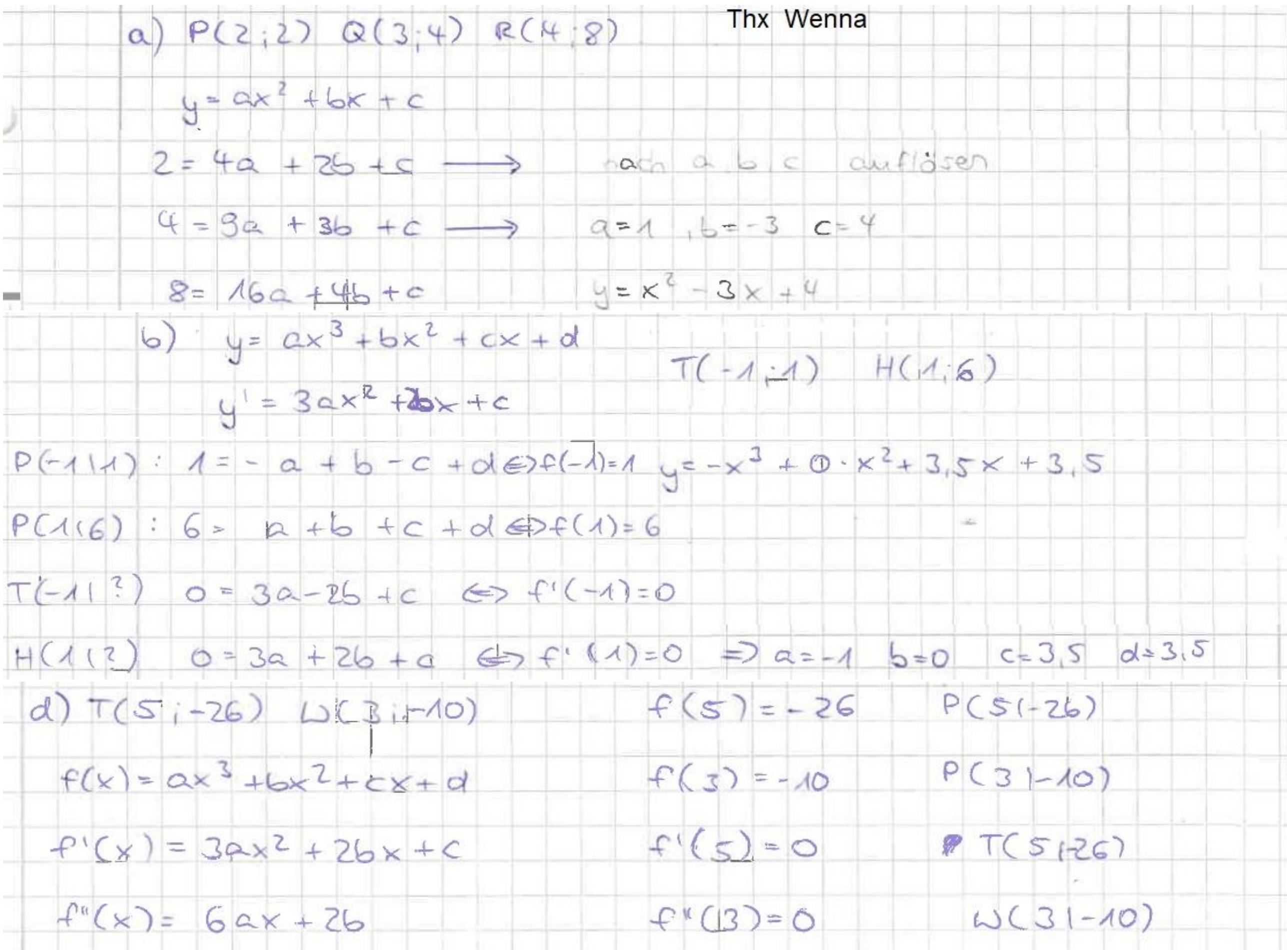


Abb. 488 Aufgabe 277/765 a,b,d

Aufg. 277/766:

a) Nach http://de.memory-alpha.wikia.com/wiki/Kobayashi-Maru-Test: Im Kobayashi-Maru-Test werden angehende Offiziere der Sternenflotte in eine ausweglose Situation gebracht, um zu sehen, wie sie sich in einer solchen Ausnahmesituation verhalten. James T. Kirk ist der einzige, der den Test erfolgreich absolviert. Allerdings nur, weil er vor seinem dritten Versuch die Simulation ändert.

b) Zahlenfolgen kommen häufig in Intelligenztests vor, und dienen dazu Ihre kognitive Kapazität festzustellen.

c) $a_n = \frac{8}{30}n^5 - \frac{14}{3}n^4 + \frac{92}{3}n^3 - \frac{280}{3}n^2 + \frac{3902}{30}n - 63$ ist die Polynominterpolation der Folge 0,3,2,5,4,7 ,...

Der Fortgang ist 0,3,2,5,4,7, 70, 329, 1032, 2571, 5514, 10637, ...

d) Polynominterpolation eines Polynoms $n-1$ ten Grades durch $(1/a_1)$, $(2/a_2)$ ... (n/a_n).

Sei $p(x) = b_{n-1} \cdot x^{n-1} + b_{n-2} \cdot x^{n-2} + .. + b_1 \cdot x + b_0$, dann gilt: Das LGS ist

$a_1 = b_{n-1} \cdot 1^{n-1} + b_{n-2} \cdot 1^{n-2} + .. + b_1 \cdot 1 + b_0;$

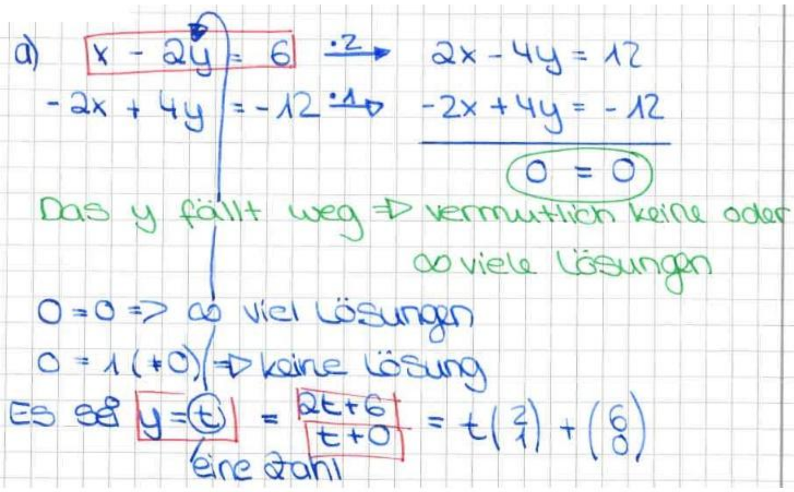
$a_k = b_{n-1} \cdot k^{n-1} + b_{n-2} \cdot k^{n-2} + .. + b_1 \cdot k + b_0;$

Die GTR Matrix hat nur Zeilen der Form $k^{n-1}\ k^{n-2}\ ..\ k\ 1 = a_k$.

Die Aufgabe ist (wie von Kirk) gelöst, aber nicht im Sinne des Aufgabenstellers.

Aufg. 278/767: a) $0,3x + 0,6y = 2,40$ oder $y = 4 - \frac{1}{2}x$ also $\mathbb{L} = \{(t; 4 - \frac{1}{2}t) \mid t = 0,2,4,6,8\}$;

b) $\mathbb{L} = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 | 2x - 4y = 6\} = \{(3+2t;t) \mid t \in \mathbb{R}\}$; *c*) Gleichung$_1 \cdot \frac{-3}{2} =$ Gleichung$_2$;
d) eine: $ad - bc \neq 0$ unendlich: $ad - bc = 0$ und $af - ce = 0$; keine: $ad - bc = 0$ und $af - ce \neq 0$.



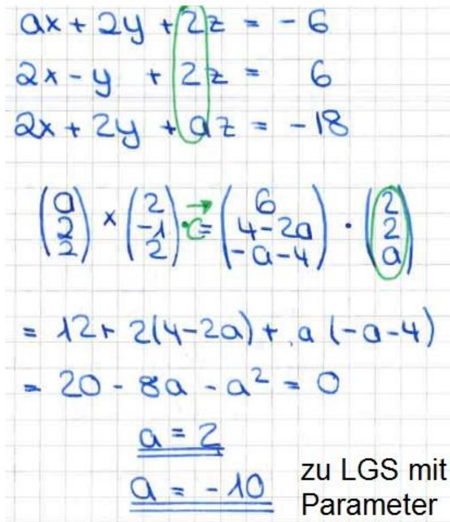


Abb. 489 Rechnungen von LGS Ag 768 a) ↑ und 774 b) →

Aufg. 278/768: a) $\mathbb{L} = \{(2t+6;t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, (Abb. 489); b) $\mathbb{L} = \{(-1.5t+3;t) \mid t \in \mathbb{R}\}$,
c) $\mathbb{L} = \{(t; 3-2t; t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, d) $\mathbb{L} = \{(2.5 - 1.5t; 0.5 + 0.5t; t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ oder
$\mathbb{L} = \{(4-3t; t; -1+2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ (Abb. 490), e) $\mathbb{L} = \{(1; t-1; t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ (Abb. 491).

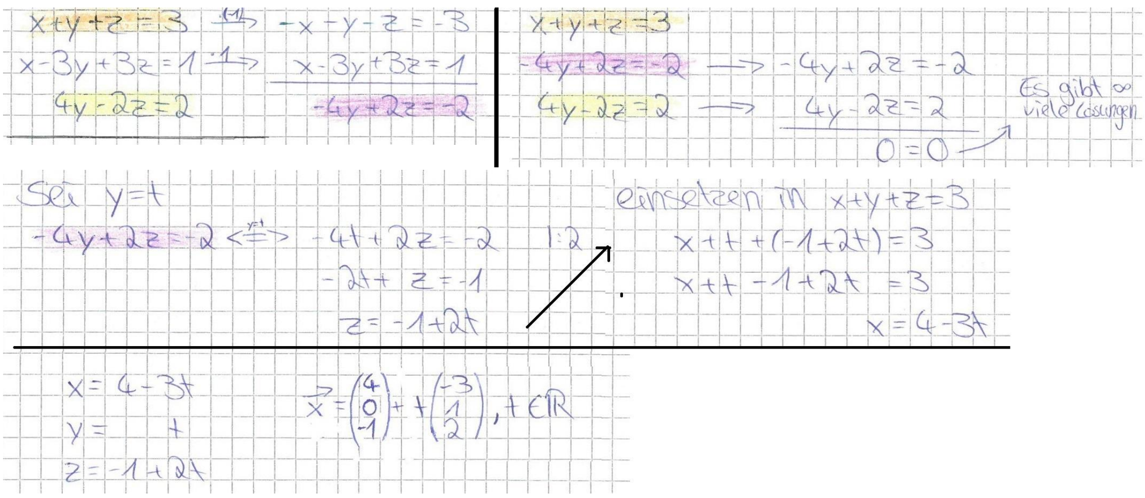
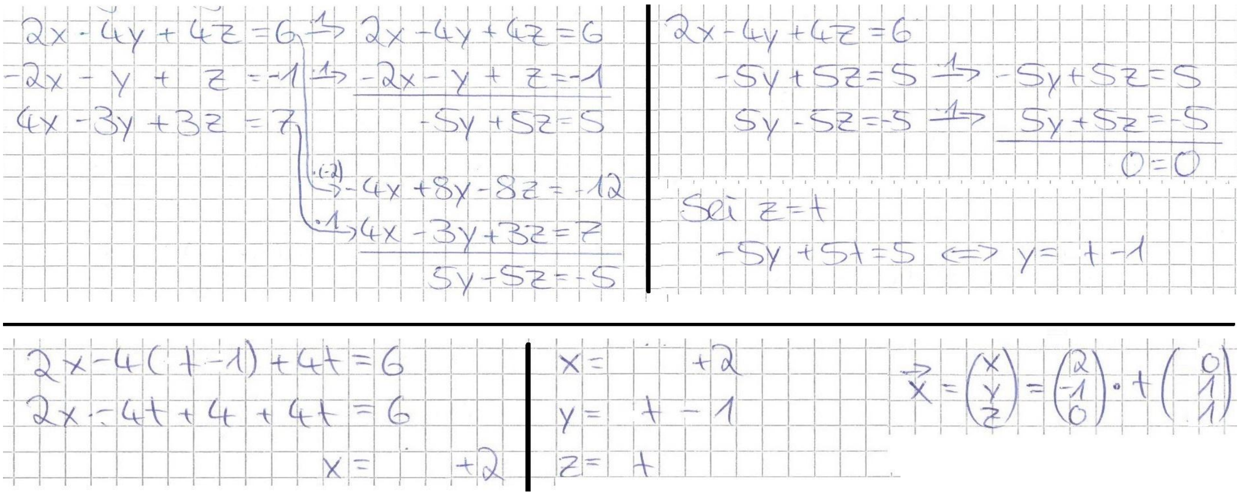


Abb. 490 Rechnung zur Aufgabe 278/768 d



$2x-4y+4z=6 \xrightarrow{1} 2x-4y+4z=6$
$-2x-y+z=-1 \xrightarrow{1} -2x-y+z=-1$
$4x-3y+3z=7$
$-5y+5z=5$
$\xrightarrow{\cdot(-2)} -4x+8y-8z=-12$
$\xrightarrow{\cdot 1} 4x-3y+3z=7$
$5y-5z=-5$

$2x-4y+4z=6$
$-5y+5z=5 \xrightarrow{1} -5y+5z=5$
$5y-5z=-5 \xrightarrow{1} 5y+5z=-5$
$0=0$
Sei $z=t$
$-5y+5t=5 \Leftrightarrow y=t-1$

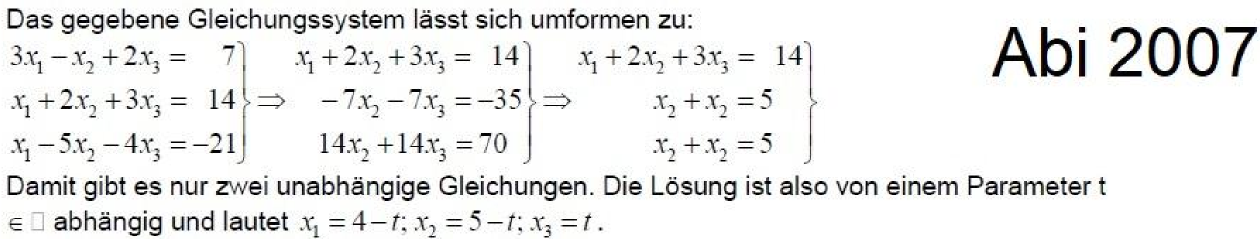
$2x-4(t-1)+4t=6$
$2x-4t+4+4t=6$
$x=+2$

$x=+2$
$y=t-1$
$z=t$

$\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

Abb. 491 Rechnung zur Aufgabe 278/768 e

f) $\mathbb{L}=\{(-2+3t;-5+5t;t)|\ t\in\mathbb{R}\}$; siehe Abb. 815/493; g) $\mathbb{L}=\{(1-6t;-3.5t;t)|\ t\in\mathbb{R}\}$;
h) $\mathbb{L}=\{(4-t;5-t;t)|\ t\in\mathbb{R}\}$; i) $\mathbb{L}=\{(1;t;0)|\ t\in\mathbb{R}\}$;



Das gegebene Gleichungssystem lässt sich umformen zu:

$$\left.\begin{array}{r}3x_1-x_2+2x_3=7\\x_1+2x_2+3x_3=14\\x_1-5x_2-4x_3=-21\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x_1+2x_2+3x_3=14\\-7x_2-7x_3=-35\\14x_2+14x_3=70\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x_1+2x_2+3x_3=14\\x_2+x_2=5\\x_2+x_2=5\end{array}\right\}$$

Abi 2007

Damit gibt es nur zwei unabhängige Gleichungen. Die Lösung ist also von einem Parameter t $\in$ □ abhängig und lautet $x_1=4-t;\ x_2=5-t;\ x_3=t$.

Abb. 492 LGS Rechnung zu Aufgabe 276/763 h)

j) $(1;1;1)$; Rg siehe Abb. 495 k) $\mathbb{L}=\{(1+2t;10t;1+12t)|\ t\in\mathbb{R}\}$; L) $\mathbb{L}=\{(3t;2t;t)|\ t\in\mathbb{R}\}$;
m) $\mathbb{L}=\{(3+3t;1+t;t)|\ t\in\mathbb{R}\}$; n) $\mathbb{L}=\{(1-t;2+7t;5t)|\ t\in\mathbb{R}\}$; o) $\{\}$;

p) $$\begin{pmatrix}4x&+2y&+z&=23\\3x&-2y&+2z&=21\\5x&+y&-3z&=16\end{pmatrix}\begin{array}{c}\xrightarrow{\cdot 3}\\\xrightarrow{\cdot(-4)}\end{array}\begin{pmatrix}12x&+6y&+3z&=69\\-12x&+8y&-8z&=-84\\\hline&14y&-5z&=-15\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4x&+2y&+z&=23\\5x&+y&-3z&=16\\(&+14y&-5z&=-15)\end{pmatrix}\begin{array}{c}\xrightarrow{\cdot 5}\\\xrightarrow{\cdot(-4)}\end{array}\begin{pmatrix}20x&+10y&+5z&=115\\-20x&-4y&+12z&=-64\\\hline&6y&+17z&=51\end{pmatrix}$$

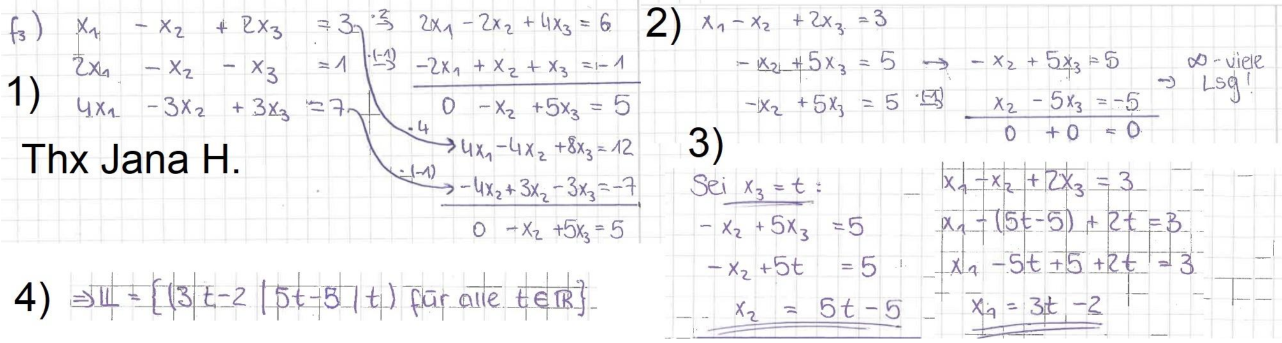
$$\begin{pmatrix}14y&-5z&=-15\\6y&+17z&=51\\&&\end{pmatrix}\begin{array}{c}\xrightarrow{\cdot 6}\\\xrightarrow{\cdot(-14)}\end{array}\begin{pmatrix}84y&-30z&=-90\\-84y&-238z&=-714\\\hline&-268z&=-804\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{array}{r}z=3,\\84y-30\cdot 3=-90\\\Rightarrow\quad y=0,\end{array}$$

$4x+2y+z=23 \Leftrightarrow 4x+2\cdot 0+3=23 \Leftrightarrow 4x=20 \Leftrightarrow x=5 \Rightarrow \mathbb{L}=\{(5;0;3)\}$.

q) $$\begin{pmatrix}-2x&-2y&+z&=-3\\5x&-3y&+2z&=4\\x&-7y&+4z&=2\end{pmatrix}\begin{array}{c}\xrightarrow{\cdot 5}\\\xrightarrow{\cdot 2}\end{array}\begin{pmatrix}-10x&-10y&+5z&=-15\\10x&-6y&+4z&=8\\\hline&-16y&+9z&=-7\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2x&-2y&+z&=-3\\x&-7y&+4z&=2\\(&-16y&+9z&=-7)\end{pmatrix}\begin{array}{c}\xrightarrow{\cdot 1}\\\xrightarrow{\cdot 2}\end{array}\begin{pmatrix}-2x&-2y&+z&=-3\\2x&-14y&+8z&=4\\\hline&-16y&+9z&=1\end{pmatrix}$$

Die resultierenden Gleichungen widersprechen sich, damit gilt $\mathbb{L}=\{\}$.



f3) 1)

$x_1 - x_2 + 2x_3 = 3$ $\xrightarrow{\cdot 2}$ $2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 6$

$2x_1 - x_2 - x_3 = 1$ $\xrightarrow{\cdot(-1)}$ $-2x_1 + x_2 + x_3 = -1$

$4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 7$

$0 - x_2 + 5x_3 = 5$

$\xrightarrow{\cdot 4}$ $4x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 12$

$\xrightarrow{\cdot(-1)}$ $-4x_2 + 3x_2 - 3x_3 = -7$

$0 - x_2 + 5x_3 = 5$

Thx Jana H.

2) $x_1 - x_2 + 2x_3 = 3$

$-x_2 + 5x_3 = 5 \rightarrow -x_2 + 5x_3 = 5$ → ∞-viele Lsg!

$-x_2 + 5x_3 = 5 \xrightarrow{\cdot(-1)} x_2 - 5x_3 = -5$

$0 + 0 = 0$

3) Sei $x_3 = t$:

$-x_2 + 5x_3 = 5$

$-x_2 + 5t = 5$

$x_2 = 5t - 5$

$x_1 - x_2 + 2x_3 = 3$

$x_1 - (5t - 5) + 2t = 3$

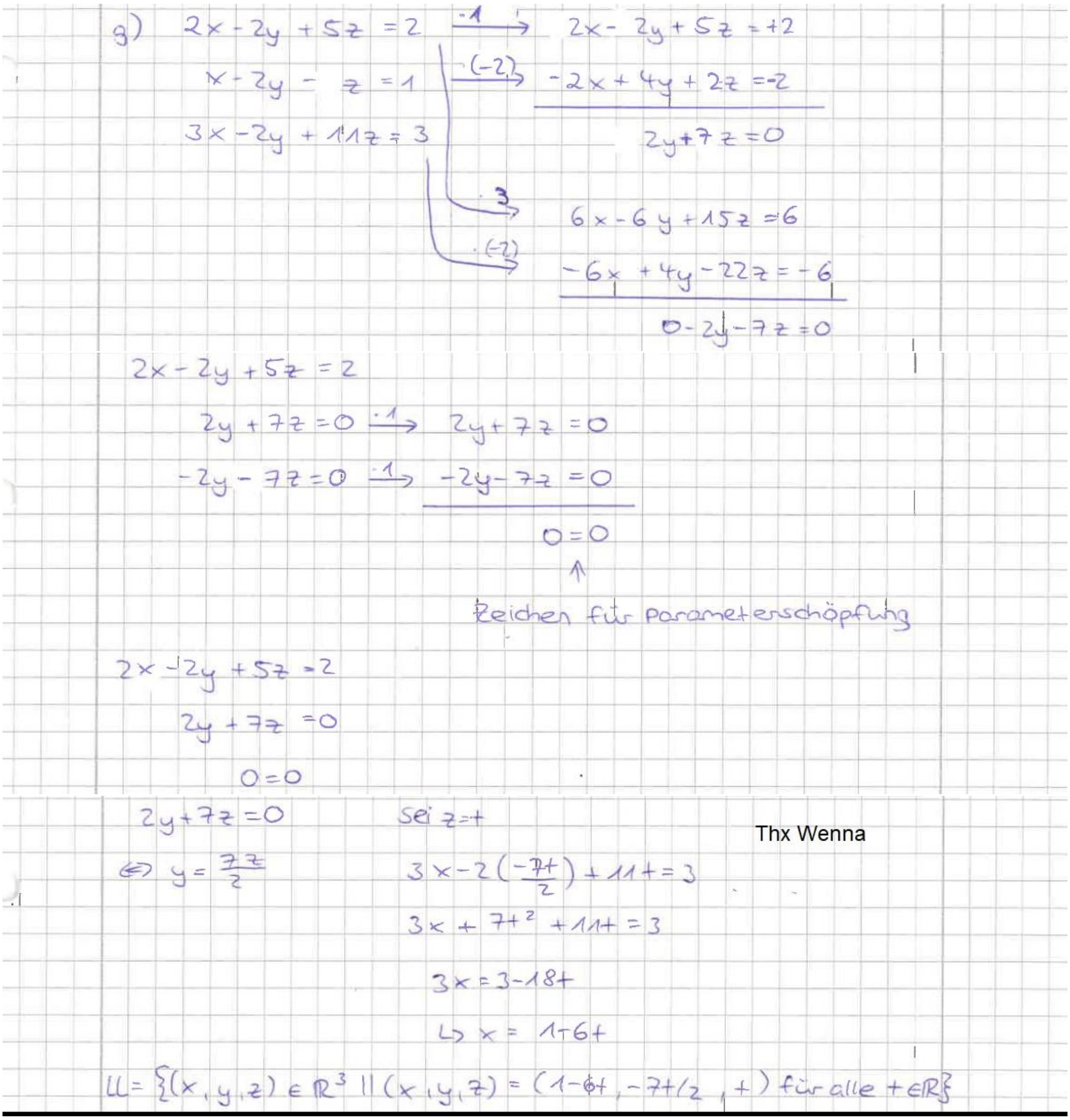
$x_1 - 5t + 5 + 2t = 3$

$x_1 = 3t - 2$

4) $\Rightarrow \mathbb{L} = \{(3t-2 \mid 5t-5 \mid t)$ für alle $t \in \mathbb{R}\}$

Abb. 493 LGS Rechnung von Ag 276/763t

r) $\mathbb{L} = \{(1 + 2s - 3t; s; t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$,



g) $2x - 2y + 5z = 2$ $\xrightarrow{\cdot 1}$ $2x - 2y + 5z = +2$

$x - 2y - z = 1$ $\xrightarrow{\cdot(-2)}$ $-2x + 4y + 2z = -2$

$3x - 2y + 11z = 3$

$2y + 7z = 0$

$\xrightarrow{\cdot 3}$ $6x - 6y + 15z = 6$

$\xrightarrow{\cdot(-2)}$ $-6x + 4y - 22z = -6$

$0 - 2y - 7z = 0$

$2x - 2y + 5z = 2$

$2y + 7z = 0 \xrightarrow{\cdot 1} 2y + 7z = 0$

$-2y - 7z = 0 \xrightarrow{\cdot 1} -2y - 7z = 0$

$0 = 0$

Reichen für Parameterschöpfung

$2x - 2y + 5z = 2$

$2y + 7z = 0$

$0 = 0$

$2y + 7z = 0$ Sei $z = t$

$\Leftrightarrow y = \frac{7z}{2}$

Thx Wenna

$3x - 2\left(\frac{-7t}{2}\right) + 11t = 3$

$3x + 7t^2 + 11t = 3$

$3x = 3 - 18t$

$\Rightarrow x = 1 - 6t$

$\mathbb{L} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) = (1 - 6t, -7t/2, t)$ für alle $t \in \mathbb{R}\}$

m) $x - 2y - z = 1$

$y - z = 1$

Sei $z = t \rightarrow y - t = 1 \Leftrightarrow y = 1 + t$

$x - 2(1+t) - t = 1$

$x = 3t + 3$ $\quad \mathbb{L} = \{(x|y|z) \mid x = 3t+3,\ y = 1+t,\ z = t$ für alle $t \in \mathbb{R}\}$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

n) $4x - 3y + 5z = -2 \xrightarrow{\cdot 1} 4x - 3y + 5z = -2$

$-x + 2y - 3z = 3 \xrightarrow{\cdot 4} -4x + 8y - 12z = 12$

$0 + 5y - 7z = 10$

Sei $z = t$, $\quad 4x - 3y + 5z = -2$

$5y - 7z = 10$

$5y - 7t = 10$

$y = 2 + \frac{7}{5}t = 2 + 1{,}4t$

$4x - 3(2 + 1{,}4t) + 5t = -2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -0{,}2 \\ 1{,}4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$4x - 6 - 42t + 5t = -2$

$4x = -0{,}8t + 4$

$x = -0{,}2t + 1$

$\mathbb{L} = \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \mid x = -0{,}2t + 1,\ y = 1{,}4t + 2,\ z = t$ für alle $t \in \mathbb{R}\}$

p) $y = 2x + 1$ $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 1t \\ 1 + 2t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{Parameterform einer Gerade}}$

Thx Wenna

Sei $x = t$

$y = 2t + 1$

$x - 2y = 1$ $\quad x - 2t = 1 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2t \\ 1t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sei $y = t$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Gerade (Geometrie)

$\mathbb{L} = \{(x, y) \mid x = 2t + 1,\ y = t\}$

Abb. 494 Aufgabe 276/763 g,m,n,p

Rechnung
5x3 LGS
Agteil j)

$$\begin{aligned} 3x - 4y + 5z &= 4 \\ x - 3z &= -2 \\ y + 4z &= 5 \\ x + y + z &= 3 \\ -x - 3y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

aus 5 Gleichungen 3 machen

vorerst Ignorieren

$$\begin{aligned} 3x - 4y + 5z &= 4 \quad \xrightarrow{\cdot 1} \quad 3x - 4y + 5z = 4 \\ x - 3z &= -2 \quad \xrightarrow{\cdot(-3)} \quad -3x + 9z = 6 \\ y + 4z &= 5 \\ & \qquad\qquad -4y + 14z = 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x - 4y + 5z &= 4 \\ -4y + 14z &= 10 \quad \xrightarrow{\cdot 1} \quad -4y + 14z = 10 \\ y + 4z &= 5 \quad \xrightarrow{\cdot 4} \quad 4y + 16z = 20 \\ z = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 30z = 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y + 4 \cdot 1 &= 5 \\ 5y &= 5 \quad \rightarrow \quad y = 5 \end{aligned}$$

$$y + 4 \cdot 1 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 5y = 5 \quad \Leftrightarrow \quad y = 5$$

$$3x - 4 + 5 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \qquad \mathbb{L} = \{(1|1|1)\}$$

In die (anfangs ignorierten) Gleichungen eingesetzt:

$$\begin{aligned} x + y + z = 3 \quad &\rightarrow \quad 1 + 1 + 1 = 3 \ \checkmark \\ -x - 3y + 4z = 0 \quad &\rightarrow \quad -1 - 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 0 \ \checkmark \end{aligned}$$

Abb. 495 5x3 LGS Rechnung von Aufgabe 276/763j

f) $\mathbb{L} = \{(1 - 0.5t; 1 + 0.5t; t) \mid t \in \mathbb{R}\}$,

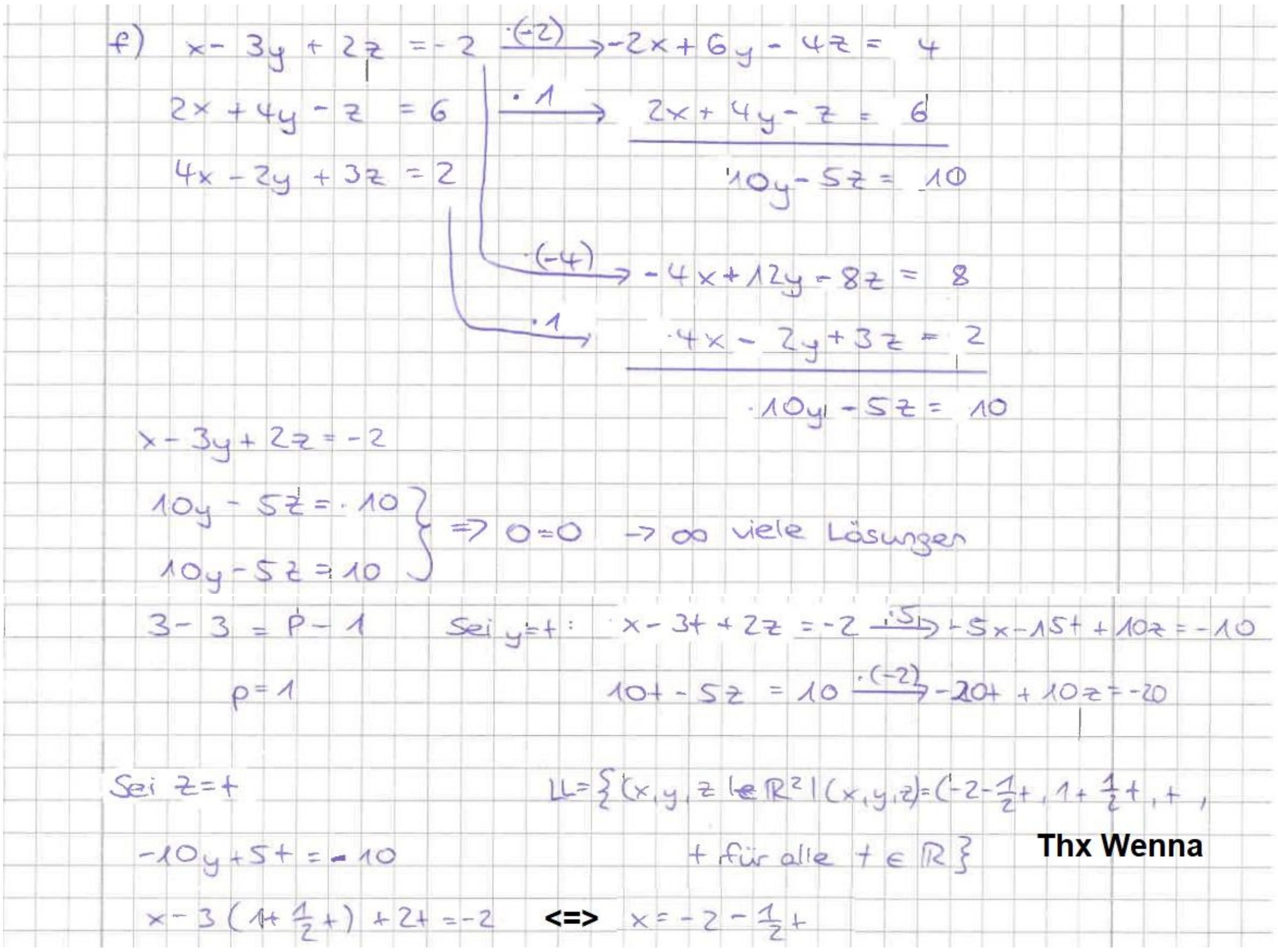


Abb. 496 Rechnung zur Aufgabe 278/768 f

$$\text{g)}\begin{pmatrix} 2x & +3y & +4z & =1 \\ 3x & -y & +3z & =-1 \\ x & -4y & -z & =-2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 3} \\ \xrightarrow{\cdot(-2)} \\ \ \end{array} \begin{pmatrix} 6x & +9y & +12z & =3 \\ -6x & +2y & -6z & =2 \\ \hline & +11y & +6z & =5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x & +3y & +4z & =1 \\ x & -4y & -z & =-2 \\ (& 11y & +6z & =5) \end{pmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 1} \\ \xrightarrow{\cdot(-2)} \\ \ \end{array} \begin{pmatrix} 2x & +3y & +4z & =1 \\ -2x & +8y & +2z & =4 \\ \hline & +11y & +6z & =5 \end{pmatrix}$$

Die resultierenden Gleichungen sind äquivalent, es würde (0=0) erzeugt; $\Rightarrow$ das LGS hat ∞ viele Lösungen. Sei $z = t \Rightarrow 11y + 6 \cdot t = 5 \Leftrightarrow 11y = 5 - 6t \Leftrightarrow y = \frac{5}{11} - \frac{6t}{11}$, $2x + 3y + 4z = 1 \Leftrightarrow 2x + 3\left(\frac{5}{11} - \frac{6t}{11}\right) + 4t = 1 \Leftrightarrow 2x + \frac{15}{11} - \frac{18t}{11} + \frac{44t}{11} = \frac{11}{11} \Leftrightarrow 2x = \frac{11}{11} - \frac{15}{11} + \frac{18t}{11} - \frac{44t}{11} \Leftrightarrow 2x = \frac{-4}{11} - \frac{26t}{11} \Leftrightarrow x = \frac{-2}{11} - \frac{13t}{11} \Rightarrow \mathbb{L} = \{(\frac{-2}{11} - \frac{13}{11}t; \frac{5}{11} - \frac{6}{11}t; t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ oder $\mathbb{L} = \{(1 - 13t; 1 - 6t; -1 + 11t) \mid t \in \mathbb{R}\}$,

Aufg. 278/769:

Beim Teil a) fallen 2 Gleichungen weg, es ist also nur eine Gleichung relevant. Wir benötigen zwei Parameter.

a) Die 3 Gleichungen sind äquivalent, weil $2 \cdot$ (I)= (II) und $3 \cdot$ (I)= (III) gilt. Damit ist nur die Gleichung $x + y - z = 1$ relevant. Es müssen **zwei** Parameter geschöpft werden: Sei $y = s$ und $z = t$, dann gilt $x = 1 - y + z \Leftrightarrow x = 1 - s + t$ damit ist $\mathbb{L} = \{(1 - s - t; s; t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$, h)

$x + 2y + 3z = 4 \xrightarrow{\cdot(-1)} -x - 2y - 3z = -4$

$x + 2y + z = 8 \rightarrow x + 2y + z = 8$

$2x + 4y + 2z = 12$

$0 + 0 - 4z = 4 \quad |: -4$

$z = -1$

$\cdot(-1)$, $\cdot 2$

$2x + 4y + 6z = 8$

$-2x - 4y - 2z = -12$

$0 - 0 + 4z = -4$

$z = -1$

$x + 2y + 3z = 4$

$z = -1$, $z = -1$ } sind identisch

Wir haben unendlich viele Lösungen

Sei $y = t$

$x + 2y + 3z = 4$

$x + 2t + 3(-1) = 4$

$x = 7 - 2t$

$\mathbb{L}\{(7-2t, t, -1)$ für alle $t \in \mathbb{R}\}$

Geometrisch: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-2t \\ t \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

thx Antonina

j)

$2x - 4y + 6z = 2 \xrightarrow{\cdot 3} 6x - 12y + 18z = 6$

$3x - 6y + 9z = 3 \xrightarrow{\cdot(-2)} -6x + 12y - 18z = -6$

$-4x + 8y - 12z = -4$

$0 = 0$

unendlich viele Lösungen

$\cdot 2$, $\cdot 1$

$4x - 8y + 12z = 4$

$-4x + 8y - 12z = -4$

$0 = 0$

$2x - 4y + 6z = 2$

$0 = 0$

Es ist nur die Gleichung $2x - 4y + 6z = 2$ relevant.

Sei $z = t$, $y = s$ ↖ zweiter Parameter

$2x - 4s + 6t = 2$

$x = 1 + 2s - 3t$

$\mathbb{L}\{(1+2s-3t, s, t)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}\}$

thx Antonina

b) Die 3 Gleichungen sind äquivalent, weil $2 \cdot$ (III)= (I) und $3 \cdot$ (III)= (II) gilt. Damit ist nur die Gleichung $x - y - 2z = 2$ relevant. Es müssen zwei Parameter geschöpft werden: Sei $y = s$ und $z = t$, dann gilt $x = 2 + y + 2z \Leftrightarrow x = 2 + s + 2t$ damit ist $\mathbb{L} = \{(2 + s + 2t; s; t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$, siehe auch Abb. 820/498;

c) $\mathbb{L} = \{(1 + 2t; t) | \, t \in \mathbb{R}\}$; d) $\mathbb{L} = \{(2 + 2t - 3s; s; t) | \, s, t \in \mathbb{R}\}$; e) $\mathbb{L} = \{(2 - 2t; s; t) | \, s, t \in \mathbb{R}\}$;

d) $x - 2y + 3z = 2$ Anzahl der Gleichungen $= 1$ Anzahl der Parameter $= 3$ $G = 1$ $V = 3$ $P = 3 - 1$

$y = t$ und $z = s$

$x - 2t + 3s = 2$

$x = 2t - 3s + 2$

$\mathbb{L} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (2+2t-3s, t, s)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}\}$

Thx Ann Zel

b)

$2x - 2y - 4z = 4 \xrightarrow{\cdot(-3)} -6x + 6y + 12z = -12$

$3x - 3y - 6z = 6 \xrightarrow{\cdot 2} 6x - 6y - 12z = 12$

$0 = 0$

$x - y - 2z = 2$

$\xrightarrow{(-1)} -2x + 2y + 4z = -4$

$\xrightarrow{\cdot 2} 2x - 2y - 4z = 4$

$0 = 0$

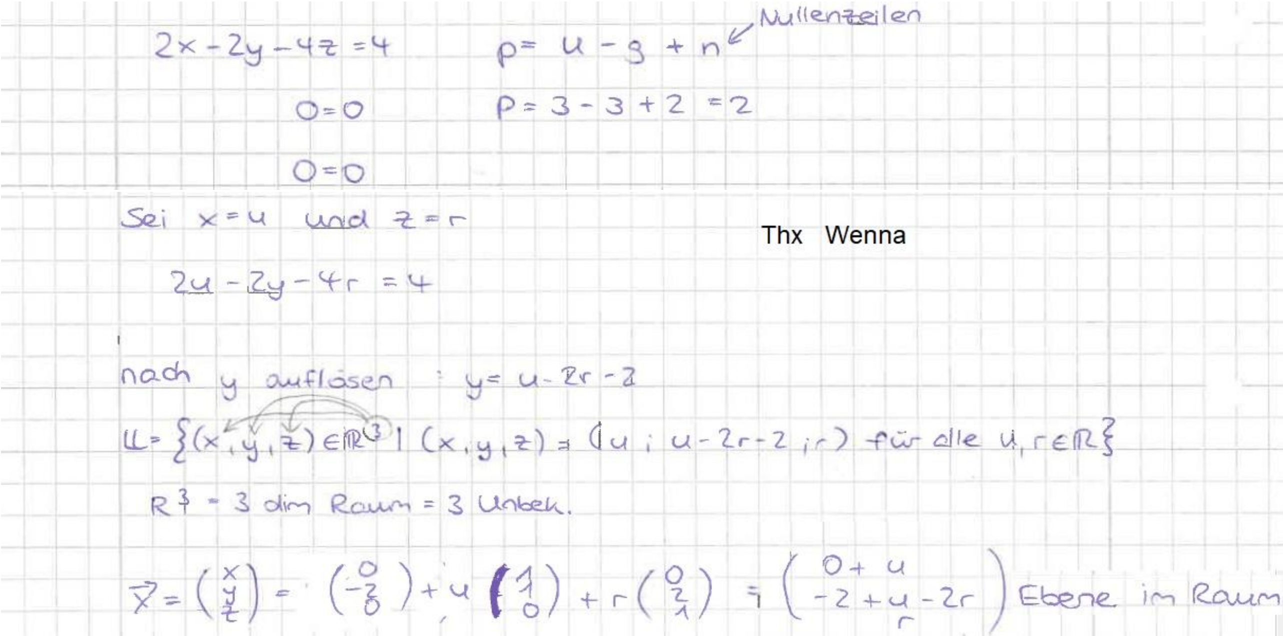


Abb. 497 Rechnung zur Aufgabe 278/768 k

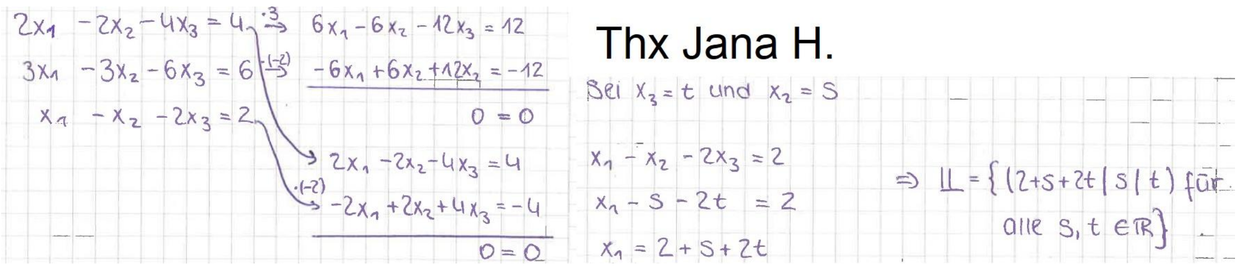


Abb. 498 Rechnung zur Aufgabe 278/768 k

f) Es müssen zwei Parameter geschöpft werden: Sei $y = s$ und $z = t$, dann gilt $x = 2.5 - 1.5y - 2z \Leftrightarrow x = 2.5 - 1.5s - 2t$ damit ist $\mathbb{L} = \{(2.5 - 1.5s - 2t; s; t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$,

g) Es müssen zwei Parameter geschöpft werden: Sei $y = s$ und $z = t$, dann gilt $x = 2 - 0.5y - 1.5z \Leftrightarrow x = 2 - 0.5s - 1.5t$ damit ist $\mathbb{L} = \{(x = 2 - 0.5s - 1.5t; s; t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$,

h) $\mathbb{L} = \{(7 - 2t; t; -1) \mid t \in \mathbb{R}\}$, i) $\mathbb{L} = \{(2 - t; t; 1; 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$,

k) Eine Gleichung 4 Unbekannte bedeuten 3 Parameter: Sei $x_2 = r$, $x_3 = s$ und $x_4 = t$, dann gilt $x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 6 \Leftrightarrow x_1 = -3x_2 - 4x_3 + x_4 + 6 \Leftrightarrow x_1 = -3r - 4s + t + 6$ damit ist $\mathbb{L} = \{(-3r - 4s + t + 6; r; s; t) \mid r, s, t \in \mathbb{R}\}$,

L) Eine Gleichung 5 Unbekannte bedeuten 4 Parameter: Sei $x_2 = r$, $x_3 = s$, $x_4 = t$ und $x_5 = u$, dann gilt $2x_1 - 4x_2 - 10x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 2 \Leftrightarrow x_1 = 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 + 1 \Leftrightarrow x_1 = 2r + 5s - 2t - u + 1$ damit ist $\mathbb{L} = \{(2r + 5s - 2t - u + 1; r; s; t; u) \mid r, s, t, u \in \mathbb{R}\}$,

m) Zwei Gleichungen 4 Unbekannte bedeuten (vermutlich) 2 Parameter: Sei $x_3 = r$ und $x_4 = s$, dann gilt $x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 4 \Leftrightarrow x_1 = -2x_3 + 3x_4 + 4 \Leftrightarrow x_1 = -2r + 3s + 4$ $x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 7 \Leftrightarrow x_2 = 5x_3 - 6x_4 + 7 \Leftrightarrow x_2 = 5r - 6s + 7$ damit ist $\mathbb{L} = \{(-2r + 3s + 4; 5r - 6s + 7; r; s) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$,

n) $$\left(\begin{array}{cccccccccccc} x_1 & +2x_2 & +5x_3 & +8x_4 & = 5 & \xrightarrow{\cdot 1} & x_1 & +2x_2 & +5x_3 & +8x_4 & = 5 \\ & x_2 & +2x_3 & +3x_4 & = 1 & \xrightarrow{\cdot(-2)} & & -2x_2 & -4x_3 & -6x_4 & = -2 \\ & & & & & & x_1 & & +x_3 & +2x_4 & = 3 \end{array}\right),$$

Zwei Gleichungen 4 Unbekannte bedeuten (hier) 2 Parameter: Sei $x_3 = r$ und $x_4 = s$, dann gilt $x_1 + x_3 + 2x_4 = 3 \Leftrightarrow x_1 = -x_3 - 2x_4 + 3 \Leftrightarrow x_1 = -r - 2s + 3$ $x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \Leftrightarrow x_2 = -2x_3 - 3x_4 + 1 \Leftrightarrow x_2 = -2r - 3s + 1$ damit ist $\mathbb{L} = \{(-r - 2s + 3; -2r - 3s + 1; r; s) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$,

o) $\left(\begin{array}{rrrrlcrrrrl} x_1 & -3x_2 & +2x_3 & +4x_4 & = 5 & \xrightarrow{\cdot(-2)} & -2x_1 & +6x_2 & -4x_3 & -8x_4 & = -10 \\ 2x_1 & -6x_2 & +3x_3 & +8x_4 & = 3 & \xrightarrow{\cdot 1} & 2x_1 & -6x_2 & +3x_3 & +8x_4 & = 3 \\ & & & & & & & & -x_3 & & = -7 \end{array}\right)$,

Zwei Gleichungen 4 Unbekannte bedeuten (hier) 2 Parameter; $x_3 = 7$ liegt aber schon fest: Sei $x_2 = r$ und $x_4 = s$, dann gilt $x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 5 \Leftrightarrow x_1 = 3r - 2 \cdot 7 - 4s + 5 \Leftrightarrow x_1 = 3r - 4s - 9$ damit ist $\mathbb{L} = \{(3r - 4s - 9; r; 7; s) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$,

p) $\left(\begin{array}{rrrrlcrrrrl} 2x_1 & -2x_2 & +6x_3 & -2x_4 & = 8 & \xrightarrow{\cdot 1} & 2x_1 & -2x_2 & +6x_3 & -2x_4 & = 8 \\ 2x_1 & -2x_2 & +4x_3 & +2x_4 & = 6 & \xrightarrow{\cdot(-1)} & -2x_1 & +2x_2 & -4x_3 & -2x_4 & = -6 \\ & & & & & & & & +2x_3 & -4x_4 & = 2 \end{array}\right)$,

Zwei Gleichungen 4 Unbekannte bedeuten (hier) 2 Parameter; wenn x_3 festliegt, dann auch x_4 (und umgekehrt). Sei $x_2 = r$ und $x_4 = s$, dann gilt

$2x_3 - 4x_4 = 2 \Leftrightarrow 2x_3 = 2x_4 + 2 \Leftrightarrow x_3 = s + 1$,

$2x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 8 \Leftrightarrow x_1 = x_2 - 3x_3 + x_4 + 4 \Leftrightarrow x_1 = r - 3(s + 1) + s + 4 \Leftrightarrow x_1 = r - 2s + 2$ damit ist $\mathbb{L} = \{(r - 2s + 2; r; s + 1; s) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$,

q) $\left(\begin{array}{rrrlcrrrl} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = 5 & \xrightarrow{\cdot(-2)} & -2x_1 & -4x_2 & -6x_3 & = -10 \\ 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 & = 10 & \xrightarrow{\cdot 1} & 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 & = 10 \\ & & & & & & & 0 & = 0 \end{array}\right)$,

$\left(\begin{array}{rrrlcrrrl} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = 5 & \xrightarrow{\cdot 3} & 3x_1 & +6x_2 & +9x_3 & = 15 \\ -3x_1 & -6x_2 & -9x_3 & = 15 & \xrightarrow{\cdot 1} & -3x_1 & -6x_2 & -9x_3 & = 15 \\ & & & & & & & 0 & = 30 \ \lightning \end{array}\right) \Rightarrow \mathbb{L} = \{\}$ trotz '0=0'.

r) ohne Rechnung: Das LGS ist äquivalent zu $x_1 + 18x_4 = 19$; $x_2 - 5x_4 = -4$; Sei $x_3 = r$, $x_4 = s$, dann gilt: $x_1 = 19 - 18s$ und $x_2 = -4 + 5s$; $\mathbb{L} = \{19 - 18s; -4 + 5s, r; s \mid r, s \in \mathbb{R}\}$;

s) ohne Rechnung: Das LGS ist äquivalent zu $3x_3 - 4x_5 = 1$; Sei $x_1 = r$, $x_2 = s$, $x_3 = t$, $x_4 = u$, dann gilt: $4x_5 = 3x_3 - 1 \Leftrightarrow x_5 = 0.75t - 0.25$; $\mathbb{L} = \{r; s; t; u; 0.75t - 0.25 \mid r, s, t, u \in \mathbb{R}\}$,

Aufg. 279/770: a) Allgemein kann ein LGS genau <u>eine</u>, <u>keine</u> oder <u>unendlich</u> viele Lösungen haben. Wahrscheinlich hat ein $m \times n$ LGS eine <u>unendliche</u> Lösungsmenge falls $m < n$, <u>einelementige</u> Lösungsmenge falls $m = n$ und <u>leere</u> Lösungsmenge falls $m > n$ ist. Beim Rechnen eines LGS mit dem GTR bedeutet die resultierende Zeile 0 0 ... 0 1 immer, dass es eine <u>leere</u> Lösungsmenge hat, denn diese Zeile sagt eigentlich, dass $\underline{1 = 0}$ ist. Treten Zeilen der Form <u>1,0,..,0,a,..,b</u> ($a \neq 0$) auf, so hat das LGS eine <u>unendliche</u> Lösungsmenge. Treten nur Zeilen mit genau einer 1 (nicht am Ende) oder Nullenzeilen auf, so hat das LGS eine <u>eine einelementige</u> Lösungsmenge.

b) i) $p = 3 - 2 + 0 = 1$; Rang=2; ii) $p = 3 - 2 + 1 = 2$; Rang=1; iii) $p = 4 - 2 + 1 = 3$; Rang=1;

ii) 0=0 nennen wir eine Nullenzeile

G = # Gleichungen, U = # Unbekannte, n = # Nullenzeilen

dann gilt P (# Parameter) = U − G + n

Sei $x_3 = t$ und sei $x_2 = s$

wir brauchen 2 Parameter

$-x_1 + 0 \cdot s + 2t = 1 \iff x_1 = 2t - 1$

$\mathbb{L} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (2t-1 \mid s \mid t)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}\}$

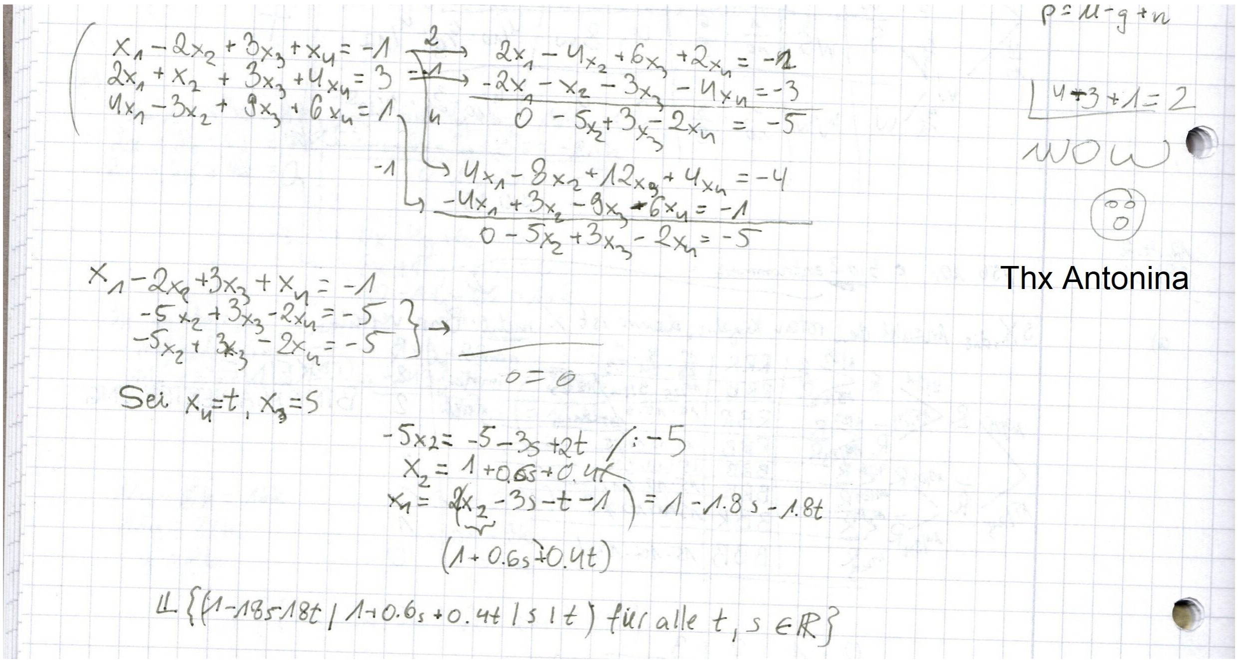
$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 0x_2 - 4x_3 = -2 & \xrightarrow{\cdot 1} & 2x_1 + 0x_2 - 4x_3 = -2 \\ -x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 1 & \xrightarrow{\cdot 2} & -2x_1 + 0x_2 + 4x_3 = 2 \\ & & \hline 0 = 0 \end{array}$

Thx Jac Pat

n = 1, G = 2, U = 3 p = U − G + n

iv) U=4, g=3, n=1, p=2; Rang=2;

v) U=5, g=3, n=2, p=4; Rang=1;



$x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -1$ $\cdot 2$

$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3$ $\cdot(-1)$

$4x_1 - 3x_2 + 9x_3 + 6x_4 = 1$

$2x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 = -2$

$-2x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -3$

$0 - 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -5$

$4x_1 - 8x_2 + 12x_3 + 4x_4 = -4$

$-4x_1 + 3x_2 - 9x_3 - 6x_4 = -1$

$0 - 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -5$

$p = u - g + n$

$4 - 3 + 1 = 2$

WOW

Thx Antonina

$x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -1$

$-5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -5$

$-5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -5$

$0 = 0$

Sei $x_4 = t$, $x_3 = s$

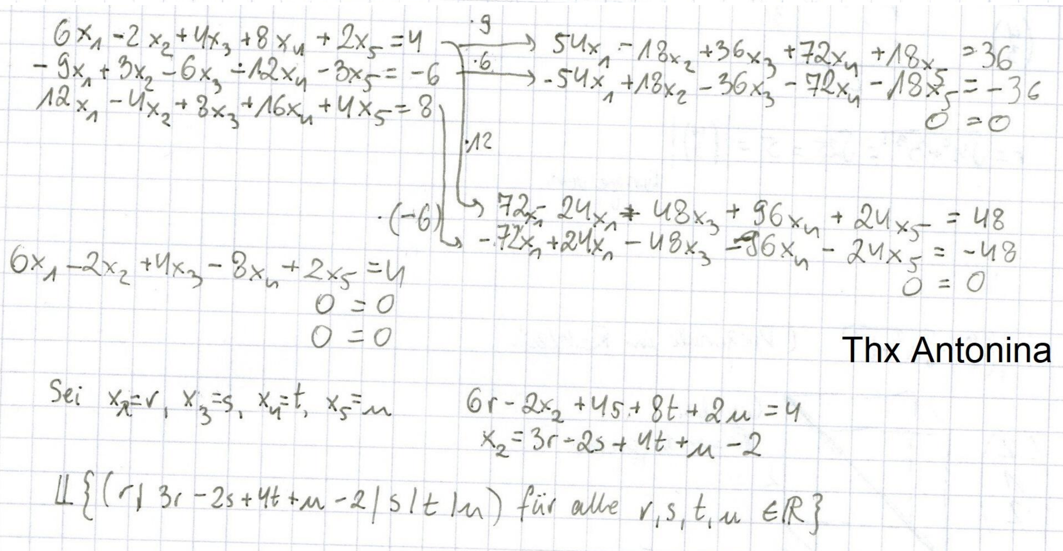
$-5x_2 = -5 - 3s + 2t \quad /:-5$

$x_2 = 1 + 0.6s + 0.4t$

$x_1 = 2x_2 - 3s - t - 1 = 1 - 1.8s - 1.8t$

$(1 + 0.6s + 0.4t)$

$\mathbb{L}\{(1-1.8s-1.8t \mid 1+0.6s+0.4t \mid s \mid t)$ für alle $t, s \in \mathbb{R}\}$



$6x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 4$ $\cdot 9$

$-9x_1 + 3x_2 - 6x_3 - 12x_4 - 3x_5 = -6$ $\cdot 6$

$12x_1 - 4x_2 + 8x_3 + 16x_4 + 4x_5 = 8$ $\cdot 12$, $\cdot(-6)$

$54x_1 - 18x_2 + 36x_3 + 72x_4 + 18x_5 = 36$

$-54x_1 + 18x_2 - 36x_3 - 72x_4 - 18x_5 = -36$

$0 = 0$

$72x_1 - 24x_2 + 48x_3 + 96x_4 + 24x_5 = 48$

$-72x_1 + 24x_2 - 48x_3 - 96x_4 - 24x_5 = -48$

$0 = 0$

$6x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 8x_4 + 2x_5 = 4$

$0 = 0$

$0 = 0$

Thx Antonina

Sei $x_1 = r$, $x_3 = s$, $x_4 = t$, $x_5 = u$

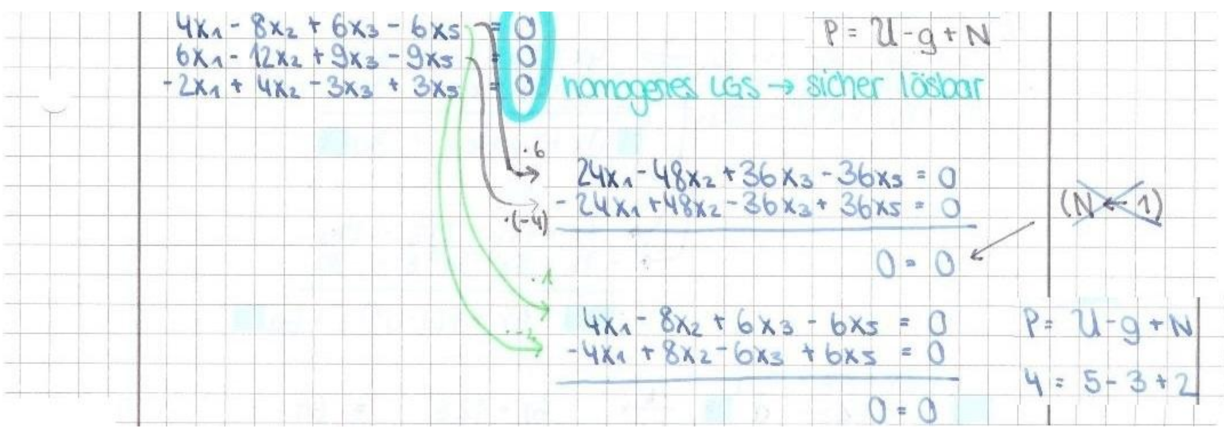
$6r - 2x_2 + 4s + 8t + 2u = 4$

$x_2 = 3r - 2s + 4t + u - 2$

$\mathbb{L}\{(r \mid 3r-2s+4t+u-2 \mid s \mid t \mid u)$ für alle $r, s, t, u \in \mathbb{R}\}$

vi) U=5, g=3, n=2, p=4; Das =0 bedeutet, dass $(0;0;0;0;0) \in \mathbb{L}$ ist: Rang=1;

vii) U=6, g=3, n=1, p=2; Rang=2;



$4x_1 - 8x_2 + 6x_3 - 6x_5 = 0$

$6x_1 - 12x_2 + 9x_3 - 9x_5 = 0$

$-2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 3x_5 = 0$

$P = U - g + N$

homogenes LGS → sicher lösbar

$24x_1 - 48x_2 + 36x_3 - 36x_5 = 0$

$-24x_1 + 48x_2 - 36x_3 + 36x_5 = 0$

$0 = 0$

$(N \cancel{=} 1)$

$4x_1 - 8x_2 + 6x_3 - 6x_5 = 0$

$-4x_1 + 8x_2 - 6x_3 + 6x_5 = 0$

$0 = 0$

$P = U - g + N$

$4 = 5 - 3 + 2$

homogenes LGS,

Sei $\boxed{x_2 = r \quad x_3 = s \quad x_4 = t \quad x_5 = u}$

Thx C.O.

$4x_1 - 8r + 6s + 0t - 6u = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = 2r - 1{,}5s + 1{,}5u$

$\mathbb{L} = \{(x_1|x_2|x_3|x_4|x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid (2r - 1{,}5s + 1{,}5u|r|s|t|u)$ für alle $r,s,t,u \in \mathbb{R}\}$

$x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 = 2 \xrightarrow{\cdot 3} 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 + 12x_4 + 15x_5 + 18x_6 = 6$

$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 5x_4 - 3x_5 - 3x_6 = 1 \xrightarrow{\cdot(-1)} -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 3x_5 + 3x_6 = -1$

$8x_1 \quad - 2x_3 - 2x_4 + 4x_5 + 6x_6 = 6$ $\qquad -8x_2 + 13x_3 + 17x_4 + 18x_5 + 21x_6 = 5$

Thx Nowa Kochana

$-8x_1 + 16x_2 - 24x_3 - 32x_4 - 40x_5 - 48x_6 = -16$

$8x_1 \quad - 2x_3 - 2x_4 + 4x_5 + 6x_6 = 6$

$16x_2 - 26x_3 - 34x_4 - 36x_5 - 42x_6 = -10$

$x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 = 2$

$-8x_2 + 13x_3 + 17x_4 + 18x_5 + 21x_6 = 5 \xrightarrow{\cdot 2} -16x_2 + 26x_3 + 34x_4 + 36x_5 + 42x_6 = 10$

$16x_2 - 26x_3 - 34x_4 - 36x_5 - 42x_6 = -10 \xrightarrow{\cdot 1} 16x_2 - 26x_3 - 34x_4 - 36x_5 - 42x_6 = -10$

$0 = 0$

$P = u - g + n = 6 - 3 + 1 = 4$

Sei $x_3 = r \quad x_4 = s \quad x_5 = t \quad x_6 = u$

$-8x_2 + 13r + 17s + 18t + 21u = 5$

$x_2 = \frac{13r}{8} + \frac{17s}{8} + \frac{18t}{8} + \frac{21u}{8} - \frac{5}{8}$

$x_1 - 2\left(\frac{13r}{8} + \frac{17s}{8} + \frac{18}{8}t + \frac{21}{8}u - \frac{5}{8}\right) + 3r + 4s + 5t + 6u = 2$

$x_1 = 0{,}25r + 0{,}25s - 0{,}5t - 0{,}75u + 0{,}75$

$\mathbb{L} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathbb{R} \mid \left(\frac{1}{4}r + \frac{1}{4}s - \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}u + \frac{3}{4} \middle| \frac{13}{8}r + \frac{17s}{8} + \frac{18t}{8} + \frac{21u}{8} - \frac{5}{8} \middle| r, s, t, u\right)$ für alle $r, s, t, u \in \mathbb{R}\}$

c) i) $P(3|0)$, $Q(7|0)$: $f_1(x) = a(x-3)(x-7)$; ii) $P(1|2)$, $Q(-1|2)$: $f_2(x) = a(x-1)(x+1) + 2$;

Interpolation 4

$P(3|0)$: $0 = a3^2 + b3 + c$; $0 = 9a + 3b + c$

$Q(7|0)$: $0 = a7^2 + b7 + c$; $0 = 49a + 7b + c$

Thx Ann Zel

homogenes 2×3 LGS

$0 = 9a + 3b + c \xrightarrow{\cdot 49} 441a + 147b + 49c = 0$

$0 = 49a + 7b + c \xrightarrow{\cdot(-9)} -441a - 63b - 9c = 0$

$84b + 40c = 0$ für $b = t$ (da b den höchsten Faktor hat)

$84t + 40c = 0$ $\quad c = -\frac{84}{40}t = -2{,}1t$ in die erste Gleichung einsetzen

$9a + 3t - 2{,}1t = 0$

$9a = -0{,}9t \quad |:9$

$a = -0{,}1t$

$f(x) = -0{,}1t\cdot x^2 + t\cdot x - 2{,}1t$
$= -0{,}1t\,(x^2 + 10x + 21)$
$= -0{,}1t\,(x-3)(x-7)$

c$_3$+d) $f(x) = a(x-2)(x-1) + \frac{5-2}{2-1}(x-1) + 2 = a(x-2)(x-1) + 3x - 1 = a\cdot x^2 + (3-3a)x + 2a - 1$; $f(1) = 2$; $f(2) = 5$ (eigentlich $a \neq 0$). $f(x)$ ist von der Form $a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2) + \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) + y_1$, wobei $f(x_1) = a\cdot(x_1-x_1)\cdot(x_1-x_2) + \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_1-x_1) + y_1 = y_1$ in unserem Fall 2 und $f(x_2) = a\cdot(x_2-x_1)\cdot(x_2-x_2) + \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_2-x_1) + y_1 = y_2$ in unserem Fall 5.

Der Geradenanteil geht durch $(x_1|y_1)$ und $(x_2|y_2)$, der ganzrationale Funktionsanteil 2. Art hat seine Nullstellen bei x_1 und x_2 und der Parameter ist dann der Vorfaktor vor dem x^2.

f) Tatsächlich gilt: Das LGS ist eindeutig genau dann, wenn P, Q, R verschiedene $x-$Werte haben. Das zu beweisen bekomme ich wohl mit Lagrangeinterpolation hin, eine andere Lösung auf Schulniveau dürfen Sie mir gerne schicken. Das LGS hat keine Lösung genau dann, wenn es (mindestens) zwei Punkte mit gleichem $x-$Wert und mit verschiedenem $y-$Wert gibt. Ist das LGS nicht unlösbar, dann hat das LGS unendlich viele Lösungen genau dann, wenn zwei Punkte identisch sind.

Aufg. 279/771:

a) $x_1\,Fe + x_2\,O_2 \longrightarrow x_3\,Fe_2O_3$

Fe	x_1	$2x_3$
O	$2x_2$	$3x_3$

2×3 LGS

$x_1 - 2x_3 = 0$

$2x_2 - 3x_3 = 0$

Sei $x_3 = t \Rightarrow x_1 = 2t$

$\Rightarrow x_2 = \frac{3t}{2}$

$t\begin{pmatrix}2\\3/2\\1\end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot 2} s\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \boxed{4\,Fe + 3\,O_2 \longrightarrow 2\,Fe_2O_3}$

Thx Nowa Kochana

b) $x_1\,C_6H_{12}O_6 + x_2\,O_2 \longrightarrow x_3\,CO_2 + x_4\,H_2O$

C	$6x_1$	x_3
H	$12x_1$	$2x_4$
O	$6x_1+2x_2$	$2x_3+x_4$

$6x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$

$6x_1 - 2x_3 = 0$

$12x_1 - 2x_4 = 0$

Sei $x_1 = t$ (kommt überall vor)

$\Rightarrow 12t - 2x_4 = 0 \quad x_4 = 6t$

$\Rightarrow 6t - 2x_3 = 0 \quad x_3 = 6t$

$$\begin{pmatrix} t \\ 6t \\ 6t \\ 6t \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{1\, C_6H_{12}O_6 + 6\, O_2 \longrightarrow 6\, CO_2 + 6\, H_2O}$$

$\mathbb{L} = \{(t; 6t; 6t; 6t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}$

Thx Nowa Kochana

$x_1\, C_3H_5N_3O_9 \longrightarrow x_2\, CO_2 + x_3\, H_2O + x_4\, N_2 + x_5\, O_2$

c)

$$\begin{array}{ll} C \rightarrow & 3x_1 = x_2 \\ H \rightarrow & 5x_1 = 2x_3 \\ N \rightarrow & 3x_1 = x_4 \\ O \rightarrow & 9x_1 = 2x_2 + x_3 + 2x_5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 9x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 = 0 \\ 5x_1 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_4 = 0 \end{array}$$

Sei $x_1 = t \Rightarrow 9t - 2\cdot 3t - 2\cdot 5t - 2x_5 = 0$

$x_5 = \frac{t}{4}$

$x_2 = 3t$

$x_3 = 2{,}5t$

$x_4 = 3t$

$$\begin{pmatrix} t \\ 3t \\ 2{,}5t \\ 3t \\ 0{,}25t \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot 4} s \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 10 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Thx Nowa Kochana

$\Rightarrow 4\, C_3H_5N_3O_9 \longrightarrow 12\, CO_2 + 10\, H_2O + 12\, N_2 + 1\, O_2$

$\mathbb{L} = \{(4s \mid 12s \mid 10s \mid 12s \mid 1s) \text{ für alle } s \in \mathbb{R}\}$

a) $(4s, 3s, 2s)$; b) $(s, 6s, 6s, 6s)$ c) $(4s, 12s, 10s, 6s, s)$

Aufg. 279/772: a,b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ -100 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Es kann ein beliebiger Verkehrsstrom im Kreis fahren.

d) Knotenregel: $I = I_1 + I_2 \xrightarrow{(Ohmsches'Gesetz')} I = I_1 + I_2 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} = U \cdot (\frac{R_2}{R_1 \cdot R_2} + \frac{R_1}{R_1 \cdot R_2}) = U \cdot \frac{R_2 + R_1}{R_1 \cdot R_2}$. Damit ist der Widerstand der Parallelschaltung $R_p = \frac{R_2 + R_1}{R_1 \cdot R_2}$.

e) Mischen: $g \cdot 19.3 + s \cdot 10.4 = 12.18 \cdot (g + s)$; $g + s = 1$; $\Leftrightarrow g \cdot 19.3 + (1 - g) \cdot 10.4 = 12.18 \Leftrightarrow 8.9 \cdot g = 1.78$; $\Leftrightarrow g = 0.2$ also 20%.

Aufg. 280/773: a) $\mathbb{L} = (3k; k; 2k)$; b) $\mathbb{L} = (1 + 2k; 4 + 2k; 1)$; c) $\mathbb{L} = (0; 1 + 2k; 2 + 4k)$;

b)

$$\begin{array}{l} 5x - y + z = 2 + 8k \\ 2x + y - 2z = 4 + 6k \\ 3x - y + z = 4k \end{array}$$

$\xrightarrow{\cdot(-2)}$, $\xrightarrow{\cdot 5}$:

$$\begin{array}{l} -10x + 2y - 2z = -4 - 16k \\ 10x + 5y - 10z = 20 + 30k \\ \hline 7y - 12z = 16 + 14k \end{array}$$

$\cdot(-3)$, $\cdot 5$:

$$\begin{array}{l} -15x + 3y - 3z = -6 - 24k \\ 15x - 5y + 5z = 20k \\ \hline -2y + 2z = -6 - 4k \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5x - y + z = 2 + 8k \\ 7y - 12z = 16 + 14k \\ -2y + 2z = -6 - 4k \end{array} \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{\cdot 2} \\ \xrightarrow{\cdot 7} \end{array} \quad \begin{array}{l} 14y - 24z = 32 + 28k \\ -14y + 14z = -42 - 28k \\ \hline -10z = -10 \end{array}$$

Thx Ann Zel

$$\begin{array}{l} 5x - y + z = 2 + 8k \\ 7y - 12z = 16 + 14k \\ -10z = -10 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ll} 7y - 12z = 16 + 14k & z = 1 \\ 7y - 12 = 16 + 14k & \mid +12 \\ 7y = 28 + 14k & \mid :7 \\ y = 4 + 2k & \text{in 3. Gleichung einsetzen} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3x - (4 + 2k) + 1 = 4k \\ 3x - 4 - 2k + 1 = 4k \\ 3x = 6k + 3 \\ x = 2k + 1 \end{array} \quad \mathbb{L} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (2k+1; 4+2k; 1)\}$$

c) Thx C.O.

$$\begin{array}{lcl} 6x - y + z = 1 + 2r & \xrightarrow{\cdot 1} & 6x - y + z = 1 + 2r \\ 3x + 2y + z = 4 + 8r & \xrightarrow{\cdot(-2)} & -6x - 4y - 2z = -8 - 16r \\ x + y + z = 3 + 6r & & \hline \\ & & 0x - 5y - z = -7 - 14r \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} & \xrightarrow{\cdot 1} & 6x - y + z = 1 + 2r \\ & \xrightarrow{\cdot(-6)} & -6x - 6y - 6z = -18 - 36r \\ & & \hline \\ & & 0x - 7y - 5z = -17 - 34r \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} 6x - y + z = 1 + 2r & & \\ -5y - z = -7 - 14r & \xrightarrow{\cdot(-7)} & 35y + 7z = 49 + 98r \\ -7y - 5z = -17 - 34r & \xrightarrow{\cdot 5} & -35y - 25z = -85 - 170r \\ & & \hline \\ & & -18z = -36 - 72r \Leftrightarrow z = 2 + 4r \end{array}$$

$-5y - z = -7 - 14r$ ← einsetzen

$-5y - (2 + 4r) = -7 - 14r$

$-5y = -5 - 10r$

$y = 1 + 2r$ → einsetzen → $6x - (1 + 2r) + 2 + 4r = 1 + 2r$

$6x = 2r - 4r + 2r = 0$

$x = 0$

$\mathbb{L} = \{(x|y|z) \in \mathbb{R}^3 \mid (0 \mid 1 + 2r \mid 2 + 4r)\}$

LGS Parameter rechts

$$\begin{array}{lcl} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 5 & \xrightarrow{\cdot(-2)} & -2x_1 + 6x_2 - 4x_3 - 8x_4 = -10 \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 8x_4 = 3 & \xrightarrow{\cdot 1} & 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 8x_4 = 3 \\ & & -x_3 = -7 \Leftrightarrow x_3 = 7 \end{array}$$

$x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 5$

$x_3 = 7$

Sei $x_4 = t$, $x_2 = s$

$x = 5 + 3s - 2 \cdot 7 - 4t = -9 + 3s - 4t$

$\mathbb{L}\, \{(-9 + 3s - 4t, s, 7, t)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}\}$

v) 2×4 LGS
∞ Lös.
2 Parameter

Thx Antonina

d) Erste Technik: Erweitere $\underline{A}$ um die Spalte $\vec{c}$ und nenne die Matrix $\underline{F}$. Löse die Gleichung $\underline{F} \circ \vec{x} = \vec{b}$ (mit rref). Sei $\vec{s}_4$ die vorletzte Spalte und $\vec{s}_5$ die letzte Spalte der Ergebnismatrix $\underline{E}$, so ist die Lösungsmenge in Vektorschreibweise (im Abitur (nicht nachvollziehbarerweise) eher unerwünscht) $\vec{x} = \vec{s}_5 - k \cdot \vec{s}_4$.

Äquivalente Technik: Lösen Sie $\underline{A} \circ \vec{x} = \vec{c}$ (Lösungsvektor $\vec{v}$) und $\underline{A} \circ \vec{x} = \vec{b}$ (Lösungsvektor $\vec{w}$), so ist die Lösungsmenge von $\underline{A} \circ \vec{x} = \vec{b} + k \cdot \vec{c}$: $\vec{x} = \vec{w} + k \cdot \vec{v}$.

$$\begin{array}{lcl} 2x - 4y + z = k & \longrightarrow & 2x - 4y + z = k \\ x + 2y - z = 2k & \longrightarrow & -2x - 4y + 2z = -4k \\ 4x - z = 5k & & \hline \\ & & -8y + 3z = -3k \end{array}$$

Thx Nowa Kochana

$$\begin{array}{l} -4x + 8y - 2z = -2k \\ 4x - z = 5k \\ \hline +8y - 3z = 3k \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} 2x - 4y + z = k & & \\ -8y + 3z = -3k & \longrightarrow & -8y + 3z = -3k \\ 8y - 3z = 3k & \longrightarrow & 8y - 3z = 3k \end{array} \Bigg\}\ 0 = 0$$

Sei $y = 3t$ damit alles bruchfrei ist

$8 \cdot 3t - 3z = 3k$
$8t - z = k$
$z = 8t - k$

$2x - 4y + z = k$
$2x - 4 \cdot 3t + 8t - k = k$
$x = 2t + k$

$\mathbb{L} = \{(x|y|z) \in \mathbb{R}^3 \mid (2t + k \mid 3t \mid 8t - k) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}$

$x + y + z = 1 \xrightarrow{\cdot 1} x + y + z = 1$
$x + ay + z = 1 \xrightarrow{\cdot(-1)} -x - ay - z = -1$
$x + y + a^2z = a^2$
$(1-a)y = 0$

Dreiecksform

$x + y + z = 1$
$-x - y - a^2z = -a^2$
$(1-a^2)z = 1-a^2$

$x + y + z = 1$
$(1-a)y = 0$
$(1-a^2)z = 1-a^2$

$\boxed{\text{1. Fall:}}$ $a = 1$

$1 - a^2 = 0 \Longleftrightarrow a = \pm 1$

$x + y + z = 1$
$0 = 0$
$0 = 0$

$P = U - g + N = 3 - 3 + 2 = 2$

Sei $y = r$, $z = s$

$\Rightarrow x + y + z = 1$

$1 - r - s = x$

$\mathbb{L} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (1 - r - s, r, s)$ für alle $r, s \in \mathbb{R}\}$

$\boxed{\text{2. Fall:}}$ $a = -1$

$x + y + z = 1$
$2y = 0$
$0 = 0$ $N = 1$

$P = U - g + N = 3 - 3 + 1 = 1$

Sei $z = r$

$\Rightarrow x + 0 + r = 1$
$x = 1 - r$

$\mathbb{L} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (1 - r \mid 0 \mid r)$ für alle $r \in \mathbb{R}\}$

$\boxed{\text{3. Fall:}}$ $a \neq \pm 1$

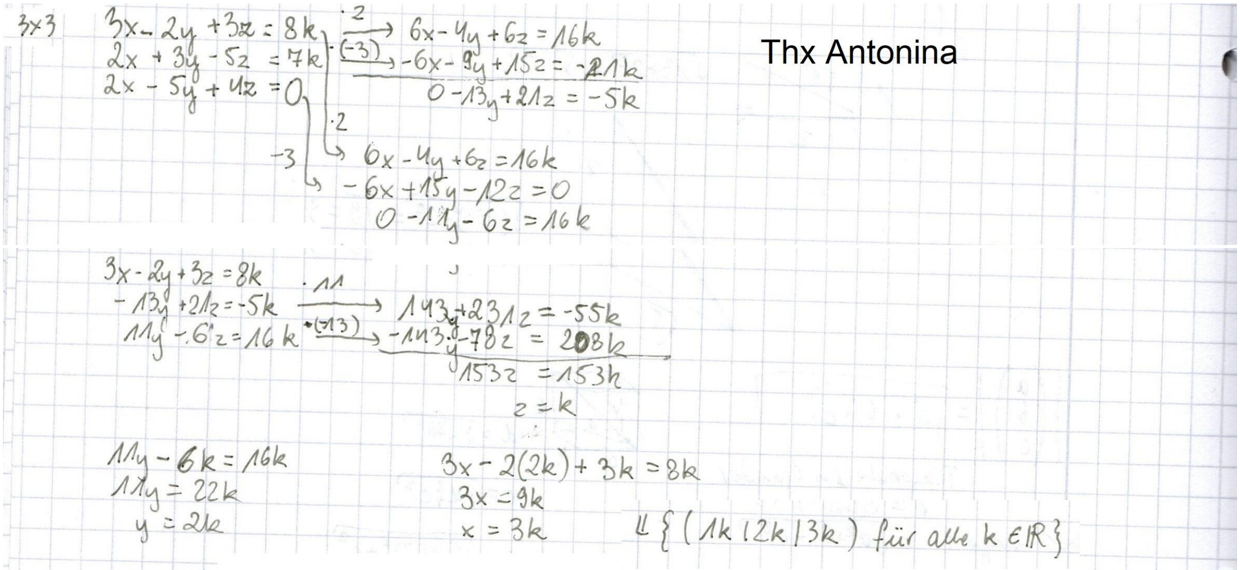
$x + y + z = 1$
$y = 0$
$z = 1$

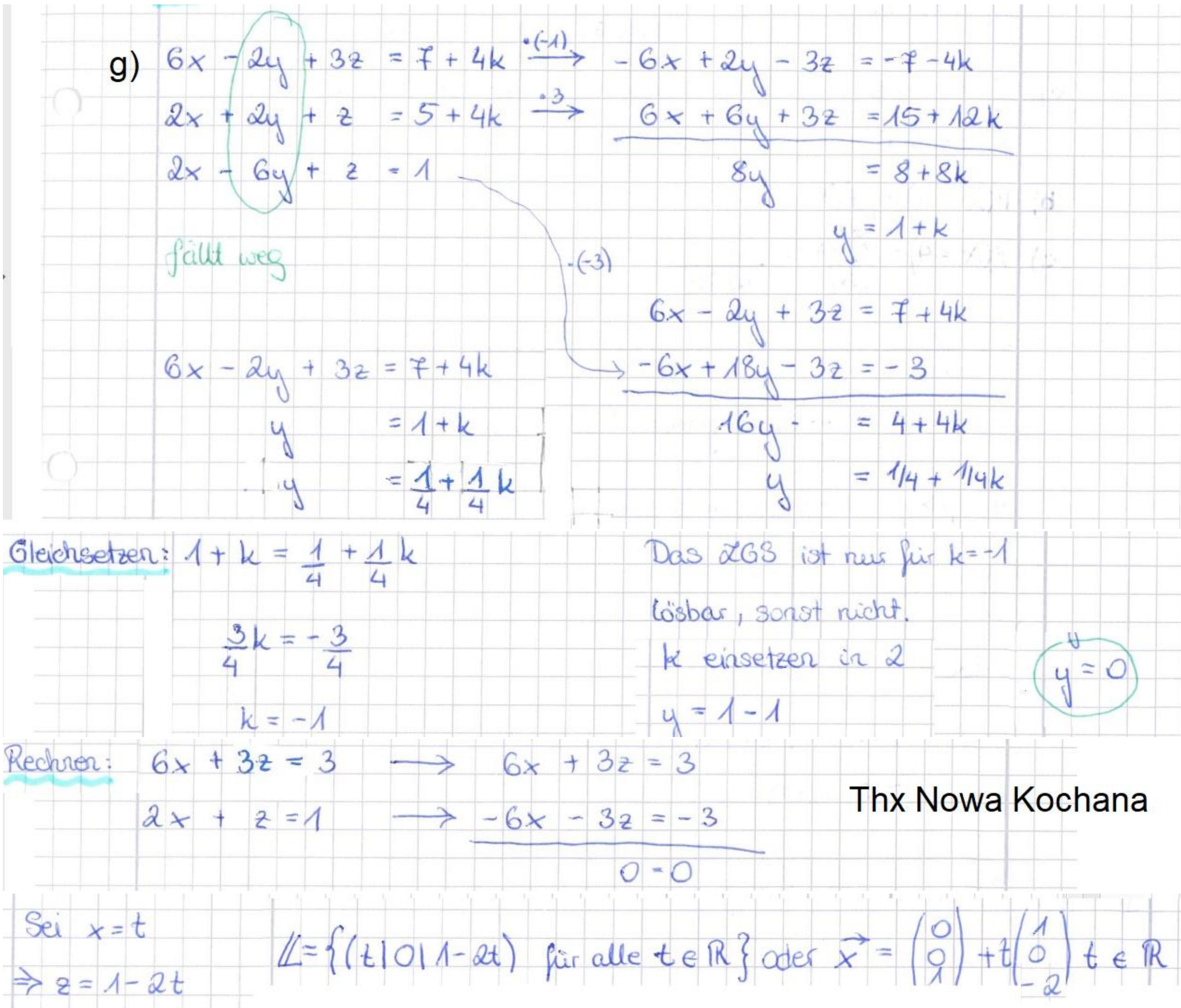
$x + 0 + 1 = 1$
$x = 0$

$\mathbb{L} = \{(x|y|z) \in \mathbb{R}^3 \mid (0|0|1)\}$

e) $\mathbb{L} = ((1 + t) \cdot k; 3t \cdot k; (-1 + 8t) \cdot k)$; $(\forall t \in \mathbb{R})$

f) Das LGS ist nur für $k = 0$ lösbar. Die Lösung ist dann $\mathbb{L} = (1 + 3.2t; -3t; t)$; $(\forall t \in \mathbb{R})$





g) Das LGS ist nur für $k = -1$ lösbar. Die Lösung ist dann $\mathbb{L} = (0.5 - 0.5t; 0; t)$; $(\forall t \in \mathbb{R})$

Aufg. 280/774: *a)* $a = 2$; $\mathbb{L} = \{\} = \emptyset$ oder $a = -2$; $\mathbb{L} = \{(3 + 2t; t) | t \in \mathbb{R}\}$; siehe Abb. 499.

$$\begin{array}{lllcrrcr}
\text{b)} & ax & +9y & = 12 & \xrightarrow{\cdot 1} & ax & +9y & = & 12 \\
 & x & +ay & = a+1 & \xrightarrow{\cdot(-a)} & -ax & -a^2y & = & -a^2-a \\
\hline
 & & & & & & (9-a^2)y & = & -a^2-a+12
\end{array}$$

zu b) $(9-a^2)y = -a^2-a+12 \Leftrightarrow (3-a)\cdot(3+a)y = -(a-3)(a+4)$ (Linearfaktorzerlegung).

Damit ist das LGS für $a=-3$ unlösbar; für $a=3$ hat das LGS unendlich viele Lösungen und sonst hat das LGS genau eine Lösung. Sei $a=3$, dann ist das LGS äquivalent zu $x+3y=4$; sei $y=t$, dann ist $x+3t=4 \Leftrightarrow x=-3t+4$; $\mathbb{L} = \{(-3t+4; t)$ für alle $t \in \mathbb{R}\}$.

$$\begin{array}{lllcrrcr}
\text{c)} & 3x & +ay & = a & \xrightarrow{\cdot(a+1)} & 3(a+1)x & +a(a+1)y & = & a^2+a \\
 & (a+1)x & +2y & = 2a-2 & \xrightarrow{\cdot(-3)} & -3(a+1)x & -6y & = & -6a+6 \\
\hline
 & & & & & & (a^2+a-6)y & = & a^2-5a+6
\end{array}$$

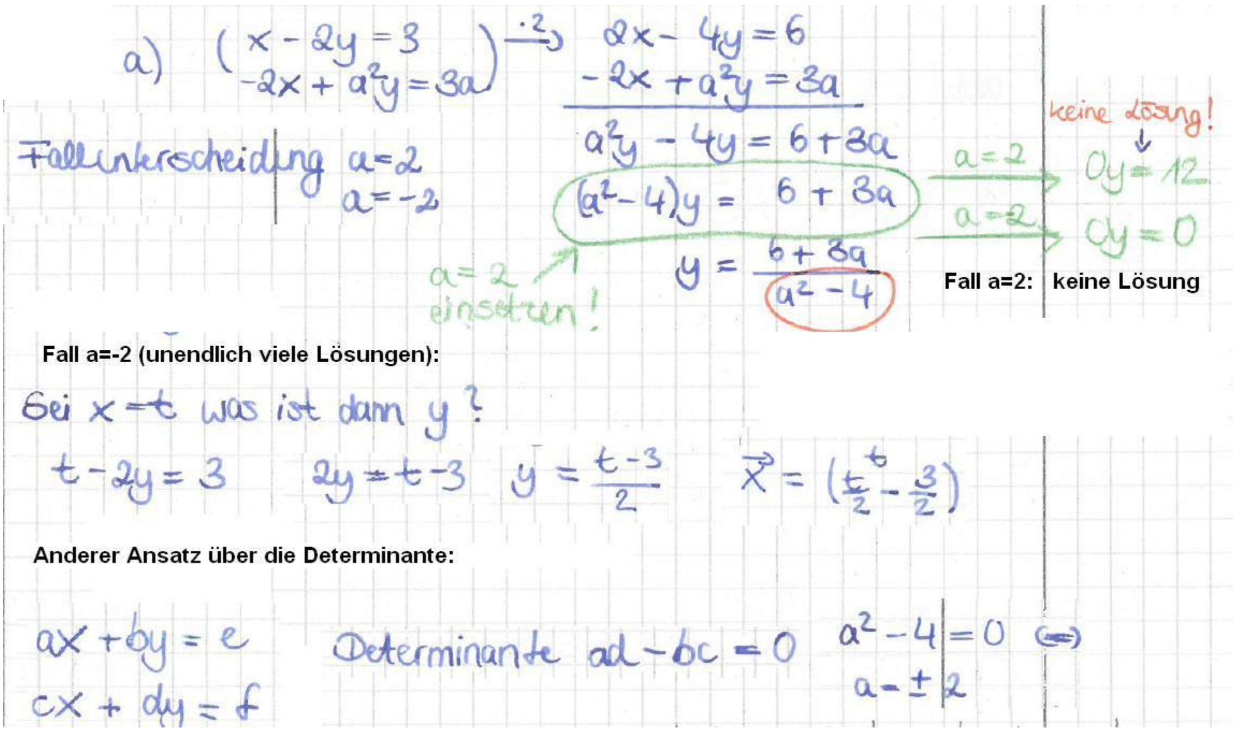


Abb. 499 LGS mit Parameter: aus Aufgabe 280/774 a)

zu c) $(a^2+a-6)y = a^2-5a+6 \Leftrightarrow (a+3)\cdot(a-2)y = (a-3)\cdot(a-2)$ (Linearfaktorzerlegung).

Damit ist das LGS für $a=-3$ unlösbar; für $a=2$ hat das LGS unendlich viele Lösungen und sonst hat das LGS genau eine Lösung. Sei $a=2$, dann ist das LGS äquivalent zu $3x+2y=2$; sei $x=t$, dann ist $3t+2y=2 \Leftrightarrow y=-1.5t+1$; $\mathbb{L} = \{(t; -1.5t+1)$ für alle $t \in \mathbb{R}\}$.

d) $a=2$; $\mathbb{L} = \{\} = \emptyset$ oder $a=-10$; $\mathbb{L} = \{(-1+t; -8+4t; t) | t \in \mathbb{R}\}$, Teile der Rg siehe Abb. 489; (ausführlicher siehe Abb. 500)

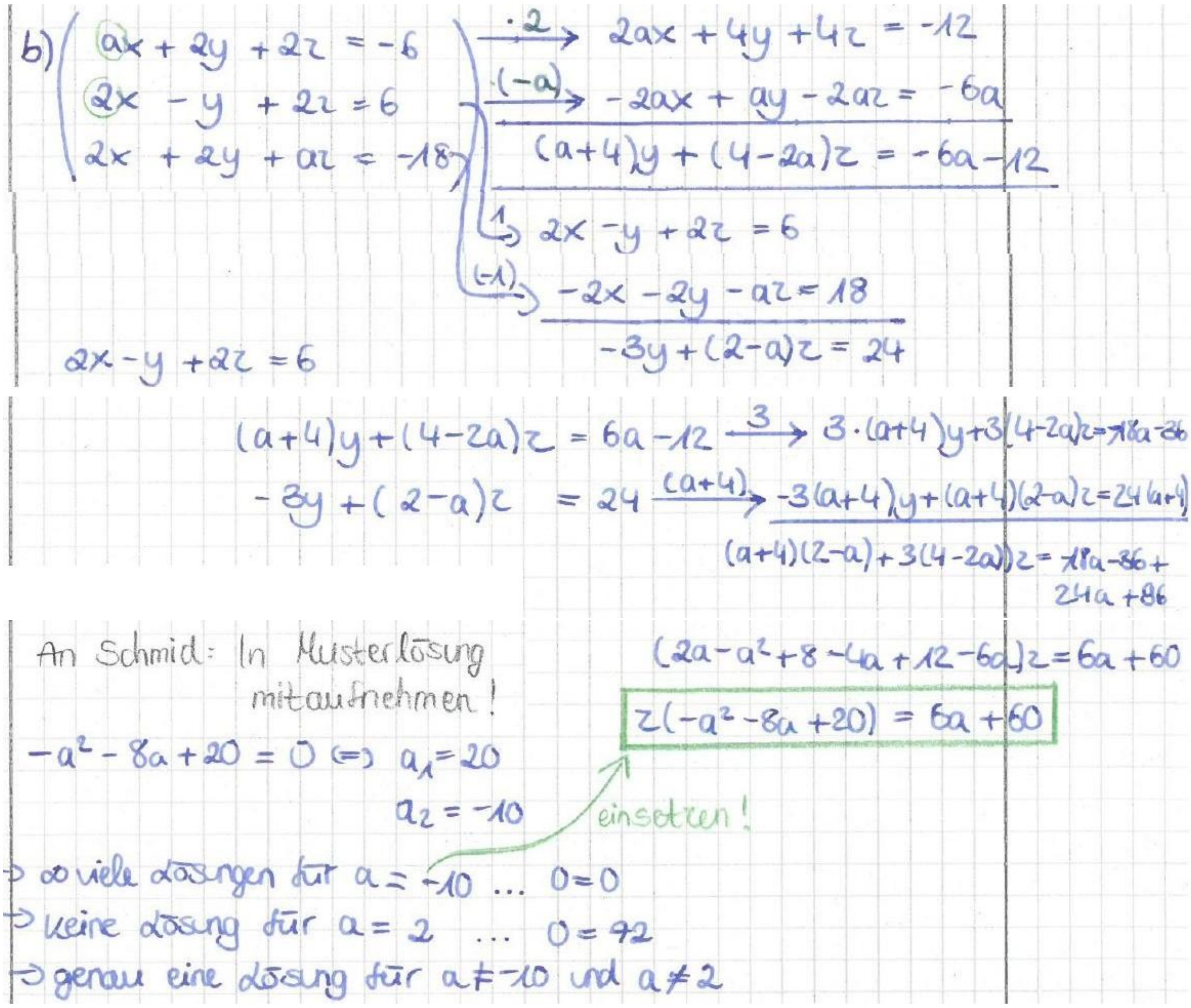
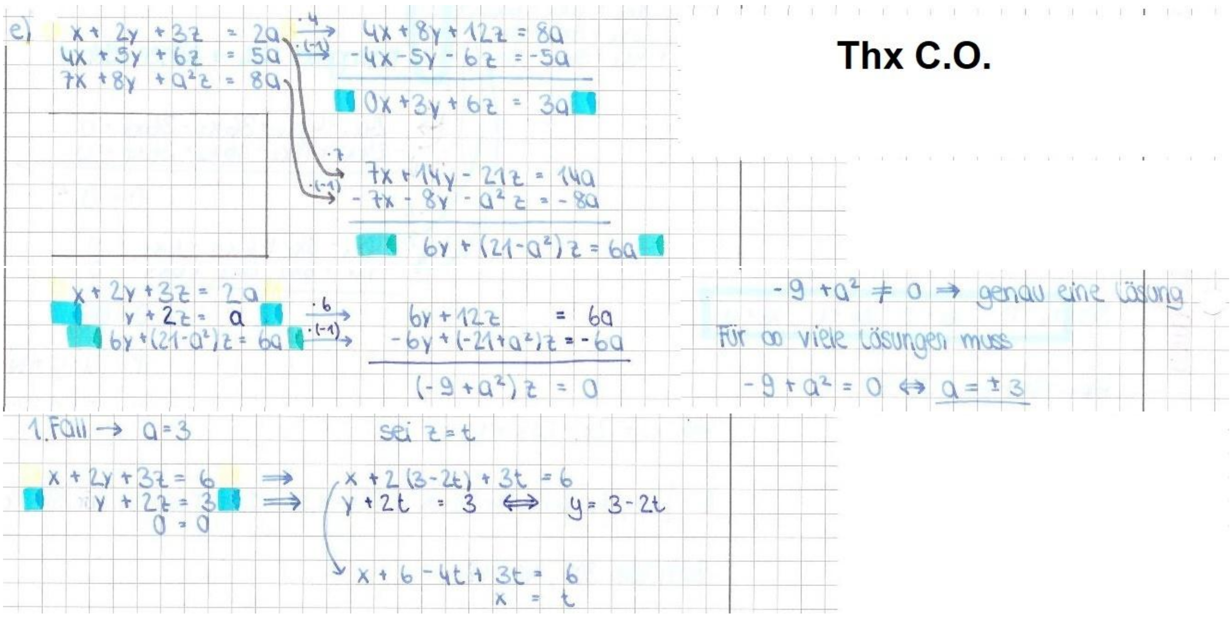


Abb. 500 LGS mit Parameter: aus Aufgabe 280/774 b)

e) $a = 3: \ \mathbb{L} = \{t; 3 - 2t; t | t \in \mathbb{R}\}$ und $a = -3: \ \mathbb{L} = \{(t; -3 - 2t; t) | t \in \mathbb{R}\} \downarrow$.



$\mathbb{L} = \{(t|3-2t|t)$ für alle $t \in \mathbb{R}\}$

2. Fall $\rightarrow a = -3$

$$\begin{array}{l} x + 2y + 3z = -6 \\ y + 2z = -3 \\ 0 = 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} x + 2y + 3t = -6 \Leftrightarrow x + 2(-3-2t) + 3t = -6 \\ y + 2t = -3 \Leftrightarrow y = -3 - 2t \end{array}$$

$\Rightarrow x = t$

$\mathbb{L} = \{(x|y|z) \in \mathbb{R}^3 \mid (t/-3-2t/t)$ für alle $t \in \mathbb{R}\}$

f) (Noch ohne Rechnung) Eindeutig lösbar für $a = \pm 1$. Für $a = 1$ ist das LGS äquivalent zu $x + y + z = 1$, sei $y = r, z = s, x = 1 - r - s \Rightarrow \mathbb{L} = \{(1 - r - s; r; s)$ für alle $r, s \in \mathbb{R}\}$.

Für $a = -1$ ist das LGS äquivalent zu $x + z = 1$ und $y = 0$, sei $z = t \Rightarrow x = 1 - t$, $\mathbb{L} = \{(1 - t; 0; t)$ für alle $t \in \mathbb{R}\}$.

Aufg. 280/775: a) $a = 3.75$; $b = -1.75$; $c = 0.5$; b) $a = 1$; $b = 0$; $c = 0$; c) unlösbar (geht nicht)

$$\left.\begin{array}{l} ax_1 - bx_2 - 4cx_3 = 3 \\ bx_1 + 2cx_2 - ax_3 = -4 \\ 2x_1 - ax_2 - bx_3 = c \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} a - b - 4c = 3 \\ b + 2c - a = -4 \\ 2 - a - b = c \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} a - b - 4c = 3 \\ -a + b + 2c = -4 \\ a + b + c = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a + b + c = 2 \\ -a + b + 2c = -4 \\ a - b - 4c = 3 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} a + b + c = 2 \\ \underline{-a + b + 2c = -4} \\ 2b + 3c = -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a + b + c = 2 \\ \underline{-a + b + 4c = -3} \\ 2b + 5c = -1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} a + b + c = 2 \\ 2b + 3c = -2 \\ 2b + 5c = -1 \end{array} \begin{array}{l} \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \begin{array}{l} \\ 2b + 3c = -2 \\ \underline{-2b - 5c = 1} \\ -2c = -1 \\ c = 0{,}5 \end{array}$$

Thx Nowa Kochana

$2b + 2{,}5 = -1 \Rightarrow b = -1{,}75$

$a - 1{,}75 + 0{,}5 = 2 \Rightarrow a = 3{,}25$

Man muss $a = 3{,}25$ $b = -1{,}75$ und $c = 0{,}5$ wählen

b) Das LGS lautet $\left(\begin{array}{r} 2x_1 - 0x_2 - 8x_3 = 3 \\ 0x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -4 \\ 2x_1 - ax_2 - bx_3 = c \end{array}\right)$

Aufg. 280/776: *a)* $\left(\begin{array}{rrrl} 9x & +3y & +1z & = -3 \\ -4x & +2y & -z & = 8 \\ 12x & -4y & +1z & = 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 4} \\ \xrightarrow{\cdot 9} \end{array} \left(\begin{array}{rrrl} 36x & +12y & +4z & = -12 \\ -36x & +18y & -9z & = 72 \\ \hline & 30y & -5z & = 60 \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{rrrl} 9x & +3y & +1z & = -3 \\ 12x & -4y & +1z & = 0 \\ & (30y & -5z & = 60) \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 12} \\ \xrightarrow{\cdot(-9)} \end{array} \left(\begin{array}{rrrl} 108x & +36y & +12z & = -36 \\ -108x & +36y & -9z & = 0 \\ \hline & 72y & +3z & = -36 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrcr} 30y & -5z & = & 60\\ 72y & +3z & = & -36\\ &&& \end{array}\right) \begin{array}{c}\xrightarrow{:5}\\ \xrightarrow{:3}\\ \end{array} \left(\begin{array}{rrcr} 6y & -z & = & 12\\ 24y & +z & = & -12\\ \hline 30y & & = & 0\end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} z=-12,\\ y=0,\end{array}$$

$9x+3y+z=-3 \Leftrightarrow 9x+3\cdot 0-12=-3 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow \mathbb{L}=\{(1;0;-12)\}$.

b) $$\left(\begin{array}{rrrr} 3x & -4y & +5z & =4\\ x & -2y & +3z & =2\\ x & -y & +z & =1\end{array}\right) \begin{array}{c}\xrightarrow{\cdot 1}\\ \xrightarrow{\cdot(-3)}\\ \end{array} \left(\begin{array}{rrrr} 3x & -4y & +5z & =4\\ -3x & +6y & -9z & =-6\\ \hline \text{(I)} & 2y & -4z & =-2\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrrr} 3x & -4y & +5z & =4\\ x & -y & +z & =1\\ & (2y & -4z & =-2)\end{array}\right) \begin{array}{c}\xrightarrow{\cdot 1}\\ \xrightarrow{\cdot(-3)}\\ \end{array} \left(\begin{array}{rrrr} 3x & -4y & +5z & =4\\ -3x & +3y & -3z & =-3\\ \hline \text{(II)} & -y & +2z & =1\end{array}\right)$$

$-2\cdot\text{(II)}=\text{(I)}$, damit sind die Gleichungen äquivalent und es gibt ∞ viele Lösungen (1 Parameter). Sei $z=t$: $y-2z=-1 \Leftrightarrow y=2t-1$, $\quad x-y+z=1 \Leftrightarrow x=y-z+1=2t-1-t+1=t$ damit ist $\mathbb{L}=\{(t;2t-1;t)|\ t\in\mathbb{R}\}$;

c) $$\left(\begin{array}{rrrr} 10x & -15y & +25z & =20\\ -4x & +6y & -10z & =-8\\ 6x & -9y & +15z & =12\end{array}\right), \begin{array}{c}\xrightarrow{\cdot 1/5}\\ \xrightarrow{\cdot(-1/2)}\\ \xrightarrow{\cdot(1/3)}\end{array} \left(\begin{array}{rrrr} 2x & -3y & +5z & =4\\ 2x & -3y & +5z & =4\\ 2x & -3y & +5z & =4\end{array}\right)$$

damit sind alle Gleichungen äquivalent und die Lösung hat zwei Parameter:
Sei $y=s, z=t \Rightarrow 2x-3y+5z=4 \Leftrightarrow x=2+1.5y-2,5z=2+1.5s-2,5t$ damit ist
$\mathbb{L}=\{(2+1.5s-2.5t;s;t)|\ s,t\in\mathbb{R}\}$;

d) Die erste Zeile entspricht der Rechnung bei b)

$$\left(\begin{array}{rrrr} 3x & -4y & +5z & =4\\ x & -y & +z & =2\\ \text{(I)} & (2y & -4z & =-2)\end{array}\right) \begin{array}{c}\xrightarrow{\cdot 1}\\ \xrightarrow{\cdot(-3)}\\ \end{array} \left(\begin{array}{rrrr} 3x & -4y & +5z & =4\\ -3x & +3y & -3z & =-6\\ \hline \text{(II)} & -y & +2z & =-2\end{array}\right)$$

(I) $+\,2\cdot$ (II) ergibt $0=-6$ Widerspruch; damit ist $\mathbb{L}=\{\}$; das LGS ist unlösbar.

e) $p'(x)=(a_3\cdot x^3+a_2\cdot x^2+a_1\cdot x+a_0)'=3a_3\cdot x^2+2a_2\cdot x+a_1$, $p(0)=0\Rightarrow a_0=0$,

$p(3)=-9\Rightarrow -9=a_3\cdot 3^3+a_2\cdot 3^2+a_1\cdot 3 \Leftrightarrow 9a_3+3a_2+a_1=-3$,

$p(-2)=16\Rightarrow 10=a_3\cdot(-2)^3+a_2\cdot(-2)^2+a_1\cdot(-2) \Leftrightarrow -4a_3+2a_2-a_1=8$,

$p'(-2)=0\Rightarrow 0=3a_3\cdot(-2)^2+2a_2\cdot(-2)+a_1 \Leftrightarrow 0=12a_3-4a_2+a_1$.
Dieses LGS wurde im a) Teil gelöst: $\mathbb{L}=\{(1;0;-12)\}\Rightarrow$ $\qquad p(x)=x^3-12x$.

Erklärung zur Zwillingsaufgabe im Cartoon in Abs 275/51:

Gesucht ist hier **Donald Trump** (man beachte den Haarschopf von Wallstat). Die Aussage 'man muss nicht alles glauben, was stimmt' klingt wie der Begriff 'alternative Fakten'. Mit diesem Begriff versuchte er die (eigene) Lüge salonfähig zu machen.

Aufg. 281/777: a) Eine Matrix ist ein rechteckiges Zahlenfeld. Dabei heißt $\underline{A_{m\times n}}$ dass die Matrix $\underline{A_{m\times n}}$ m Zeilenen und n Spalten hat.

Die Einträge nennt man Komponenten $a_{i,j}$ $1\le i\le \underline{m}$ und $1\le j\le \underline{n}$. i ist der Zeilenindex und j ist der Spaltenindex.

Die Summe zweier Matrizen ist komponentenweise definiert: $\underline{C}:=\underline{A}+\underline{B}$ bedeutet $c_{i,j}:=\underline{a_{i,j}+b_{i,j}}$.

s Multiplikation (und sonst): siehe Abs 293/11.1.3.

b) $a_{1,1}=1$, $a_{1,2}=2$, $a_{1,3}=3$, $a_{1,4}=0$, $a_{2,1}=6$, $a_{2,2}=7$, $a_{2,3}=8$, $a_{2,4}=1$,

$\vec{s}_1 = \binom{1}{6}$; $\vec{s}_2 = \binom{2}{7}$; $\vec{s}_3 = \binom{3}{8}$; $\vec{s}_4 = \binom{0}{1}$; $\vec{z}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{z}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$;

Matrixmultiplikation: oder das Falksche Schema: Motto Zeile $\circ$ Spalte.

$$\underline{B} \circ \underline{A} := \begin{array}{cc|llll} & & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 3 & 4 & 3\cdot1+4\cdot6 & 3\cdot2+4\cdot7 & 3\cdot3+4\cdot8 & 3\cdot4+4\cdot9 \\ 5 & 6 & 5\cdot1+6\cdot6 & 5\cdot2+6\cdot7 & 5\cdot3+6\cdot8 & 5\cdot4+6\cdot9 \\ 7 & 8 & 7\cdot1+8\cdot6 & 7\cdot2+8\cdot7 & 7\cdot3+8\cdot8 & 7\cdot4+8\cdot9 \end{array}$$

$$\underline{B} \circ \underline{A} = \begin{pmatrix} 27 & 34 & 41 & 48 \\ 41 & 52 & 63 & 74 \\ 55 & 70 & 85 & 100 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{B} \circ \underline{A} := \begin{array}{cc|llll} & & 1 & 2 & 3 & 0 \\ & & 6 & 7 & 8 & 1 \\ \hline 3 & 4 & 3\cdot1+4\cdot6 & 3\cdot2+4\cdot7 & 3\cdot3+4\cdot8 & 3\cdot0+4\cdot1 \\ 5 & 6 & 5\cdot1+6\cdot6 & 5\cdot2+6\cdot7 & 5\cdot3+6\cdot8 & 5\cdot0+6\cdot1 \\ 0 & 1 & 0\cdot1+1\cdot6 & 0\cdot2+1\cdot7 & 0\cdot3+1\cdot8 & 0\cdot0+1\cdot1 \end{array}$$

$$\underline{B} \circ \underline{A} = \begin{pmatrix} 27 & 34 & 41 & 4 \\ 41 & 52 & 63 & 6 \\ 6 & 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) $\underline{A}_{m\times n} + \underline{B}_{p\times q}$ geht, falls $m = p$ und $n = q$. Das Ergebnis hat m Zeilen und n Spalten.

$\underline{A}_{m\times n} \circ \underline{B}_{p\times q}$ geht, falls $n = p$. Das Ergebnis hat m Zeilen und q Spalten.

d) i) $\underline{A} \circ \underline{B} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$, und $\underline{B} \circ \underline{A} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$.
Das Matrixprodukt ist nicht kommutativ.
ii) Die Operation die Zeilen und Spalten vertauscht heißt Transposition. Die transponierte Matrix von $\underline{A}$ notieren wir als $\underline{A}^T$. Es gilt $\underline{A}^T = \underline{C}$ und $\underline{D}^T = \underline{B}$. An Stelle des Kommutativgesetzes gilt $\underline{A}^T \circ \underline{B}^T = (\underline{A}^T \circ \underline{B})^T$.

e) Die 900 Ergebnisse dieser Aufgabe wurden mit Sd's Programm MatrixMult (toc2htm.pas) automatisch berechnet. Die Ergebnisse $\underline{A}_i^T \circ \underline{A}_i$, $\underline{A}_i \circ \underline{A}_i^T$ und $\underline{A}_i^T \circ \underline{A}_i^T$ finden Sie aus technischen Gründen am Ende der Aufgabe.

$A_1 \circ A_1 = \begin{pmatrix} 46 & 55 \\ 66 & 79 \end{pmatrix}$,
$A_1 \circ A_2 = \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ -8 & 16 \end{pmatrix}$,
$A_1 \circ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_1 \circ A_4 = \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 20 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_1 \circ A_5 = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 8 & 13 & 12 \end{pmatrix}$,
$A_1 \circ A_6 = \begin{pmatrix} 28 & 42 & 56 \\ 40 & 60 & 80 \end{pmatrix}$,
$A_1 \circ A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_1 \circ A_8 = \begin{pmatrix} 9 & 28 & 26 & 9 \\ 13 & 40 & 38 & 13 \end{pmatrix}$,
$A_1 \circ A_9 =$ nicht möglich,
$A_1 \circ A_{10} =$ nicht möglich,
$A_1 \circ A_{11} =$ nicht möglich,
$A_1 \circ A_{12} =$ nicht möglich,
$A_1 \circ A_{13} =$ nicht möglich,
$A_1 \circ A_{14} =$ nicht möglich,
$A_1 \circ A_{15} =$ nicht möglich,
$A_2 \circ A_1 = \begin{pmatrix} -8 & -9 \\ 16 & 18 \end{pmatrix}$,
$A_2 \circ A_2 = \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ -10 & 20 \end{pmatrix}$,
$A_2 \circ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_2 \circ A_4 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_2 \circ A_5 = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \\ 10 & 2 & -4 \end{pmatrix}$,
$A_2 \circ A_6 = \begin{pmatrix} -6 & -9 & -12 \\ 12 & 18 & 24 \end{pmatrix}$,
$A_2 \circ A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_2 \circ A_8 = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 0 & -1 \\ 2 & 12 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,
$A_2 \circ A_9 =$ nicht möglich,
$A_2 \circ A_{10} =$ nicht möglich,
$A_2 \circ A_{11} =$ nicht möglich,
$A_2 \circ A_{12} =$ nicht möglich,
$A_2 \circ A_{13} =$ nicht möglich,
$A_2 \circ A_{14} =$ nicht möglich,
$A_2 \circ A_{15} =$ nicht möglich,
$A_3 \circ A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_3 \circ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$A_3 \circ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_3 \circ A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_3 \circ A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_3 \circ A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_3 \circ A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_3 \circ A_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_3 \circ A_9 =$ nicht möglich,
$A_3 \circ A_{10} =$ nicht möglich,
$A_3 \circ A_{11} =$ nicht möglich,
$A_3 \circ A_{12} =$ nicht möglich,
$A_3 \circ A_{13} =$ nicht möglich,
$A_3 \circ A_{14} =$ nicht möglich,
$A_3 \circ A_{15} =$ nicht möglich,
$A_4 \circ A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$,
$A_4 \circ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$,
$A_4 \circ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_4 \circ A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_4 \circ A_5 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,
$A_4 \circ A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$,
$A_4 \circ A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_4 \circ A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$,
$A_4 \circ A_9 =$ nicht möglich,
$A_4 \circ A_{10} =$ nicht möglich,
$A_4 \circ A_{11} =$ nicht möglich,
$A_4 \circ A_{12} =$ nicht möglich,
$A_4 \circ A_{13} =$ nicht möglich,
$A_4 \circ A_{14} =$ nicht möglich,
$A_4 \circ A_{15} =$ nicht möglich,
$A_5 \circ A_1 =$ nicht möglich,
$A_5 \circ A_2 =$ nicht möglich,
$A_5 \circ A_3 =$ nicht möglich,
$A_5 \circ A_4 =$ nicht möglich,
$A_5 \circ A_5 =$ nicht möglich,
$A_5 \circ A_6 =$ nicht möglich,
$A_5 \circ A_7 =$ nicht möglich,
$A_5 \circ A_8 =$ nicht möglich,
$A_5 \circ A_9 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,
$A_5 \circ A_{10} = \begin{pmatrix} 17 & 19 & 21 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$,
$A_5 \circ A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -12 & 18 \end{pmatrix}$,
$A_5 \circ A_{12} = \begin{pmatrix} 22 & 11 & -11 & 33 \\ 20 & 10 & -10 & 30 \end{pmatrix}$,
$A_5 \circ A_{13} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$,
$A_5 \circ A_{14} = \begin{pmatrix} 5 & -10 & 15 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_5 \circ A_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 11 & 27 & 17 & 11 \\ 0 & 2 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$,
$A_6 \circ A_1 =$ nicht möglich,
$A_6 \circ A_2 =$ nicht möglich,
$A_6 \circ A_3 =$ nicht möglich,
$A_6 \circ A_4 =$ nicht möglich,
$A_6 \circ A_5 =$ nicht möglich,
$A_6 \circ A_6 =$ nicht möglich,
$A_6 \circ A_7 =$ nicht möglich,
$A_6 \circ A_8 =$ nicht möglich,
$A_6 \circ A_9 = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 10 & 12 & 14 \end{pmatrix}$,
$A_6 \circ A_{10} = \begin{pmatrix} 42 & 51 & 60 \\ 84 & 102 & 120 \end{pmatrix}$,
$A_6 \circ A_{11} = \begin{pmatrix} 14 & -28 & 42 \\ 28 & -56 & 84 \end{pmatrix}$,
$A_6 \circ A_{12} = \begin{pmatrix} 76 & 38 & -38 & 114 \\ 152 & 76 & -76 & 228 \end{pmatrix}$,
$A_6 \circ A_{13} = \begin{pmatrix} 10 & -11 & 22 & 17 \\ 20 & -22 & 44 & 34 \end{pmatrix}$,
$A_6 \circ A_{14} = \begin{pmatrix} 12 & -24 & 36 & -12 \\ 24 & -48 & 72 & -24 \end{pmatrix}$,
$A_6 \circ A_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 26 & 63 & 40 & 26 \\ 0 & 52 & 126 & 80 & 52 \end{pmatrix}$,
$A_7 \circ A_1 =$ nicht möglich,
$A_7 \circ A_2 =$ nicht möglich,
$A_7 \circ A_3 =$ nicht möglich,
$A_7 \circ A_4 =$ nicht möglich,
$A_7 \circ A_5 =$ nicht möglich,
$A_7 \circ A_6 =$ nicht möglich,
$A_7 \circ A_7 =$ nicht möglich,
$A_7 \circ A_8 =$ nicht möglich,
$A_7 \circ A_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_7 \circ A_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_7 \circ A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_7 \circ A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_7 \circ A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_7 \circ A_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_7 \circ A_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_8 \circ A_1 =$ nicht möglich,
$A_8 \circ A_2 =$ nicht möglich,
$A_8 \circ A_3 =$ nicht möglich,
$A_8 \circ A_4 =$ nicht möglich,
$A_8 \circ A_5 =$ nicht möglich,
$A_8 \circ A_6 =$ nicht möglich,
$A_8 \circ A_7 =$ nicht möglich,
$A_8 \circ A_8 =$ nicht möglich,
$A_8 \circ A_9 =$ nicht möglich,
$A_8 \circ A_{10} =$ nicht möglich,
$A_8 \circ A_{11} =$ nicht möglich,
$A_8 \circ A_{12} =$ nicht möglich,
$A_8 \circ A_{13} =$ nicht möglich,

$A_8 \circ A_{14}=$ nicht möglich,
$A_8 \circ A_{15}=$ nicht möglich,
$A_9 \circ A_1=$ nicht möglich,
$A_9 \circ A_2=$ nicht möglich,
$A_9 \circ A_3=$ nicht möglich,
$A_9 \circ A_4=$ nicht möglich,
$A_9 \circ A_5=$ nicht möglich,
$A_9 \circ A_6=$ nicht möglich,
$A_9 \circ A_7=$ nicht möglich,
$A_9 \circ A_8=$ nicht möglich,

$A_9 \circ A_9= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,
$A_9 \circ A_{10}= \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 12 \\ 11 & 13 & 15 \end{pmatrix}$,

$A_9 \circ A_{11}= \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 7 & -14 & 21 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$,
$A_9 \circ A_{12}= \begin{pmatrix} 14 & 7 & -7 & 21 \\ 16 & 8 & -8 & 24 \\ 18 & 9 & -9 & 27 \end{pmatrix}$,

$A_9 \circ A_{13}= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & -4 & 8 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$,
$A_9 \circ A_{14}= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 1 \\ 5 & -10 & 15 & -5 \\ 2 & -4 & 6 & -2 \end{pmatrix}$,

$A_9 \circ A_{15}= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 16 & 9 & 7 \\ 0 & 6 & 15 & 10 & 6 \end{pmatrix}$,
$A_{10} \circ A_1=$ nicht möglich,

$A_{10} \circ A_2=$ nicht möglich,
$A_{10} \circ A_3=$ nicht möglich,
$A_{10} \circ A_4=$ nicht möglich,
$A_{10} \circ A_5=$ nicht möglich,
$A_{10} \circ A_6=$ nicht möglich,
$A_{10} \circ A_7=$ nicht möglich,
$A_{10} \circ A_8=$ nicht möglich,
$A_{10} \circ A_9= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 9 & 10 & 11 \\ 15 & 16 & 17 \end{pmatrix}$,

$A_{10} \circ A_{10}= \begin{pmatrix} 30 & 36 & 42 \\ 66 & 81 & 96 \\ 102 & 126 & 150 \end{pmatrix}$,
$A_{10} \circ A_{11}= \begin{pmatrix} 9 & -18 & 27 \\ 24 & -48 & 72 \\ 39 & -78 & 117 \end{pmatrix}$,

$A_{10} \circ A_{12}= \begin{pmatrix} 52 & 26 & -26 & 78 \\ 124 & 62 & -62 & 186 \\ 196 & 98 & -98 & 294 \end{pmatrix}$,
$A_{10} \circ A_{13}= \begin{pmatrix} 7 & -8 & 16 & 11 \\ 16 & -17 & 34 & 29 \\ 25 & -26 & 52 & 47 \end{pmatrix}$,

$A_{10} \circ A_{14}= \begin{pmatrix} 9 & -18 & 27 & -9 \\ 18 & -36 & 54 & -18 \\ 27 & -54 & 81 & -27 \end{pmatrix}$,
$A_{10} \circ A_{15}= \begin{pmatrix} 0 & 19 & 46 & 29 & 19 \\ 0 & 40 & 97 & 62 & 40 \\ 0 & 61 & 148 & 95 & 61 \end{pmatrix}$,

$A_{11} \circ A_1=$ nicht möglich,
$A_{11} \circ A_2=$ nicht möglich,
$A_{11} \circ A_3=$ nicht möglich,
$A_{11} \circ A_4=$ nicht möglich,
$A_{11} \circ A_5=$ nicht möglich,
$A_{11} \circ A_6=$ nicht möglich,
$A_{11} \circ A_7=$ nicht möglich,
$A_{11} \circ A_8=$ nicht möglich,

$A_{11} \circ A_9= \begin{pmatrix} -4 & 16 & 4 \\ 2 & -8 & -2 \\ -3 & 12 & 3 \end{pmatrix}$,
$A_{11} \circ A_{10}= \begin{pmatrix} 56 & 64 & 72 \\ -28 & -32 & -36 \\ 42 & 48 & 54 \end{pmatrix}$,

$A_{11} \circ A_{11}= \begin{pmatrix} 68 & -136 & 204 \\ -34 & 68 & -102 \\ 51 & -102 & 153 \end{pmatrix}$,
$A_{11} \circ A_{12}= \begin{pmatrix} 80 & 40 & -40 & 120 \\ -40 & -20 & 20 & -60 \\ 60 & 30 & -30 & 90 \end{pmatrix}$,

$A_{11} \circ A_{13}= \begin{pmatrix} 28 & -48 & 96 & -4 \\ -14 & 24 & -48 & 2 \\ 21 & -36 & 72 & -3 \end{pmatrix}$,
$A_{11} \circ A_{14}= \begin{pmatrix} 68 & -136 & 204 & -68 \\ -34 & 68 & -102 & 34 \\ 51 & -102 & 153 & -51 \end{pmatrix}$,

$A_{11} \circ A_{15}= \begin{pmatrix} 0 & 76 & 168 & 84 & 76 \\ 0 & -38 & -84 & -42 & -38 \\ 0 & 57 & 126 & 63 & 57 \end{pmatrix}$,
$A_{12} \circ A_1=$ nicht möglich,

$A_{12} \circ A_2=$ nicht möglich,
$A_{12} \circ A_3=$ nicht möglich,
$A_{12} \circ A_4=$ nicht möglich,
$A_{12} \circ A_5=$ nicht möglich,
$A_{12} \circ A_6=$ nicht möglich,
$A_{12} \circ A_7=$ nicht möglich,
$A_{12} \circ A_8=$ nicht möglich,
$A_{12} \circ A_9=$ nicht möglich,
$A_{12} \circ A_{10}=$ nicht möglich,
$A_{12} \circ A_{11}=$ nicht möglich,
$A_{12} \circ A_{12}=$ nicht möglich,
$A_{12} \circ A_{13}=$ nicht möglich,
$A_{12} \circ A_{14}=$ nicht möglich,
$A_{12} \circ A_{15}=$ nicht möglich,
$A_{13} \circ A_1=$ nicht möglich,
$A_{13} \circ A_2=$ nicht möglich,
$A_{13} \circ A_3=$ nicht möglich,
$A_{13} \circ A_4=$ nicht möglich,
$A_{13} \circ A_5=$ nicht möglich,
$A_{13} \circ A_6=$ nicht möglich,
$A_{13} \circ A_7=$ nicht möglich,
$A_{13} \circ A_8=$ nicht möglich,
$A_{13} \circ A_9=$ nicht möglich,
$A_{13} \circ A_{10}=$ nicht möglich,
$A_{13} \circ A_{11}=$ nicht möglich,
$A_{13} \circ A_{12}=$ nicht möglich,
$A_{13} \circ A_{13}=$ nicht möglich,
$A_{13} \circ A_{14}=$ nicht möglich,
$A_{13} \circ A_{15}=$ nicht möglich,
$A_{14} \circ A_1=$ nicht möglich,

$A_{14} \circ A_2=$ nicht möglich,
$A_{14} \circ A_4=$ nicht möglich,
$A_{14} \circ A_6=$ nicht möglich,
$A_{14} \circ A_8=$ nicht möglich,
$A_{14} \circ A_{10}=$ nicht möglich,
$A_{14} \circ A_{12}=$ nicht möglich,
$A_{14} \circ A_{14}=$ nicht möglich,
$A_{15} \circ A_1=$ nicht möglich,
$A_{15} \circ A_3=$ nicht möglich,
$A_{15} \circ A_5=$ nicht möglich,
$A_{15} \circ A_7=$ nicht möglich,
$A_{15} \circ A_9=$ nicht möglich,
$A_{15} \circ A_{11}=$ nicht möglich,
$A_{15} \circ A_{13}=$ nicht möglich,
$A_{15} \circ A_{15}=$ nicht möglich,
$A_1^T \circ A_3= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_1^T \circ A_5= \begin{pmatrix} 8 & 10 & 8 \\ 9 & 12 & 10 \end{pmatrix}$,
$A_1^T \circ A_7= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_1^T \circ A_9=$ nicht möglich,
$A_1^T \circ A_{11}=$ nicht möglich,
$A_1^T \circ A_{13}=$ nicht möglich,
$A_1^T \circ A_{15}=$ nicht möglich,
$A_2^T \circ A_3= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_2^T \circ A_5= \begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \\ 10 & 2 & -4 \end{pmatrix}$,
$A_2^T \circ A_7= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_2^T \circ A_9=$ nicht möglich,
$A_2^T \circ A_{11}=$ nicht möglich,
$A_2^T \circ A_{13}=$ nicht möglich,
$A_2^T \circ A_{15}=$ nicht möglich,
$A_3^T \circ A_2= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_3^T \circ A_5= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_3^T \circ A_7= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_3^T \circ A_9=$ nicht möglich,
$A_3^T \circ A_{11}=$ nicht möglich,
$A_3^T \circ A_{13}=$ nicht möglich,
$A_3^T \circ A_{15}=$ nicht möglich,
$A_4^T \circ A_2= \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_4^T \circ A_5= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_4^T \circ A_7= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_4^T \circ A_9=$ nicht möglich,
$A_4^T \circ A_{11}=$ nicht möglich,
$A_4^T \circ A_{13}=$ nicht möglich,
$A_4^T \circ A_{15}=$ nicht möglich,

$A_{14} \circ A_3=$ nicht möglich,
$A_{14} \circ A_5=$ nicht möglich,
$A_{14} \circ A_7=$ nicht möglich,
$A_{14} \circ A_9=$ nicht möglich,
$A_{14} \circ A_{11}=$ nicht möglich,
$A_{14} \circ A_{13}=$ nicht möglich,
$A_{14} \circ A_{15}=$ nicht möglich,
$A_{15} \circ A_2=$ nicht möglich,
$A_{15} \circ A_4=$ nicht möglich,
$A_{15} \circ A_6=$ nicht möglich,
$A_{15} \circ A_8=$ nicht möglich,
$A_{15} \circ A_{10}=$ nicht möglich,
$A_{15} \circ A_{12}=$ nicht möglich,
$A_{15} \circ A_{14}=$ nicht möglich,
$A_1^T \circ A_2= \begin{pmatrix} -8 & 16 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}$,
$A_1^T \circ A_4= \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 19 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_1^T \circ A_6= \begin{pmatrix} 32 & 48 & 64 \\ 38 & 57 & 76 \end{pmatrix}$,
$A_1^T \circ A_8= \begin{pmatrix} 10 & 32 & 28 & 10 \\ 12 & 38 & 34 & 12 \end{pmatrix}$,
$A_1^T \circ A_{10}=$ nicht möglich,
$A_1^T \circ A_{12}=$ nicht möglich,
$A_1^T \circ A_{14}=$ nicht möglich,
$A_2^T \circ A_1= \begin{pmatrix} -8 & -9 \\ 16 & 18 \end{pmatrix}$,
$A_2^T \circ A_4= \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_2^T \circ A_6= \begin{pmatrix} -6 & -9 & -12 \\ 12 & 18 & 24 \end{pmatrix}$,
$A_2^T \circ A_8= \begin{pmatrix} -1 & -6 & 0 & -1 \\ 2 & 12 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,
$A_2^T \circ A_{10}=$ nicht möglich,
$A_2^T \circ A_{12}=$ nicht möglich,
$A_2^T \circ A_{14}=$ nicht möglich,
$A_3^T \circ A_1= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_3^T \circ A_4= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_3^T \circ A_6= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_3^T \circ A_8= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_3^T \circ A_{10}=$ nicht möglich,
$A_3^T \circ A_{12}=$ nicht möglich,
$A_3^T \circ A_{14}=$ nicht möglich,
$A_4^T \circ A_1= \begin{pmatrix} 16 & 19 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_4^T \circ A_3= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_4^T \circ A_6= \begin{pmatrix} 10 & 15 & 20 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_4^T \circ A_8= \begin{pmatrix} 3 & 10 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_4^T \circ A_{10}=$ nicht möglich,
$A_4^T \circ A_{12}=$ nicht möglich,
$A_4^T \circ A_{14}=$ nicht möglich,
$A_5^T \circ A_1= \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 10 & 12 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$,

$A_5^T \circ A_2 = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $A_5^T \circ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$A_5^T \circ A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A_5^T \circ A_6 = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 12 \\ 6 & 9 & 12 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$,

$A_5^T \circ A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_5^T \circ A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$,

$A_5^T \circ A_9 =$ nicht möglich, $A_5^T \circ A_{10} =$ nicht möglich,
$A_5^T \circ A_{11} =$ nicht möglich, $A_5^T \circ A_{12} =$ nicht möglich,
$A_5^T \circ A_{13} =$ nicht möglich, $A_5^T \circ A_{14} =$ nicht möglich,

$A_5^T \circ A_{15} =$ nicht möglich, $A_6^T \circ A_1 = \begin{pmatrix} 32 & 38 \\ 48 & 57 \\ 64 & 76 \end{pmatrix}$,

$A_6^T \circ A_2 = \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ -9 & 18 \\ -12 & 24 \end{pmatrix}$, $A_6^T \circ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$A_6^T \circ A_4 = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 15 & 0 \\ 20 & 0 \end{pmatrix}$, $A_6^T \circ A_5 = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 \\ 9 & 9 & 6 \\ 12 & 12 & 8 \end{pmatrix}$,

$A_6^T \circ A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_6^T \circ A_8 = \begin{pmatrix} 6 & 20 & 16 & 6 \\ 9 & 30 & 24 & 9 \\ 12 & 40 & 32 & 12 \end{pmatrix}$,

$A_6^T \circ A_9 =$ nicht möglich, $A_6^T \circ A_{10} =$ nicht möglich,
$A_6^T \circ A_{11} =$ nicht möglich, $A_6^T \circ A_{12} =$ nicht möglich,
$A_6^T \circ A_{13} =$ nicht möglich, $A_6^T \circ A_{14} =$ nicht möglich,

$A_6^T \circ A_{15} =$ nicht möglich, $A_7^T \circ A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$A_7^T \circ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_7^T \circ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$A_7^T \circ A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_7^T \circ A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$A_7^T \circ A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_7^T \circ A_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$A_7^T \circ A_9 =$ nicht möglich, $A_7^T \circ A_{10} =$ nicht möglich,
$A_7^T \circ A_{11} =$ nicht möglich, $A_7^T \circ A_{12} =$ nicht möglich,
$A_7^T \circ A_{13} =$ nicht möglich, $A_7^T \circ A_{14} =$ nicht möglich,

$A_7^T \circ A_{15} =$ nicht möglich, $A_8^T \circ A_1 = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 32 & 38 \\ 28 & 34 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$,

$A_8^T \circ A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 12 \\ 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_8^T \circ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$A_8^T \circ A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 10 & 0 \\ 8 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $A_8^T \circ A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 6 & 6 & 4 \\ 0 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,

$A_8^T \circ A_6 = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 12 \\ 20 & 30 & 40 \\ 16 & 24 & 32 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$, $A_8^T \circ A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$A_8^T \circ A_9 =$ nicht möglich, $A_8^T \circ A_{10} =$ nicht möglich,
$A_8^T \circ A_{11} =$ nicht möglich, $A_8^T \circ A_{12} =$ nicht möglich,
$A_8^T \circ A_{13} =$ nicht möglich, $A_8^T \circ A_{14} =$ nicht möglich,
$A_8^T \circ A_{15} =$ nicht möglich, $A_9^T \circ A_1 =$ nicht möglich,
$A_9^T \circ A_2 =$ nicht möglich, $A_9^T \circ A_3 =$ nicht möglich,
$A_9^T \circ A_4 =$ nicht möglich, $A_9^T \circ A_5 =$ nicht möglich,
$A_9^T \circ A_6 =$ nicht möglich, $A_9^T \circ A_7 =$ nicht möglich,

$A_9^T \circ A_8 =$ nicht möglich,

$A_9^T \circ A_{10} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 12 \\ 11 & 13 & 15 \end{pmatrix},$

$A_9^T \circ A_{11} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 7 & -14 & 21 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix},$

$A_9^T \circ A_{12} = \begin{pmatrix} 14 & 7 & -7 & 21 \\ 16 & 8 & -8 & 24 \\ 18 & 9 & -9 & 27 \end{pmatrix},$

$A_9^T \circ A_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & -4 & 8 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & 4 \end{pmatrix},$

$A_9^T \circ A_{14} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 1 \\ 5 & -10 & 15 & -5 \\ 2 & -4 & 6 & -2 \end{pmatrix},$

$A_9^T \circ A_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 16 & 9 & 7 \\ 0 & 6 & 15 & 10 & 6 \end{pmatrix},$

$A_{10}^T \circ A_1 =$ nicht möglich,

$A_{10}^T \circ A_2 =$ nicht möglich,

$A_{10}^T \circ A_3 =$ nicht möglich,

$A_{10}^T \circ A_4 =$ nicht möglich,

$A_{10}^T \circ A_5 =$ nicht möglich,

$A_{10}^T \circ A_6 =$ nicht möglich,

$A_{10}^T \circ A_7 =$ nicht möglich,

$A_{10}^T \circ A_8 =$ nicht möglich,

$A_{10}^T \circ A_9 = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 7 & 10 & 13 \\ 9 & 12 & 15 \end{pmatrix},$

$A_{10}^T \circ A_{11} = \begin{pmatrix} 17 & -34 & 51 \\ 22 & -44 & 66 \\ 27 & -54 & 81 \end{pmatrix},$

$A_{10}^T \circ A_{12} = \begin{pmatrix} 108 & 54 & -54 & 162 \\ 132 & 66 & -66 & 198 \\ 156 & 78 & -78 & 234 \end{pmatrix},$

$A_{10}^T \circ A_{13} = \begin{pmatrix} 15 & -18 & 36 & 21 \\ 18 & -21 & 42 & 27 \\ 21 & -24 & 48 & 33 \end{pmatrix},$

$A_{10}^T \circ A_{14} = \begin{pmatrix} 21 & -42 & 63 & -21 \\ 24 & -48 & 72 & -24 \\ 27 & -54 & 81 & -27 \end{pmatrix},$

$A_{10}^T \circ A_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 43 & 104 & 65 & 43 \\ 0 & 50 & 121 & 76 & 50 \\ 0 & 57 & 138 & 87 & 57 \end{pmatrix},$

$A_{11}^T \circ A_1 =$ nicht möglich,

$A_{11}^T \circ A_2 =$ nicht möglich,

$A_{11}^T \circ A_3 =$ nicht möglich,

$A_{11}^T \circ A_4 =$ nicht möglich,

$A_{11}^T \circ A_5 =$ nicht möglich,

$A_{11}^T \circ A_6 =$ nicht möglich,

$A_{11}^T \circ A_7 =$ nicht möglich,

$A_{11}^T \circ A_8 =$ nicht möglich,

$A_{11}^T \circ A_9 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -4 & -14 & -2 \\ 6 & 21 & 3 \end{pmatrix},$

$A_{11}^T \circ A_{10} = \begin{pmatrix} 17 & 22 & 27 \\ -34 & -44 & -54 \\ 51 & 66 & 81 \end{pmatrix},$

$A_{11}^T \circ A_{12} = \begin{pmatrix} 38 & 19 & -19 & 57 \\ -76 & -38 & 38 & -114 \\ 114 & 57 & -57 & 171 \end{pmatrix},$

$A_{11}^T \circ A_{13} = \begin{pmatrix} 10 & -15 & 30 & 5 \\ -20 & 30 & -60 & -10 \\ 30 & -45 & 90 & 15 \end{pmatrix},$

$A_{11}^T \circ A_{14} = \begin{pmatrix} 20 & -40 & 60 & -20 \\ -40 & 80 & -120 & 40 \\ 60 & -120 & 180 & -60 \end{pmatrix},$

$A_{11}^T \circ A_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 22 & 48 & 24 & 22 \\ 0 & -44 & -96 & -48 & -44 \\ 0 & 66 & 144 & 72 & 66 \end{pmatrix},$

$A_{12}^T \circ A_1 =$ nicht möglich,

$A_{12}^T \circ A_2 =$ nicht möglich,

$A_{12}^T \circ A_3 =$ nicht möglich,

$A_{12}^T \circ A_4 =$ nicht möglich,

$A_{12}^T \circ A_5 =$ nicht möglich,

$A_{12}^T \circ A_6 =$ nicht möglich,

$A_{12}^T \circ A_7 =$ nicht möglich,

$A_{12}^T \circ A_8 =$ nicht möglich,

$A_{12}^T \circ A_9 = \begin{pmatrix} 14 & 16 & 18 \\ 7 & 8 & 9 \\ -7 & -8 & -9 \\ 21 & 24 & 27 \end{pmatrix},$

$A_{12}^T \circ A_{10} = \begin{pmatrix} 108 & 132 & 156 \\ 54 & 66 & 78 \\ -54 & -66 & -78 \\ 162 & 198 & 234 \end{pmatrix},$

$A_{12}^T \circ A_{11} = \begin{pmatrix} 38 & -76 & 114 \\ 19 & -38 & 57 \\ -19 & 38 & -57 \\ 57 & -114 & 171 \end{pmatrix},$

$A_{12}^T \circ A_{13} = \begin{pmatrix} 26 & -28 & 56 & 46 \\ 13 & -14 & 28 & 23 \\ -13 & 14 & -28 & -23 \\ 39 & -42 & 84 & 69 \end{pmatrix},$

$A_{12}^T \circ A_{14} = \begin{pmatrix} 30 & -60 & 90 & -30 \\ 15 & -30 & 45 & -15 \\ -15 & 30 & -45 & 15 \\ 45 & -90 & 135 & -45 \end{pmatrix},$

$A_{12}^T \circ A_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 66 & 160 & 102 & 66 \\ 0 & 33 & 80 & 51 & 33 \\ 0 & -33 & -80 & -51 & -33 \\ 0 & 99 & 240 & 153 & 99 \end{pmatrix},$

$A_{13}^T \circ A_1 =$ nicht möglich,

$A_{13}^T \circ A_2 =$ nicht möglich,

$A_{13}^T \circ A_3 =$ nicht möglich,

$A_{13}^T \circ A_4 =$ nicht möglich,

$A_{13}^T \circ A_5 =$ nicht möglich,

$A_{13}^T \circ A_6 =$ nicht möglich,

$A_{13}^T \circ A_7 =$ nicht möglich,

$A_{13}^T \circ A_8 =$ nicht möglich,

$A_{13}^T \circ A_9 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 8 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix},$

$A_{13}^T \circ A_{10} = \begin{pmatrix} 15 & 18 & 21 \\ -18 & -21 & -24 \\ 36 & 42 & 48 \\ 21 & 27 & 33 \end{pmatrix}$, $A_{13}^T \circ A_{11} = \begin{pmatrix} 10 & -20 & 30 \\ -15 & 30 & -45 \\ 30 & -60 & 90 \\ 5 & -10 & 15 \end{pmatrix}$,

$A_{13}^T \circ A_{12} = \begin{pmatrix} 26 & 13 & -13 & 39 \\ -28 & -14 & 14 & -42 \\ 56 & 28 & -28 & 84 \\ 46 & 23 & -23 & 69 \end{pmatrix}$, $A_{13}^T \circ A_{14} = \begin{pmatrix} 9 & -18 & 27 & -9 \\ -15 & 30 & -45 & 15 \\ 30 & -60 & 90 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$A_{13}^T \circ A_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 13 & 30 & 17 & 13 \\ 0 & -19 & -43 & -23 & -19 \\ 0 & 38 & 86 & 46 & 38 \\ 0 & 8 & 21 & 16 & 8 \end{pmatrix}$, $A_{14}^T \circ A_1 =$ nicht möglich,

$A_{14}^T \circ A_2 =$ nicht möglich, $A_{14}^T \circ A_3 =$ nicht möglich,
$A_{14}^T \circ A_4 =$ nicht möglich, $A_{14}^T \circ A_5 =$ nicht möglich,
$A_{14}^T \circ A_6 =$ nicht möglich, $A_{14}^T \circ A_7 =$ nicht möglich,

$A_{14}^T \circ A_8 =$ nicht möglich, $A_{14}^T \circ A_9 = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 2 & -10 & -4 \\ -3 & 15 & 6 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$,

$A_{14}^T \circ A_{10} = \begin{pmatrix} 21 & 24 & 27 \\ -42 & -48 & -54 \\ 63 & 72 & 81 \\ -21 & -24 & -27 \end{pmatrix}$, $A_{14}^T \circ A_{11} = \begin{pmatrix} 20 & -40 & 60 \\ -40 & 80 & -120 \\ 60 & -120 & 180 \\ -20 & 40 & -60 \end{pmatrix}$,

$A_{14}^T \circ A_{12} = \begin{pmatrix} 30 & 15 & -15 & 45 \\ -60 & -30 & 30 & -90 \\ 90 & 45 & -45 & 135 \\ -30 & -15 & 15 & -45 \end{pmatrix}$, $A_{14}^T \circ A_{13} = \begin{pmatrix} 9 & -15 & 30 & 0 \\ -18 & 30 & -60 & 0 \\ 27 & -45 & 90 & 0 \\ -9 & 15 & -30 & 0 \end{pmatrix}$,

$A_{14}^T \circ A_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 25 & 56 & 29 & 25 \\ 0 & -50 & -112 & -58 & -50 \\ 0 & 75 & 168 & 87 & 75 \\ 0 & -25 & -56 & -29 & -25 \end{pmatrix}$, $A_{15}^T \circ A_1 =$ nicht möglich,

$A_{15}^T \circ A_2 =$ nicht möglich, $A_{15}^T \circ A_3 =$ nicht möglich,
$A_{15}^T \circ A_4 =$ nicht möglich, $A_{15}^T \circ A_5 =$ nicht möglich,
$A_{15}^T \circ A_6 =$ nicht möglich, $A_{15}^T \circ A_7 =$ nicht möglich,

$A_{15}^T \circ A_8 =$ nicht möglich, $A_{15}^T \circ A_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 6 \\ 3 & 16 & 15 \\ 3 & 9 & 10 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$,

$A_{15}^T \circ A_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 43 & 50 & 57 \\ 104 & 121 & 138 \\ 65 & 76 & 87 \\ 43 & 50 & 57 \end{pmatrix}$, $A_{15}^T \circ A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 22 & -44 & 66 \\ 48 & -96 & 144 \\ 24 & -48 & 72 \\ 22 & -44 & 66 \end{pmatrix}$,

$A_{15}^T \circ A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 66 & 33 & -33 & 99 \\ 160 & 80 & -80 & 240 \\ 102 & 51 & -51 & 153 \\ 66 & 33 & -33 & 99 \end{pmatrix}$, $A_{15}^T \circ A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & -19 & 38 & 8 \\ 30 & -43 & 86 & 21 \\ 17 & -23 & 46 & 16 \\ 13 & -19 & 38 & 8 \end{pmatrix}$,

$A_{15}^T \circ A_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 25 & -50 & 75 & -25 \\ 56 & -112 & 168 & -56 \\ 29 & -58 & 87 & -29 \\ 25 & -50 & 75 & -25 \end{pmatrix}$, $A_1 \circ A_2^T = \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ -8 & 16 \end{pmatrix}$,

$A_1 \circ A_3^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_1 \circ A_4^T = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$,
$A_1 \circ A_5^T =$ nicht möglich, $A_1 \circ A_6^T =$ nicht möglich,
$A_1 \circ A_7^T =$ nicht möglich, $A_1 \circ A_8^T =$ nicht möglich,
$A_1 \circ A_9^T =$ nicht möglich, $A_1 \circ A_{10}^T =$ nicht möglich,
$A_1 \circ A_{11}^T =$ nicht möglich, $A_1 \circ A_{12}^T =$ nicht möglich,
$A_1 \circ A_{13}^T =$ nicht möglich, $A_1 \circ A_{14}^T =$ nicht möglich,
$A_1 \circ A_{15}^T =$ nicht möglich, $A_2 \circ A_1^T = \begin{pmatrix} -6 & -8 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$,
$A_2 \circ A_3^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 \circ A_4^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$,
$A_2 \circ A_5^T =$ nicht möglich, $A_2 \circ A_6^T =$ nicht möglich,
$A_2 \circ A_7^T =$ nicht möglich, $A_2 \circ A_8^T =$ nicht möglich,

$A_2 \circ A_9^T =$ nicht möglich,
$A_2 \circ A_{10}^T =$ nicht möglich,
$A_2 \circ A_{11}^T =$ nicht möglich,
$A_2 \circ A_{12}^T =$ nicht möglich,
$A_2 \circ A_{13}^T =$ nicht möglich,
$A_2 \circ A_{14}^T =$ nicht möglich,
$A_2 \circ A_{15}^T =$ nicht möglich,
$A_3 \circ A_1^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_3 \circ A_2^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_3 \circ A_4^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_3 \circ A_5^T =$ nicht möglich,
$A_3 \circ A_6^T =$ nicht möglich,
$A_3 \circ A_7^T =$ nicht möglich,
$A_3 \circ A_8^T =$ nicht möglich,
$A_3 \circ A_9^T =$ nicht möglich,
$A_3 \circ A_{10}^T =$ nicht möglich,
$A_3 \circ A_{11}^T =$ nicht möglich,
$A_3 \circ A_{12}^T =$ nicht möglich,
$A_3 \circ A_{13}^T =$ nicht möglich,
$A_3 \circ A_{14}^T =$ nicht möglich,
$A_3 \circ A_{15}^T =$ nicht möglich,
$A_4 \circ A_1^T = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$,
$A_4 \circ A_2^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$,
$A_4 \circ A_3^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_4 \circ A_5^T =$ nicht möglich,
$A_4 \circ A_6^T =$ nicht möglich,
$A_4 \circ A_7^T =$ nicht möglich,
$A_4 \circ A_8^T =$ nicht möglich,
$A_4 \circ A_9^T =$ nicht möglich,
$A_4 \circ A_{10}^T =$ nicht möglich,
$A_4 \circ A_{11}^T =$ nicht möglich,
$A_4 \circ A_{12}^T =$ nicht möglich,
$A_4 \circ A_{13}^T =$ nicht möglich,
$A_4 \circ A_{14}^T =$ nicht möglich,
$A_4 \circ A_{15}^T =$ nicht möglich,
$A_5 \circ A_1^T =$ nicht möglich,
$A_5 \circ A_2^T =$ nicht möglich,
$A_5 \circ A_3^T =$ nicht möglich,
$A_5 \circ A_4^T =$ nicht möglich,
$A_5 \circ A_6^T = \begin{pmatrix} 9 & 18 \\ 7 & 14 \end{pmatrix}$,
$A_5 \circ A_7^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_5 \circ A_8^T =$ nicht möglich,
$A_5 \circ A_9^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,
$A_5 \circ A_{10}^T = \begin{pmatrix} 7 & 13 & 19 \\ 4 & 13 & 22 \end{pmatrix}$,
$A_5 \circ A_{11}^T = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_5 \circ A_{12}^T =$ nicht möglich,
$A_5 \circ A_{13}^T =$ nicht möglich,
$A_5 \circ A_{14}^T =$ nicht möglich,
$A_5 \circ A_{15}^T =$ nicht möglich,
$A_6 \circ A_1^T =$ nicht möglich,
$A_6 \circ A_2^T =$ nicht möglich,
$A_6 \circ A_3^T =$ nicht möglich,
$A_6 \circ A_4^T =$ nicht möglich,
$A_6 \circ A_5^T = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 18 & 14 \end{pmatrix}$,
$A_6 \circ A_7^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_6 \circ A_8^T =$ nicht möglich,
$A_6 \circ A_9^T = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 10 & 12 & 14 \end{pmatrix}$,
$A_6 \circ A_{10}^T = \begin{pmatrix} 20 & 47 & 74 \\ 40 & 94 & 148 \end{pmatrix}$,
$A_6 \circ A_{11}^T = \begin{pmatrix} 32 & -16 & 24 \\ 64 & -32 & 48 \end{pmatrix}$,
$A_6 \circ A_{12}^T =$ nicht möglich,
$A_6 \circ A_{13}^T =$ nicht möglich,
$A_6 \circ A_{14}^T =$ nicht möglich,
$A_6 \circ A_{15}^T =$ nicht möglich,
$A_7 \circ A_1^T =$ nicht möglich,
$A_7 \circ A_2^T =$ nicht möglich,
$A_7 \circ A_3^T =$ nicht möglich,
$A_7 \circ A_4^T =$ nicht möglich,
$A_7 \circ A_5^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_7 \circ A_6^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_7 \circ A_8^T =$ nicht möglich,
$A_7 \circ A_9^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_7 \circ A_{10}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_7 \circ A_{11}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_7 \circ A_{12}^T =$ nicht möglich,
$A_7 \circ A_{13}^T =$ nicht möglich,
$A_7 \circ A_{14}^T =$ nicht möglich,
$A_7 \circ A_{15}^T =$ nicht möglich,
$A_8 \circ A_1^T =$ nicht möglich,
$A_8 \circ A_2^T =$ nicht möglich,
$A_8 \circ A_3^T =$ nicht möglich,
$A_8 \circ A_4^T =$ nicht möglich,
$A_8 \circ A_5^T =$ nicht möglich,
$A_8 \circ A_6^T =$ nicht möglich,
$A_8 \circ A_7^T =$ nicht möglich,
$A_8 \circ A_9^T =$ nicht möglich,
$A_8 \circ A_{10}^T =$ nicht möglich,
$A_8 \circ A_{11}^T =$ nicht möglich,
$A_8 \circ A_{12}^T = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 21 & 28 & 35 \end{pmatrix}$,

$A_8 \circ A_{13}^T = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 21 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$,
$A_8 \circ A_{14}^T = \begin{pmatrix} 8 & -16 & 32 \\ -2 & 4 & -8 \end{pmatrix}$,
$A_8 \circ A_{15}^T =$ nicht möglich,
$A_9 \circ A_1^T =$ nicht möglich,
$A_9 \circ A_2^T =$ nicht möglich,
$A_9 \circ A_3^T =$ nicht möglich,
$A_9 \circ A_4^T =$ nicht möglich,
$A_9 \circ A_5^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$,
$A_9 \circ A_6^T = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 6 & 12 \\ 7 & 14 \end{pmatrix}$,
$A_9 \circ A_7^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_9 \circ A_8^T =$ nicht möglich,
$A_9 \circ A_{10}^T = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 15 \\ 4 & 10 & 16 \\ 5 & 11 & 17 \end{pmatrix}$,
$A_9 \circ A_{11}^T = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -3 \\ 16 & -8 & 12 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$,
$A_9 \circ A_{12}^T =$ nicht möglich,
$A_9 \circ A_{13}^T =$ nicht möglich,
$A_9 \circ A_{14}^T =$ nicht möglich,
$A_9 \circ A_{15}^T =$ nicht möglich,
$A_{10} \circ A_1^T =$ nicht möglich,
$A_{10} \circ A_2^T =$ nicht möglich,
$A_{10} \circ A_3^T =$ nicht möglich,
$A_{10} \circ A_4^T =$ nicht möglich,
$A_{10} \circ A_5^T = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 13 & 13 \\ 19 & 22 \end{pmatrix}$,
$A_{10} \circ A_6^T = \begin{pmatrix} 20 & 40 \\ 47 & 94 \\ 74 & 148 \end{pmatrix}$,
$A_{10} \circ A_7^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_{10} \circ A_8^T =$ nicht möglich,
$A_{10} \circ A_9^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 9 & 10 & 11 \\ 15 & 16 & 17 \end{pmatrix}$,
$A_{10} \circ A_{11}^T = \begin{pmatrix} 24 & -12 & 18 \\ 48 & -24 & 36 \\ 72 & -36 & 54 \end{pmatrix}$,
$A_{10} \circ A_{12}^T =$ nicht möglich,
$A_{10} \circ A_{13}^T =$ nicht möglich,
$A_{10} \circ A_{14}^T =$ nicht möglich,
$A_{10} \circ A_{15}^T =$ nicht möglich,
$A_{11} \circ A_1^T =$ nicht möglich,
$A_{11} \circ A_2^T =$ nicht möglich,
$A_{11} \circ A_3^T =$ nicht möglich,
$A_{11} \circ A_4^T =$ nicht möglich,
$A_{11} \circ A_5^T = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ -6 & 0 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_{11} \circ A_6^T = \begin{pmatrix} 32 & 64 \\ -16 & -32 \\ 24 & 48 \end{pmatrix}$,
$A_{11} \circ A_7^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_{11} \circ A_8^T =$ nicht möglich,
$A_{11} \circ A_9^T = \begin{pmatrix} -4 & 16 & 4 \\ 2 & -8 & -2 \\ -3 & 12 & 3 \end{pmatrix}$,
$A_{11} \circ A_{10}^T = \begin{pmatrix} 24 & 48 & 72 \\ -12 & -24 & -36 \\ 18 & 36 & 54 \end{pmatrix}$,
$A_{11} \circ A_{12}^T =$ nicht möglich,
$A_{11} \circ A_{13}^T =$ nicht möglich,
$A_{11} \circ A_{14}^T =$ nicht möglich,
$A_{11} \circ A_{15}^T =$ nicht möglich,
$A_{12} \circ A_1^T =$ nicht möglich,
$A_{12} \circ A_2^T =$ nicht möglich,
$A_{12} \circ A_3^T =$ nicht möglich,
$A_{12} \circ A_4^T =$ nicht möglich,
$A_{12} \circ A_5^T =$ nicht möglich,
$A_{12} \circ A_6^T =$ nicht möglich,
$A_{12} \circ A_7^T =$ nicht möglich,
$A_{12} \circ A_8^T = \begin{pmatrix} 9 & 21 \\ 12 & 28 \\ 15 & 35 \end{pmatrix}$,
$A_{12} \circ A_9^T =$ nicht möglich,
$A_{12} \circ A_{10}^T =$ nicht möglich,
$A_{12} \circ A_{11}^T =$ nicht möglich,
$A_{12} \circ A_{13}^T = \begin{pmatrix} 15 & 36 & -6 \\ 20 & 48 & -8 \\ 25 & 60 & -10 \end{pmatrix}$,
$A_{12} \circ A_{14}^T = \begin{pmatrix} -18 & 36 & -72 \\ -24 & 48 & -96 \\ -30 & 60 & -120 \end{pmatrix}$,
$A_{12} \circ A_{15}^T =$ nicht möglich,
$A_{13} \circ A_1^T =$ nicht möglich,
$A_{13} \circ A_2^T =$ nicht möglich,
$A_{13} \circ A_3^T =$ nicht möglich,
$A_{13} \circ A_4^T =$ nicht möglich,
$A_{13} \circ A_5^T =$ nicht möglich,
$A_{13} \circ A_6^T =$ nicht möglich,
$A_{13} \circ A_7^T =$ nicht möglich,
$A_{13} \circ A_8^T = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ -3 & 3 \\ 21 & 3 \end{pmatrix}$,
$A_{13} \circ A_9^T =$ nicht möglich,
$A_{13} \circ A_{10}^T =$ nicht möglich,
$A_{13} \circ A_{11}^T =$ nicht möglich,

$A_{13} \circ A_{12}^T = \begin{pmatrix} 15 & 20 & 25 \\ 36 & 48 & 60 \\ -6 & -8 & -10 \end{pmatrix}$,
$A_{13} \circ A_{14}^T = \begin{pmatrix} 7 & -14 & 28 \\ -11 & 22 & -44 \\ 25 & -50 & 100 \end{pmatrix}$,
$A_{13} \circ A_{15}^T =$ nicht möglich,
$A_{14} \circ A_{1}^T =$ nicht möglich,
$A_{14} \circ A_{2}^T =$ nicht möglich,
$A_{14} \circ A_{3}^T =$ nicht möglich,
$A_{14} \circ A_{4}^T =$ nicht möglich,
$A_{14} \circ A_{5}^T =$ nicht möglich,
$A_{14} \circ A_{6}^T =$ nicht möglich,
$A_{14} \circ A_{7}^T =$ nicht möglich,
$A_{14} \circ A_{8}^T = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -16 & 4 \\ 32 & -8 \end{pmatrix}$,
$A_{14} \circ A_{9}^T =$ nicht möglich,
$A_{14} \circ A_{10}^T =$ nicht möglich,
$A_{14} \circ A_{11}^T =$ nicht möglich,
$A_{14} \circ A_{12}^T = \begin{pmatrix} -18 & -24 & -30 \\ 36 & 48 & 60 \\ -72 & -96 & -120 \end{pmatrix}$,
$A_{14} \circ A_{13}^T = \begin{pmatrix} 7 & -11 & 25 \\ -14 & 22 & -50 \\ 28 & -44 & 100 \end{pmatrix}$,
$A_{14} \circ A_{15}^T =$ nicht möglich,
$A_{15} \circ A_{1}^T =$ nicht möglich,
$A_{15} \circ A_{2}^T =$ nicht möglich,
$A_{15} \circ A_{3}^T =$ nicht möglich,
$A_{15} \circ A_{4}^T =$ nicht möglich,
$A_{15} \circ A_{5}^T =$ nicht möglich,
$A_{15} \circ A_{6}^T =$ nicht möglich,
$A_{15} \circ A_{7}^T =$ nicht möglich,
$A_{15} \circ A_{8}^T =$ nicht möglich,
$A_{15} \circ A_{9}^T =$ nicht möglich,
$A_{15} \circ A_{10}^T =$ nicht möglich,
$A_{15} \circ A_{11}^T =$ nicht möglich,
$A_{15} \circ A_{12}^T =$ nicht möglich,
$A_{15} \circ A_{13}^T =$ nicht möglich,
$A_{15} \circ A_{14}^T =$ nicht möglich,
$A_{1}^T \circ A_{2}^T = \begin{pmatrix} -8 & 16 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}$,
$A_{1}^T \circ A_{3}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_{1}^T \circ A_{4}^T = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$,
$A_{1}^T \circ A_{5}^T =$ nicht möglich,
$A_{1}^T \circ A_{6}^T =$ nicht möglich,
$A_{1}^T \circ A_{7}^T =$ nicht möglich,
$A_{1}^T \circ A_{8}^T =$ nicht möglich,
$A_{1}^T \circ A_{9}^T =$ nicht möglich,
$A_{1}^T \circ A_{10}^T =$ nicht möglich,
$A_{1}^T \circ A_{11}^T =$ nicht möglich,
$A_{1}^T \circ A_{12}^T =$ nicht möglich,
$A_{1}^T \circ A_{13}^T =$ nicht möglich,
$A_{1}^T \circ A_{14}^T =$ nicht möglich,
$A_{1}^T \circ A_{15}^T =$ nicht möglich,
$A_{2}^T \circ A_{1}^T = \begin{pmatrix} -6 & -8 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$,
$A_{2}^T \circ A_{3}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_{2}^T \circ A_{4}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$,
$A_{2}^T \circ A_{5}^T =$ nicht möglich,
$A_{2}^T \circ A_{6}^T =$ nicht möglich,
$A_{2}^T \circ A_{7}^T =$ nicht möglich,
$A_{2}^T \circ A_{8}^T =$ nicht möglich,
$A_{2}^T \circ A_{9}^T =$ nicht möglich,
$A_{2}^T \circ A_{10}^T =$ nicht möglich,
$A_{2}^T \circ A_{11}^T =$ nicht möglich,
$A_{2}^T \circ A_{12}^T =$ nicht möglich,
$A_{2}^T \circ A_{13}^T =$ nicht möglich,
$A_{2}^T \circ A_{14}^T =$ nicht möglich,
$A_{2}^T \circ A_{15}^T =$ nicht möglich,
$A_{3}^T \circ A_{1}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_{3}^T \circ A_{2}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_{3}^T \circ A_{4}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_{3}^T \circ A_{5}^T =$ nicht möglich,
$A_{3}^T \circ A_{6}^T =$ nicht möglich,
$A_{3}^T \circ A_{7}^T =$ nicht möglich,
$A_{3}^T \circ A_{8}^T =$ nicht möglich,
$A_{3}^T \circ A_{9}^T =$ nicht möglich,
$A_{3}^T \circ A_{10}^T =$ nicht möglich,
$A_{3}^T \circ A_{11}^T =$ nicht möglich,
$A_{3}^T \circ A_{12}^T =$ nicht möglich,
$A_{3}^T \circ A_{13}^T =$ nicht möglich,
$A_{3}^T \circ A_{14}^T =$ nicht möglich,
$A_{3}^T \circ A_{15}^T =$ nicht möglich,
$A_{4}^T \circ A_{1}^T = \begin{pmatrix} 14 & 20 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_{4}^T \circ A_{2}^T = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_{4}^T \circ A_{3}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_{4}^T \circ A_{5}^T =$ nicht möglich,
$A_{4}^T \circ A_{6}^T =$ nicht möglich,
$A_{4}^T \circ A_{7}^T =$ nicht möglich,
$A_{4}^T \circ A_{8}^T =$ nicht möglich,
$A_{4}^T \circ A_{9}^T =$ nicht möglich,
$A_{4}^T \circ A_{10}^T =$ nicht möglich,
$A_{4}^T \circ A_{11}^T =$ nicht möglich,
$A_{4}^T \circ A_{12}^T =$ nicht möglich,
$A_{4}^T \circ A_{13}^T =$ nicht möglich,
$A_{4}^T \circ A_{14}^T =$ nicht möglich,
$A_{4}^T \circ A_{15}^T =$ nicht möglich,
$A_{5}^T \circ A_{1}^T = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 13 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$,

$A_5^T \circ A_2^T = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $A_5^T \circ A_3^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_5^T \circ A_4^T = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $A_5^T \circ A_6^T =$ nicht möglich,
$A_5^T \circ A_7^T =$ nicht möglich, $A_5^T \circ A_8^T =$ nicht möglich,
$A_5^T \circ A_9^T =$ nicht möglich, $A_5^T \circ A_{10}^T =$ nicht möglich,
$A_5^T \circ A_{11}^T =$ nicht möglich, $A_5^T \circ A_{12}^T =$ nicht möglich,
$A_5^T \circ A_{13}^T =$ nicht möglich, $A_5^T \circ A_{14}^T =$ nicht möglich,
$A_5^T \circ A_{15}^T =$ nicht möglich, $A_6^T \circ A_1^T = \begin{pmatrix} 28 & 40 \\ 42 & 60 \\ 56 & 80 \end{pmatrix}$,
$A_6^T \circ A_2^T = \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ -9 & 18 \\ -12 & 24 \end{pmatrix}$, $A_6^T \circ A_3^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_6^T \circ A_4^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$, $A_6^T \circ A_5^T =$ nicht möglich,
$A_6^T \circ A_7^T =$ nicht möglich, $A_6^T \circ A_8^T =$ nicht möglich,
$A_6^T \circ A_9^T =$ nicht möglich, $A_6^T \circ A_{10}^T =$ nicht möglich,
$A_6^T \circ A_{11}^T =$ nicht möglich, $A_6^T \circ A_{12}^T =$ nicht möglich,
$A_6^T \circ A_{13}^T =$ nicht möglich, $A_6^T \circ A_{14}^T =$ nicht möglich,
$A_6^T \circ A_{15}^T =$ nicht möglich, $A_7^T \circ A_1^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_7^T \circ A_2^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_7^T \circ A_3^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_7^T \circ A_4^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_7^T \circ A_5^T =$ nicht möglich,
$A_7^T \circ A_6^T =$ nicht möglich, $A_7^T \circ A_8^T =$ nicht möglich,
$A_7^T \circ A_9^T =$ nicht möglich, $A_7^T \circ A_{10}^T =$ nicht möglich,
$A_7^T \circ A_{11}^T =$ nicht möglich, $A_7^T \circ A_{12}^T =$ nicht möglich,
$A_7^T \circ A_{13}^T =$ nicht möglich, $A_7^T \circ A_{14}^T =$ nicht möglich,
$A_7^T \circ A_{15}^T =$ nicht möglich, $A_8^T \circ A_1^T = \begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 28 & 40 \\ 26 & 38 \\ 9 & 13 \end{pmatrix}$,
$A_8^T \circ A_2^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 12 \\ 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_8^T \circ A_3^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_8^T \circ A_4^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_8^T \circ A_5^T =$ nicht möglich,
$A_8^T \circ A_6^T =$ nicht möglich, $A_8^T \circ A_7^T =$ nicht möglich,
$A_8^T \circ A_9^T =$ nicht möglich, $A_8^T \circ A_{10}^T =$ nicht möglich,
$A_8^T \circ A_{11}^T =$ nicht möglich, $A_8^T \circ A_{12}^T =$ nicht möglich,
$A_8^T \circ A_{13}^T =$ nicht möglich, $A_8^T \circ A_{14}^T =$ nicht möglich,
$A_8^T \circ A_{15}^T =$ nicht möglich, $A_9^T \circ A_1^T =$ nicht möglich,
$A_9^T \circ A_2^T =$ nicht möglich, $A_9^T \circ A_3^T =$ nicht möglich,
$A_9^T \circ A_4^T =$ nicht möglich, $A_9^T \circ A_5^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$,
$A_9^T \circ A_6^T = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 6 & 12 \\ 7 & 14 \end{pmatrix}$, $A_9^T \circ A_7^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_9^T \circ A_8^T =$ nicht möglich, $A_9^T \circ A_{10}^T = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 15 \\ 4 & 10 & 16 \\ 5 & 11 & 17 \end{pmatrix}$,
$A_9^T \circ A_{11}^T = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -3 \\ 16 & -8 & 12 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $A_9^T \circ A_{12}^T =$ nicht möglich,

$A_9^T \circ A_{13}^T$= nicht möglich,

$A_9^T \circ A_{14}^T$= nicht möglich,

$A_9^T \circ A_{15}^T$= nicht möglich,

$A_{10}^T \circ A_1^T$= nicht möglich,

$A_{10}^T \circ A_2^T$= nicht möglich,

$A_{10}^T \circ A_3^T$= nicht möglich,

$A_{10}^T \circ A_4^T$= nicht möglich,

$A_{10}^T \circ A_5^T = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 19 & 9 \\ 21 & 12 \end{pmatrix}$,

$A_{10}^T \circ A_6^T = \begin{pmatrix} 42 & 84 \\ 51 & 102 \\ 60 & 120 \end{pmatrix}$,

$A_{10}^T \circ A_7^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$A_{10}^T \circ A_8^T$= nicht möglich,

$A_{10}^T \circ A_9^T = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 7 & 10 & 13 \\ 9 & 12 & 15 \end{pmatrix}$,

$A_{10}^T \circ A_{11}^T = \begin{pmatrix} 56 & -28 & 42 \\ 64 & -32 & 48 \\ 72 & -36 & 54 \end{pmatrix}$,

$A_{10}^T \circ A_{12}^T$= nicht möglich,

$A_{10}^T \circ A_{13}^T$= nicht möglich,

$A_{10}^T \circ A_{14}^T$= nicht möglich,

$A_{10}^T \circ A_{15}^T$= nicht möglich,

$A_{11}^T \circ A_1^T$= nicht möglich,

$A_{11}^T \circ A_2^T$= nicht möglich,

$A_{11}^T \circ A_3^T$= nicht möglich,

$A_{11}^T \circ A_4^T$= nicht möglich,

$A_{11}^T \circ A_5^T = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & -12 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$,

$A_{11}^T \circ A_6^T = \begin{pmatrix} 14 & 28 \\ -28 & -56 \\ 42 & 84 \end{pmatrix}$,

$A_{11}^T \circ A_7^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$A_{11}^T \circ A_8^T$= nicht möglich,

$A_{11}^T \circ A_9^T = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -4 & -14 & -2 \\ 6 & 21 & 3 \end{pmatrix}$,

$A_{11}^T \circ A_{10}^T = \begin{pmatrix} 9 & 24 & 39 \\ -18 & -48 & -78 \\ 27 & 72 & 117 \end{pmatrix}$,

$A_{11}^T \circ A_{12}^T$= nicht möglich,

$A_{11}^T \circ A_{13}^T$= nicht möglich,

$A_{11}^T \circ A_{14}^T$= nicht möglich,

$A_{11}^T \circ A_{15}^T$= nicht möglich,

$A_{12}^T \circ A_1^T$= nicht möglich,

$A_{12}^T \circ A_2^T$= nicht möglich,

$A_{12}^T \circ A_3^T$= nicht möglich,

$A_{12}^T \circ A_4^T$= nicht möglich,

$A_{12}^T \circ A_5^T = \begin{pmatrix} 22 & 20 \\ 11 & 10 \\ -11 & -10 \\ 33 & 30 \end{pmatrix}$,

$A_{12}^T \circ A_6^T = \begin{pmatrix} 76 & 152 \\ 38 & 76 \\ -38 & -76 \\ 114 & 228 \end{pmatrix}$,

$A_{12}^T \circ A_7^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$A_{12}^T \circ A_8^T$= nicht möglich,

$A_{12}^T \circ A_9^T = \begin{pmatrix} 14 & 16 & 18 \\ 7 & 8 & 9 \\ -7 & -8 & -9 \\ 21 & 24 & 27 \end{pmatrix}$,

$A_{12}^T \circ A_{10}^T = \begin{pmatrix} 52 & 124 & 196 \\ 26 & 62 & 98 \\ -26 & -62 & -98 \\ 78 & 186 & 294 \end{pmatrix}$,

$A_{12}^T \circ A_{11}^T = \begin{pmatrix} 80 & -40 & 60 \\ 40 & -20 & 30 \\ -40 & 20 & -30 \\ 120 & -60 & 90 \end{pmatrix}$,

$A_{12}^T \circ A_{13}^T$= nicht möglich,

$A_{12}^T \circ A_{14}^T$= nicht möglich,

$A_{12}^T \circ A_{15}^T$= nicht möglich,

$A_{13}^T \circ A_1^T$= nicht möglich,

$A_{13}^T \circ A_2^T$= nicht möglich,

$A_{13}^T \circ A_3^T$= nicht möglich,

$A_{13}^T \circ A_4^T$= nicht möglich,

$A_{13}^T \circ A_5^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -1 \\ 8 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$,

$A_{13}^T \circ A_6^T = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ -11 & -22 \\ 22 & 44 \\ 17 & 34 \end{pmatrix}$,

$A_{13}^T \circ A_7^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$A_{13}^T \circ A_8^T$= nicht möglich,

$A_{13}^T \circ A_9^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 8 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$,

$A_{13}^T \circ A_{10}^T = \begin{pmatrix} 7 & 16 & 25 \\ -8 & -17 & -26 \\ 16 & 34 & 52 \\ 11 & 29 & 47 \end{pmatrix}$,

$A_{13}^T \circ A_{11}^T = \begin{pmatrix} 28 & -14 & 21 \\ -48 & 24 & -36 \\ 96 & -48 & 72 \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$,

$A_{13}^T \circ A_{12}^T=$ nicht möglich, $A_{13}^T \circ A_{14}^T=$ nicht möglich,

$A_{13}^T \circ A_{15}^T=$ nicht möglich, $A_{14}^T \circ A_1^T=$ nicht möglich,

$A_{14}^T \circ A_2^T=$ nicht möglich, $A_{14}^T \circ A_3^T=$ nicht möglich,

$A_{14}^T \circ A_4^T=$ nicht möglich, $A_{14}^T \circ A_5^T=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -10 & 0 \\ 15 & 0 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$,

$A_{14}^T \circ A_6^T=\begin{pmatrix} 12 & 24 \\ -24 & -48 \\ 36 & 72 \\ -12 & -24 \end{pmatrix}$, $A_{14}^T \circ A_7^T=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$A_{14}^T \circ A_8^T=$ nicht möglich, $A_{14}^T \circ A_9^T=\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 2 & -10 & -4 \\ -3 & 15 & 6 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$,

$A_{14}^T \circ A_{10}^T=\begin{pmatrix} 9 & 18 & 27 \\ -18 & -36 & -54 \\ 27 & 54 & 81 \\ -9 & -18 & -27 \end{pmatrix}$, $A_{14}^T \circ A_{11}^T=\begin{pmatrix} 68 & -34 & 51 \\ -136 & 68 & -102 \\ 204 & -102 & 153 \\ -68 & 34 & -51 \end{pmatrix}$,

$A_{14}^T \circ A_{12}^T=$ nicht möglich, $A_{14}^T \circ A_{13}^T=$ nicht möglich,

$A_{14}^T \circ A_{15}^T=$ nicht möglich, $A_{15}^T \circ A_1^T=$ nicht möglich,

$A_{15}^T \circ A_2^T=$ nicht möglich, $A_{15}^T \circ A_3^T=$ nicht möglich,

$A_{15}^T \circ A_4^T=$ nicht möglich, $A_{15}^T \circ A_5^T=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 11 & 2 \\ 27 & 5 \\ 17 & 4 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$,

$A_{15}^T \circ A_6^T=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 26 & 52 \\ 63 & 126 \\ 40 & 80 \\ 26 & 52 \end{pmatrix}$, $A_{15}^T \circ A_7^T=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$A_{15}^T \circ A_8^T=$ nicht möglich, $A_{15}^T \circ A_9^T=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 6 \\ 3 & 16 & 15 \\ 3 & 9 & 10 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$,

$A_{15}^T \circ A_{10}^T=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 19 & 40 & 61 \\ 46 & 97 & 148 \\ 29 & 62 & 95 \\ 19 & 40 & 61 \end{pmatrix}$, $A_{15}^T \circ A_{11}^T=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 76 & -38 & 57 \\ 168 & -84 & 126 \\ 84 & -42 & 63 \\ 76 & -38 & 57 \end{pmatrix}$,

$A_{15}^T \circ A_{12}^T=$ nicht möglich, $A_{15}^T \circ A_{13}^T=$ nicht möglich,

$A_{15}^T \circ A_{14}^T=$ nicht möglich, $A_1 \circ A_1^T=\begin{pmatrix} 41 & 59 \\ 59 & 85 \end{pmatrix}$,

$A_1^T \circ A_1=\begin{pmatrix} 52 & 62 \\ 62 & 74 \end{pmatrix}$, $A_1^T \circ A_1^T=\begin{pmatrix} 46 & 66 \\ 55 & 79 \end{pmatrix}$,

$A_2 \circ A_2^T=\begin{pmatrix} 5 & -10 \\ -10 & 20 \end{pmatrix}$, $A_2^T \circ A_2=\begin{pmatrix} 5 & -10 \\ -10 & 20 \end{pmatrix}$,

$A_2^T \circ A_2^T=\begin{pmatrix} 5 & -10 \\ -10 & 20 \end{pmatrix}$, $A_3 \circ A_3^T=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$A_3^T \circ A_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3^T \circ A_3^T=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$A_4 \circ A_4^T=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $A_4^T \circ A_4=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$A_4^T \circ A_4^T=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_5 \circ A_5^T=\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$,

$A_5^T \circ A_5=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $A_5^T \circ A_5^T=$ nicht möglich,

$A_6 \circ A_6^T=\begin{pmatrix} 29 & 58 \\ 58 & 116 \end{pmatrix}$, $A_6^T \circ A_6=\begin{pmatrix} 20 & 30 & 40 \\ 30 & 45 & 60 \\ 40 & 60 & 80 \end{pmatrix}$,

$A_6^T \circ A_6^T=$ nicht möglich, $A_7 \circ A_7^T=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$A_7^T \circ A_7=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_7^T \circ A_7^T=$ nicht möglich,

$A_8 \circ A_8^T = \begin{pmatrix} 22 & 18 \\ 18 & 22 \end{pmatrix}$, $A_8^T \circ A_8 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 & 2 \\ 6 & 20 & 16 & 6 \\ 6 & 16 & 20 & 6 \\ 2 & 6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$,

$A_8^T \circ A_8^T =$ nicht möglich, $A_9 \circ A_9^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$A_9^T \circ A_9 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_9^T \circ A_9^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$A_{10} \circ A_{10}^T = \begin{pmatrix} 14 & 32 & 50 \\ 32 & 77 & 122 \\ 50 & 122 & 194 \end{pmatrix}$, $A_{10}^T \circ A_{10} = \begin{pmatrix} 66 & 78 & 90 \\ 78 & 93 & 108 \\ 90 & 108 & 126 \end{pmatrix}$,

$A_{10}^T \circ A_{10}^T = \begin{pmatrix} 30 & 66 & 102 \\ 36 & 81 & 126 \\ 42 & 96 & 150 \end{pmatrix}$, $A_{11} \circ A_{11}^T = \begin{pmatrix} 224 & -112 & 168 \\ -112 & 56 & -84 \\ 168 & -84 & 126 \end{pmatrix}$,

$A_{11}^T \circ A_{11} = \begin{pmatrix} 29 & -58 & 87 \\ -58 & 116 & -174 \\ 87 & -174 & 261 \end{pmatrix}$, $A_{11}^T \circ A_{11}^T = \begin{pmatrix} 68 & -34 & 51 \\ -136 & 68 & -102 \\ 204 & -102 & 153 \end{pmatrix}$,

$A_{12} \circ A_{12}^T = \begin{pmatrix} 135 & 180 & 225 \\ 180 & 240 & 300 \\ 225 & 300 & 375 \end{pmatrix}$, $A_{12}^T \circ A_{12} = \begin{pmatrix} 200 & 100 & -100 & 300 \\ 100 & 50 & -50 & 150 \\ -100 & -50 & 50 & -150 \\ 300 & 150 & -150 & 450 \end{pmatrix}$,

$A_{12}^T \circ A_{12}^T =$ nicht möglich, $A_{13} \circ A_{13}^T = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 19 \\ 1 & 14 & -12 \\ 19 & -12 & 50 \end{pmatrix}$,

$A_{13}^T \circ A_{13} = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 14 & 4 \\ -7 & 11 & -22 & -2 \\ 14 & -22 & 44 & 4 \\ 4 & -2 & 4 & 14 \end{pmatrix}$, $A_{13}^T \circ A_{13}^T =$ nicht möglich,

$A_{14} \circ A_{14}^T = \begin{pmatrix} 15 & -30 & 60 \\ -30 & 60 & -120 \\ 60 & -120 & 240 \end{pmatrix}$, $A_{14}^T \circ A_{14} = \begin{pmatrix} 21 & -42 & 63 & -21 \\ -42 & 84 & -126 & 42 \\ 63 & -126 & 189 & -63 \\ -21 & 42 & -63 & 21 \end{pmatrix}$,

$A_{14}^T \circ A_{14}^T =$ nicht möglich, $A_{15} \circ A_{15}^T = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 48 \\ 4 & 5 & 30 \\ 48 & 30 & 332 \end{pmatrix}$,

$A_{15}^T \circ A_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 37 & 86 & 49 & 37 \\ 0 & 86 & 201 & 116 & 86 \\ 0 & 49 & 116 & 69 & 49 \\ 0 & 37 & 86 & 49 & 37 \end{pmatrix}$, $A_{15}^T \circ A_{15}^T =$ nicht möglich,

Ende der automatischen Ergebnisse.

Aufg. 281/778:

a) Die Matrix $\underline{1}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, heißt E<u>inheits</u>matrix. $\underline{1}_2 \circ \underline{A} = \underline{A} \circ \underline{1}_2 = \underline{A}$, $\underline{1}_2 \circ \underline{C} = \underline{C} \circ \underline{1}_2 = \underline{C}$. Die Einheitsmatrix multipliziert mit einer beliebigen Matrix ($\underline{C}$) verändert diese <u>nicht</u>.

b) $\underline{1}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\underline{1}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, für alle $n \times n$ Matrizen $\underline{D}$ gilt $\underline{1}_n \circ \underline{D} = \underline{D} \circ \underline{1}_n = \underline{D}$.

c) Die **<u>Determinante</u>** zweier Vektoren $\binom{a}{c}$ und $\binom{b}{d} = \det(\binom{a}{c}, \binom{b}{d}) = \underline{ad - bc}$ entspricht der o<u>rientierten</u> F<u>läche</u> des von $\binom{a}{c}$ und $\binom{b}{d}$ aufgespannten P<u>arallelogramms</u>.

d) $\det(\underline{A}) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$, $\det(\underline{B}) = 5 \cdot 8 - 6 \cdot 7 = -2$, $\det(\underline{C}) = ad - bc$ und $\det(\underline{1}_2) = 1$.

e) Die Matrix $\underline{A}^{-1}$ heißt i<u>nverse</u> Matrix. f) $\binom{2}{1}$

Aufg. 281/779: a) Eine Matrix $\underline{S}_{i,j}$ entsteht aus einer Matrix $\underline{A}$, indem man die i-te <u>Zeile</u> und die j-te <u>Spalte</u> streicht. geben Sie $\underline{S}_{24}$ aller Matrizen aus $(*)$ an.

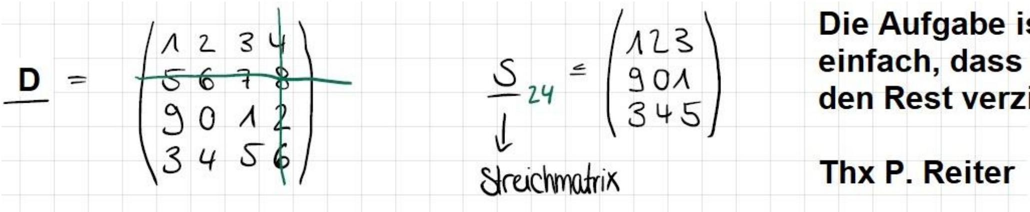


Abb. 501 Eine Streichmatrix

b) Die Determinante der Vektoren $\vec{x}_1, .., \vec{x}_n$ entspricht dem orientierten n-dim Volumen des (n-dim) Spates, das von den Vektoren $\vec{x}_1, .., \vec{x}_n$ erzeugt wird.

c) $\det(\underline{A}_{n\times n}) \quad = \quad \sum_{z=1}^{n}(-1)^{z+s} \cdot a_{zs} \cdot \det(\underline{S}_{zs}) \qquad \equiv \qquad \sum_{\underline{s=1}}^{n}(-1)^{z+s} \cdot a_{zs} \cdot \det(\underline{S}_{zs})$

d) s kann dabei beliebig zwischen 1 und n gewählt werden.

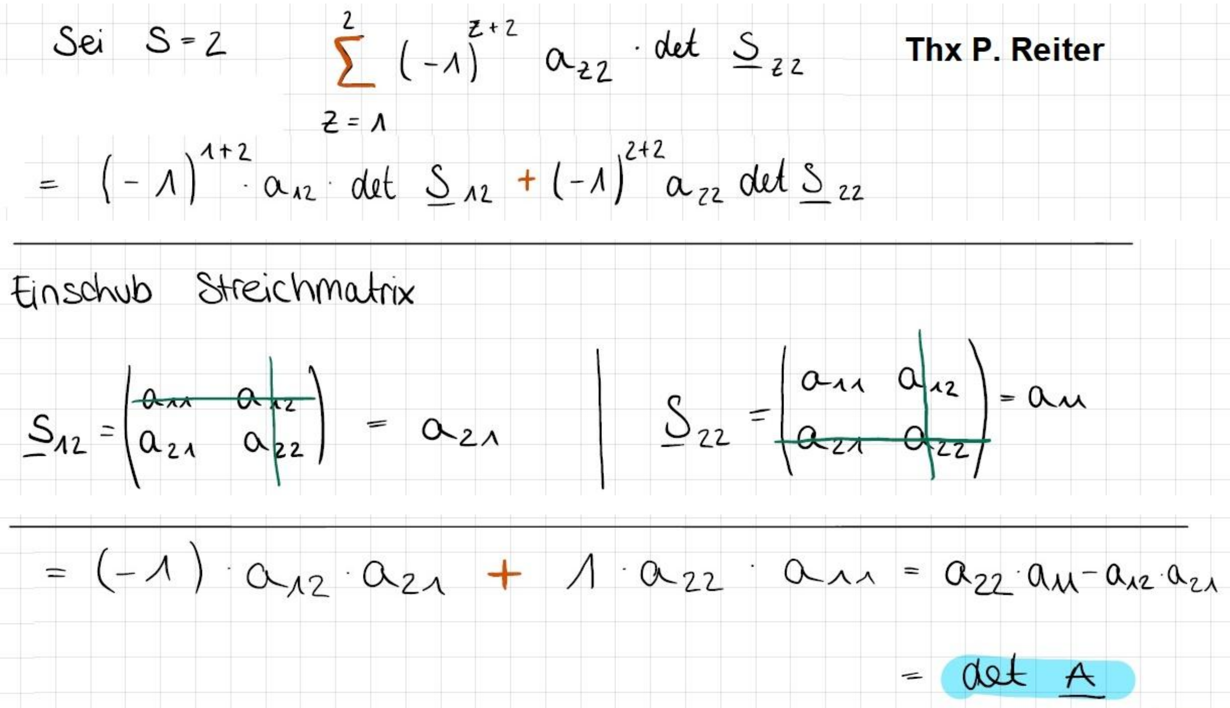
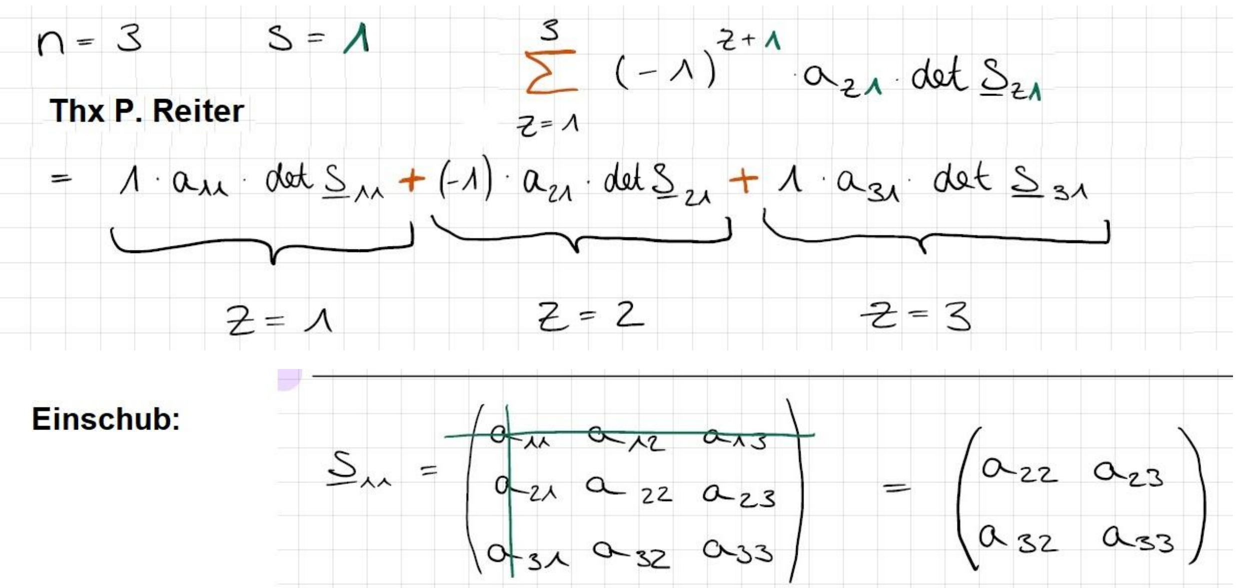


Abb. 502 Der Beweis, dass Laplace die 2x2 Determinante richtig berechnet



$$\underline{S}_{21} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\underline{S}_{31} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot a_{11} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + (-1) \cdot a_{21} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + 1 \cdot a_{31} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot (a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + (-a_{21}) \cdot (a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31} \cdot (a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})$$

$$\left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22} \\ a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32} \\ a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) + a_{23}(a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32}) +$$

$$a_{33} \cdot (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$$

Thx P. Reiter

Abb. 503 Der Beweis, dass Laplace die 3x3 Determinante richtig berechnet

Die Entwicklung nach Sarrus nur 3-dimensional

Thx P. Reiter

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13}$$
$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

Abb. 504 Die Entwicklung von Sarrus

die meisten Nullen

$$s = \boxed{2}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -1 \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{Sarrus}}{=} -(1 \cdot 3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 2) = 14$$

$$\det A = \sum_{z=1}^{4} (-1)^{z+s} \cdot a_{zs} \cdot \det(\underline{S}_{zs})$$

$$\left.\begin{aligned}
&= (-1)^{1+2} \cdot \underset{0}{a_{12}} \cdot \det(\underline{S}_{12})\\
&+ (-1)^{2+2} \cdot \underset{0}{a_{22}} \cdot \det(\underline{S}_{22})\\
&+ (-1)^{3+2} \cdot \underset{1}{a_{32}} \cdot \det(\underline{S}_{32})\\
&+ (-1)^{4+2} \cdot \underset{0}{a_{42}} \cdot \det(\underline{S}_{42})
\end{aligned}\right\} = (-1)^{5} \cdot a_{32} \cdot \det(\underline{S}_{32})$$

Abb. 505 f) Die Determinante der Matrix $\underline{A}$

Sind Zeilen & Spalten gleich berechtigt? $\boxed{\text{JA}}$

a_{12} $\underline{S}_{12}$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

↳ Schachbrettmuster (beginnt oben links immer mit +)

Entwicklung nach der ersten Zeile

$$-2 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4\\ 4 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{Sarrus}}{=} -2(4 + \cancel{16} + 18 - \cancel{16} - 3 - 24) = \underline{\underline{10}}$$

Abb. 506 f) Die Determinante der Matrix $\underline{B}$

f) $\det(\underline{C}) = 4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 = 420$; $\det(\underline{D}) = 0$: Es gilt $2\vec{s}_3 - \vec{s}_2 = \vec{s}_4$; $Rang(\underline{D}) = 3$

f) (T-Aufgabe) Verallgemeinerung: Sei $\underline{A}$ eine Matrix.
Die Matrix $\underline{X}$ entstehe aus der Matrix $\underline{A}$ durch Multiplikation einer Spalte mit einem Faktor a, dann gilt $\det(\underline{X}) = a \cdot \det(\underline{A})$.
Die Matrix $\underline{Y}$ entstehe aus der Matrix $\underline{A}$ durch Multiplikation einer Zeile mit einem Faktor a, dann gilt $\det(\underline{Y}) = a \cdot \det(\underline{A})$.
Tauschen zweier Zeilen ändert das Vorzeichen der Determinante.
$\det(A_1) = 14$, $\det(A_2) = 28$, $\det(A_3) = 42$, $\det(A_4) = 84$,
$\det(B_1) = 10$, $\det(B_2) = 20$, $\det(B_3) = 30$, $\det(B_4) = 60$, $\det(B_5) = -120$,
$\det(C_1) = 420$, $\det(C_2) = 40$.
Die Determinate einer Dreiecksmatrix entspricht dem Produkt ihrer Hauptdiagonalelemente.

2x2 $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1\\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}} = \frac{\det(\vec{b} \cdot \vec{s}_2)}{\det(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2)} \qquad x_2 = \frac{\det(\vec{s}_1 \cdot \vec{b})}{\det(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2)}$$

Abb. 507 g) Die Cramersche Regel für 2x2 Matrizen

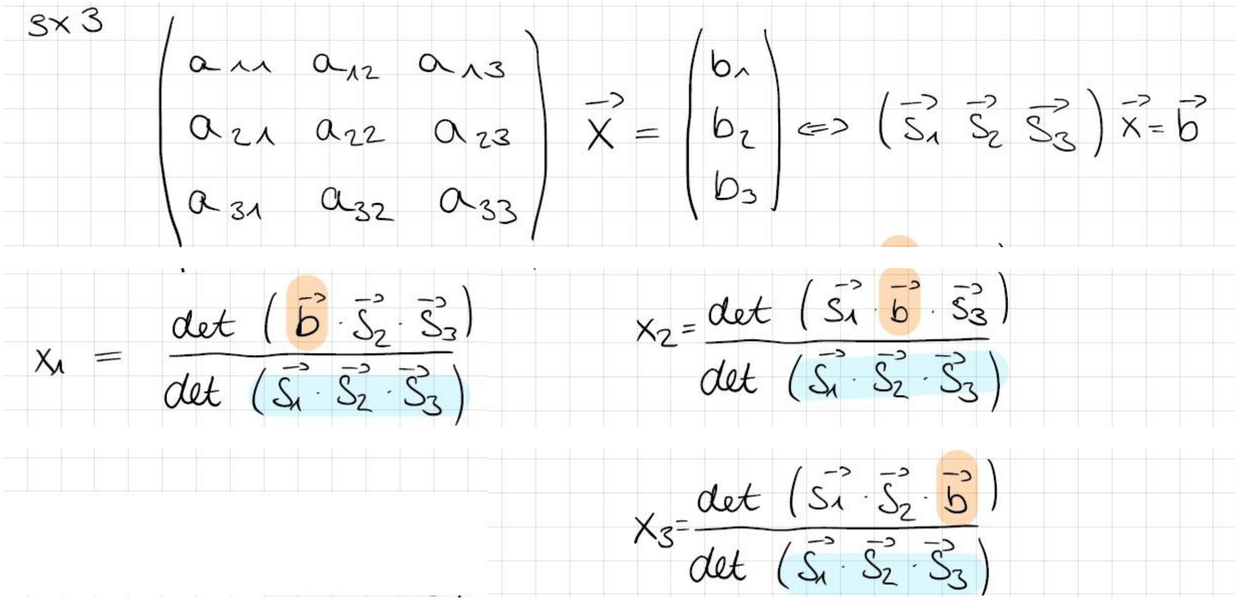


Abb. 508 g) Die Cramersche Regel für 3x3 Matrizen

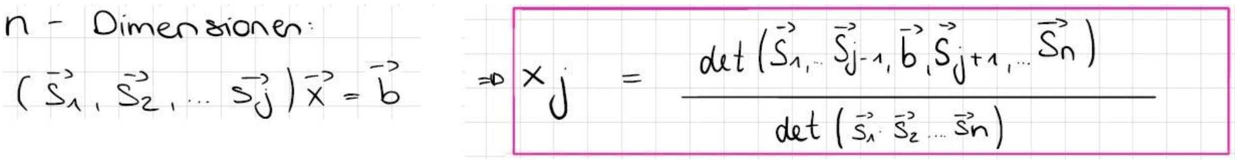


Abb. 509 g) Die Cramersche Regel für nxn Matrizen

Aufg. 282/780: a) Ein Vektor ist immer linear <u>unab</u>hängig, es sei denn es ist der <u>Null</u>vektor; der ist immer linear <u>ab</u>hängig.

b) Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ sind linear abhängig (<u>parallel</u>) genau dann, wenn es ein $r \in \mathbb{R}$ gibt, mit $\vec{a} = \underline{r \cdot \vec{b}}$.

c) Drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (wobei $\vec{b}$ und $\vec{c}$ l.<u>u</u> sind) sind linear abhängig (liegen in einer E<u>bene</u>) genau dann, wenn es $r, s \in \mathbb{R}$ gibt, mit $\vec{a} = \underline{r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}}$.

d) Vier Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ (wobei $\vec{b}, \vec{c}$ und $\vec{d}$ l.<u>u</u> sind) sind linear abhängig (liegen in einem R<u>aum</u>) genau dann, wenn es $r, s, t \in \mathbb{R}$ gibt, mit $\vec{a} = \underline{r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c} + t \cdot \vec{d}}$.

Aufg. 282/781: Das LGS $\underline{A} \circ \vec{x} = \vec{0}$ hat $\underline{m}$ Gleichungen und $\underline{n}$ Unbekannten.

b) Allgemeine Regeln:

1) Wenn eine Matrix nur Nullen als Einträge hat, dann ist ihr Rang $\underline{=0}$.

2) Wenn eine Matrix einen Eintrag $\neq 0$ enthält, dann ist ihr Rang $\underline{> 0}$.

3) Wenn eine $n \times n$ Matrix Determinante $\underline{\neq 0}$ hat, dann ist ihr Rang $\underline{= n}$.

c) i) $\vec{s}_1 = \binom{4}{6}$, $\vec{s}_2 = \binom{5}{7}$, $\vec{s}_1$ und $\vec{s}_2$ sind keine Vielfachen voneinander, damit ist der Rang von $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ $= 2$. **ii)** $\vec{s}_1 = \binom{1}{-2}$, $\vec{s}_2 = \binom{-2}{4}$, $(-2) \cdot \vec{s}_1 = \vec{s}_2$, damit sind $\vec{s}_1$ und $\vec{s}_2$ linear abhängig, damit ist der Rang von $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = 1$. **iii)** $\vec{s}_1 = \binom{0}{0} = \vec{s}_2$, der Nullvektor ist immer linear abhängig, damit gibt es keinen linear unabhängigen Vektor, damit ist der Rang von $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$.

iv) $\vec{s}_1 = \binom{1}{2}, \vec{s}_2 = \binom{0}{0}$, der Nullvektor ist immer linear abhängig, damit gibt es nur einen linear unabhängigen Vektor, damit ist der Rang von $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 1$.

v) $\vec{s}_1 = \binom{-1}{2}, \vec{s}_2 = \binom{1}{1}, \vec{s}_3 = \binom{2}{0}$, die Vektoren $\vec{s}_1$ und $\vec{s}_2$ sind linear unabhängig, der Vektor $\vec{s}_3$ ist wegen der Dimension der Spaltenvektoren $m = 2$ sicher linear abhängig von $\vec{s}_1$ und $\vec{s}_2$ damit ist der Rang von $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$.

vi) $\vec{s}_1 = \binom{2}{4}, \vec{s}_2 = \binom{3}{6}, \vec{s}_3 = \binom{4}{8}$; es gilt $1.5 \cdot \vec{s}_1 = \vec{s}_2$ und $2 \cdot \vec{s}_1 = \vec{s}_3$; damit sind $\vec{s}_1, \vec{s}_2$ und $\vec{s}_3$ linear abhängig, damit ist der Rang von $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} = 1$.

Beachten Sie, dass $\vec{z}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ auch von $\vec{z}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ linear abhängig ist. Tatsächlich gilt Zeilenrang = Spaltenrang (ohne Beweis). vii) Rang $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$=0,

viii) Weil $\binom{1}{1}$ linear unabhängig von $\binom{2}{4}$ ist, gilt Rang $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2$,

ix) Spatprodukt $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \Rightarrow$ Rang=3;

x) Spatprodukt $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 0$ und $\vec{s}_1$ ist von $\vec{s}_2$ l.u., weil das Vektorprodukt $\neq \vec{0}$ ist $\Rightarrow$ Rang=2;

xi) $\frac{-1}{2} \cdot \vec{s}_1 = \vec{s}_2$, $\frac{3}{2} \cdot \vec{s}_1 = \vec{s}_3 \Rightarrow$ Rang = 1; xii) $\frac{1}{2} \cdot \vec{s}_1 = \vec{s}_2$, $\frac{-1}{2} \cdot \vec{s}_1 = \vec{s}_3$, $\frac{3}{2} \cdot \vec{s}_1 = \vec{s}_4 \Rightarrow$ Rang = 1;

b) i) $\vec{z}_1 = \binom{4}{5}$ und $\vec{z}_2 = \binom{6}{7}$ sind l.u. $\Rightarrow$ Rang = 2; ii) $\vec{z}_1 = \binom{1}{-2}$ und $\vec{z}_2 = \binom{-2}{4}$ sind l.a. $\Rightarrow$ Rang = 1;
iii) $\vec{z}_1 = \binom{0}{0}$ und $\vec{z}_2 = \binom{0}{0}$ sind beide l.a. $\Rightarrow$ Rang = 0;
iv) $\vec{z}_1 = \binom{1}{0}$ und $\vec{z}_2 = \binom{2}{0}$ sind l.a. $\Rightarrow$ Rang = 1;
v) $\vec{z}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{z}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind l.u. $\Rightarrow$ Rang = 2;
vi) $\vec{z}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{z}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ sind l.u. $\Rightarrow$ Rang = 1;
vii) $\vec{z}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{z}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind l.a. $\Rightarrow$ Rang = 0; viii) $\vec{z}_1, \vec{z}_2$ sind l.u. $\Rightarrow$ Rang = 2;

c) Tatsächlich gilt (ohne Beweis) Zeilenrang $\underline{=}$ Spaltenrang. Damit ist der Rang $\underline{A}_{m\times n} \leq \underline{\min\{m, n\}}$.

Sei $\underline{A}_{n\times n}$ quadratisch mit $\det(\underline{A}) \neq 0$ dann hat $\underline{A}$ Vollrang: Rang($\underline{A}$)=$\underline{n}$.

d) $\mathbb{L} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | (-2s - 3t, s, t)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}\}$; $\vec{x}$ hat Dimension 3, $\vec{0}$ hat Dimension 2; Rang $(\underline{A}) = 1$. Je höher der Rang von $\underline{A}$ desto weniger Parameter braucht man für die Lösungsmenge des LGS $\underline{A} \circ \vec{x} = \vec{0}$. Rang $= G - n$. Der Rang ist die Anzahl der relevanten Gleichungen eines LGS.

e) i)
$$\begin{array}{rrl} 4x_1 & +5x_2 & = 0 \xrightarrow{\cdot 6} \quad 24x_1 \quad +30x_2 = 0 \\ 6x_1 & +7x_2 & = 0 \xrightarrow{\cdot(-4)} -24x_1 \quad \underline{-28x_2 = 0} \\ & & \qquad\qquad\qquad\qquad 2x_2 = 0 \quad \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \dim(\mathbb{L}) = 0; \end{array}$$

ii)
$$\begin{array}{rrl} x_1 & -2x_2 & = 0 \xrightarrow{\cdot 2} \quad 2x_1 \quad -4x_2 = 0 \\ -2x_1 & +4x_2 & = 0 \xrightarrow{\cdot 1} -2x_1 \quad \underline{+4x_2 = 0} \\ & & \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Sei } x_2 = t \Rightarrow \\ x_1 = 2t \Rightarrow \end{array} \quad \vec{x} = \binom{2t}{t}, \dim(\mathbb{L}) = 1;$$

iii) Jedes Zahlentripel löst das LGS (0=0), damit ist $\mathbb{L} = \mathbb{R}^2$, $\dim(\mathbb{L})$ =2;

iv) $x_1 = 0$, x_2 ist beliebig, damit ist $\mathbb{L} = (0; x_2), x_2 \in \mathbb{R}$, $\dim(\mathbb{L})$ =1;

vi)
$$\begin{array}{rrrl} -x_1 & +x_2 & +2x_3 & = 0 \\ 2x_1 & +x_2 & & = 0, \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{sei } x_1 = t \Rightarrow \qquad\qquad x_2 = -2x_2 = -2t, \\ x_3 = 0.5(x_1 - x_2) = 0.5(-2t - t) = -1.5t \end{array} \quad \dim(\mathbb{L}) = 1;$$

vi) $$\begin{array}{rrrl} 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & =0 \\ 4x_1 & +6x_2 & +8x_3 & =0 \end{array} \begin{array}{c}\xrightarrow{\cdot 2}\\ \xrightarrow{\cdot(-1)}\end{array} \begin{array}{rrrl} 4x_1 & +6x_2 & +8x_3 & =0\\ -4x_1 & -6x_2 & \underline{-8x_3} & \underline{=0} \\ & & 0 & =0\end{array}$$ sei $x_2 = s$, $x_3 = t \Rightarrow$

$x_1 = 0.5(-3x_2 - 4x_3) = -1.5s - 2t$, $\mathbb{L} = \{(-1.5s - 2t; s, t), s, t \in \mathbb{R}\}$, $\dim(\mathbb{L}) = 2$;

vii) Jedes Zahlenpaar löst das LGS $(0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0)$, damit ist $\mathbb{L} = \mathbb{R}^3$, $\dim(\mathbb{L}) = 3$;

viii) $$\begin{array}{rrrrl} x_1 & +2x_2 & +4x_3 & +x_4 & =0 \\ x_1 & +4x_2 & +2x_3 & +x_4 & =0 \end{array} \begin{array}{c}\xrightarrow{\cdot 1}\\ \xrightarrow{\cdot(-1)}\end{array} \begin{array}{rrrrl} x_1 & +2x_2 & +4x_3 & +x_4 & =0\\ -x_1 & \underline{-4x_2} & \underline{-2x_3} & -x_4 & \underline{=0} \\ & -2x_2 & +2x_3 & & =0\end{array}$$ sei $x_3 = s, x_4 = t$ $\Rightarrow x_2 = s$,

$x_1 = -2x_2 - 4x_3 - x_4 = -2s - 4s - t = -6s - t$, $\mathbb{L} = \{(-6s - t, s, s, t), s, t \in \mathbb{R}\}$, $\dim(\mathbb{L}) = 2$;

ix) $$\begin{array}{rrrl} x_1 & +x_2 & & =0 \\ x_1 & & +x_3 & =0 \end{array} \begin{array}{c}\xrightarrow{\cdot 1}\\ \xrightarrow{\cdot(-1)}\end{array} \begin{array}{rrrl} x_1 & +x_2 & & =0\\ -x_1 & & \underline{-x_3} & \underline{=0} \\ & x_2 & -x_3 & =0\end{array} \qquad \begin{array}{rrl} x_2 & +x_3 & =0 \\ \underline{x_2} & -x_3 & \underline{=0} \\ 2x_2 & & =0 \end{array}$$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{(0, 0, 0)\}$, $\dim(\mathbb{L}) = 0$;

x) $$\begin{array}{rrrl} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & =0 \\ 4x_1 & +5x_2 & +6x_3 & =0 \end{array} \begin{array}{c}\xrightarrow{\cdot 4}\\ \xrightarrow{\cdot(-1)}\end{array} \begin{array}{rrrl} 4x_1 & +8x_2 & +12x_3 & =0\\ -4x_1 & \underline{-5x_2} & \underline{-6x_3} & \underline{=0} \\ & 3x_2 & +6x_3 & =0\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrl} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & =0 \\ 7x_1 & +8x_2 & +9x_3 & =0 \end{array} \begin{array}{c}\xrightarrow{\cdot 7}\\ \xrightarrow{\cdot(-1)}\end{array} \begin{array}{rrrl} 7x_1 & +14x_2 & +21x_3 & =0\\ -7x_1 & \underline{-8x_2} & \underline{-9x_3} & \underline{=0} \\ & 6x_2 & +12x_3 & =0\end{array}$$

$$\begin{array}{rrl} 3x_2 & +6x_3 & =0 \\ 6x_2 & +12x_3 & =0 \end{array} \begin{array}{c}\xrightarrow{\cdot 2}\\ \xrightarrow{\cdot(-1)}\end{array} \begin{array}{rrl} 6x_2 & +12x_3 & =0\\ -6x_2 & \underline{-12x_3} & \underline{=0} \\ & 0 & =0\end{array}$$

sei $x_3 = t \Rightarrow x_2 = -2t$, $x_1 = -2x_2 - 3x_3 = 4t - 3t = t$ $\mathbb{L} = \{(t, -2t, t), t \in \mathbb{R}\}$, $\dim(\mathbb{L}) = 1$;

xi) $$\begin{array}{rrrl} 4x_1 & -8x_2 & +12x_3 & =0 \\ -2x_1 & +4x_2 & -6x_3 & =0 \end{array} \begin{array}{c}\xrightarrow{\cdot 2}\\ \xrightarrow{\cdot(-2)}\end{array} \begin{array}{rrrl} 8x_1 & -16x_2 & +24x_3 & =0\\ -8x_1 & +16x_2 & \underline{-24x_3} & \underline{=0} \\ & & 0 & =0\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrl} 4x_1 & -8x_2 & +12x_3 & =0 \\ 3x_1 & -6x_2 & +9x_3 & =0 \end{array} \begin{array}{c}\xrightarrow{\cdot 3}\\ \xrightarrow{\cdot(-2)}\end{array} \begin{array}{rrrl} 12x_1 & -24x_2 & +36x_3 & =0\\ -12x_1 & +24x_2 & \underline{-36x_3} & \underline{=0} \\ & & 0 & =0\end{array}$$

sei $x_2 = s, x_3 = t \Rightarrow x_1 = 2x_2 - 3x_3 = 2s - 3t$, $\mathbb{L} = \{(2s - 3t, s, t), s, t \in \mathbb{R}\}$, $\dim(\mathbb{L}) = 2$;

xii) $$\begin{array}{rrrrl} 6x_1 & +3x_2 & -3x_3 & +9x_4 & =0 \\ 8x_1 & +4x_2 & -4x_3 & +12x_4 & =0 \end{array} \begin{array}{c}\xrightarrow{\cdot \frac{1}{3}}\\ \xrightarrow{\cdot(-\frac{1}{4})}\end{array} \begin{array}{rrrrl} 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +3x_4 & =0\\ -2x_1 & -x_2 & +x_3 & \underline{-3x_4} & \underline{=0} \\ & & & 0 & =0\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrl} 6x_1 & +3x_2 & -3x_3 & +9x_4 & =0 \\ 10x_1 & +5x_2 & -5x_3 & +15x_4 & =0 \end{array} \begin{array}{c}\xrightarrow{\cdot \frac{1}{3}}\\ \xrightarrow{\cdot(-\frac{1}{5})}\end{array} \begin{array}{rrrrl} 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +3x_4 & =0\\ -2x_1 & -x_2 & +x_3 & \underline{-3x_4} & \underline{=0} \\ & & & 0 & =0\end{array}$$

sei $x_2 = r, x_3 = s, x_3 = t \Rightarrow x_1 = 0.5(-x_2 + x_3 - 3x_4) = -0.5r + 0.5s - 1.5t$,

$\mathbb{L} = \{(-0.5r + 0.5s - 1.5t, r, s, t), r, s, t \in \mathbb{R}\}$, $\dim(\mathbb{L}) = 3$;

f) $n = \dim(\mathbb{L}) + \text{Rang } \underline{A}$;

g) xiii)

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & -x_2 & +2x_3 & +2x_4 & =1 \\ 2x_1 & -3x_2 & +6x_3 & +x_4 & =4 \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 2} \\ \xrightarrow{\cdot(-1)} \\ \end{array} \begin{array}{rrrrl} 2x_1 & -2x_2 & +4x_3 & +4x_4 & =2 \\ -2x_1 & +3x_2 & -6x_3 & -x_4 & =-4 \\ \hline & x_2 & -2x_3 & +3x_4 & =-2 \end{array}$$

Die resultierende Gleichung ist äquivalent zu Gleichung (II); damit ist die Gleichung (III) nicht relevant. Sei $x_3 = s, x_4 = t$, $x_2 = -2 + 2x_3 - 3x_4 = -2 + 2s - 3t$,
$x_1 = 1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 1 - 2 + 2s - 3t - 2s - 2t = -1 - 5t$, $\mathbb{L} = \{(-1-5t, -2+2s-3t, s, t), s, t \in \mathbb{R}\}$, $\dim(\mathbb{L})=2$, $\text{Rang}(\underline{A}) = n - \dim(\mathbb{L}) = 4 - 2 = 2$;

xiv)

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & -1x_4 & =1 \\ -2x_1 & +4x_2 & -6x_3 & +2x_4 & =-2 \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 2} \\ \xrightarrow{\cdot 1} \\ \end{array} \begin{array}{rrrrl} 2x_1 & -4x_2 & +6x_3 & -2x_4 & =2 \\ -2x_1 & +4x_2 & -6x_3 & +2x_4 & =-2 \\ \hline & & & 0 & =0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & -1x_4 & =1 \\ 4x_1 & -8x_2 & +12x_3 & -4x_4 & =4 \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 4} \\ \xrightarrow{\cdot(-1)} \\ \end{array} \begin{array}{rrrrl} 4x_1 & -8x_2 & +12x_3 & -4x_4 & =4 \\ -4x_1 & +8x_2 & -12x_3 & +4x_4 & =-4 \\ \hline & & & 0 & =0 \end{array}$$

Damit sind die Gleichungen (II) und (III) nicht relevant. Sei $x_2 = r, x_3 = s, x_4 = t$,
$x_1 = 1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 + 2r - 3s + t$, $\mathbb{L} = \{(1 + 2r - 3s + t, r, s, t), r, s, t \in \mathbb{R}\}$, $\dim(\mathbb{L})=3$, $\text{Rang}(\underline{A}) = n - \dim(\mathbb{L}) = 4 - 3 = 1$;

xv)

$$\begin{array}{rrrrrl} 0x_1 & +x_2 & +2x_3 & +x_4 & +x_5 & =1 \\ 0x_1 & +6x_2 & +14x_3 & +8x_4 & +6x_5 & =4 \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 6} \\ \xrightarrow{\cdot(-1)} \\ \end{array} \begin{array}{rrrrl} 6x_2 & +12x_3 & +6x_4 & +6x_5 & =6 \\ -6x_2 & -14x_3 & -8x_4 & -6x_5 & =-4 \\ \hline & -2x_3 & -2x_4 & & =2 \end{array}$$

Die resultierende Gleichung ist äquivalent zu Gleichung (II); damit ist die Gleichung (III) nicht relevant. Sei $x_1 = r, x_4 = s, x_5 = t$, $x_3 = -2x_4 = -2s$,
$x_2 = 1 - 3x_3 - x_4 - x_5 = 1 - 3(-2s) - s - t = 1 + 5s - t$, $\mathbb{L} = \{(r, 1 + s - t, -1 - s, s, t), r, s, t \in \mathbb{R}\}$, $\dim(\mathbb{L})=3$, $\text{Rang}(\underline{A}) = n - \dim(\mathbb{L}) = 5 - 3 = 2$;

15.11 Lösungsvorschläge Wahlteil Geometrie

LöVo mit Unterstützung von T.Tressel (Beratung); N.Kubalik (Zeichnungen); M. Heger (Geogebra); + T. Schmid; Vielen Dank! Die Aufgaben finden Sie im Abschnitt 1036/16.11.22.

15.11.1 Lösungsvorschläge Wahlteil Geometrie B1 2018

a) Nachweis, dass das Dreieck DEF nicht rechtwinklig ist. Sei $\vec{x} \neq \vec{0} \neq \vec{y}$, dann ist $\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$.

Es gilt: $\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} -25 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} -25 \\ -25 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Sind die Vektoren orthogonal?

$$\overrightarrow{DE} \circ \overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -25 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot (-25) + 30 \cdot 5 + 0 \cdot 0 = 150 \neq 0;$$

$$\overrightarrow{ED} \circ \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 0 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -25 \\ -25 \\ 0 \end{pmatrix} = 750 \neq 0; \qquad \overrightarrow{FD} \circ \overrightarrow{FE} = \begin{pmatrix} 25 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix} = 500 \neq 0;$$

alle drei Skalarprodukte müssen geprüft werden. Da alle drei Ergebnisse $\neq 0$ sind, liegt keine Orthogonalität vor.

Erläuterung: Die Parameterform einer Geraden durch A und B kann von der Form
$g_{AB} : \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB}$ $(t \in \mathbb{R})$ sein. Für $0 < t < 1$ liegt ein Punkt zwischen A und B.

Damit ist die linke Seite der Gleichung g_{DA} und die rechte Seite ist g_{EB}.
g_{DA} und g_{EB} wurden also gleichgesetzt und dann der Parameterwert des Schnittpunktes, und damit wurde deren Schnittpunkt S berechnet.

b) Flächeninhalt des Dreiecks ΔDEF : Das Dreieck ΔDEF liegt in der Ebene $x_3 = 15$.
Es gibt mehrere Möglichkeiten, den Flächeninhalt des Dreiecks zu bestimmen.

1.Möglichkeit: Lotebene L durch F orthogonal zu g_{DE}: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -25 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_2 = 5$;
$g_{DE} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $g_{DE} \cap L = H(0|0|15)$.

Damit ist $A = 0.5 \cdot |\overrightarrow{DE}| \cdot |\overrightarrow{FL}| = 0.5 \cdot 30 \cdot 25 = 375\ (m^2)$.

2.Möglichkeit: Die Fläche eines beliebigen Dreiecks ΔDEF kann mit Hilfe des Vektorproduktes ermittelt werden:

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{DE} \times \overrightarrow{DF}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -25 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \cdot 25 \end{pmatrix} \right| = 375\ (m^2).$$

Gesucht ist das Volumen der Pyramide $DEFG$.

Die Pyramidenhöhe entspricht dem Abstand von G von der Ebene durch D, E und F, $E_{DEF} : x_3 = 15$.
Damit sind $h = 35 - 15 = 20$ und $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 375 \cdot 20 = 2500(m^3)$.

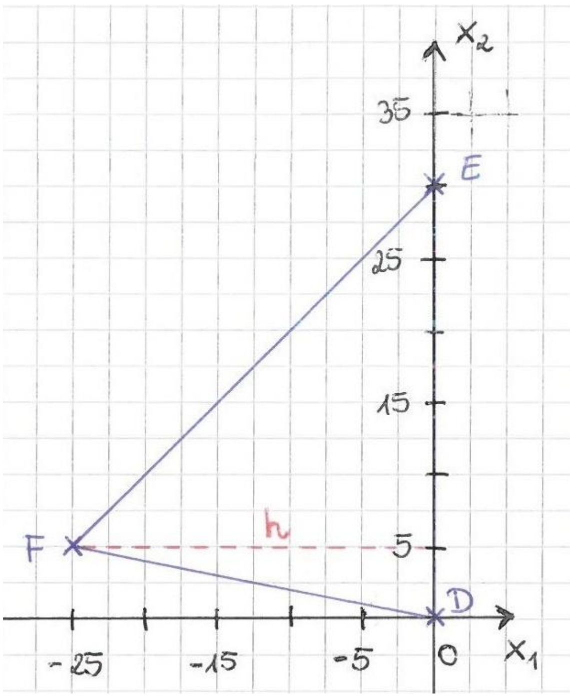
Auch das Volumen kann mit Hilfe des Vektorproduktes (Spatproduktes) berechnet werden:
$V = \frac{1}{6} \cdot |(\overrightarrow{DE} \times \overrightarrow{DF}) \circ \overrightarrow{DG}|$.

Die benötigte Leistung beträgt $(2500 : 100) \cdot 0.8 = 20 < 25$. Damit ist die Leistung ausreichend.

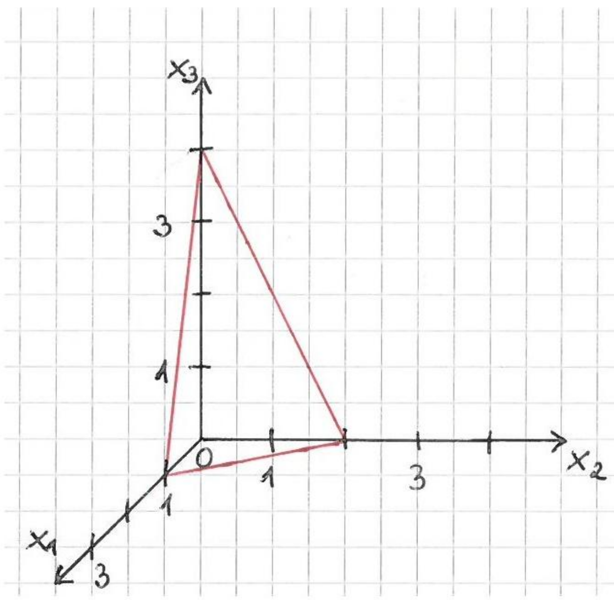
c) Wir berechnen die Koordinatengleichung der Ebene E_{EFG}:

Parameterform für E_{EFG}: $\vec{x} = \overrightarrow{OE} + r \cdot \overrightarrow{EF} + s \cdot \overrightarrow{EG}$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -25 \\ -25 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ 20 \end{pmatrix},\ r, s \in \mathbb{R}.$$



Abitur 2018 **Thx Nicole K.**



Darstellung der Bodenfläche in der Ebene $x_3 = 15$.

Ein Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E_{EFG} ist

$\vec{n}_1 := \begin{pmatrix} -25 \\ -25 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -500 \\ 500 \\ 250 \end{pmatrix} = 250 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Damit kann $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ gewählt werden.

Alternativ kann auch das lineare Gleichungssystem $\vec{n} \circ \overrightarrow{EF} = 0$ und $\vec{n} \circ \overrightarrow{EG} = 0$ gelöst werden:

$\begin{array}{ll} -25 \cdot n_1 - 25 \cdot n_2 + 0 \cdot n_3 & =0 \\ -10 \cdot n_1 - 20 \cdot n_2 + 20 \cdot n_3 & =0 \end{array}$ wird gelöst von $\{\vec{n} \in \mathbb{R}^3 | (-2t, 2t, t)$ für alle $t \in \mathbb{R}\}$.

E_{EFG} ist von der Form $-2x_1 + 2x_2 + x_3 = b$

Punktprobe mit $E(0|30|15)$ ergibt $E_{EFG} : -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 75$.

Die Metallstange liegt auf der Geraden g_{GR} durch $G(-10|10|35)$ und $R(-5|5|15)$.

g_{GR}: $\vec{x} = \overrightarrow{OG} + t \cdot \overrightarrow{GR}$: oder $\vec{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 35 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -20 \end{pmatrix}$;

Bei dieser Darstellung gilt, dass ein Punkt zwischen G und R liegt, wenn dessen Parameter einen Wert zwischen 0 und 1 hat.

Gesucht ist ein Punkt zwischen G und R (also auf g_{GR}), der von der Ebene E_{EFG} den Abstand 8 besitzt.
Die Abstandsform (beruht auf der HNF) von E_{EFG} ist $\left| \frac{-2x_1+2x_2+x_3-75}{\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}} \right| = d$.

g_{GR} als Wanderpunkt ist $W(-10 + 5t|10 - 5t|35 - 20t)$ in die Abstandsform ($d = 8$) eingesetzt:

$\left| \frac{-2(-10+5t)+2(10-5t)+(35-20t)-75}{3} \right| = 8 \Leftrightarrow \left| \frac{-40t}{3} \right| = 8$

Der Betrag wurde aufgelöst: $\frac{40t}{3} = \pm 8 \Leftrightarrow t = \pm 0.6$ (Probe: Die Betragsgleichung wird gelöst).

Für $t = -0.6$ ergibt sich $W_{-0.6}(-13|13|47)$. Dieser Punkt liegt nicht zwischen G und R ($t < 0$) und kommt daher nicht in Frage. Für $t = 0.6$ ergibt sich $W_{0.6}(-7|7|23)$. $W_{0.6}$ liegt zwischen G und R ($0 < t < 1$) und damit ist $W_{0.6}(-7|7|23)$ die gesuchte Position des Punktes.

15.11.2 Lösungsvorschläge Wahlteil Geometrie B2 2018

a) Zur Darstellung in einem Koordinatensystem berechnen wir die Spurpunkte:

$E : \frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{4} = 1 \Rightarrow S_1(1|0|0)$, $S_2(0|2|0)$ und $S_3(0|0|4)$.

Ein Normalenvektor von E ist $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; ein Normalenvektor von F ist $\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$E \perp F \Leftrightarrow$ die Normalenvektoren sind orthogonal $\Leftrightarrow \vec{n}_E \perp \vec{n}_F \Leftrightarrow \vec{n}_E \circ \vec{n}_F = 0$

$\vec{n}_E \circ \vec{n}_F = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 9 \neq 0$, also ist E nicht orthogonal zu F.

Berechnung der Schnittgeraden s: Wir berechnen die Lösungsmenge des LGS

$$\begin{array}{lllll} \text{(I)} & 4x_1 & +2x_2 & +x_3 & = 4 \\ \text{(II)} & 2x_1 & & +x_3 & = 4 \end{array}$$

Sei $x_1 = t$ (mit $t \in \mathbb{R}$), eingesetzt in die zweite Gleichung (II): $2 \cdot t + x_3 = 4 \Leftrightarrow x_3 = 4 - 2 \cdot t$;

in (I): $4 \cdot t + 2x_2 + 4 - 2 \cdot t = 4 \Leftrightarrow x_2 = -t$.

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ 4-2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Damit ist $s : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Eine äquivalente Lösung (mit Wahl von $x_3 = t$) ist $s : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Eine Ebene schneidet alle drei Koordinatenachsen, wenn die Ebene zu keiner Koordinatenachse parallel ist. Dies ist der Fall, wenn ein Koeffizient vor x_1, x_2 oder x_3 null ist, das Absolutglied (hier ist es 4) aber $\neq 0$ ist.

$E_a : ax_1 + (a-2)x_2 + x_3 = 4$

Fall $a = 0$: E_0 ist parallel zur x_1 -Achse. Fall $a = 2$: E_2 ist parallel zur x_2 -Achse.

Für $a \in \mathbb{R}\backslash\{0; 2\}$ schneidet die E_a alle drei Koordinatenachsen.

Bei dieser speziellen Lage der Pyramide kann das Volumen einfach über die Spurpunkte gerechnet werden.

Es sind $S_1(\frac{4}{a}|0|0)$, $S_2(0|\frac{4}{a-2}|0)$ und $S_3(0|0|4)$.

$V = \left|\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{a} \cdot \frac{4}{a-2} \cdot 4\right| = \left|\frac{64}{6 \cdot a \cdot (a-2)}\right|$.

Das Volumen soll 6 sein: $\left|\frac{64}{6 \cdot a \cdot (a-2)}\right| = 6$.

Der Betrag wurde aufgelöst: $\frac{64}{6 \cdot a \cdot (a-2)} = \pm 6 \Leftrightarrow 64 = \pm 36 \cdot a \cdot (a-2)$.

Die Gleichung $64 = 36 \cdot a \cdot (a-2)$ hat die Lösungen $a_1 = \frac{8}{3}$ und $a_2 = -\frac{2}{3}$ (Probe: stimmt).

Die Gleichung $64 = -36 \cdot a \cdot (a-2)$ hat keine Lösung.

Damit kann $a = \frac{8}{3}$ oder $a = -\frac{2}{3}$ gewählt werden.

c) Die Abstandsform (beruht auf der HNF) von E_a ist $\left|\frac{ax_1 + (a-2)x_2 + x_3 - 4}{\sqrt{a^2 + (a-2)^2 + 1^2}}\right| = d$.

$P(0|0|1)$ in die Abstandsform eingesetzt ergibt:

$\left|\frac{-3}{\sqrt{a^2+(a-2)^2+1^2}}\right| = d(a)$ (also der Abstand abhängig von a).

$\frac{-3}{\sqrt{a^2+(a-2)^2+1^2}} < 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$, damit ist $d(a) = \frac{+3}{\sqrt{a^2+(a-2)^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2a^2-4a+5}} = 3 \cdot (2a^2+4a+5)^{-0.5}$;
$d'(a) = -1.5 \cdot (4a-4) \cdot (2a^2 - 4a + 5)^{-1.5}$

$d'(a) = 0 \Leftrightarrow 4a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 1.$ $d(1) = \frac{3}{\sqrt{1+1+1}} = \sqrt{3}.$

Der Abstand wird für a = 1 maximal. Der maximale Abstand beträgt $d(1) = \sqrt{3}$.
Hier hätte man im Jahr 2018 noch den GTR verwenden können.

Warum enthält die Schar keine parallelen Geraden?

Ein Normalenvektor von E_a ist $\vec{n}_a = \begin{pmatrix} a \\ a-2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sei $a_1 \neq a_2$: $E_{a_1} || E_{a_2} \Leftrightarrow \vec{n}_{a_1} = k \cdot \vec{n}_{a_2}$.

Ansatz für parallele Ebenen: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 - 2 \\ 1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ a_2 - 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$

$$\begin{array}{rll} \text{(I)} & a_1 = k \cdot a_2 & \\ \text{(II)} & a_1 - 2 = k \cdot (a_2 - 2) & \text{nach (III) gilt } k = 1 \text{ in (I) eingesetzt folgt } a_1 = a_2; \\ \text{(III)} & 1 = k \cdot 1 & \end{array}$$

Widerspruch zu $a_1 \neq a_2$. Damit gibt es kein Paar paralleler Ebenen in dieser Schar.

15.11.3 Lösungsvorschläge Wahlteil Geometrie B1 2019

a) Zeichnung des Vierecks $KLMN$:

Nachweis, dass das Viereck $KLMN$ ein Trapez (zwei Seiten sind parallel) ist:

$\overrightarrow{KN} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{LM} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Es gilt $\overrightarrow{KN} = 2 \cdot \overrightarrow{LM}$. Damit sind die Vektoren Vielfache voneinander (linear abhängig) oder die zugehörigen Seiten parallel.

Gleichlange Seiten KL und MN:

$\left|\overrightarrow{KL}\right| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2 + (-1)^2} = \sqrt{35}; \qquad \left|\overrightarrow{MN}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{35}.$

Bemerkung: Weil die Seiten KN und LM nicht gleich lang sind, ist $KLMN$ kein Parallelogramm, sondern ein gleichschenkliges Trapez. Abb. siehe Ende der Aufgabe

Gleichung der Ebene T in Parameterform:

Parameterform: $\vec{x} = \overrightarrow{OK} + r \cdot \overrightarrow{KL} + s \cdot \overrightarrow{KM}$ (N wird nicht benötigt);

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, für alle $s, t \in \mathbb{R}$.

Einen Normalenvektor $\vec{n}$ von T finden wir durch das Vektorprodukt

$\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ -16 \\ -20 \end{pmatrix}$; damit kann $\vec{n}$ als $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ gewählt werden.

Alternativ kann auch das lineare Gleichungssystem $\vec{n} \circ \overrightarrow{KL} = 0$ und $\vec{n} \circ \overrightarrow{KM} = 0$ gelöst werden:

$\begin{array}{ll} -4 \cdot n_1 + 0 \cdot n_2 + 4 \cdot n_3 & =0 \\ -3 \cdot n_1 + 5 \cdot n_2 - n_3 & =0 \end{array}$ wird gelöst von $\{\vec{n} \in \mathbb{R}^3 | (t, 0.8t, t)$ für alle $t \in \mathbb{R}\}$.

Damit ist T von der Form $5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = b$;

$K(5|0|1)$ eingesetzt, ergibt $b = 25 + 5$; oder $T : 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 30$;

Eine Parameterform der x_1-Achse ist $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

T geschnitten mit der x_1-Achse: $5 \cdot t + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 30 \Leftrightarrow t = 6$; damit ist $S_1(6|0|0)$.

b) Es gilt $F(5|0|5)$ und $G(5|5|5)$.

Die Gerade FG ist $g_{FG} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$; für die Strecke FG gilt $0 \le t \le 1$.

Ein allgemeiner Punkt W_t auf der Strecke FG hat die Koordinaten $W_t(5|5t|5)$ $(0 \le t \le 1)$.

Es gilt $W_0 = F$ und $W_1 = G$.

Die Abstandsform (beruht auf der HNF) von T ist $\left|\frac{5x_1+4x_2+5x_3-30}{\sqrt{5^2+4^2+5^2}}\right| = d$;

Abstand des Wanderpunktes W_t von der Ebene T:

$d(W_t, T) = \left|\frac{5\cdot5+4\cdot5t+5\cdot5-30}{\sqrt{66}}\right| = \left|\frac{20t+20}{\sqrt{66}}\right| = \frac{18}{\sqrt{66}} \Leftrightarrow |20t + 20| = 18.$

Der Betrag wurde aufgelöst: $20t + 20 = 18 \Leftrightarrow t = -0.1$ (nicht zwischen F und G);

$-20t - 20 = 18 \Leftrightarrow t = -1.9$ (auch nicht zwischen F und G).

Damit kann es keine Pyramide dieser Form geben.

c) Wenn g_a in $x_3 = 3.5$ liegt, ist der Richtungsvektor der Geradenschar $\vec{r}_a$ orthogonal zum Normalenvektor $\vec{n}$: $\vec{r}_a \perp \vec{n}$ oder $\vec{r}_a \circ \vec{n} = 0$:

$\begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ \frac{2}{a} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 + 0 + \frac{2}{a} \neq 0.$ Damit kann keine Gerade g_a in $x_3 = 3.5$ liegen.

Wenn eine der Geraden g_a die Schnittgerade von T und U sein soll, muss deren (konstanter) Aufpunkt $(2.5|0|3.5)$ sowohl in T als auch in U sein (Punktprobe: ok).

Außerdem muss der Richtungsvektor von g_a orthogonal zu den Normalenvektoren von T und U sein:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ \frac{2}{a} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = -40a + \frac{10}{a} = 0 \xLeftrightarrow{+40a;\cdot a} 4a^2 = 1 \Leftrightarrow a_{1,2} = \pm\frac{1}{2}.$$

Weil $a > 0$ vorausgesetzt ist, gilt $a = \frac{1}{2}$. $\begin{pmatrix} 0 \\ -10 \cdot \frac{1}{2} \\ \frac{2}{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 + (-5) \cdot 4 + 4 \cdot 5 = 0.$

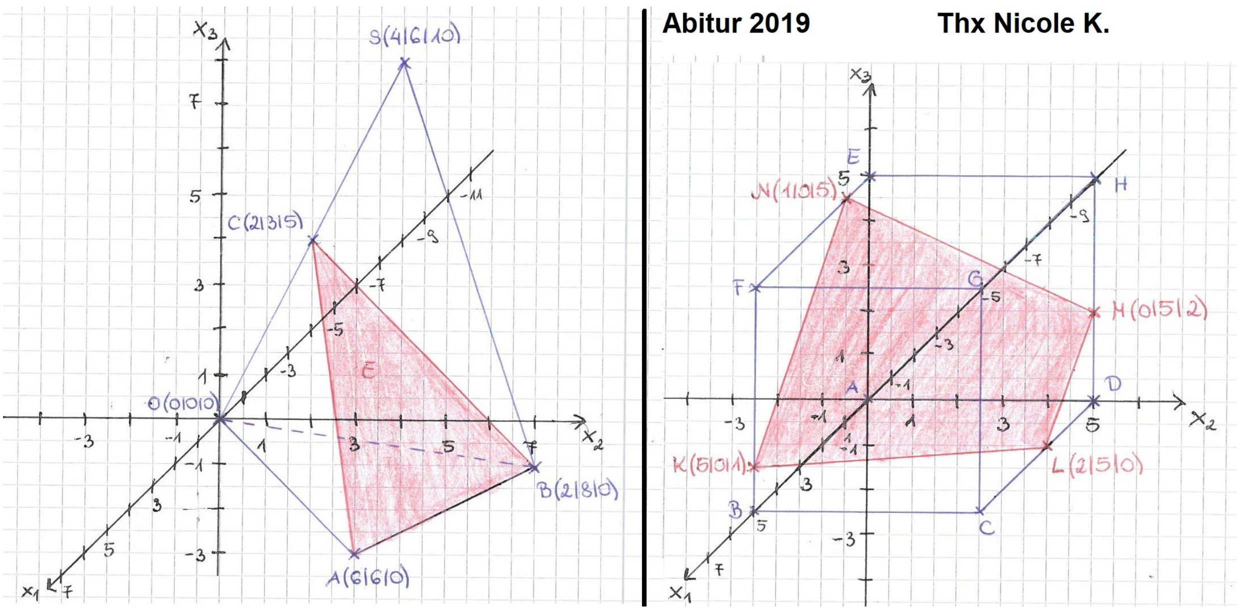
Ein anderer Lösungsansatz ist die Berechnung der Schnittgeraden $h := T \cap U$: Dazu lösen wir das LGS

$$\begin{array}{rrrrl} T: & 5x_1 & +4x_2 & +5x_3 & = 30 \\ -U: & 5x_1 & -4x_2 & -5x_3 & = -5 \\ \hline & 10x_1 & & & = 25 \end{array}$$

Also ist $x_1 = 2.5$. In U und T eingesetzt ergibt sich:

$5 \cdot 2.5 + 4x_2 + 5x_3 = 30 \xLeftrightarrow{-12.5} 4x_2 + 5x_3 = 17.5$

$5 \cdot 2.5 - 4x_2 - 5x_3 = -5 \xLeftrightarrow{-12.5} -4x_2 - 5x_3 = -17.5$



Die Gleichungen sind erwarteterweise äquivalent.

Sei $x_2 = t$ ($t \in \mathbb{R}$), dann ist $4t + 5x_3 = 17.5$ oder $x_3 = 3.5 - 0.8t$. Damit ist die Schnittgerade

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ t \\ 3.5 - 0.8t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 0 \\ 3.5 \end{pmatrix} + t \cdot = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0.8 \end{pmatrix} (t \in \mathbb{R}).$$

Der Aufpunkt von h entspricht dem Aufpunkt von g_a, damit müssen die Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0.8 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ 2/a \end{pmatrix}$ Vielfache voneinander sein.

$k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ 2/a \end{pmatrix} \Rightarrow k = -10a$ in $-0.8k = \frac{2}{a}$ eingesetzt:

$-0.8 \cdot (-10a) = \frac{2}{a} \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{4}$ also $a = \pm 0.5$. Da $a > 0$ vorausgesetzt ist, ergibt sich $a = 0.5$

Also gehört die Schnittgerade als $g_{0.5} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 0 \\ 3.5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} (t \in \mathbb{R})$ zur Schar.

15.11.4 Lösungsvorschläge Wahlteil Geometrie B2 2019

a) Darstellung der Pyramide siehe oben

Bem: Die Pyramiden aus den Teilen a) und c) sind gleich, während die Pyramide in Teil b) eine andere Pyramide ist.

Berechnung einer Koordinatengleichung von E mit Hilfe einer Parameterform von E :

Parameterform: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$;

$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R},$

$\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$; damit kann $\vec{n} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Normalenvektor gewählt werden.

Alternativ kann auch das lineare Gleichungssystem $\vec{n} \circ \overrightarrow{AB} = 0$ und $\vec{n} \circ \overrightarrow{AC} = 0$ gelöst werden:

$\begin{array}{ll} -4 \cdot n_1 + 2 \cdot n_2 + 0 \cdot n_3 & =0 \\ -4 \cdot n_1 - 3 \cdot n_2 + 5 \cdot n_3 & =0 \end{array}$ wird gelöst von $\{\vec{n} \in \mathbb{R}^3 | (0.5t, 0.5t, t)$ für alle $t \in \mathbb{R}\}$.

Damit ist E von der Form $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = b$;

Einsetzen des Punktes $A(6|6|0)$ in E ergibt $b = 6 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 0 = 18$;

Koordinatengleichung von E: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 18$;

b) Nachweis der Gleichschenkligkeit von ΔABC. Berechnung der Länge der Dreiecksseiten:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{20};$

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{50};$

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2 + 5^2} = \sqrt{50};$ damit ist das Dreieck gleichschenklig.

Das Volumen der Pyramide kann mit dem Spatprodukt $V = \frac{1}{6} \cdot |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \circ \overrightarrow{AS}|$ berechnet werden.

$V = \frac{1}{6} \cdot \left| \left(\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot |-20 + 200| = 30$

Alternativ kann das Volumen auch mit der Formel $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ berechnet werden:

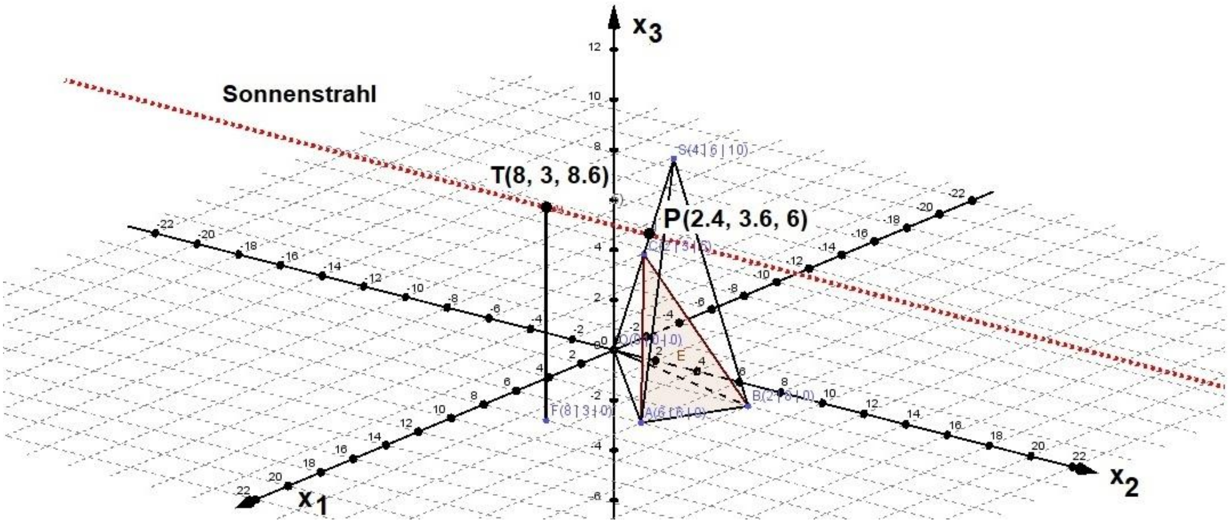
Sei $M_{AB}(4|7|0)$ die Mitte von A und B. Weil ΔABC gleichschenklig ist, gilt $G = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{M_{AB}C}|$

$G = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{45} = 15.$

Die Abstandsform (beruht auf der HNF) der Ebene E:

$\left|\frac{x_1+2x_2+2x_3-18}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}\right| = d$; $S(4|6|10)$ eingesetzt ergibt $d(S;E) = \left|\frac{4+2\cdot6+2\cdot10-18}{3}\right| = 6$;

$V = \frac{1}{3}\cdot G\cdot h = \frac{1}{3}\cdot 15\cdot 6 = 30.$ Das Volumen der Pyramide ist also 30 Volumeneinheiten.



c) Sei $M(8|3|h)$ die (allgemeine) Mastspitze in der Höhe h, dann wandert der Schattenpunkt der Mastspitze auf der Geraden $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}8\\3\\h\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-9\\1\\-4\end{pmatrix}$. Diese Gerade ($h$) soll die Gerade durch O und S also $g_{OS}: \vec{x} = t\cdot\begin{pmatrix}4\\6\\10\end{pmatrix}$ schneiden. Das Gleichsetzen von g_{OS} und h ergibt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4t+9s=8 \\ 6t-s=3 \\ -h+10t+4s=0 \end{pmatrix}.$$

Die ersten beiden Gleichungen können eindeutig nach s bzw. t aufgelöst werden, weshalb sich (mit Hilfe der dritten Gleichung) eine eindeutige Lösung für h ergibt, die dann die Höhe des Mastes darstellt.

Für besonders Interessierte (war nicht verlangt):

Das Lösen des LGS ergibt die Werte $t = \frac{35}{58}$, $s = \frac{18}{29}$ und $h = \frac{247}{29} \approx 8.5 \Rightarrow M(8|3|8.5)$.

Der Schattenpunkt P der Mastspitze aus g_{OS} liegt etwa bei $\frac{35}{58}\cdot\begin{pmatrix}4\\6\\10\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}2.4\\3.6\\6.0\end{pmatrix}$, also ist $P(2.4|3.6|6.0)$.

15.11.5 Lösungsvorschläge Wahlteil Geometrie B1 2020

a) $\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{BC}\circ\overrightarrow{BS}}{|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{BS}|} = \frac{\begin{pmatrix}-18\\0\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-9\\-9\\12\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}-18\\0\\0\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}-9\\-9\\12\end{pmatrix}\right|} = \frac{162}{54\sqrt{34}} \Rightarrow \alpha \approx 59.04°.$

Der Winkel ist etwa 59.04° groß.

Eine Parametergleichung von E ist:

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\18\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-18\\0\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-9\\-9\\12\end{pmatrix}$, $r,s\in\mathbb{R}$. $\begin{pmatrix}-18\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-9\\-9\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\216\\162\end{pmatrix}$,

damit ist $E: 216x_2 + 162x_3 = 3888 \Leftrightarrow 4x_2 + 3x_3 = 72$

$|\Delta BCS| = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\216\\162\end{pmatrix}\right| = 135$. Damit hat die Seitenwand eine Fläche von $135m^2$

b) Alles spielt sich in der Ebene $x_1 = 9$ ab; damit kann das Problem auch als 'eben' betrachtet werden. Sei M die Mitte von B und C, dann liegt P auf der Geraden durch S und M $5m$ von S in Richtung M entfernt. Damit ist $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OS} + \frac{5}{|\overrightarrow{SM}|} \cdot \overrightarrow{SM} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} + \frac{5}{\sqrt{9^2+12^2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow P(9|12|8)$.

Hier fehlt eine Zeichnung. Was passiert in der Ebene $x_1 = 9$?

c) $G(11|15|3)$ und der Lichtstrahl liegt auf $l : \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} + t \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$.

$l \cap E$: $4 \cdot (9 + 6t) + 3 \cdot (7 - 4t) = 36 + 24t + 21 - 12t = 57 - 36t = 72 \Leftrightarrow t = 1.25$ und $G^*(11.5|16.5|2)$.

Verfahren: Bestimme die Ebene E_{LFG} durch L, F und G und Punkt $Q = E_{LFG} \cap g_{BC}$ (Gerade durch B und C). Die Gesamtlänge ist $|\overrightarrow{FQ}| + |\overrightarrow{QG^*}|$.

Rechnung: (nicht verlangt)

$E_{LFG} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$, $r, s \in \mathbb{R}$. $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$;

damit ist $E_{LFG} : 3x_1 - x_2 = 18$, (es war klar, dass diese Ebene parallel zur x_3-Achse sein muss).

$g_{BC} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$; $g_{BC} \cap E_{LFG} : 3 \cdot 18t - 18 = 18 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3} \Rightarrow Q(12|18|0)$.

$|\overrightarrow{FQ}| + |\overrightarrow{QG^*}| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.5 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{10} + \sqrt{6.5} \approx 5.712(m)$.

15.11.6 Lösungsvorschläge Wahlteil Geometrie B2 2020

$|\overrightarrow{AC}| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2.4 \\ 1.6 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9.32} \approx 3.05$. Die Länge der Diagonalen ist etwa $3.05m$.

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4.4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2.4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $r, s \in \mathbb{R}$. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 12x_1 - 5x_2 = -22$.

$\cos(\alpha) = = \frac{\begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{12}{13} \Rightarrow \alpha \approx 22.62°$. Der Winkel ist etwa $22.62°$ groß.

b) Der Lichtstrahl liegt auf der Geraden $l : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$;

$S = l \cap E$: $12(4 - 5t) - 5(2 + 6t) = -22 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3} \Rightarrow S(\frac{2}{3}|6|\frac{7}{3})$.

Weil $0 < \frac{2}{3} < 1$ und $4.4 < 6 < 6.8$ und $1 < \frac{7}{3} < 2.6$ gilt, wird die Projektionsfläche getroffen.

Bemerkung: Weil es sich bei der Projektionsfläche um ein Rechteck handelt, genügt es, zwei der drei Ungleichungsketten nachzuweisen (glaube ich).

c) $M_{CD}(0.5|5.6|2.6)$ in E_a eingesetzt ergibt $12 \cdot 0.5 + 5a \cdot 5.6 = 28a + 6 \Leftrightarrow 28a + 6 = 28a + 6$. Damit hebt sich das a weg und die Gleichung ist für alle $a \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Alle E_a sind parallel zu x_3-Achse,

damit liegt die Gerade $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 5.6 \\ 2.6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ auf der Hand.

d) Der Schnitt von E_1 und der x_2x_3 Ebene führt auf das LGS

$$\begin{array}{lll} 12x_1 & +5x_2 & =34 \\ x_1 & & =0 \end{array} \quad \text{und damit zur Schnittgeraden} \quad s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6.8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hier fehlt eine Zeichnung. Was passiert in der Ebene $x_3 = 2.6$?

$P(0|6.8|2.6)$ liegt auf der Schnittgeraden.

Wegen $|\overrightarrow{MP}| = \sqrt{(-0.5)^2 + (6.8-5.6)^2} = 1.3 = \sqrt{(1-0.5)^2 + (6.8-5.6)^2} = |\overrightarrow{MC}|$

folgt, dass die Projektionsfläche im Punkt P an der Wand anstößt.

15.12 LöVo zu Kapitel 12: Wahrscheinlichkeitstheorie

15.12.1 LöVo zu Einheit 12.1 (Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie UE 8_7) Seite 846-948

Aufg. 312/782: a) Jeder mögliche Ausgäng eines Zufallsexperimentes heißt Ergebnis, (früher Elementarereignis, die Ergebnismenge nennen wir $\mathcal{E}$). Jede beliebige Zusammenfassung von Ergebnissen nennt Ereignis, (Ereignismenge $P(\mathcal{E})$).

b+c) $\mathcal{E} = \{1,2,3\}, \qquad \mathcal{P}(\mathcal{E}) = \left\{ \begin{array}{llll} \emptyset, & \{1\}, & \{1,2\}, & \{1,2,3\}, \\ & \{2\}, & \{1,3\}, & \\ & \{3\}, & \{2,3\} & \end{array} \right\}$

Anz der Elemente der Teilmenge	0	1	2	3
Anz der Elemente der Telmengen	1	3	3	1

$\mathcal{E} = \{1,2,3,4\} \qquad \mathcal{P}(\mathcal{E}) = \left\{ \begin{array}{lllll} \emptyset, & \{1\}, & \{1,2\}, & \{1,2,3\}, & \{1,2,3,4\}, \\ & \{2\}, & \{1,3\}, & \{1,2,4\}, & \\ & \{3\}, & \{1,4\}, & \{1,3,4\}, & \\ & \{4\}, & \{2,3\}, & \{2,3,4\}, & \\ & & \{2,4\}, & & \\ & & \{3,4\} & & \end{array} \right\}$

Anz der Elemente der Teilmenge	0	1	2	3	4
Anz der Elemente der Teilmengen	1	4	6	4	1

$\mathcal{E} = \{1,2,3,4,5\} \qquad \mathcal{P}(\mathcal{E}) = \left\{ \begin{array}{llllll} \emptyset, & \{1\}, & \{1,2\}, & \{1,2,3\}, & \{1,2,3,4\}, & \{1,2,3,4,5\}, \\ & \{2\}, & \{1,3\}, & \{1,2,4\}, & \{1,2,3,5\}, & \\ & \{3\}, & \{1,4\}, & \{1,2,5\}, & \{1,2,4,5\}, & \\ & \{4\}, & \{1,5\}, & \{1,3,4\}, & \{1,3,4,5\}, & \\ & \{5\}, & \{2,3\}, & \{1,3,5\}, & \{2,3,4,5\}, & \\ & & \{2,4\}, & \{1,4,5\}, & & \\ & & \{2,5\}, & \{2,3,4\}, & & \\ & & \{3,4\}, & \{2,3,5\}, & & \\ & & \{3,5\}, & \{2,4,5\}, & & \\ & & \{4,5\}, & \{3,4,5\} & & \end{array} \right\}$

Anz der Elemente der Teilmenge	0	1	2	3	4	5
Anz der Elemente der Teilmengen	1	5	10	10	5	1

nur c) Die Zeilen 1 3 3 1 und 1 4 6 4 1 sind die dritte und die vierte Zeile aus dem Pascalschen Dreieck, die Zeile 1 5 10 10 5 1 ist die fünfte Zeile. Dies ist kein Zufall. Genauere Erklärungen müssen leider bis Klasse 10 warten.

Wenn $\mathcal{E}$ n Elemente hat, dann hat $P(\mathcal{E})$ $\underline{2^n}$ Elemente. Beweis: Induktion; diese ist auf dem Themenfriedhof. Genaueres gibt es im Vertiefungskurs Klasse 11 oder in der Mathe AG Klasse 11 (Aufgabe: 67/178 e).

Aufg. 312/783: Nina: würfelte eine 5; Hans eine 2.
$\bar{A} = \{2;4;6\}$; $\bar{A}$ ist die Menge aller geraden Zahlen; $\bar{B} = \{1;2;3\}$.

A und B	$=$	$A \cap B$	$=$	$\{5\}$	weder A noch B	$=$	$\bar{A} \cap \bar{B}$	$=$	$\{2\}$
A oder B	$=$	$A \cup B$	$=$	$\{1;3;4;5;6\}$	entweder A oder B	$=$	$(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$	$=$	$\{1;3;4;6\}$

Aufg. 313/784: $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{11}{32}$; $\frac{19}{32}$; Nina: $\{2\}$, Jan: $\{4,6\}$ (nicht eindeutig), Hans: $\{\}$ (sicher falsch).

$D = B \cup C = \{1,2,3,4,5,6\}$; $E = \bar{A} \cap \bar{B} = \{2\}$; $F = A \cap B \cap C = \{3\}$;
$G = A \cap \bar{B} \cap C = \{1\}$; $H = \bar{A} \cap \bar{B} \cap C = \{2\}$; $I = A \cap \bar{B} \cap \bar{C} = \{\}$

Aufg. 314/786: a) Variiert nach Klasse; b) in Teil a) wird nach $M \cap \bar{B} \cap H$ und nach $\bar{M} \cap \bar{B} \cap \bar{H}$ gefragt. jeder Ausdruck besteht aus 3 Elementen, die negiert werden können oder nicht (mit Baum) $2^3 = 8$. Jede Menge hat eine eigene Kombination an Negierungen.
Aufg. 314/785: mit Hilfe eines Baumes
$A \cap B \Leftrightarrow$ Schnittmenge (e: *intersection*); $A \cup B \Leftrightarrow$ Vereinigungsmenge (e: *union*)

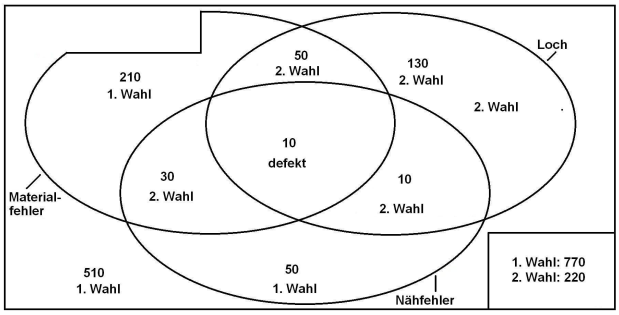


Abb. 510 DNF Hosen
Siehe Abschnitt 14.16.3, 4 Mengen sowie deren Überlappungen können nur dreidimensional dargestellt werden ($n > 1$ Mengen $n-1$ dimensional).

Aufg. 314/787: siehe Abb. 511 Es fehlen alle Mengen, die $\bar{C} \cap D$ enthalten.

Aufg. 314/786: c) siehe Abb. 511

Aufg. 313/788: Andreas Heckmair (1906-2005) wurde weltbekannt, als er im Jahre 1938 als **erster die Eiger-Nordwand** zusammen mit Ludwig Vörg, Heinrich Harrer und Fritz Kasparek **durchstieg**.

LöVo siehe Abb. 510

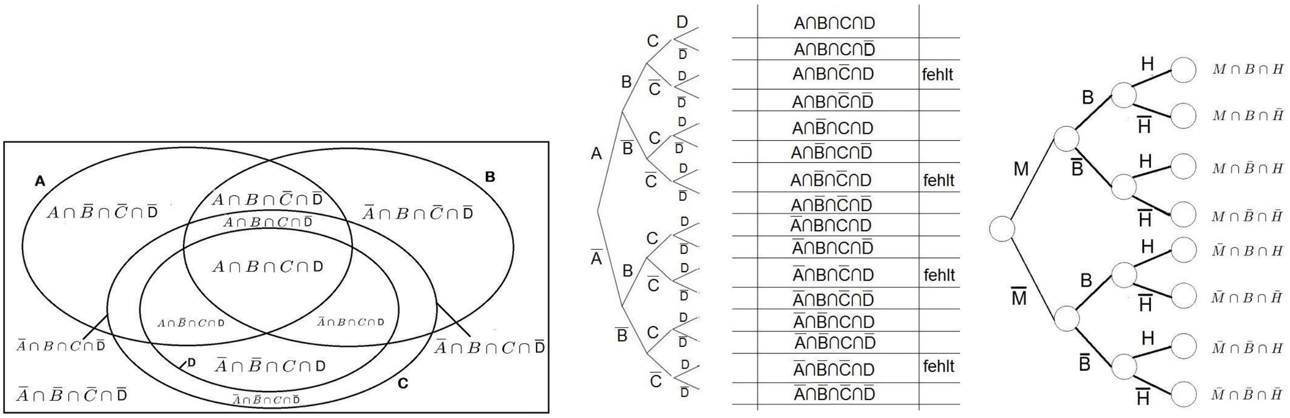


Abb. 511 DNF Baum

Aufg. 313/789: **a)** $\bar{B}$ = Menge aller Schüler ohne Brille, $\bar{W}$ = Menge aller männlichen Schüler, $B \cap W$ = Menge aller weiblichen Schüler mit Brille, $B \cap \overline{W}$ = Menge aller männlichen Schüler mit Brille;

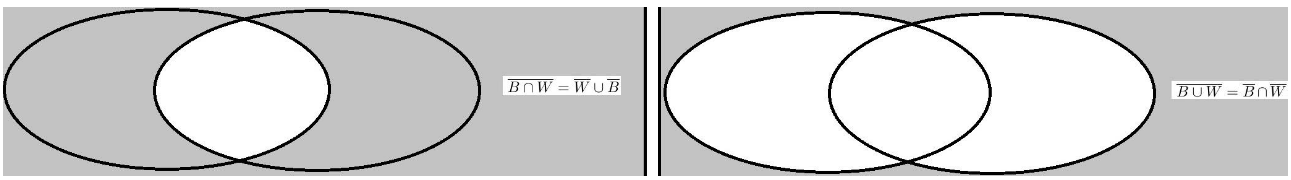


Abb. 512 Die Regel von de Morgan

b) Nicht in $B \cup W$ sind männliche (also nicht weibliche) Nichtbrillenträger: $\overline{B \cup W} = \overline{B} \cap \overline{W}$; Nicht in $B \cap W$ sind männliche (also nicht weibliche) Schüler oder (weibliche) Schüler, die keine Brille tragen: $\overline{B \cap W} = \overline{W} \cup \overline{B}$; (Abb. 512) $\overline{B} \cap \overline{W}$ ist die Menge aller Jungen, die keine Brille tragen.

Aufg. 313/790: Eine Urne ist ein Gefäß, in welchen man zwar hineingreifen aber nicht hineinschauen kann. Viele Aufgaben aus der Kombinatorik werden auf das sogenennte Urnenmodell zurückgeführt. Dabei unterscheiden wir in Ziehen mit oder ohne Zurücklegen (mZ, oZ) und mit oder ohne Berücksichtigung der Reihenfolge (mBdR, oBdR).

a_e) Eine Urne enthält zwei Kugeln mit den Aufschriften W und Z. Wir ziehen zwei Mal mit Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Reihenfolge. Welche Ergebnisse sind möglich? Strukturieren Sie Ihre Ergebnisse mit Hilfe eines Baumes.

b) i) 2^3; ii) $2^4, 2^5, 2^k$; c) i) $3^3, 4^3, n^3$; ii) $3^k, 4^k, n^k$;

d) Werden aus einer Urne mit n Kugeln k Kugeln **mit** Zurücklegen entnommen, so ergeben sich $\underline{n^k}$ mögliche Ergebnisse mit Berücksichtigung der Reihenfolge. e) $4!, 5!, n!$.

f) Werden aus einer Urne mit n Kugeln alle Kugeln **ohne** Zurücklegen entnommen, so ergeben sich $\underline{n!}$ Möglichkeiten mit Berücksichtigung der Reihenfolge. Dies entspricht auch der Menge aller Permutationen (Vertauschungen) von n Elementen. g) $\frac{4!}{2!}$,

h) (Fußballbundesliga) i und ii) $18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13$; iii) $18!$ iv) $18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 = \frac{18!}{12!} = \frac{18!}{(18-6)!}$;

i) $\frac{5!}{2!}, \frac{6!}{3!}, \frac{7!}{4!}, \frac{8!}{5!}, \frac{9!}{6!}$, j) $\frac{n!}{(n-k)!}$; k) Werden aus einer Urne mit n Kugeln k Kugeln **ohne** Zurücklegen entnommen, so ergeben sich $\underline{\frac{n!}{(n-k)!}}$ Möglichkeiten mit Berücksichtigung der Reihenfolge.

L) Wie viele dreistellige Zahlen können daraus gebildet werden? Urnenmodell: In einer Urne befinden sich neun Kugeln mit den Aufschriften 1,2,3..,9. Es werden drei Kugeln mit Zurücklegen mit Berücksichtigung der Reihenfolge entnommen. Anzahl: 9^3.

ii) Wie viele dreistellige Zahlen können daraus gebildet werden wenn jede Ziffer höchsten einmal vorkommen darf? Urnenmodell: Aus einer Urne mit Kugeln mit den Aufschriften 1,2,3..,9 werden drei Kugeln ohne Zurücklegen mit Berücksichtigung der Reihenfolge entnommen. Anzahl: $9 \cdot 8 \cdot 7$ oder $\frac{9!}{(9-3)!}$.

iii) Wie viele dreistellige durch 5 teilbare Zahlen können daraus gebildet werden wenn jede Ziffer höchsten einmal vorkommen darf? Urnenmodell: Die Kugel mit der Zahl 5 wird entfernt und an der letzte Stelle platziert. Aus der Urne mit restlichen Kugeln also Kugeln mit der Aufschrift 1,2,3,4,6,7,8,9 werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen mit Berücksichtigung der Reihenfolge entnommen. Anzahl: $1 \cdot 8 \cdot 7$ oder $\frac{8!}{(8-2)!}$.

iv) Wie viele dreistellige gerade Zahlen können daraus gebildet werden wenn jede Ziffer höchsten einmal vorkommen darf? In einer Urne befinden sich die Kuglen $2, 4, 6, 8$. Aus dieser Urne wird eine Zahl gezogen. Diese Zahl wird am Ende platziert. Zu den restlichen 3 Kugeln werden die Kugeln mit den Aufschriften $1, 3, 5, 7, 9$ in die Urne gelegt und zwei Kugeln ohne Zurücklegen mit Berücksichtigung der Reihenfolge entnommen. Anzahl: $4 \cdot 8 \cdot 7$ oder $4 \cdot \frac{8!}{(8-2)!}$.

v) Wie viele dreistellige Zahlen können daraus gebildet werden wenn jede Ziffer höchsten einmal vorkommen darf und die Zahl größer 400 sein soll? In eine Urne werden Kugeln mit den Aufschriften $4, 5, 6, 7, 8, 9$ Zuerst wird aus einer Urne mit den Zahlen eine Zahl gezogen. Diese Zahl wird am Anfang platziert. Zu den restlichen 5 Kugeln werden die Kugeln $1, 2, 3$, in die Urne gelegt und zwei Kugeln ohne Zurücklegen mit Berücksichtigung der Reihenfolge entnommen. Anzahl: $6 \cdot 8 \cdot 7$ oder $6 \cdot \frac{8!}{(8-2)!}$.

m) (Schloss) In einer Urne befinden sich Kugeln mit den Aufschriften $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Wir ziehen 4 mal mit Zurücklegen. 6^4 Möglichkeiten.

n) i) In einer Urne befinden sich Kugeln mit den Aufschriften Hasan, Jannes und Ben. Wir ziehen 4 mal ohne Zurücklegen. 4! Möglichkeiten.

ii) In einer Urne befinden sich Kugeln mit den Aufschriften Hasan, Jannes, Ben und Tobias. Wir ziehen 4 mal ohne Zurücklegen. 4! Möglichkeiten.

iii) In einer Urne befinden sich Kugeln mit den Aufschriften Hasan, Jannes, Ben, Tobias und Sinan. Wir ziehen 5 mal ohne Zurücklegen. 5! Möglichkeiten.

o) i) 4!; ii) $2 \cdot 4!$; p) $\frac{7!}{(7-3)!} = 7 \cdot 6 \cdot 5$; q) 3! r) 3^4.

s) i) 7!; ii) $\frac{7!}{(7-4)!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$; iii) $\frac{5!}{(5-4)!} = 5!$; iv) $5 \cdot 4 \cdot \frac{5!}{(5-3)!}$; v) $2 \cdot 6 \cdot 5$; vi) $3 \cdot 6 \cdot 5$; 3 ist die Anzahl der Positionen von S.

t) Die nebeneinandersitzenden Personen p_1 und p_2 werden als eine Person gesehen. Dann gibt es 4! Möglichkeiten. Jetzt k!onnen diese Personen auf zwei Arten nebeneinander sitzen: p_1, p_2 und p_2, p_1; damit gibt es $2 \cdot 4!$ Möglichkeiten.

Aufg. 316/791: **Frau N. Pink** ist am FSG Lehrerin für M + Bio. Mit Frau Pink traf sich Wolfgang Sd im Schuljahr 2016/2017 morgens Mi + Fr im Frühstücksclub. Vermutungen zufolge ist Herr Sd extra ihretwegen zur ersten Stunde gekommen weil er doch an diesen Tagen gar nicht zur ersten Stunde Unterricht hatte. a) absolute Häufigkeiten: $1 \to 3$; $2 \to 1$; $3 \to 2$; $4 \to 1$; $5 \to 2$; $6 \to 2$;

relative Häufigkeiten: $P(1) = \frac{3}{11}$, $P(2) = \frac{1}{11}$, $P(3) = \frac{2}{11}$, $P(4) = \frac{1}{11}$, $P(5) = \frac{2}{11}$, $P(6) = \frac{2}{11}$;

b) $P(X = 5) = \frac{15}{150} = \frac{1}{10}$, $P(X < 5) = \frac{74}{150}$, $P(X \leq 5) = \frac{89}{150}$, $P(4 < X < 8) = \frac{51}{150}$, $P(x > 5) = \frac{61}{150}$.

c) Ein Zufallsexperiment, bei welchem alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind heißt Laplace-Experiment. Die Wahrscheinlichkeit (Wk) eines Ereignisses ist definiert als Anzahl der günstigen Ergebnisse dividiert durch Anzahl der möglichen Ergebnisse.

Aufg. 316/792: a) 210000 €, $\frac{5}{12}$; b) $P(B) = \frac{2}{16}$, $P(An) = \frac{6}{16}$, $P(Ar) = \frac{5}{16}$, $P(S) = \frac{3}{16}$.

Aufg. 316/793: a) $P(K \cup B) = \frac{8}{32}$, b) $P(B \cup D \cup K) = \frac{12}{32}$, c) $P(Z) = \frac{16}{32}$, d) $P(\text{As} \cup \text{Herz}) = \frac{11}{32}$, e) $P(\text{As} \cup \text{rot}) = \frac{18}{32}$, f) $P(\bar{K}) = \frac{28}{32}$.

Aufg. 316/794:

k	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

k	1	2	3	4
$P(X = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

k	1	5	6
$P(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

b) Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung (=WkVert) (e: *probability distribution*) ist eine Wertetabelle, in deren ersten Zeile alle Ergebnisse und in der zweiten Zeile alle Wahrscheinlichkeiten p_i eines Zufallsexperimentes stehen. Alle Wahrscheinlichkeiten sind ≥ 0 und aufsummiert $=1$.

c) Ein Experiment, bei welchem alle Ergebnisse gleichwahrscheinlich sind heißt La Place- Experiment. Hier gilt für ein Ereignis A: $P(A) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$.

Aufg. 317/795: a)

	Regen (R)	$\bar{R}$
P	$\frac{95}{365}$	$\frac{270}{365}$

(Schaltjahre wurden ignoriert); b) Variiert nach Klasse.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
c) $P(X = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Aufg. 317/796: a) $P(\bar{B}) = \frac{28}{32} = 1 - \frac{4}{32} = 1 - P(B)$, $P(\bar{K}) = \frac{28}{32} = 1 - P(K)$, $P(\overline{\text{Herz}}) = \frac{24}{32} = 1 - P(\text{Herz})$, $P(\overline{\text{König oder Dame}}) = \frac{24}{32} = 1 - P(\text{König oder Dame})$.

b) $A_1 = \{3, 4, 5, 6\}$, $A_2 = \{2, 4, 6\}$, $A_3 = \{3, 6\}$, $A_4 = \{1, 2, 3, 4\}$,

$\overline{A_1} = \{1, 2\}$, $\overline{A_2} = \{1, 3, 5\}$, $\overline{A_3} = \{1, 2, 4, 5\}$, $\overline{A_4} = \{5, 6\}$.

Die Wk des jeweiligen Ereignisses ist die Anzahl der Elemente geteilt durch 6.

Bsp: $P(A_2 \cup A_4) = P(\{1, 2, 3, 4, 6\}) = \frac{5}{6}$.

$A_i \cap A_j$	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	$\{3,4,5,6\}$	$\{4,6\}$	$\{3,6\}$	$\{3,4\}$
A_2	$\{4,6\}$	$\{2,4,6\}$	$\{6\}$	$\{2,4\}$
A_3	$\{3,6\}$	$\{6\}$	$\{3,6\}$	$\{3\}$
A_4	$\{3,4\}$	$\{2,4\}$	$\{3\}$	$\{1,2,3,4\}$

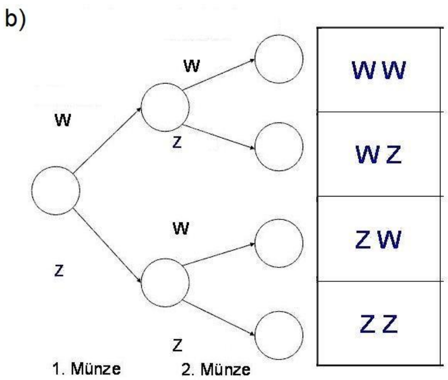
$A_i \cup A_j$	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	$\{3,4,5,6\}$	$\{2,3,4,5,6\}$	$\{3,4,5,6\}$	$\{1,2,3,4,5,6\}$
A_2	$\{2,3,4,5,6\}$	$\{2,4,6\}$	$\{2,3,4,6\}$	$\{1,2,3,4,6\}$
A_3	$\{3,4,5,6\}$	$\{2,3,4,6\}$	$\{3,6\}$	$\{1,2,3,4,6\}$
A_4	$\{1,2,3,4,5,6\}$	$\{1,2,3,4,6\}$	$\{1,2,3,4,6\}$	$\{1,2,3,4\}$

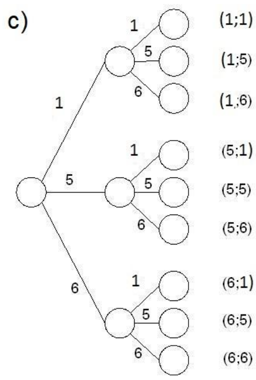
$A_i \cap \overline{A_j}$	$\overline{A_1}$	$\overline{A_2}$	$\overline{A_3}$	$\overline{A_4}$
A_1	$\{\}$	$\{3,5\}$	$\{4,5\}$	$\{5,6\}$
A_2	$\{2\}$	$\{\}$	$\{2,4\}$	$\{6\}$
A_3	$\{\}$	$\{3\}$	$\{\}$	$\{6\}$
A_4	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{1,2,4\}$	$\{\}$

$\overline{A_i} \cup A_j$	A_1	A_2	A_3	A_4
$\overline{A_1}$	$\{1,2,3,4,5,6\}$	$\{1,2,4,6\}$	$\{1,2,3,6\}$	$\{1,2,3,4\}$
$\overline{A_2}$	$\{1,3,4,5,6\}$	$\{1,2,3,4,5,6\}$	$\{1,3,5,6\}$	$\{1,2,3,4,5\}$
$\overline{A_3}$	$\{1,2,3,4,5,6\}$	$\{1,2,4,5,6\}$	$\{1,2,3,4,5,6\}$	$\{1,2,3,4,5\}$
$\overline{A_4}$	$\{3,4,5,6\}$	$\{2,4,5,6\}$	$\{3,5,6\}$	$\{1,2,3,4,5,6\}$

$\overline{A_i} \cap \overline{A_j}$	$\overline{A_1}$	$\overline{A_2}$	$\overline{A_3}$	$\overline{A_4}$
$\overline{A_1}$	$\{1,2\}$	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{\}$
$\overline{A_2}$	$\{1\}$	$\{1,3,5\}$	$\{1,5\}$	$\{5\}$
$\overline{A_3}$	$\{1,2\}$	$\{1,5\}$	$\{1,2,4,5\}$	$\{5\}$
$\overline{A_4}$	$\{\}$	$\{5\}$	$\{5\}$	$\{5,6\}$

$\overline{A_i} \cup \overline{A_j}$	$\overline{A_1}$	$\overline{A_2}$	$\overline{A_3}$	$\overline{A_4}$
$\overline{A_1}$	$\{1,2\}$	$\{1,2,3,5\}$	$\{1,2,4,5\}$	$\{1,2,5,6\}$
$\overline{A_2}$	$\{1,2,3,5\}$	$\{1,3,5\}$	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{1,3,5,6\}$
$\overline{A_3}$	$\{1,2,4,5\}$	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{1,2,4,5\}$	$\{1,2,4,5,6\}$
$\overline{A_4}$	$\{1,2,5,6\}$	$\{1,3,5,6\}$	$\{1,2,4,5,6\}$	$\{5,6\}$





1 \ 2	1	5	5	6	6	6
1	(1;1)	(1;5)	(1;5)	(1;6)	(1;6)	(1;6)
5	(5;1)	(5;5)	(5;5)	(5;6)	(5;6)	(5;6)
5	(5;1)	(5;5)	(5;5)	(5;6)	(5;6)	(5;6)
6	(6;1)	(6;5)	(6;5)	(6;6)	(6;6)	(6;6)
6	(6;1)	(6;5)	(6;5)	(6;6)	(6;6)	(6;6)
6	(6;1)	(6;5)	(6;5)	(6;6)	(6;6)	(6;6)

P(1;1)=1/36; P(1;5)=2/36; P(1;6)=3/36;

P(5;1)=2/36; P(5;5)=4/36; P(5;6)=6/36;

P(6;1)=3/36; P(6;5)=6/36; P(6;6)=9/36;

Es gilt die Pfadregel:
Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades in einem Baum berechnet man, indem man die Wahrscheinlichkeiten seiner Teilstrecken multipliziert.

Abb. 513 Münzwurf und Würfel von Sd

Aufg. 317/797: a) i) $P(E_1) = 1 - P(1;2) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{4}{6}$; ii) $P(E_2) = 1 - P(3;6) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{4}{6}$

b) Beim **WM Finale D-NL im Jahre 1974** erhält Deutschland wegen einer Schwalbe von Bernd Hölzenbein einen Elfmeter, den Paul Breitner zum 1:1 verwandelt. D gewinnt das Finale 2:1 (und ich habe es im Fernsehen gesehen).

$P(\text{Schwalbe klappt nicht}) = 1 - 0.1974 = 0.8026$;

$P(\text{mehr als ein Elfmeter}) = 1 - 0.8026^5 \approx 0.667$;

c) Gesucht ist der norwegische Biathlet **Ole Einar Björndalen**. Er ist bis heute der erfolgreichste Biathlet. Beim Biathlon werden bei einem Schießen 5 Schüsse auf 5 Ziele abgeben. Ein Rennen besteht aus 4 Schießen also insgesamt 20 Schüssen.

Die Wk bei einem Schuss nicht zu treffen ist $1 - 0.8 = 0.2$, bei zwei Schüssen $= 1 - 0.2^2$, bei drei Schüssen $= 1 - 0.2^3$. 5 Schüsse: $P = 1 - 0.2^5 \approx 0.99968$; 20 Schüsse: $P = 1 - 0.8^{20} \approx 1$;

d) **Thomas Edison** erfand 1879 die Glühbirne. Er soll nach der Erfindung gesagt haben. dass er 10 000 Wege gefunden habe, wie die Glühbirne nicht funktioniert.

$P(\text{geht nicht}) = 1 - 0.001 = 0.999$; $P(\text{mind eine geht}) = 1 - 0.999^{1000} \approx 0.6323$.

Aufg. 317/798: a) $P(A) = \frac{1}{4}$; $P(B) = \frac{1}{2}$; $P(C) = \frac{1}{4}$; $P(D) = \frac{3}{4}$; $P(E) = \frac{3}{8}$;

b) .. mit Hilfe eines Baumes (siehe Abb. 513).

d) Im Baum werden die Wahrscheinlichkeiten entlang eines Pfades multipliziert. Von links nach rechts ist also die Mal-Richtung.

Aufg. 318/799: a) **i)** $\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} + \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7}$; **ii)** $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7}$; **iii)** $\frac{3}{8} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7}$; **iv)** $\frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7}$;

b) **2. Teil** 2 Züge

Erg	(r;r)	(r;s)	(s;r)	(s;s)
i)	$\frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15}$	$\frac{5}{15} \cdot \frac{10}{15}$	$\frac{10}{15} \cdot \frac{5}{15}$	$\frac{10}{15} \cdot \frac{10}{15}$
ii)	$\frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14}$	$\frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14}$	$\frac{10}{15} \cdot \frac{5}{14}$	$\frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14}$

b i) 3 Züge mit Zurücklegen: $P(RRR) = \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15}$, $P(RRS) = \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{15}$,
$P(RSR) = \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{15}$, $P(RSS) = \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{10}{15}$, $P(SRR) = \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15}$,
$P(SRS) = \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{15}$, $P(SSR) = \frac{10}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{15}$, $P(SSS) = \frac{10}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{10}{15}$;

b i) 4 Züge ohne Zurücklegen:

$P(RRRR) = \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15}$, $P(RRRS) = \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{15}$, $P(RRSR) = \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{15}$,
$P(RRSS) = \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{10}{15}$, $P(RSRR) = \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15}$, $P(RSRS) = \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{15}$,
$P(RSSR) = \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{15}$, $P(RSSS) = \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{10}{15}$,
$P(SRRR) = \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15}$, $P(SRRS) = \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{15}$, $P(SRSR) = \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15}$,
$P(SRSS) = \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{10}{15}$, $P(SSRR) = \frac{10}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15}$, $P(SSRS) = \frac{10}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{15}$,
$P(SSSR) = \frac{10}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{15}$, $P(SSSS) = \frac{10}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{10}{15}$;

b ii) 3 Züge ohne Zurücklegen: $P(RRR) = \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{3}{13}$, $P(RRS) = \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{10}{13}$,
$P(RSR) = \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} \cdot \frac{4}{13}$, $P(RSS) = \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} \cdot \frac{9}{13}$, $P(SRR) = \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13}$,
$P(SRS) = \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{9}{13}$, $P(SSR) = \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13}$, $P(SSS) = \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{8}{13}$; (Siehe auch Abb. 514)

b ii) 4 Züge ohne Zurücklegen: (Siehe auch Abb. 514)

$P(RRRR) = \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{3}{13} \cdot \frac{2}{12}$, $P(RRRS) = \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{3}{13} \cdot \frac{10}{12}$, $P(RRSR) = \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{10}{13} \cdot \frac{3}{12}$,
$P(RRSS) = \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{10}{13} \cdot \frac{9}{12}$, $P(RSRR) = \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} \cdot \frac{4}{13} \cdot \frac{3}{12}$, $P(RSRS) = \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} \cdot \frac{4}{13} \cdot \frac{9}{12}$,
$P(RSSR) = \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} \cdot \frac{9}{13} \cdot \frac{4}{12}$, $P(RSSS) = \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} \cdot \frac{9}{13} \cdot \frac{8}{12}$,
$P(SRRR) = \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13} \cdot \frac{3}{12}$, $P(SRRS) = \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13} \cdot \frac{9}{12}$, $P(SRSR) = \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{9}{13} \cdot \frac{4}{12}$,
$P(SRSS) = \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{9}{13} \cdot \frac{8}{12}$, $P(SSRR) = \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{12}$, $P(SSRS) = \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{8}{12}$,
$P(SSSR) = \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{5}{12}$, $P(SSSS) = \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{7}{12}$;

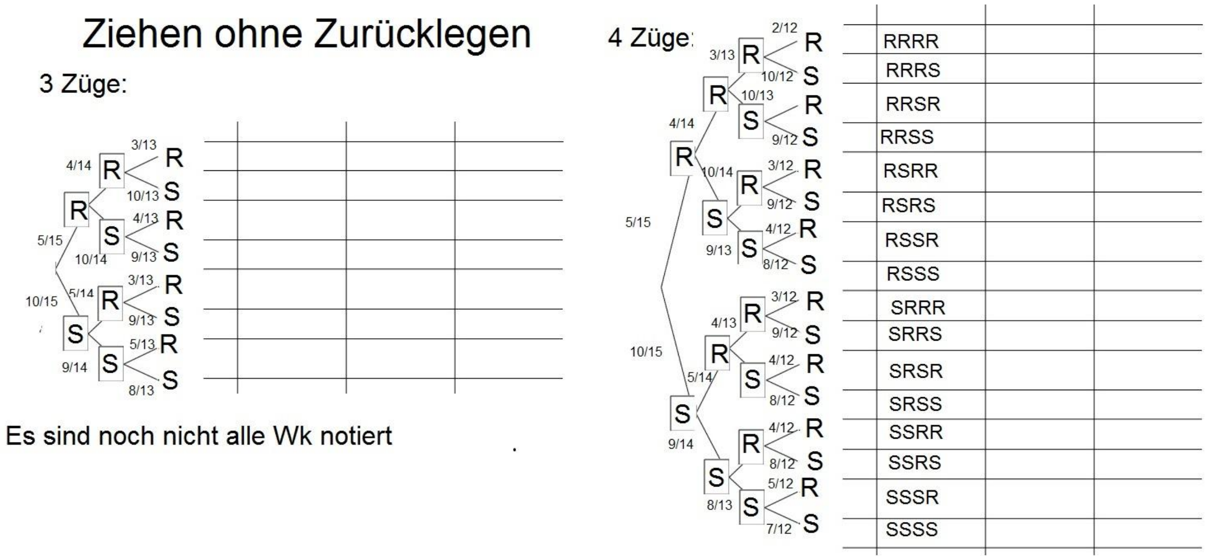


Abb. 514 Ziehen mit oder ohne Zurücklegen

c) Um die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses zu berechnen werden im Baum die Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Ergebnisse <u>addiert</u>. Von oben nach unten ist also die <u>Plus</u>-Richtung.

d) i) keinen Sechser: $P(\mathcal{Y} \neq 6) = \left(\frac{5}{6}\right)^2$; ii) mindestens einen Sechser: $P(\mathcal{X} \geq 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2$; iii) zwei gleiche Zahlen: $P(\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2) = \frac{1}{6}$; iv) zwei verschieden Zahlen: $P(\mathcal{X}_1 \neq \mathcal{X}_2) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

e) $P(\mathcal{X} = 1) = 2 \cdot 0.4 \cdot 0.7$.

f) Gesucht ist die Wk von 'mindestens eine 1'; mit Gegenereignis: $P = 1 - (\frac{5}{6})^2 = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$ (im ersten Wurf die 1 + nur im zweiten Wurf die 1).

g) $P(\mathcal{X} = 3) = 3 \cdot 0.6^2 \cdot 0.4$.

h) Gegenereignis von er kenn keine Vokabel; $P = 1 - 0.7^3$.

i) i) $P(\mathcal{X} = 3) = (\frac{1}{2})^3$; ii) $P(\mathcal{X} = 3) = 3 \cdot (\frac{1}{2})^3$.

j) i) zuerst 'grün' und dann 'blau' $P = 0.3 \cdot 0.5$; ii) zweimal dieselbe Farbe : $P = 0.3^2 + 0.2^2 + 0.5^2$;

k) 'Mit einem Griff meint' <u>ohne</u> Zurücklegen und <u>ohne</u> Berücksichtigung der Anordnung.

i) eine graue und eine weiße Kugel: $P = 2 \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{9}$; ii) mindestens eine der beiden gezogenen Kugeln ist grau $P = 1 - 2 \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9}$; iii) gleiche Farbe: $P = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9}$.

l) i) $P($grün,braun,braun $= \frac{4}{16} \cdot \frac{12}{15} \cdot \frac{11}{14}$. ii) $P($zwei grün, ein braun$) = 3 \cdot \frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} \cdot \frac{12}{14}$.

m) i) $P($'ANNA'$) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}$; ii) $P($'NASA'$) = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}$;
iii) $P($'NASS'$)=0$, weil es nur ein 'S' gibt.

n) $P(W,W) + P(Z,Z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = P(W,Z) + P(Z,W)$.

o) i) $P = (1 - 0.1) \cdot (1 - 0.25) \cdot (1 - 0.3)$; ii) $P = (1 - 0.1) \cdot (1 - 0.25) \cdot (1 - 0.3) + 0.1 \cdot (1 - 0.25) \cdot (1 - 0.3) + (1 - 0.1) \cdot 0.25 \cdot (1 - 0.3) + (1 - 0.1) \cdot (1 - 0.25) \cdot 0.3$;

p) $P($vier verschiedene Würfel$) = \frac{1}{1} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{18}$;

Aufg. 318/800: **a)** mZ: $P(s;s) = \frac{8}{32} \cdot \frac{8}{32}$, oZ: $\frac{8}{32} \cdot \frac{7}{31}$;
b) mZ: $P(r;s) + P(s;r) = 2 \cdot \frac{8}{32} \cdot \frac{8}{32}$, oZ: $2 \cdot \frac{8}{32} \cdot \frac{7}{31}$;
c) mZ: $P(A;A) = \frac{4}{32} \cdot \frac{4}{32}$, oZ: $\frac{4}{32} \cdot \frac{3}{31}$; **d)** mZ: $P(x;x) = \frac{32}{32} \cdot \frac{1}{32}$, oZ: 0;
e) mZ: $1 - P(\bar{A};\bar{A}) = 1 - \frac{28}{32} \cdot \frac{28}{32}$, oZ: $1 - \frac{28}{32} \cdot \frac{27}{31}$; **f)** mZ: $1 - P(\bar{s};\bar{s}) = 1 - \frac{16}{32} \cdot \frac{16}{32}$, oZ: $1 - \frac{16}{32} \cdot \frac{15}{31}$;

Aufg. 319/801: **Lando Calrissian** ist ein Spieler aus Star Wars V und VI. Er ist ein Freund von Han Solo (von ihm hat Han beim Sabacc-Spiel den Falken gewonnen) und lebte in Bespin, der Stadt in den Wolken. Die Tibanna-Gasmine hat Lando auch beim Sabacc-Spiel gewonnen.

a) $P(6,6,6) = (\frac{1}{6})^3$; b) $P(6,6,6) + P(6,6,5) + P(6,5,6) + P(5,6,6) = (\frac{1}{6})^3 + 3 \cdot (\frac{1}{6})^2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{16}{216}$;

c) Balthazar Picsou ist der französische Name von **Dagobert Duck**. Picsou = hebt sogar einen Pfennig auf.

$P(gleich) = P(W;W) + P(Z;Z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$;
$P(ungleich) = P(Z;W) + P(W;Z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$;

d) Gesucht sind die **5 (!) Freunde** Julian, Dick, Anne und George von Enid Blyton. Selbstverständlich kann Timmy der Hund nicht Autofahren. Die 5 Freunde erleben in der gleichnamigen Buchreihe Abenteuer.

K=Auto wird kontrolliert, $\bar{K}$=Auto wird nicht kontrolliert;

i) $P(KKKK) = (0.3)^4$; **ii)** $P(KK\bar{K}\bar{K}) = 0.3^2 \cdot 0.7^2$; **iii)** $P(\bar{K}\bar{K}\bar{K}\bar{K}) = 0.7^4$;
iv) $P(KKK\bar{K}) + P(KK\bar{K}K) + P(K\bar{K}KK) + P(\bar{K}KKK) = 4 \cdot 0.3^3 \cdot 0.7$;

e) Tatsächlich sind die drei Fragezeichen (Justus Jonas, Peter Shaw und Bob Andrews) gesucht, deren Schirmherr Alfred Hitchcock ist. Aber warum heißt die Nr. 2 hier 'D'? Nun $P(P)$ wäre als Aufgabentext etwas komisch gewesen, weshalb ich seinen zweiten Vornamen D ='Dunstan' (also Peter Dunstan Shaw) genommen habe.

P(alle drei)=$P(J) \cdot P(D) \cdot P(B) = 0.8 \cdot 0.4 \cdot 0.5 = 0.24$;

P(gelöst)=$1 - P(\bar{J}) \cdot P(\bar{D}) \cdot P(\bar{B}) = 1 - 0.2 \cdot 0.6 \cdot 0.5 = 0.94$.

f) i) $P = 1-$zwei gleiche Augenzahlen$= 1-\frac{1}{6} = \frac{5}{6}$;

f) ii) $P(1,2) + P(2,1) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$;

f) iii) aufeinanderfolgend: 1,2; 2,3; 3,4; 4,5; 5,6; $P(1,2)+P(2,3)+P(3,4)+P(4,5)+P(5,6)+P(2,1)+P(3,2)+P(4,3)+P(5,4)+P(6,5) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$;

g) Gesucht ist **David Copperfield** (* 1956), (Dave (David), vom Kupfer (copper) Feld (field)) bei welchem trotz Idealität die Wk vermutlich geringfügig anders sind.

h) i) $P = \left(\frac{1}{6}\right)^4 + \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{684}$; ii) $P = \left(\frac{2}{6}\right)^4 = \frac{1}{81}$;
b) $P(z \text{ ist ungerade}) = \frac{30}{90}$; $P(z \text{ ist gerade}) = \frac{60}{90} = 1 - \frac{30}{90} = \frac{24}{90} + \frac{24}{90} + \frac{12}{90}$; (siehe Abb. 515).

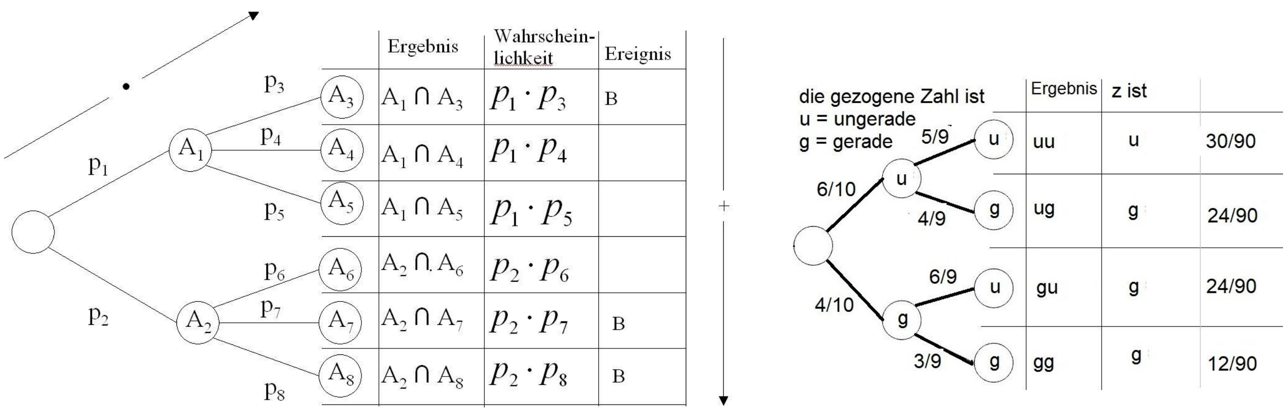


Abb. 515 Pfadregel

i) Gesucht sind die Kommandanten Adama (Kampfstern Galaktika) und Cain (Kampfstern Pegasus - 2 Teil) aus dem Film 'Kampfstern Galaktika'. Interessanterweise heißen beide etwa so, wie zwei der vier ersten Menschen. $P(TT) + P(\bar{T}T) + P(T\bar{T}) = 0.4^2 + 2 \cdot 0.6 \cdot 0.4 = 0.64 = 1 - 0.6^2$;

j) $P(A) = P(1;1;1) + P(2;2;2) + P(3;3;3) + P(4;4;4) = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{48}$.

$P(B) = P(4;6;7) + P(4;5;8) + P(3;6;8) = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$.

k) i) $P(\mathcal{X}=0)=(\frac{5}{6})^2$, $P(\mathcal{X}=1)=2\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$, $P(\mathcal{X}=2)=(\frac{1}{6})^2$;

ii) $P(\mathcal{X}=0)=(\frac{5}{6})^3$, $P(\mathcal{X}=1)=3\cdot(\frac{5}{6})^2\cdot\frac{1}{6}$, $P(\mathcal{X}=2)=3\cdot(\frac{1}{6})^2\cdot\frac{5}{6}$, $P(\mathcal{X}=3)=(\frac{1}{6})^3$;

iii) $P(\mathcal{X}=0)=(\frac{5}{6})^4$, bei n Würfen: $P(\mathcal{X}=0)=(\frac{5}{6})^n$,

iv) $P(\mathcal{X}=1)=4\cdot\frac{1}{6}\cdot(\frac{5}{6})^3$, bei n Würfen: $P(\mathcal{X}=1)=n\cdot\frac{1}{6}\cdot(\frac{5}{6})^{n-1}$.

Aufg. 319/802: Gesucht ist die Fernsehlotterie **'der große Preis'** (ZDF um 1980). Moderiert wurde diese Sendung von (Georg Heinrich Wilhelm) Wim Thölke; assistiert von den Zeichentrickfiguren Wumm (Hund) und Wendelin (Elefant). Der Lotteriename 'der Preis ist groß' ist eine Mischung aus den Namen der 'der große Preis' und der Spieleshow 'der Preis ist heiß'. Beim großen Preis kamen auch Lose mit Nummern vor.

$P(\mathcal{X}$ endet mit 111$)=(0.6)^3$; $P(\mathcal{X}>2221222)=(0.4)^4$; (alle Zahlen größer 2222111 sind gemeint) $\Leftrightarrow$ (erste 4 Drehungen =2). c) $P(\mathcal{X}$ ist durch 2 teilbar$)=P(\mathcal{X}$ endet auf 2$)=0.4$,
d) $P(\mathcal{X}$ enthält keine zwei$)=0.6^7$, $P(\mathcal{X}{=}2111111)=0.6^6\cdot 0.4$, $P(\mathcal{X}{=}1211111)=0.6^6\cdot 0.4$,
$P(\mathcal{X}{=}1121111)=0.6^6\cdot 0.4$ usw. es gibt 7 Ergebnisse dieser Form $\Rightarrow$
$P(\mathcal{X}$ enthält weniger als zwei Zweien$)=0.6^7+7\cdot 0.6^6\cdot 0.4\approx 0.1586$.

Aufg. 319/803: a) Vermutlich wählen Sie C, weil dieser den höchsten Erwartungswert hat.

b) Efron wählt Würfel $\underline{D}$. Efron kann nur '3' würfeln und gewinnt deshalb im '2'- Fall also mit $p=\frac{4}{6}$.

c) $P(B>A)=\frac{4}{6}$, $P(C>B)=\frac{4}{6}$, $P(D>C)=\frac{4}{6}$ und $P(A>D)=\frac{4}{6}$, Efrons Würfel zeigen, dass aus A gewinnt gegen B und B gewinnt gegen C nicht unbedingt A gewinnt gegen C folgen muss. Diese Eigenschaft heißt **intransitiv**. (Abb. 516) d) 5 Mal die 2.5 und ein Mal die 7.

e) Es gewinnt die Mannschaft, die gegen P im Halbfinale steht. Pate stand die Fußball WM 74 die WM gewann die Mannschaft, die gegen P im Halbfinale spielte, nämlich D - B hat dann das Spiel um Platz 3 verloren. 08.07.2014: 7:1 Hurra!!

Aufg. 320/804: Rätsellösung: **'Geh auf's Ganze'**. Jörg Träger und Elmar Hörig moderierten in der neunziger Jahren die Show **'Geh auf's Ganze'** (Sat 1). Das Finale ähnelte der Aufgabe mit den drei Toren (Ziegenproblem). Die Niete (Trostpreis) hieß 'Zonk' und war eine kleine rote Stoffratte.

Soll man tauschen? Ja! Bei der ersten Auswahl liegen Sie zu $\frac{1}{3}$ richtig und zu $\frac{2}{3}$ falsch. Wenn Sie tauschen so tauschen Sie auch richtig mit falsch, denn durch das Öffnen des einen Tores ist die Wahl eindeutig.

Aufg. 320/805: a+b) Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass ein Jahr (immer) 365 Tage hat.

Wenn im Raum zwei Personen wären, dann wäre die Wk für gleichen Geburtstag $1-\frac{364}{365}\approx 0.0027$; Person 2 darf also an 364 Tagen Geburtstag haben, damit Sie das Eis gewinnen.

Bei drei Personen sinkt die Wk auf $1-\frac{364\cdot 363}{365^2}\approx 0.0082$ Person 3 darf also an 363 Tagen Geburtstag haben, damit Sie das Eis gewinnen. $4\rightarrow 1-\frac{364\cdot 363\cdot 362}{365^3}\approx 0.016$,

$5\rightarrow 1-\frac{364\cdot 363\cdot 362\cdot 361}{365^4}\approx 0.027$, usw. $30\rightarrow 1-\frac{364\cdot\ldots\cdot 335}{365^{30}}\approx 0.703$ (oha!) $(n^*\rightarrow 1-\frac{365!}{(365-n)!365^n})$,

In über 70 % der Fälle gewinne ich das Eis zuzüglich der Tatsache, dass manche Geburtstage häufiger sind als andere. Übrigens: Bei 23 Personen überspringt das Experiment die 50 % Marke. Die Näherungswerte habe ich mit einem Computerprogramm gerechnet:

```
begin r:=1; Pers:=30;
  for i:=364 downto 365-Pers+1 do r:=r*i/365;
  r:=1-r;
end.
```

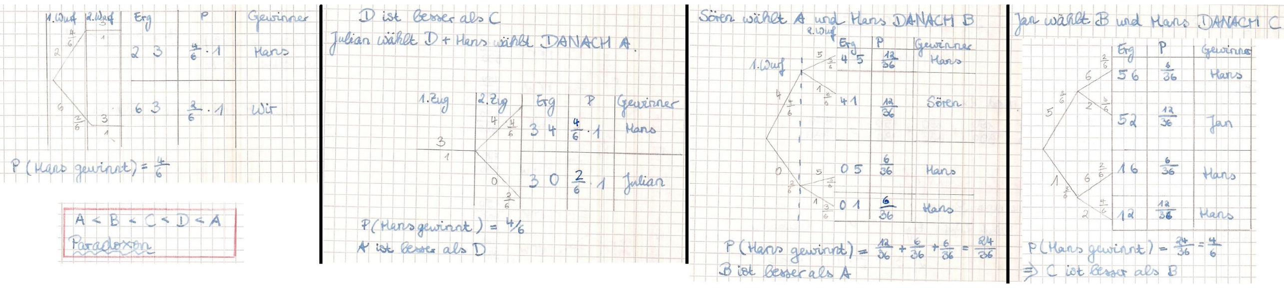


Abb. 516 Efron $\qquad$ E könnte überall 3.5 haben.

15.12.2 LöVo zu Einheit 12.2 (Weiterführung der Wahrscheinlichkeit UE 9_8)

Aufg. 320/806: a) Siehe Formel 6/18 und Aufgabe 314/785.

b) $A = \{1;3;5\}$, $B = \{4;5;6\}$, $A \cap B = \{5\}$ $A \cup B = \{1;3;4;5;6\}$.

	A	B	$\leftrightarrow$	$A \cap B$	$A \cup B$
	$\{1;3;5\}$	$\{4;5;6\}$	$\leftrightarrow$	$\{5\}$	$\{1;3;4;5;6\}$
	Jedem Element links entspricht ein Element rechts				
Wahrscheinlichkeiten	$\frac{3}{6}$	$+\frac{3}{6}$	$=$	$\frac{1}{6}$	$+\frac{5}{6}$
	$P(A)$	$+P(B)$	$=$	$P(A \cap B)$	$+P(A \cup B)$

c) Das Zeichen $X \dot\cup Y$ heißt 'disjunkt vereinigt' und bedeutet eigentlich $X \cup Y$ - es sagt zusätzlich aus, dass die Mengen X und Y disjunkt sind (sein sollten) und damit der spezielle Additionssatz anwendbar ist.

$A \cup B = (\bar{A} \cap B) \dot\cup (A \cap B) \dot\cup (A \cap \bar{B})$; $\qquad A = (A \cap \bar{B}) \dot\cup (A \cap B)$; $\qquad B = (\bar{A} \cap B) \dot\cup (A \cap B)$;

$$\begin{aligned}
\Rightarrow P(A \cup B) &= P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B) \quad + P(A \cap \bar{B}) \\
&= \underbrace{P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B)}_{P(B)} \quad + \underbrace{P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B)}_{+P(A)} \quad - P(A \cap B) \\
&= P(B) + P(A) - P(A \cap B) \quad \text{qed;}
\end{aligned}$$

e) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$.

Aufg. 320/807: $P(A) = \frac{12}{32}$, $P(B) = \frac{16}{32}$, $P(A \cap B) = \frac{6}{32}$, $P(A \cup B) = \frac{22}{32}$ und $\frac{12}{32} + \frac{16}{32} = \frac{6}{32} + \frac{22}{32}$ (AS).

b) **i)** $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0.3$, **ii)** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.8$,
iii) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 0.2$ (de Morgan), **iv)** $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0.1$,
v) $P((\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B})) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0.3$.

c) 'Der Scheck heiligt die Mittel' kommt vom Sprichwort 'Der Zweck heiligt die Mittel'.

$A \cup B = (A$ <u>oder</u> $B)$; sei $\mathcal{X}$ die Anzahl, der eintreffenden Kunden, dann gilt $P(\mathcal{X} \geq 4) = 0.85$ und $P(\mathcal{X} \leq 6) = 0.65$, $A \cup B$ ist mindestens 4 oder höchstens 6 also 'alles' also ist $P(A \cup B) = 1$. $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.85 + 0.65 - 1 = 0.5$.

'0' $\in B$; und '0' $\in A \cup B$; '5' $\in A$; '5' $\in B$; und '5' $\in A \cup B$; '175' $\in A$; und '175' $\in A \cup B$;

Aufg. 321/808: a) Gundel Mario Kretschmar stellt Guido Maria Kretschmer (MODErator bei **Shopping Queen**) dar. Zusammengesetzt wurde der Name aus Gundel Gaukeley (Hexe von Walt Disney), dem (plötzlich) männlichen Vornamen Mario und aus Stefan Kretzschmar (Handball Nationalspieler)

b) **André Greipel** (* 1982) ist deutscher Meister 2013, 2014 und 2016 im Straßenradfahren. Bem: Das Radhaus ist ein Fahrradhandel in Renningen.

c) Zecki Müller ist die Hauptrolle (Aushilfslehrer für D + Sport) in **Fack ju Göhte.** Bem: Zecke ist der Künstlername von Andreas Neuendorf (Fußballspieler).

Absolute Häufigkeit:

a)

	L	$\overline{L}$	Summe
D	3	6	9
$\overline{D}$	4	87	91
Summe	7	93	100

b)

	T	$\overline{T}$	Summe
F	50	72	122
$\overline{F}$	28	850	878
Summe	78	962	1000

c)

	L	$\overline{L}$	Summe
R	15	33	48
$\overline{R}$	22	30	52
Summe	37	63	100

relative Häufigkeit:

a)

	L	$\overline{L}$	Summe
D	0.03	0.06	0.09
$\overline{D}$	0.04	0.87	0.91
Summe	0.07	0.93	1

b)

	T	$\overline{T}$	Summe
F	0.05	0.072	0.122
$\overline{F}$	0.028	0.850	0.878
Summe	0.078	0.962	1

c)

	L	$\overline{L}$	Summe
R	0.15	0.33	0.48
$\overline{R}$	0.22	0.30	0.52
Summe	0.37	0.63	1

Aufg. 321/809: a+b) 'gut'$=\{4,5,6\}$; 'schlecht'$=\{1,2,3\}$; Durchschnitt$=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=3.5$. Das arithmetische Mittel funktioniert beim Würfel von Schmid nicht, weil die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse unterschiedlich sind. Um den Erwartungswert zu berechnen gewichten wir die Ergebnisse mit den einzelnen Wahrscheinlichkeiten: $E = 1\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{2}{6}+6\cdot\frac{3}{6}=4.8\bar{3}$.

d) Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung (WkVert) heißt **Zufallsgröße (ZG) Zufallsvariable** (ZV), wenn deren Ergebnisse (reelle) Zahlen sind. Genau von den ZGen kann man Erwartungswerte ber.

d) i) Die Ergebnismenge ist $\{1,2,3,4,5,6\}$, damit ist die WkVert eine ZG.

d ii) Falls die Ergebnismenge Zahlenpaare zB $(1;2)$ sind, dann ist die WkVert keine ZG. Ist aber zB die Augensumme gesucht, so ist die WkVert eine ZG.

d) iii) Die Ergebnismenge ist $\{1,2,4\}$, damit ist die WkVert eine ZG.

d) iv) Die Ergebnismenge ist $\{rot, blau, grün\}$, damit ist die WkVert keine ZG.

e) $\mu = E(\mathcal{X}) = 3\cdot 0.3+4\cdot 0.4+7\cdot 0.2+8\cdot 0.1 = 4.7$; $\mu = E(\mathcal{X}) = x_1\cdot p_1+x_2\cdot p_2+x_3\cdot p_3+x_4\cdot p_4$;

f) Der Erwartungswert des Würfel von Sd ist $4.8\bar{3}<5$; damit lohnt es sich, den Gewinn zu nehmen, obwohl $P(\mathcal{X}\geq 5)=\frac{5}{6}$ und damit die Wk sich nicht zu verschlechtern sehr groß ist.

g) **Aílton** Gonçalves da Silva (* 1973) war Fußballprofi unter anderem beim SV Werder Bremen (da kommen die Stadtmusikanten her). Sein Künstername ist Kugelblitz. Futsal ist eine Variante des Hallenfußballs.

Sei T=Treffer, $\mathcal{X}$ =Anzahl der Treffer. $P(T)=\frac{1}{6}$; Es gibt 4 relevante Ereignisse: $P(T,T)=\left(\frac{1}{6}\right)^2$, $P(T,\bar{T})=\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=P(\bar{T},T)$, $P(\bar{T},\bar{T})=\left(\frac{5}{6}\right)^2$.

Damit gilt (Wahrscheinlichkeitsverteilung)
$P(\mathcal{X}=2)=P(T,T)=\left(\frac{1}{6}\right)^2$, $P(\mathcal{X}=1)=2\cdot P(T,\bar{T})=2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}$, $P(\mathcal{X}=0)=P(\bar{T},\bar{T})=\left(\frac{5}{6}\right)^2$,

$\mu = 2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2+1\cdot 2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+0\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{12}{36}=2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$;

das Ergebnis sollte eigentlich intuitiv klar sein. Tatsächlich erwartet man bei n Schüssen $\frac{n}{6}$ Treffer (siehe Klasse 10, 339/856).

h) Normaler Würfel - Augensummentabelle

1 Wü \ 2 Wü	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Würfel von Sd - Augensummentabelle

1 Wü \ 2 Wü	1	5	6
1	2	6	7
5	6	10	11
6	7	11	12

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(\mathcal{X}=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$\mu = E(\mathcal{X}) = 7$

Würfel von Sd:

k	2	6	7	10	11	12
$P(\mathcal{X}=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{9}{36}$

$\mu = E(\mathcal{X}) = \frac{29}{6} = 9.\bar{6}$

i) Der Varianzteil mit $V(\mathcal{X})$ oder σ^2 ist erst ab Aufgabe 324/817 zu bearbeiten.

i) i bis iv: $\mu_1 = 5$; $\mu_2 = 6$; $\mu_3 = 7$; $\mu_4 = 8$; $E(\mathcal{X}+k) = E(\mathcal{X}) + k$; Addiert man die gleiche Konstante k zu den Ergebnissen x_j, so erhöht sich der Erwartungswert um eben jene Konstante. Alle Varianzen sind $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2 = 2$; $V(\mathcal{X}+k) = V(\mathcal{X})$;

i) v bis viii: $\mu_5 = 6$; $\mu_6 = 9$; $\mu_7 = 12$; $\mu_8 = 15$; $E(k\cdot\mathcal{X}) = k\cdot E(\mathcal{X})$; Multipliziert man die gleiche Konstante k zu den Ergebnissen x_j, so erhöht sich der Erwartungswert um eben jene Konstante. $\sigma_5^2 = 8 = 2^2\cdot\sigma_1^2$, $\sigma_6^2 = 18 = 3^2\cdot\sigma_1^2$, $\sigma_7^2 = 32 = 4^2\cdot\sigma_1^2$, $\sigma_8^2 = 50 = 5^2\cdot\sigma_1^2$; $V(k\cdot\mathcal{X}) = k^2\cdot V(\mathcal{X})$;

i) ix bis xii: $\mu_9 = 27 \neq \mu_1^2$; $\mu_{10} = 38 \neq \mu_2^2$; $\mu_{11} = 51 \neq \mu_3^2$; $\mu_{12} = 66 \neq \mu_4^2$; Hier gilt $\mu_9 + 11 = \mu_{10}$, $\mu_{10} + 13 = \mu_{11}$, $\mu_{11} + 15 = \mu_{12}$; Das hat evtl mit der Kachelformel $\sum_{k=1}^{k=n}(2k-1) = n^2$ zu tun.

$\sigma_9^2 = 130$, $\sigma_{10}^2 = 202$, $\sigma_{11}^2 = 290$, $\sigma_{12}^2 = 394$;

Zusatzerkenntnis: (ist aber nicht ganz intuitiv)

Es gilt	$\sigma^2 = V(\mathcal{X})$	$= E(\mathcal{X}^2)$	$-(E(\mathcal{X}))^2$	
i)	2	$=\mu_9$	$-\mu_1^2$	$= 27 - 5^2$
ii)	2	$=\mu_{10}$	$-\mu_2^2$	$= 38 - 6^2$
iii)	2	$=\mu_{11}$	$-\mu_3^2$	$= 51 - 7^2$
iv)	2	$=\mu_{12}$	$-\mu_4^2$	$= 66 - 8^2$

xiii)	$\mu_{13} = 3\cdot\mu_1 = 15$, $\sigma_{13}^2 = 3^2\cdot\sigma_1^2 = 18$,	xiv)	$\mu_{14} = 4\cdot\mu_1 = 20$, $\sigma_{14}^2 = 4^2\cdot\sigma_1^2 = 32$,
xv)	$\mu_{15} = 5\cdot\mu_1 = 25$, $\sigma_{15}^2 = 5^2\cdot\sigma_1^2 = 50$,	xvi)	$\mu_{16} = 0.5\cdot\mu_1 = 2.5$, $\sigma_{16}^2 = 0.5^2\cdot\sigma_1^2 = 0.5$,
xvii)	$\mu_{17} = 11/3 = 3.\bar{6} < \mu_1 = 5$, $\sigma_{17}^2 = 2.\bar{8}$,	xviii)	$\mu_{18} = 3.8\bar{3}, \sigma_{18}^2 = 3.47\bar{2}$,
xix)	$\mu_{19} = 4.5, \sigma_{19}^2 = 3.25$,	xx)	$\mu_{20} = 4.\bar{3}, \sigma_{20}^2 = 2.\bar{8}$ (Gleichverteilung).

Aufg. 322/810: a) Sean Connery spielt in **'Jagd auf Roter Oktober'** den U-Boot Kapitän Marko Ramius. Bemerkung: Con Air (1997) ist ein Thriller mit Nicolas Cage.

Ergebnistabelle:

Wert	60	61	63	64	65	66	67
Anz	3	4	3	5	2	1	4
Wk	$\frac{3}{22}$	$\frac{4}{22}$	$\frac{3}{22}$	$\frac{5}{22}$	$\frac{2}{22}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{4}{22}$

b) Erwartungswert $= 60\cdot\frac{3}{22} + 61\cdot\frac{4}{22} + 63\cdot\frac{3}{22} + 64\cdot\frac{5}{22} + 65\cdot\frac{2}{22} + 66\cdot\frac{1}{22} + 67\cdot\frac{4}{22} = 63.5$.

Aufg. 322/811:

Auszahlung	1 000 000	100 000	1 000	0
P	$\frac{3}{750000}$	$\frac{5}{750000}$	$\frac{1000}{750000}$	$\frac{748992}{750000}$

$E = 1000000\cdot\frac{3}{750000} + 100000\cdot\frac{5}{750000} + 1000\cdot\frac{1000}{750000} = 6$.

Aufg. 322/812: a) Ein Spielautomat arbeitet fair, wenn er genau die Einzahlungen als Gewinn ausschüttet. Damit ist Szenario ii) fair.

b) Eine ZG $\mathcal{X}$ heißt **fair** $\Leftrightarrow$ $\underline{\mu = E(\mathcal{X}) = 0}$ gilt.

c) Erwartungswert$=\mu = E(\mathcal{X}) = (-2)\cdot 0.4 + 1\cdot 0.5 + 3\cdot 0.1 = 0$; die Zufallsvariable ist fair.

d) Sei $P(0) = a \Rightarrow P(1) = 1 - 0.1 - 0.2 - a = 0.7 - a \Rightarrow \mu = (-2)\cdot 0.4 + (-1)\cdot 0.1 + 0\cdot a + 1\cdot(0.7-a) = 0$ $\Leftrightarrow -0.9 + 0.7 - a = 0 \Leftrightarrow P(0) = a = 0, P(1) = 0.7 - a = 0.5$.

e) Saruman (auf der Seite Saurons) und Gandalf sind zwei Zauberer aus dem **Herrn der Ringe.** Im Auenland ist die gängige Währung der silver penny = Silberpfenning.

Sei $\mathcal{X}$ die Anzahl der Köpfe, dann gilt $P(\mathcal{X}=0) = \frac{1}{8}$, $P(\mathcal{X}=1) = \frac{3}{8}$, $P(\mathcal{X}=2) = \frac{3}{8}$, $P(\mathcal{X}=3) = \frac{1}{8}$, $E(\mathcal{X}) = 0\cdot\frac{1}{8} + 1\cdot\frac{3}{8} + 2\cdot\frac{3}{8} + 3\cdot\frac{1}{8} = 1.5$; Die Gewinnerwartung liegt (nach Abzug des Einsatzes) bei $-0,3$, also nein. Ein Spiel ist fair, wenn dessen Erwartungswert=0 ist, also muss der Einsatz 1.5 Zauberpfennig sein.

f) Tabelle für $\mathcal{X}$

2. \ 1.Wurf	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

$P(\mathcal{X}=1)=\frac{1}{36}$,
$P(\mathcal{X}=2)=\frac{3}{36}$,
$P(\mathcal{X}=3)=\frac{5}{36}$,
$P(\mathcal{X}=4)=\frac{7}{36}$,
$P(\mathcal{X}=5)=\frac{9}{36}$,
$P(\mathcal{X}=6)=\frac{11}{36}$;

$E(\mathcal{X})=1\cdot\frac{1}{36}+2\cdot\frac{3}{36}+3\cdot\frac{5}{36}+4\cdot\frac{7}{36}+5\cdot\frac{9}{36}+6\cdot\frac{11}{36}=\frac{161}{36}=4.47\bar{2}$.

Aufg. 323/813: a) $E(\mathcal{X})=1\cdot 0.4+2\cdot 0.2+3\cdot 0.3+4\cdot 0.2=2.3$.
b) $P(\mathcal{X}\neq 3)=P(\mathcal{X}$ ungerade$)=0.7$. c) $P(\text{AS}=3)=P(1,2)+P(2,1)=0.4\cdot 0.1+0.1\cdot 0.4=0.08$.
d) Sei $P(\mathcal{X}=1)=p$, dann ist $P(\mathcal{X}=2)=0.5-p$,
$E(\mathcal{X})-2.5=0\Leftrightarrow 1\cdot p+2\cdot(0.5-p)+3\cdot 0.3+4\cdot 0.2=2.5\Leftrightarrow p+1-2p+1.7=2.5\Leftrightarrow p=0.2$
$\Rightarrow P(\mathcal{X}=1)\to 0.2, P(\mathcal{X}=2)\to 0.3$.

e) i) $P(\mathcal{X}\geq 8)=P(\mathcal{X}=8)+P(\mathcal{X}=10)=0.3+0.4=0.7$;

ii) Sei $P(\mathcal{X}=2)=a$ und $P(\mathcal{X}=4)=b$, dann gilt: Summe aller Wk=1 $=a+b+0.1+0.3+0.4$ also ist $a+b=0.2$; weil a und $b\geq 0$ sein müssen, ist $b=P(\mathcal{X}=4)=0.2-a\leq 0.2$;

iii) $E(\mathcal{X})=2\cdot a+4\cdot b+6\cdot 0.1+8\cdot 0.3+10\cdot 0.4=2a+4b+7=7.5$ oder
$2a+4b=0.5\Leftrightarrow a=0.25-2b$ mit $a+b=0.2$ ist (eingesetzt) $(0.25-2b)+b=0.2\Leftrightarrow 0.25-b=0.2$
$\Leftrightarrow b=0.05$ und $a=0.2-0.05=0.15$; $P(\mathcal{X}=2)=0.15$.

f) i) $\mu=0\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}+1\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{6}+1\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}-0.5=\frac{-5}{12}$.

Bem. Die Lösung $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-0.5$ ist richtig, kann nicht ohne weitere Begründung genügen (thx Hmb).

ii) Sei t die Anzahl der Tetraeder, dann sind $20-t$ Oktaeder im Sack. Sei $\mathcal{X}$ die gewürfelte Zahl.

$P(\mathcal{X}=2)=\frac{t}{20}\cdot\frac{1}{4}+\frac{20-t}{20}\cdot\frac{1}{8}=0.15\overset{\cdot 20,\cdot 8}{\Longleftrightarrow}2t+20-t=24\Leftrightarrow t=4$.

Im Sack sind 4 Tetraeder und 16 Oktaeder.

g) Die Wk ist in jedem Fall $\frac{1}{8}$. Sei $x=1.5$:

Fall	(E,E,E)	(E,E,T)	(E,T,E)	(E,T,T)	(T,E,E)	(T,E,T)	(T,T,E)	(T,T,T)
Auszahlung	1	0	0	1.5 (x)	3	0	0	0

Wenn ich E gewählt habe (dann ist die Wk für jeden Fall $\frac{1}{4}$): $\mu=1\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{1}{4}+1.5\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$;

Wenn ich T gewählt habe (dann ist die Wk für jeden Fall $\frac{1}{4}$): $\mu=3\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$;

also wähle ich T.

Sei x beliebig: Wir haben E gewählt (die Stra//tegie geändert), dann gilt
$\mu_x=1\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{1}{4}+x\cdot\frac{1}{4}=\frac{x+1}{4}>\frac{3}{4}$ für $x>2$.

h) $2\cdot 0.4\cdot 0.6\cdot x+0.6^2\cdot 7x=6\Leftrightarrow x=2$.

i) Ein mögliches Ereignis ist: 'Auf den beiden entnommenen Kugeln stehen unterschiedliche Zahlen'.
ii) Für den Erwartungswert von $\mathcal{X}$ gilt: $4\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2+2\cdot 2a\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}+a^2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2\Leftrightarrow a^2+6a-16=0\Leftrightarrow a_1=-8$ oder $a_2=2$. Damit ist $a=-8$.

Aufg. 323/814: Willy Loman ist der Protagonist aus 'Tod eines Handlungsreisenden'. Die Namen der Autohäuser sind den Sprichwörtern Liebe geht durch den Wagen = Liebe geht durch den Magen und Wer Wagt gewinnt = Wer wagt gewinnt entlehnt.

a) $W: m_1 = 2$; $A_2: m_2 = 5$; **b)** Übertrage v_4 nach W: $m_1 = 2.5$ und $m_2 = 5.5$ oder übertrage sogar v_4 und v_5 nach W: $m_1 = 3$ und $m_2 = 6$. **c)** Durch die Übertragung wird die Gewichtung der einzelnen Verkäufer geändert (trau keiner Statistik, die Du nicht selbst ....).

Aufg. 324/815: $\frac{10+11+12+12+12+13+13+13+14+40}{10} = 15$; Der Langzeitstudent (40 Semester - solche gibt es) sorgt dafür, dass die mittlere Studiendauer über dem zweitlängsten Studenten liegt.

b) Tatsächlich würde man als mittlere Studiendauer einen Wert zwischen 12 und 13 hier $\frac{12+13}{2} = 12.5$ angeben. Seien $a_1, ..a_n$ sortierte Messungen, dann heißt die Mitte $a_{0.5(n+1)}$ Median (falls n ungerade ist) und $\frac{a_{0.5n}+a_{0.5n+1}}{2}$, falls n gerade ist.

Aufg. 324/816: a) Der Erwartungswert aller 6 Würfel ist 3,5 (oder die Augensumme ist 21). b) -

c) Würfel A, B sind 'Füllmaterial'; Würfel C = 'besser der Spatz in der Hand, als die Taube auf dem Dach'; Würfel D = 'all in'; Würfel E = 'russisch Roulette', Würfel F = 'russisch Roulette mit 5 Kugeln(?)'.

d) Würfel	B		A						C	D	
Wert	1	6	1	2	3	4	5	6	3.5	1	16
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$
Abweichung	2.5	2.5	2.5	1.5	0.5	0.5	1.5	2.5	0	2.5	12.5

$\rho(B) = \frac{1}{2} \cdot 2.5 + \frac{1}{2} \cdot 2.5 = 2.5$; $\rho(A) = \frac{1}{6} \cdot 2.5 + \frac{1}{6} \cdot 1.5 + \frac{1}{6} \cdot 0.5 + \frac{1}{6} \cdot 0.5 + \frac{1}{6} \cdot 1.5 + \frac{1}{6} \cdot 2.5 = 1.5$;
$\rho(C) = \frac{1}{1} \cdot 0 = 0$; $\rho(D) = \frac{25}{6}$; $\rho(E) = \frac{265}{6}$, $\rho(F) = \frac{5}{6} \cdot 23.5 + \frac{1}{6} \cdot 117.5 = \frac{235}{6}$.

e) Der Erwartungswert ist ein Maß für die Qualität (Güte), die MAA ein Maß für das Risiko einer Zufallsvariablen (= WkVerteilung mit reellen Ergebnissen)..
f) Wk Verteilungen mit niedriger MAA haben nur hohe Balken in der Nähe des Erwartungswertes, bei Wk Verteilungen mit hohem MAA sind die Balken weiter gestreut.

g) Aufgabe 803: A) $E = \frac{16}{6} = 2.\bar{6}$, MAA=$1.\bar{7}$; B) $E = \frac{18}{6} = 3$, MAA=2; C) $E = \frac{20}{6} = 3.\bar{3}$, MAA=$1.\bar{7}$; D) $E = \frac{18}{6} = 3$, MAA=0; Aufgabe 811: MAA = $\frac{8987904}{750000} \approx 11.98$; Aufgabe 812: MAA=$\frac{6}{8}$.

Aufg. 324/817: a) $\mu = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3$; $MAA(\mathcal{X}) = |x_1 - \mu| \cdot p_1 + |x_2 - \mu| \cdot p_2 + |x_3 - \mu| \cdot p_3$.

b) (ohne Betrag)=$oB = (x_1 - \mu) \cdot p_1 + (x_2 - \mu) \cdot p_2 + (x_3 - \mu) \cdot p_3$
$= x_1 \cdot p_1 - \mu \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 - \mu \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 - \mu \cdot p_3$
$= \mu \cdot (p_1 + p_2 + p_3) - (x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3) = \mu \cdot 1 - \mu = 0.$

c) $\sigma^2(\mathcal{X}) = (x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + (x_3 - \mu)^2 \cdot p_3$. ($\sigma(\mathcal{X}) = \sqrt{V(\mathcal{X})}$)

d) Satz von Pythagoras. Die Wurzel der Varianz σ^2 heißt Standardabweichung σ.

e) (die auch positiv sind). $E(\mathcal{X}) = 0$, $\sigma^2(\mathcal{X}) = 1$: siehe Abb. 517

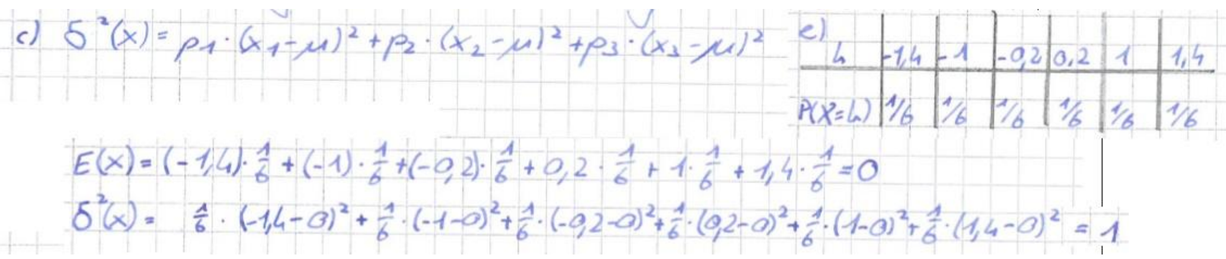


Abb. 517 Berechnung von σ und E

f) Efrons Würfel: 4 er Würfel: $\mu = \frac{8}{3}$; $\sigma = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot (4 - \frac{8}{3})^2 + \frac{1}{3} \cdot (0 - \frac{2}{3})^2} = \sqrt{\frac{32}{27} + \frac{4}{27}} \approx 1.1547$;

5 er Würfel: $\mu = 3$; $\sigma = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (5 - 3)^2 + \frac{1}{2} \cdot (1 - 3)^2} = \sqrt{4} = 2$;

6 er Würfel: $\mu = \frac{10}{3}$; $\sigma = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot (6 - \frac{10}{3})^2 + \frac{2}{3} \cdot (2 - \frac{10}{3})^2} = \sqrt{\frac{64}{27} + \frac{32}{27}} \approx 1.8856$;

3 er Würfel: $\mu = 3$; $\sigma = \sqrt{\frac{1}{1} \cdot (3-3)^2} = 0$;

Elfies Würfel: $\mu = 3.5$; $\sigma(A) = \sqrt{2.91\bar{6}} \approx 1.71$; $\sigma(B) = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (6 - 3.5)^2 + \frac{1}{2} \cdot (1 - 3.5)^2} = 2.5$;

Würfel C: $\sigma(C) = 0$; $\sigma(D) = \sqrt{\frac{1}{6} \cdot (16 - 3.5)^2 + \frac{5}{6} \cdot (1 - 3.5)^2} = \sqrt{\frac{625}{24} + \frac{125}{24}} \approx 1.1547 \approx 5.59$;

Würfel E: $\sigma(E) = \sqrt{\frac{5}{6} \cdot (30 - 3.5)^2 + \frac{1}{6} \cdot (-129 - 3.5)^2} = \sqrt{\frac{14045}{24} + \frac{70225}{24}} \approx 59.2558$;

Würfel F: $\sigma(F) = \sqrt{\frac{5}{6} \cdot (-20 - 3.5)^2 + \frac{1}{6} \cdot (121 - 3.5)^2} = \sqrt{\frac{33607}{12}} \approx 52.9205$;

321/809 d) $\sigma = \sqrt{0.3 \cdot (3 - 4.7)^2 + 0.4 \cdot (4 - 4.7)^2 + 0.2 \cdot (7 - 4.7)^2 + 0.1 \cdot (8 - 4.7)^2}$
$= \sqrt{0.867 + 0.196 + 1.058 + 1.089} = \sqrt{3.21} \approx 1.792$;

321/809 e) Würfel von Sd: $\sigma \approx 1.772$; **f)** $\sigma \overset{F51}{=\!=} \sqrt{2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} \approx 0.527$

321/809 g) $\mu = 7$; $\sigma = \frac{1}{36} \cdot (2-7)^2 + \frac{2}{36} \cdot (3-7)^2 + \frac{3}{36} \cdot (4-7)^2 + \frac{4}{36} \cdot (5-7)^2 + \frac{5}{36} \cdot (6-7)^2 + \frac{6}{36} \cdot (7-7)^2 + \frac{5}{36} \cdot (8-7)^2 + \frac{4}{36} \cdot (9-7)^2 + \frac{3}{36} \cdot (10-7)^2 + \frac{2}{36} \cdot (11-7)^2 + \frac{1}{36} \cdot (12-7)^2)^{0.5} = \sqrt{\frac{35}{6}} \approx 2.415.$

Würfel von Sd (ein Wurf): $\sigma^2 = \frac{49}{72} + \frac{1}{108} + \frac{529}{216} = \frac{113}{36}$. Bei zwei Würfen: $\sigma^2 \overset{F110}{=\!=} 2 \cdot \frac{113}{36} \Rightarrow \sigma \approx 2.50555$;

In Klasse 9 sind die Formeln 51 und 110 unbekannt. Die Werte müssen hier von Hand gerechnet werden.

Aufgabe 322/810 $\sigma = \sqrt{\frac{445}{88}} \approx 2.25$

Aufgabe **322/811** $\sigma \approx \sqrt{3999952 + 66658.\bar{6} + 1317.38 + 35.95} \approx 2016.92$; dieser Wert ist im Vergleich zur MAA (knapp 12) quasi nicht aussagekräftig.

Aufgabe **322/812c** $\sigma = \sqrt{0.4 \cdot (-2)^2 + 0.5 \cdot 1^2 + 0.1 \cdot 3^2} = \sqrt{3}$;

812d $\sigma = \sqrt{0.2 \cdot (-2)^2 + 0.1 \cdot (-1)^2 + 0 \cdot 0^2 + 0.5 \cdot 1^2} = \sqrt{1.4}$; **812f** $\sigma = \sqrt{\frac{2555}{1296}} \approx 1.404$;

Aufgabe **323/813a** $\sigma = \sqrt{1.41} \approx 1.19$; **813e** $\sigma = \sqrt{7.95} \approx 2.82$; **813f**$_i$ $\sigma = \sqrt{0.4375} \approx 0.66$;

Aufg. 324/818: a) M heißt hier Detlef; W $\hat{=}$ Victoria; ♡ $\hat{=}$ Tobias; ♣ $\hat{=}$ Friedrich; $o \hat{=}$ Kai;

D: Kommst Du? V: Vielleicht.

b) D: T kommt mit $p = 0.3$
V: Wenn T kommt, dann komme ich auch.
.. stellen Sie den Sachverhalt in einem Baum dar.

f) $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

h) Die Bäume sind in Abschnitt 14.16.8.
$P(V) = 0.72$, $P_T(V) = 1 = \frac{P(V \cap T)}{P(T)}$,
$P_V(T) = \frac{P(V \cap T)}{P(V)} = \frac{0.3}{0.72} = 0.41\bar{6}$,

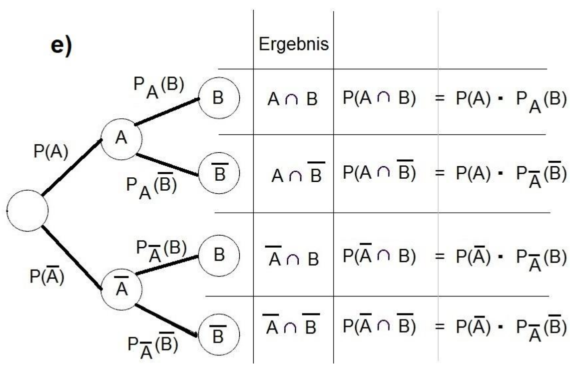


Abb. 518 Umkehrung des Baumdiagramms

c) 1 ist die Wahrscheinlichkeit, dass Victoria kommt unter der Bedingung, dass Tobias kommt.

d) In einem Baum stehen die unbedingten Wahrscheinlichkeiten direkt an der Wurzel, alle anderen Äste tragen bedingte Wahrscheinlichkeiten.

g) $P_A(B)$ ist die Wk von $\underline{B}$, wenn $\underline{A}$ schon eingetreten ist.

i) Die Umkehrung des Baumdiagramms widerspricht dem Prinzip von Ursache und Wirkung. Die Wahrscheinlichkeitstheorie kennt keine Initiative (Abb. 518).

Aufg. 325/819: a) Marie-Luise G. studiert(e) seit 2018 FM und hatte den Auftrag siehe Amt des Kurssprechers 381/4 mich mit gelben + roten Karten in der MatheVL zu bremsen. Außerdem hat sie besonders viele Fehler in den Lösungen gefunden und diese mir besonders einfühlsam mitgeteilt.

$P(K_1 \cap g) = 0.5 \cdot 3/5 = 0.3$, $P(K_2 \cap g) = 0.5 \cdot 3/15 = 0.1$, i) $P(g) = 0.3 + 0.1 = 0.4$,

ii) $P_g(K_1) = \frac{P(K_1 \cap g)}{P(g)} = \frac{0.3}{0.4} = \frac{3}{4} = 0.75$.

b) $P(U_1 \cap G) = 0.1$; $P(U_1 \cap R) = 0.4$; $P(U_2 \cap G) = 0.4$; $P(U_2 \cap R) = 0.1$; $P_G(U_1) = \frac{G \cap U_1}{P(G)} = \frac{0.1}{0.1+0.4} = 0.2$

Teil c)	u 25	ü 25	Summe
Positiv	12%	48%	60%
negativ	28%	12%	40%
Summe	40%	60%	100%

$P_+(u25) = \frac{12}{60} = 0.2$

d) Sei $K=$ an Corona erkrankt; $T=$ der Test ist positiv; i) dann gilt $P(K) = 0.00625, P_K(T) = 0.96, P_{\bar{K}}(\bar{T}) = 0.94$. Gesucht ist $P_T(K) = \frac{P(T \cap K)}{P(T)}$. $P(K \cap T) = P(K) \cdot P_K(T) = 0.00625 \cdot 0.96 = 0.006$; $P(\bar{K} \cap T) = P(\bar{K}) \cdot P_{\bar{K}}(T) = 0.99375 \cdot 0.06 = 0.059625$; $P(T) = 0.065625$; $P_T(K) = \frac{P(T \cap K)}{P(T)} = \frac{0.006}{0.06562} \approx 0.0914$. Man beachte: Die Wk liegt nur bei 9%! (Teilergebnisse: Siehe auch Abb. 519)

ii) dann gilt $P(K) = 0.05, P_K(T) = 0.96, P_{\bar{K}}(\bar{T}) = 0.94$. Gesucht ist $P_T(K) = \frac{P(T \cap K)}{P(T)}$. $P(K \cap T) = P(K) \cdot P_K(T) = 0.05 \cdot 0.96 = 0.048$; $P(\bar{K} \cap T) = P(\bar{K}) \cdot P_{\bar{K}}(T) = 0.95 \cdot 0.06 = 0.057$; $P(T) = 0.105$; $P_T(K) = \frac{P(T \cap K)}{P(T)} = \frac{0.048}{0.105} \approx 0.457$. Man beachte: Das Risiko liegt etwa um den Faktor $18 = \frac{1/20}{1/160} \approx \frac{0.457}{0.09}$ höher.

Die zugehörge 4 Feldertafel ist:

	K	$\overline{K}$	Summe
T	0.006	0.059625	0.065625
$\overline{T}$	0.00025	0.934125	0.934375
Summe	0.00625	0.99375	1

$P_{\overline{T}}(K) \approx 0.000267$.

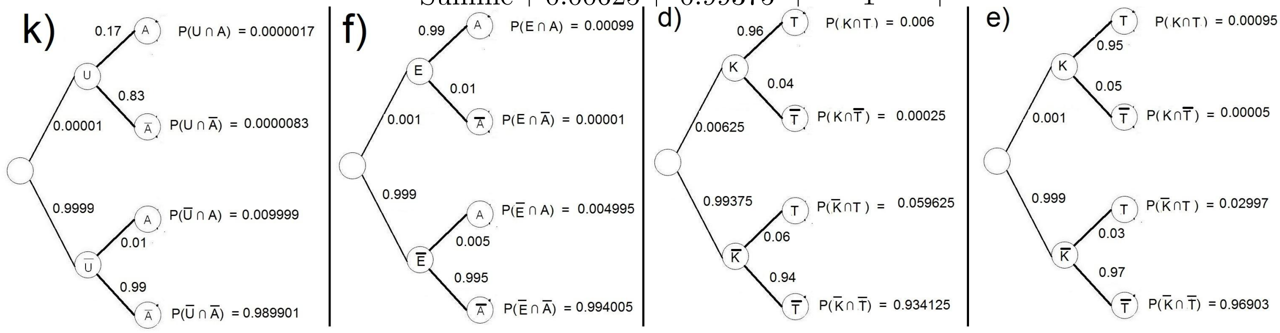


Abb. 519 Baumdiagramme bedingter Wahrscheinlichkeiten

e) Sei $K=$ Rind hat BSE; $T=$ der Test ist positiv; dann gilt $P(K) = 0.001, P_K(T) = 0.95, P_{\bar{K}}(\bar{T}) = 0.97$. Gesucht ist $P_T(K) = \frac{P(T \cap K)}{P(T)}$; $P(K \cap T) = P(K) \cdot P_K(T) = 0.001 \cdot 0.95 = 0.00095$; $P(\bar{K} \cap T) = P(\bar{K}) \cdot P_{\bar{K}}(T) = 0.999 \cdot 0.03 = 0.02997$; $P(T) = 0.03092$; $P_T(K) = \frac{P(T \cap K)}{P(T)} = \frac{0.00095}{0.03092} \approx 0.0307$. Man beachte: Die Wk liegt nur bei 3%! (Teilergebnisse: Siehe auch Abb. 519)

f) **Al Capone 1899-1947** (Al=Alphonse) betrieb in Chigago illegales Glücksspiel. Er gilt als einer der berüchtigsten Verbrecher in den USA.

Sei E= Einbruch; A= Alarm; dann gilt $P(E) = 0.001, P_E(A) = 0.99, P_{\bar{E}}(A) = 0.005$. Gesucht ist $P_A(E)$. $P(A \cap \bar{E}) = P(\bar{E}) \cdot P_{\bar{E}}(A) = 0.999 \cdot 0.005 = 0.004995$; $P(A \cap E) = P(E) \cdot P_E(A) = 0.0001 \cdot 0.99 = 0.00099$; $P_A(E) = \frac{P(A \cap E)}{P(A)}$, mit $P(A) = P(A \cap E) + P(A \cap \bar{E}) = 0.00099 + 0.004995 = 0.005985$: $P_A(E) = \frac{0.00099}{0.005985} \approx 0.1654$ (Teilergebnisse: Siehe auch Abb. 519).

g) Gesucht ist Greta Thunberg mit Ihrem Streikaufruf Fridays for Future. Das Gespräch hat bei uns an der Schule so oder so ähnlich stattgefunden. Es soll verdeutlichen, dass CO_2 Emissionen nicht immer nur die anderen machen oder es gibt eben doch gute und schlechte CO_2 Emissionen. Das eigentliche Problem, die Überbevölkerung (incl. Wirtschaftssystem, dass auf Wachstum ausgelegt ist) (Cartoon auf Seite 290), bekämpft auch sie nicht. Seit meiner Geburt hat sich die Weltbevölkerung mehr als verdoppelt $3.5 \cdot 10^7 \to 7.7 \cdot 10^7$ (heute 2019); heute lebt die Hälfte der Welt in Südostasien + morgen überholt Schwarzafrika.

$P(D) = 0.5, P(F) = 0.25 \Rightarrow P(\bar{F}) = 0.75,$

$P_{\bar{F}}(D) = 0.6 \Rightarrow P(D \cap \bar{F}) = P(\bar{F}) \cdot P_{\bar{F}}(D) = 0.6 \cdot 0.75 = 0.45;$

$P(D \cap F) = P(D) - P(D \cap \bar{F}) = 0.5 - 0.45 = 0.05;$

$P(\bar{D} \cap F) = P(F) - P(D \cap F) = 0.25 - 0.05 = 0.2;$

$P(\bar{D} \cap \bar{F}) = P(\bar{F}) - P(D \cap \bar{F}) = 0.75 - 0.45 = 0.3;$

$P_F(\bar{D}) = \frac{P(F \cap \bar{D})}{P(F)} = \frac{0.2}{0.25} = 0.8;$ $P_D(F) = \frac{P(F \cap D)}{P(D)} = \frac{0.05}{0.5} = 0.1;$

h) Geißbock Hennes ist das Maskottchen des 1. FC Köln; das Fohlen Jünter ist das Maskottchen von Borussia Mönchengladbach und die Wallschmid 2 ist die Nummer von Hans-Hubert (Berti) Vogts (früher bei Gladbach).

Ich verwende folgende Abkürzungen: A=Alkohol, F =Fohlen Jünter, G= Geißbock Hennes, N=neutral.

Laut Agtxt gilt: $P(F) = 0.5$, $P(G) = 0.3$, $P_F(A) = 0.1$, $P_G(A) = 0.2$, $P(A) = 0.15$.

Es gilt $P(N) = 1 - 0.5 - 0.3 = 0.2$ und nach der Formel von Bayes ist:

$P(A \cap F) = P(F) \cdot P_F(A) = 0.5 \cdot 0.1 = 0.05$; $P(A \cap G) = P(G) \cdot P_G(A) = 0.3 \cdot 0.2 = 0.06$;

Sei $P_N(A) = x$, dann gilt $P(A \cap N) = P(N) \cdot P_N(A) = 0.2 \cdot x$

damit ist $P(A) = P(A \cap F) + P(A \cap G) + P(A \cap N) = 0.05 + 0.06 + 0.2x = 0.15 \Leftrightarrow 0.2x = 0.04 \Leftrightarrow x = 0.2$. Neutrale Zuschauer haben mit $P_N(A) = 0.2$ Alkohol dabei.

$P_A(G) = \frac{P(A \cap G)}{P(A)} = \frac{0.06}{0.15} = 0.4$. Die Wk, dass von allen Personen, die Alkohol dabei haben, eine zufällig ausgewählte Person ein GH-Fan ist, ist 0.4.

i) $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P_A(B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Damit ist $P(A \cap B) = 0$ oder $P(A) = P(B)$.

j) In der Studie sind bedingte Wk angegeben − so ist $P_U(A) = 0.17$ und $P_U(\overline{A}) = 0.83$; $P_A(U) = \frac{P(A \cap U)}{P(A)} = \frac{P(U) \cdot P_U(A)}{P(A)} = \frac{P(U)}{P(A)} \cdot 0.17$. Das Risiko würde sich also mindern, wenn $P(A) > 0.17$ wäre, was aber nicht der Fall ist.

k) Es gilt $P_U(A) = 0.17$ (Unfall ist Vorbedingung); $P(A \cap U) = P_U(A) \cdot P(U) = 0.17 \cdot 0.00001 = 0.0000017$; $P_A(U) = \frac{P(A \cap U)}{P(A)} = \frac{0.0000017}{0.01} = 0.00017$; $P_{\bar{A}}(U) = \frac{P(\bar{A} \cap U)}{P(\bar{A})} = \frac{0.0000083}{0.99} = 0.0000\overline{83}$;

Das Verhältnis der Unfallgefahren ist $\frac{P_A(U)}{P_{\bar{A}}(U)} = \frac{0.00017}{0.0000\overline{83}}$; bei A ist sie also über 20 mal höher als bei $\bar{A}$.

Aufg. 326/820: a) Die Bäume sind in Abschnitt 14.16.8. $P(V \cap F) = 0 < P(V) \cdot P(F)$ die Ereignisse V und F meiden sich, $P(V \cap K) = 0.18 = P(V) \cdot P(K)$ die Ereignisse V und K sind unabhängig, $P(V \cap T) = 0.03 > P(V) \cdot P(T)$ die Ereignisse V und F ziehen sich an.

b) $P_T(V) = 1 > 0.72 = P(V)$, $P_F(V) = 0 > 0.42 = P(V)$, $P_K(V) = 0.6 = P(V)$.

c) Zwei Ereignisse A und B heißen **unabhängig** $\Leftrightarrow P_B(A) = \underline{P(A)}$ oder $P(A \cap B) = \underline{P(A) \cdot P(B)}$.

Aufg. 326/821: a) **Rudolf Caracciola** genannt Karratsch war ein Rennfahrer. Er fuhr im Jahre 1938 mit 436.9 km/h die höchste auf einer öffentlichen Straße gefahrene Geschwindigkeit! Beim Versuch, diese Marke zu verbessern verunglückte Bernd Rosemeyer (am selben Tag) bei Darmstadt (A 5) tödlich.

$P(i) = 0.85 \cdot 0.95 = 0.8075$, $P(ii) = 0.15 \cdot 0.05 = 0.0075$,
$P(iii) = 0.15 \cdot 0.95 + 0.85 \cdot 0.05 = 0.185$, $P(iv) = P(b) + P(c) = 0.1925$.

b) Gesucht ist **Herr Martin**; 'Nachts sind alle Ampeln grün' stammt von der Volksweisheit: 'Nachts sind alle Katzen grau' ab. Leider sind Ampelschaltungen in Marbach öfter suboptimal was ohne Not mehrere Kilometer Stau erzeugt.

i) $P(g; g) = 0.28$, ii) $1 - P(r; r) = 0.82$, iii) $P(g; r) + P(r; g) = 0.54$, iv) $1 - P(g; g) = 0.72$.

c) Bei einem idealen Würfel ist die nächste Zahl unabhängig von den vorigen Zahlen, also ist es dann egal, welchen Würfel Sie wählen. Bei nicht idealen Würfeln können gewisse Zahlen bevorzugt werden. In diesem Falle ist also der mit der vorher gewürfelten '6' zu wählen.

d) $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{6}$, $P(C) = \frac{1}{6}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{36} = P(A) \cdot P(B)$, (unabh.);
$P(A \cap C) = \frac{1}{36} < P(A) \cdot P(C)$, (unabh.); $P(B \cap C) = \frac{2}{36} > P(B) \cdot P(C)$, (ziehen sich an).

e) Die Grundmenge Ω ist $\Omega = \{(1; 1); (1; 2); (1; 3); (2; 1); (2; 2); (2; 3); (3; 1); (3; 2); (3; 3)\}$.

$A = \{(1; 2); (2; 2); (3; 2)\}$; $B = \{(1; 1); (2; 2); (3; 3)\}$; $C = \{(1; 1); (1; 2); (2; 1)\}$;
$D = \{(1; 1); (1; 2)\}$; $E = \{(1; 1); (1; 2); (1; 3)\}$; $F = \{(1; 3); (2; 2); (3; 1)\}$.

$P(A) = P(B) = P(C) = P(E) = P(F) = \frac{3}{9}$; $P(D) = \frac{2}{9}$; (A) = abhängig, (U) = unabhängig.

$A \cap B = \{(2; 2)\}$; $P(A \cap B) = \frac{1}{9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$; A und B sind unabhängig (U);

$A \cap C = \{(1; 2)\}$ (U); $A \cap D = \{(1; 2)\}$ (A); $A \cap E = \{(1; 2)\}$ (U); $A \cap F = \{(2; 2)\}$ (U);
$B \cap C = \{(1; 1)\}$ (U); $B \cap D = \{(1; 1)\}$ (A); $B \cap E = \{(1; 1)\}$ (U); $B \cap F = \{(2; 2)\}$ (U);

$C \cap D = \{(1; 1); (1; 2)\}$ (A); $C \cap E = \{(1; 1); (1; 2)\}$ (A); $C \cap F = \{\}$ (A);
$D \cap E = \{(1; 1); (1; 2)\}$ (A); $D \cap F = \{\}$ (A); $E \cap F = \{(1; 3)\}$ (A);

Aufg. 326/822: a) $P(V) = 0.62$, $P(S) = 0.619$, $P(V \cap S) = 0.47 > 0.62 \cdot 0.619 = 0.38378$, also 'ja', es ist erblich.

b) Ag 808a) (Anzahl Günstige durch Anzahl Mögliche) $P(T) = \frac{78}{1000}$, $P(F) = \frac{122}{1000}$, $P(T \cap F) = \frac{50}{1000} = 0.05 > P(T) \cdot P(F) = 0.009516$, die Ereignisse sind abhängig, sie ziehen sich an.
b) $P(L) = \frac{48}{100} = 0.48, P(R) = 0.37, P(L \cap R) = 0.25 > 0.1776 = P(L) \cdot P(R)$, die Ereignisse sind abhängig, sie ziehen sich an.
c) $P(L) = \frac{7}{100} = 0.07$, $P(D \cap L) = 0.04$, $P(D) = 0.09$, $P(D \cap L) = 0.04 > P(L) \cdot P(D) = 0.063$ die Ereignisse sind abhängig, sie ziehen sich an (schon wieder).

c)

	R	$\bar{R}$	Summe
B	$\frac{20\cdot 40}{100}$	$\frac{20\cdot 60}{100}$	20
$\bar{B}$	$\frac{20\cdot 80}{100}$	$\frac{60\cdot 80}{100}$	80
Summe	40	60	100

	R	$\bar{R}$	Σ
B	8	12	20
$\bar{R}$	32	48	80
Σ	40	60	100

	R	$\bar{R}$	Σ
B	$\frac{a+b}{c}$	$\frac{c-a+b}{c}$	b
$\bar{R}$	$\frac{a+c-b}{c}$	$\frac{2c-a-b}{c}$	$c-b$
Σ	a	$c-a$	c

Teil d)
Aus IQB Pool
2021 (LK)

a

	B	$\overline{B}$	
A	p	$2p$	$3p$
$\overline{A}$	$3p$	$1-6p$	$1-3p$
	$4p$	$1-4p$	1

Für $p=\frac{1}{5}$ gilt $1-6p<0$.

b Für $p\neq 0$ gilt: $P(A)\cdot P(B)=P(A\cap B) \Leftrightarrow 3p\cdot 4p=p \Leftrightarrow 12p=1 \Leftrightarrow p=\frac{1}{12}$

Aufg. 327/823:

a)	B	$\overline{B}$	
A	**0.4**	0.3	0.7
$\overline{A}$	0.2	**0.1**	0.3
	0.6	0.4	**1**

$P(A)\cdot P(B)=\frac{21}{50}$. Wegen $P(A\cap B)=\frac{4}{10}\neq\frac{21}{50}$. Ereignisse A und B abhängig.
$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.4}{0.6}=2/3$.
$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.4}{0.7}=4/7$.

b) (Mit Vierfeldertafel) Bezeichnungen: B:Zollhund bellt; $\overline{B}$: Zollhund bellt nicht; S: Schmuggel;

	B	$\overline{B}$	
S	$0.96\cdot 0.01=0.0096$	$0.01-0.0096=0.0004$	0.01
$\overline{S}$	$0.02\cdot 0.99=0.0198$	$0.99-0.0198=0.9702$	$1-0.01=0.99$
	$1\cdot 0.7929=0.0294$	$0.9702+0.0004=0.9706$	1

i) $P(B)=0.0294$ ii) $P_B(S)=\frac{P(B\cap S)}{P(B)}=\frac{0.0096}{0.0294}\approx 0.327$ iii) $P_{\overline{B}}(S)=\frac{P(\overline{B}\cap S)}{P(\overline{B})}=\frac{0.0004}{0.9706}\approx 0.0004$

c)	D	$\overline{D}$	
N	0.01	0.02	0.03
$\overline{N}$	0.097	0.873	0,97
	0.107	0.893	1

$P(D)\cdot P(N)=0.107\cdot 0.03=0.00321$, $P(D\cap N)=0.01\neq P(D)\cdot P(N)$. Die beiden Defekte treten also nicht unabhängig voneinander auf.

d)	G	$\overline{G}$	
O_g	$100-5=95$	**250**	$250+95=345$
O_b	**5**	$5000-250=4750$	$5+4750=4755$
	100	**5000**	5100

O_g: Oma sagt grün,
O_b: Oma sagt blau
G: Taxi war grün,
$\overline{G}$:Taxi war blau

P('Kommissar hat recht') $P_{O_g}(G)=\frac{P(O_g\cap G)}{P(O_g)}=\frac{95}{345}\approx 27.5\%$

e)	D	$\overline{D}$	
B	2234	**8870**	**11104**
$\overline{B}$	248	2527	2775
	2482	11397	**13879**

$P(B)\cdot P(D)=\frac{11104}{13879}\cdot\frac{2482}{13879}\approx 0.143<0.161\approx\frac{2234}{13879}=P(D\cap B)$. Damit hat D eine bessere Bestehensquote. Die Ereignisse D und B nicht unabhängig.

f) i) Sei $P(A)=p$ und $P(B)=q$, so ist zu zeigen: (I) $P(A\cap\overline{B})=p\cdot(1-q)$ (II) $P(\overline{A}\cap B=(1-p)\cdot q$ (III) $P(\overline{A}\cap\overline{B}=(1-p)\cdot(1-q)$ Aufgrund der Voraussetzung ergeben sich in der Vierfeldertafel unmittelbar die folgenden Einträge:

Die Behauptungen ergeben sich nun über einfache Differenzenbildung und Umformung:

	B	$\overline{B}$	
A	$p\cdot q$	$p-p\cdot q=p\cdot(1-q)$	p
$\overline{A}$	$q-p\cdot q$	$(1-p)-p\cdot(1-q)=(1-p)\cdot(1-q)$	$1-p$
	q	$1-q$	1

ii) Sei A das unmögliche Ereignis und B ein beliebiges Ereignis. Zu zeigen ist $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$. $P(A)=0$; $P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B)=0=P(A)\cdot P(B)$ qed.

Sei A das sichere Ereignis und B ein beliebiges Ereignis. Dann ist $\overline{A}$ das unmögliche Ereignis ($P(\overline{A})=$

$1 - P(A) = 0$, und somit sind A und B stochastisch unabhängig. Analog zur Argumentation in a) folgt die Behauptung.

iii) Es ist $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 0.7$. Da A, B stochastisch unabhängig sind, gilt $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ somit $0.28 = P(A) \cdot 0.7$, woraus man $P(A) = 0.4$ erhält.

iv) Sei $P(A) = p$, $P(B) = q$, dann gilt $p \cdot q = 0.06$ (I) $(1-p) \cdot (1-q) = 0.56$ (II) $\Leftrightarrow p = \frac{0.06}{q}$ in (II) eingesetzt führt zur Gleichung $(1 - \frac{0.06}{q}) \cdot (1-q) = 0.56 \overset{q \neq 0}{\Longleftrightarrow} q^2 - 0 - 5q + 0.06 = 0$ $q_1 = \frac{3}{10} \Rightarrow p_1 = \frac{2}{10}$ (irrelevant) $q_2 = \frac{2}{10} \Rightarrow p_2 = \frac{3}{10}$

g) i) $P_{blau}(U_1) = \frac{P(U_1 \cap blau)}{P(blau)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{10}} = \frac{4}{15}$.

ii) Aus dem Text ist ersichtlich: $P_A(B) = \frac{2}{5}$; $P(B) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{9}{10}\right) = \frac{1}{2} \neq \frac{2}{5}$, somit sind die Ereignisse nicht stochastisch unabhängig.

iii) Sei b die Anzahl der zu ersetzenden blauen Kugeln in Urne III. Es ist $P(B) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{9-b}{10}\right) = \frac{15-b}{30}$. Der Ansatz $P(B) = P_A(B)\frac{2}{5}$ führt auf $\frac{15-b}{30} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow b = 3$. Es müssen also 3 blaue Kugeln in Urne III durch rote Kugeln ersetzt werden.

h)	Vorverkauf	Kasse	
Auto	5400	600	6000
Bus	2600	1400	4000
	8000	2000	10000

i) Anteil der Selbstfahrer bei Abendkassen-Nutzern: $\frac{600}{2000} = 30\%$. Anteil der Selbstfahrer bei Vorverkaufs-Nutzern: $\frac{5400}{8000} = 67.5\%$. Der Anteil der Selbstfahrer ist bei den Vorverkaufs-Nutzern höher.

ii) Von den 4000 Besuchern, die den Bus benutzen, haben 2600 bereits eine Karte. Die Wahrscheinlichkeit beträgt also $\frac{2600}{4000} = 65\%$.

i) Sei A: Gerät wird ausgeliefert, und F: Gerät Ein Gerät wird ausgeliefert, wenn es entweder nach der Herstellung intakt ist (Wahrscheinlichkeit 0.75) oder nach der Herstellung fehlerhaft ist und erfolgreich nachbearbeitet wird (Wahrscheinlichkeit $0.25 \cdot 0.8$). $P_A(N) = \frac{P(A \cap N)}{P(A)} = \frac{0.25 \cdot 0.8}{0.25 \cdot 0.8 + 0.75} \approx 21.1\%$.

j) T: Testergebnis positiv v: Person infiziert $\overline{\text{T}}$: Testergebnis negativ $\overline{\text{v}}$: Person nicht infiziert

	v	$\overline{\text{v}}$	
T	$0{,}001 \cdot 0{,}95 = 0{,}00095$	$0{,}03092 - 0{,}00095 = 0{,}02997$	$1 - 0{,}96908 = 0{,}03092$
$\overline{\text{T}}$	$0{,}001 - 0{,}00095 = 0{,}00005$	$0{,}999 \cdot 0{,}97 = 0{,}96903$	$0{,}00005 + 0{,}96903 = 0{,}96908$
	0,001	0,999	1

$$\text{P(Proband infiziert)} = P_T(v) = \frac{P(v \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}00095}{0{,}03092} \approx 0{,}0307$$

T bedeutet hier: Test war n-mal positiv!

	v	$\overline{\text{v}}$	
T	$\frac{1}{1000} \cdot 0{,}95^n$	$\frac{999}{1000} \cdot (1-0{,}97)^n$	$\frac{1}{1000} \cdot 0{,}95^n + \frac{999}{1000} \cdot (1-0{,}97)^n$
$\overline{\text{T}}$	irrelevant	irrelevant	irrelevant
	$\frac{1}{1000}$	$\frac{999}{1000}$	1

$$\text{P(Proband infiziert)} = P_T(v) = \frac{\frac{1}{1000} \cdot 0{,}95^n}{\frac{1}{1000} \cdot 0{,}95^n + \frac{999}{1000} \cdot (1-0{,}97)^n}$$

Bestimme kleinstes n mit $P_T(v) \geq 0{,}95$

Mit dem WTR erhält man für $n = 2: P_T(v) \approx 0{,}501$

für $n = 3: P_t(v) \approx 0{,}969$

Es müssen also mindestens drei Tests positiv sein.

k) $(P(3) = \underline{1-p})$. ii) Wegen der Unabhängigkeit gilt $P_E(G) = P(G)$ und damit $p^2 = p^3 + (1-p)^2 \Leftrightarrow p^3 - p^2 + (p-1)^2 = p^2(p-1) + (p-1)^2 = (p-1) \cdot (p^2 + p - 1) = 0 \Leftrightarrow p_1 = 1$ oder $p_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618$ oder $p_3 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1.618$ (dies entspricht dem negativen goldenen Schnitt). Damit ist $p_2 \approx 0.618$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Aufg. 328/824: a) Berechnen Sie $P(\mathcal{Y}=1)$, und $P(\mathcal{Y}=2)$, mit Hilfe eines Baumes.
$P(\mathcal{Y}=1)=0.25$, $P(\mathcal{Y}=2)=0.75\cdot 0.25$,

b) $P(\mathcal{Y}=3)=0.75^2\cdot 0.25$, $P(\mathcal{Y}=4)=0.75^3\cdot 0.25$, $P(\mathcal{Y}=k)=0.75^{k-1}\cdot 0.25$, $P(\mathcal{Y}>3)=0.75^3$, $P(\mathcal{Y}>4)=0.75^4$, $P(\mathcal{Y}>k)=0.75^k$. 0.75^{k-1} entspricht den ersten $k-1$ Fehlversuchen; 0.25 dem Erfolg Nr. k.

c) Gegeben sei ein Experiment mit den Ergebnissen 'Erfolg und Misserfolg'. Die Erfolgswahrscheinlichkeit sei p. Bei der Führerscheinaufgabe ist dann $p=\underline{0.25}$. Sei $\mathcal{Y}$ die Anzahl der Versuche bis zum ersten Erfolg, dann ist $P(\mathcal{Y}=k)=\underline{(1-p)^{k-1}\cdot p}$ und $P(\mathcal{Y}>k)=\underline{(1-p)^k}$.

d) $E=1/0.25=4$ oder allgemein $E=1/p$.
Sicher hat er den Führerschein nach ∞ vielen Versuchen (also nie).

e) Berechnen Sie $P(\mathcal{Y}\le k)$ über das Gegenereignis und als Summe $\underline{P(\mathcal{Y}=1)+...+P(\mathcal{Y}=k)}$.

$p=0.25: P(\mathcal{Y}=1)+...+P(\mathcal{Y}=k)=0.25+0.25\cdot 0.75+0.25\cdot 0.75^2+0.25\cdot 0.75^3+0.25\cdot 0.75^4+ ..+0.25\cdot 0.75^{k-1}=0.25(1+0.75+0.75^2+0.75^3+0.75^4+..+0.75^{k-1})=1-0.75^k=1-P(\mathcal{Y}>k)$.
Gegenereignis: $P(\mathcal{Y}\le k)=1-P(\mathcal{Y}>k)$.

e+f) Allgemeines p: $P(\mathcal{Y}=1)+...+P(\mathcal{Y}=k)=p+p\cdot q+p\cdot q^2+p\cdot q^3+p\cdot q^4+..+p\cdot q^{k-1}$ $=p(1+q+q^2+q^3+q^4+..+q^{k-1})=1-q^k \Rightarrow 1+q+q^2+q^3+q^4+..+q^{k-1}=\frac{1-q^k}{1-q}$
mit $p=1-q$ (im Nenner) (Formel für die geometrische Summe).

g) Die Frage ist: Was ist q und was ist k. q entspricht dem zweiten Summenden; k ist die Anzahl der Summanden. i) $q=\frac{1}{2}$, $k=4$; $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{1-(\frac{1}{2})^4}{1-\frac{1}{2}}=1.875$,

ii) $q=\frac{1}{5}$, $k=3$; $1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}=\frac{1-(\frac{1}{5})^3}{1-\frac{1}{5}}=1.24$,

iii) $q=\frac{2}{3}$, $k=5$; $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}=\frac{1-(\frac{2}{3})^5}{1-\frac{2}{3}}\approx 2.98$,

Aufg. 328/825: Es handelt sich um eine geometrische Verteilung mit $p=0.6$ ($q=1-p=0.4$). $\mathcal{Y}$ ist die Anzahl der benötigten Versuche. a) $P(\mathcal{Y}=1)=0.6$, $P(\mathcal{Y}=2)=0.4\cdot 0.6$, $P(\mathcal{Y}=3)=0.4^2\cdot 0.6$, $P(\mathcal{Y}=k)=0.4^{k-1}\cdot 0.6$, $P(\mathcal{Y}>2)=0.4^2$, $P(\mathcal{Y}>k)=0.4^k$, und mit Hilfe des Gegenereignisses ... $P(\mathcal{Y}\le 3)=1-P(\mathcal{Y}>3)=1-0.4^3$, $P(\mathcal{Y}\le k)=1-P(\mathcal{Y}>k)=1-0.4^k$. b) $P(Y\ge 4)=0.4^3=0.064=1-P(Y\le 3)$. c) $P(Y\le 2)=0.6+0.6\cdot 0.4=0.84$ also zwei Mal. d) $E=\frac{1}{0.6}=1.\bar{6}$.

Bemerkung: Der Beweis von $E=\frac{1}{p}$ geht mit Hilfe von Taylorreihen Abs. 8.3.1 und 8.2

Aufg. 328/826: Gesucht ist Beaker (übersetzt Becherglas), eine Muppet-Show-Puppe (siehe Foto der Aufgabe) aus dem Muppetlaboratorium. Er ist der Assistent von Dr. Honigtau Bunsenbrenner. Das einzige, was Beaker sagt ist 'Mimimi'.

Sei q die Misserfolgswahrscheinlichkeit, dann gilt $P(\mathcal{Y}\le k)=1-P(\mathcal{Y}>k)=1-q^k$. Für die entstehenden Ungleichungen verwenden wir die Methode von Knapp: Schreibe '=' statt '<' etc. und interpretiere sinnvoll, siehe Ag 70.

a) $1-\left(\frac{5}{6}\right)^k=0.9 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^k=0.1 \Leftrightarrow k=\frac{\log(0.1)}{\log(\frac{5}{6})}\approx 12.6$ also 13 mal;

b) $1-\left(\frac{1}{2}\right)^k=0.95 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^k=0.05 \Leftrightarrow k=\frac{\log(0.05)}{\log(\frac{1}{2})}\approx 4.3$ also 5 mal;

c) $1-(0.98235)^k=0.5 \Leftrightarrow (0.98235)^k=0.5 \Leftrightarrow k=\frac{\log(0.5)}{\log(0.98235)}\approx 38.93$ also 39 mal;

d) $1-(1-p)^{k_0}=p_0 \Leftrightarrow (1-p)^{k_0}=1-p_0 \Leftrightarrow k_0=\frac{\log(1-p_0)}{\log(1-p)}$, also $k\ge\frac{\log(1-p_0)}{\log(1-p)}$;

Aufg. 328/827: Gesucht ist das Paar Helmut und Loki Schmidt. Helmut Schmidt (1918-2015) war der 5. Bundeskanzler der BRD. Gemeinsam gründeten sie eine Stiftung (Die Pflicht zur Mitmenschlichkeit ist eine Antwort auf die Sinnfrage).

a) Mögliche Würfelergebnisse $(2;1),(6;1),(6;5)$;
b) Lokis Gewinnwahrscheinlichkeit ist $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$.
c) $\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\cdot\frac{5}{9}=0.05 \overset{\cdot 1.8}{\Longleftrightarrow} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}=0.09 \overset{\log .}{\Longleftrightarrow} n-1=\frac{\log(0.09)}{\log(4/9)} \overset{+1}{\Longleftrightarrow} n=\frac{\log(0.09)}{\log(4/9)}+1\approx 3.9694$. Somit müssen mindestens 4 Spiele gespielt werden.
d) Sei p die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der grüne Sektor erscheint. Für die Wahrscheinlichkeit, dass Loki gewinnt, gilt die Gleichung
$p\cdot\frac{5}{9}+(1-p)\cdot\frac{4}{9}=\frac{7}{15} \overset{\cdot 45}{\Longleftrightarrow} 25p+(1-p)\cdot 20=21 \Leftrightarrow 5p+20=21 \Leftrightarrow p=0.2$.
Die Größe des Mittelpunktswinkels des grünen Sektors beträgt also $0.2\cdot 360°=72°$.

Aufg. 329/828:

	k	1	2	3	4	5
a+b)	$P(\mathcal{Y}=k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{5}$

b+c) $P(\mathcal{Y}>1)=\frac{4}{5}$ (erstes Hälmchen ist nicht kurz) $P(\mathcal{Y}>2)=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}$ (erstes und zweites Hälmchen sind nicht kurz), $P(\mathcal{Y}=k)=\frac{1}{5}$; $E(\mathcal{Y})=\frac{1}{5}\cdot(1+2+3+4+5)=3$;

d) $P(\mathcal{Y}>1)=\frac{n-1}{n}$ (erstes Hälmchen ist nicht kurz),

$P(\mathcal{Y}>2)=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}$ (erstes und zweites Hälmchen sind nicht kurz),

$P(\mathcal{Y}>i)=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot..\cdot\frac{n-i}{n-(i-1)}$ (erstes, zwites und .. i-tes Hälmchen sind nicht kurz),

$P(\mathcal{Y}=k)=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot..\cdot\frac{n-k+1}{n-k+2}\cdot\frac{1}{n-k+1}$ (erstes und .. $k-1$-tes Hälmchen sind nicht kurz, es sind noch $n-k$ lange Hälmchen und das Kurze übrig und im k Zug wird das Kurze gezogen), damit ist $P(\mathcal{Y}=k)=\frac{1}{n}$;

$E(\mathcal{Y})=\frac{1}{n}\cdot(1+2+..+n-1+n)=\frac{1}{n}\cdot\frac{n^2+n}{2}=\frac{n+1}{2}$ (Formel 8).

Aufg. 329/829: a) $P(A)=\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}=\frac{5}{18}$, $P(B)=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{8}+\frac{2}{9}\cdot\frac{4}{8}=\frac{2}{9}$;
b) Es gibt 5 Asse, also muss spätestens die sechste Karte ein Ass sein. Damit kann $\mathcal{Y}$ die Werte 1, 2, ... , 6 annehmen. $P(\mathcal{Y}\leq 2)=\frac{4}{9}+\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}=\frac{13}{18}$;

Ja, es war wirklich eine Abiaufgabe! Spätestens 2037 wird es eigene Aufgaben zu meinem Grundschulstoff (lineare Gleichungen/Dreisatz) im Abitur geben.

Aufg. 329/830: a) Sei $\mathcal{X}$ der Betrag, der ausbezahlt wird, dann gilt: $P(\mathcal{X}=2)=P(S,S)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$; $P(\mathcal{X}=0.85)=P(D,D)=\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{4}{36}$; $P(\mathcal{X}=0.2)=P(K,K)=\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{9}{36}$;

$E(\mathcal{X})=\frac{1}{36}\cdot 2+\frac{4}{36}\cdot 0.85+\frac{9}{36}\cdot 0.2+(1-\frac{14}{36})\cdot 0=0.2$; damit ist die Auszahlungserwartung=Einsatz, das Spiel ist also fair.

b) $\frac{1}{36}\cdot 2+\frac{4}{36}\cdot x+\frac{9}{36}\cdot 0.2+(1-\frac{14}{36})\cdot 0=0.15 \Leftrightarrow \frac{3.8}{36}+\frac{4x}{36}=\frac{5.4}{36} \Leftrightarrow 4x=1.6 \Leftrightarrow x=0.4$. Der Auszahlungsbetrag muss 0.4 € sein.

c) $P(\text{Gewinn})=P(S,S)+P(D,D)+P(K,K)=\frac{14}{36}$; Sei $\mathcal{Y}$ die Anzahl der Drehungen bis zum ersten Gewinn, dann ist $P(\mathcal{Y}\leq n)=1-P(\mathcal{Y}>n)=1-(1-\frac{14}{36})^n$. Ansatz (nach Knapp statt '>' schreibe '='): $1-(1-\frac{14}{36})^n=0.98 \Leftrightarrow (\frac{22}{36})^n=0.02 \Leftrightarrow n=\frac{\log(0.02)}{\log(\frac{22}{36})}\approx 7.9$, man also (mind.) 8 Mal drehen.

Aufg. 329/831: a)

$\mu_1=2\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{4}+8\cdot\frac{1}{4}=4$; $\mu_2=2\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{4}+8\cdot\frac{1}{8}+16\cdot\frac{1}{8}=5$; $\mu_3=2\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{4}+8\cdot\frac{1}{8}+16\cdot\frac{1}{16}+32\cdot\frac{1}{16}=6$;

$\mu_n=2\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{4}+8\cdot\frac{1}{8}+...+2^{n+1}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}+2^{n+2}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}=1+1+...+1+2=n+1+2=n+3$; ($n+1$ Summanden 1; ein Summand 2)

$\sigma_1^2=6$; $\sigma_2^2=21$; $\sigma_3^2=58$; $\sigma_4^2=141$; $\sigma_5^2=318$;

b) i) $P(\mathcal{Y}=k)=(1-p)^{k-1}\cdot p$; hier ist p=0.5: $P(\mathcal{Y}=k)=0.5^k$.

ii) ... bei n Würfen $\underline{2^n}$ ... Der zu erwartende Gewinn G ist also

$$\begin{array}{llllllll} G & = P(\mathcal{Y}=0)\cdot 2^0 & +P(\mathcal{Y}=1)\cdot 2^1 & +P(\mathcal{Y}=2)\cdot 2^2 & +.. & +P(\mathcal{Y}=k)\cdot 2^k & +... & \\ & = 0.5^0\cdot 2^0 & +0.5^1\cdot 2^1 & +0.5^2\cdot 2^2 & +.. & +0.5^k\cdot 2^k & +... & \\ & = 1 & +1 & +1 & +\,.. & +1 & +.. & = \infty \end{array}$$

die Summe hat ∞ viele Summanden, damit ist $G=\infty$!

Bemerkung für Studenten: Fälschlicherweise schätzt man oft, dass G=4 ist. Es gilt aber $E(2^{\mathcal{X}}) \neq 2^{E(\mathcal{X})}$, wie man hier sieht.

Aufg. 329/832: (Schaltwerke): i) $P(f)=p\cdot p$,

ii) $P(f)=p^2+2(1-p)\cdot p$ (direkt) $=1-(1-p)^2$ (Gegenereignis) $=2p-p^2$;

iii) $P(f)=1-(1-p)^3$ (Gegenereignis) $=3p-3p^2+p^3$; (siehe auch Additionssatz)

ivd) $P(f)=1-(1-p)(1-p^2)$ $=p+p^2-p^3$;

v) Reihe oben: p^2, Parallelschaltung rechts unten $2p-p^2$, Reihenschaltung unten $(2p-p^2)\cdot p=2p^2-p^3$, Gesamtparallelschaltung: $P(f)=1-(1-(2p-p^2))\cdot(1-(2p^2-p^3))$$=2p+p^2-5p^3+4p^4-p^5$;

Probe: Setze für $p=1$ ein, dann muss 1 rauskommen.

Aufg. 330/833: a) $E(\mathcal{X})=1\cdot\frac{1}{10}+2\cdot\frac{1}{10}+3\cdot\frac{1}{10}+...+10\cdot\frac{1}{10}=5.5$;

$\sigma=\sqrt{(1-5.5)^2\cdot\frac{1}{10}+(2-5.5)^2\cdot\frac{1}{10}+(3-5.5)^2\cdot\frac{1}{10}+...+(10-5.5)^2\cdot\frac{1}{10}}=\sqrt{8.25}\approx 2.9$;

$(MAA=2.5)$; **b)** $P(Z)=\frac{5}{10}$, $P(D)=\frac{3}{10}$, $P(Z\cap D)=\frac{1}{10}$, $P(Z\cup D)=\frac{7}{10}$, $\frac{7}{10}=\frac{5}{10}+\frac{3}{10}-\frac{1}{10}$;

c) $P_Z(D)=\frac{Z\cap D}{P(Z)}=\frac{0.1}{0.5}=0.2$; d) $P(Z\cap D)=0.1<0.15=0.5\cdot 0.3=P(Z)\cdot P(D)$.

Die Ereignisse sind abhängig (sie meiden sich).

e) $n\geq\frac{\log(1-p_0)}{\log(1-p)}\approx 28.4$. Es muss also midestens 29 mal gezogen werden.

15.12.3 LöVo zu Einheit 12.3 (Binomialverteilung UE 10_2)

Aufg. 330/834: Gesucht sind die FSG Mathe Lehrer (A) **Herr Dold**, (B) **simp Schwarz**, (C) **Herr Johrend**, (D) **Frau Eberhard** und (E) **Herr Würz** (im Ruhestand).

a) Perm$(A;B;C)$ $=$ $3!$, (Abb. 520) b) Perm$(A;B;C;D)=4!$, Perm$(A;B;C;D;E)=5!$, c) n Elemente können auf $\underline{n!}$ Weisen angeordnet werden. Jede dieser Anordnungen heißt <u>Permutation</u>.

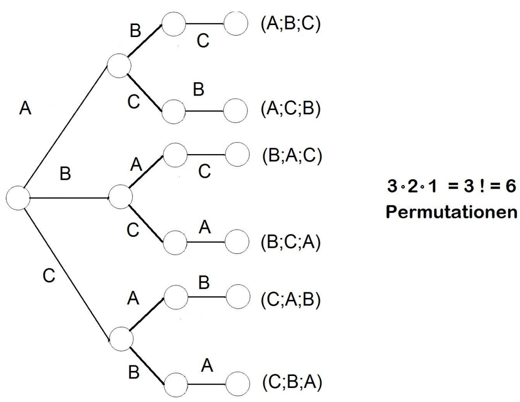


Abb. 520 Baumdiagramm - Permutation

Aufg. 330/835: a) Sven und Lars Bender (*1989) sind Fußballspieler und eineiige Zwillinge.

b) Rückwärts gelesen sind **Tick, Trick und Track** (die Neffen von Donald Duck) gesucht; das 'c' fehlt jeweils.

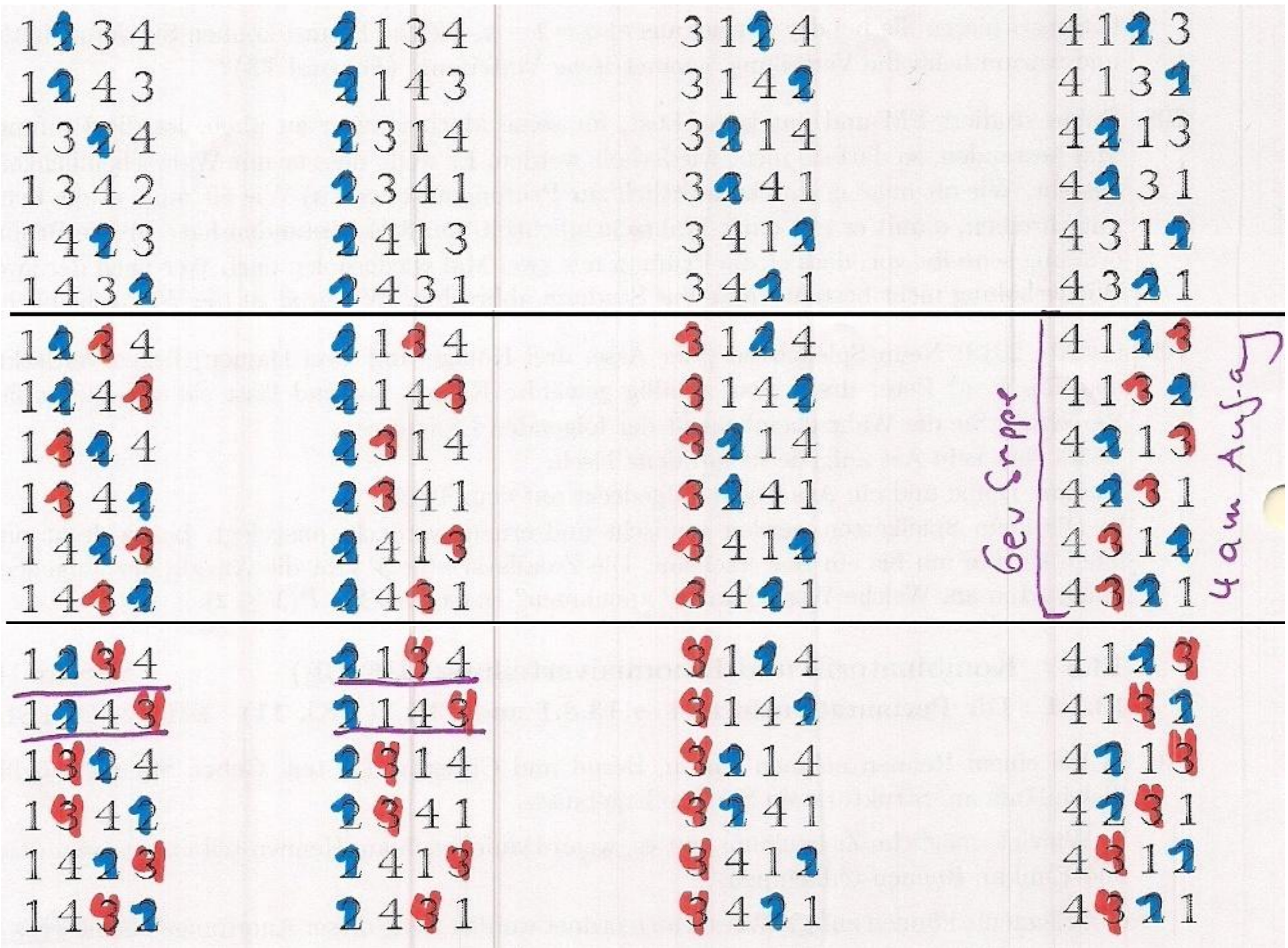


Abb. 521 *Permutationen*

c) Im Schuljahr 2017/2018 unterrichtete ich tatsächlich zwei Zwillingspärchen: Alexandra (M6) und Leonie B. (M1) (die kaum unterscheidbar waren) sowie Alexa (M3) und Simon W. (M6).

Perm(4Elementen) $= 4!$, Perm$(1;1;2;4) = \frac{4!}{2!1!1!}$, Perm$(1;1;1;4) = \frac{4!}{3!1!}$, Perm$(1;1;1;1) = \frac{4!}{4!}$, Perm$(1;1;4;4) = \frac{4!}{2!2!}$,

Jede Permutation kommt <u>genau</u> <u>zwei</u> mal vor (siehe auch Abb. 521;).

Aufg. 331/836:

a) Das Tupel 111233444 kann auf $\frac{(3+1+2+3)!}{3!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 3!} = 50400$ Weisen angeordnet werden.

b) Gegeben ist das Tupel $1,1,..,1,2,2,..,2,3,3,..,3,...,n,n,..,n$, wobei $'1'x_1$ Mal $'2'x_2$ Mal .. $'n'x_n$ Mal auftauchen, dann ist die Anzahl der Permutationen $= \frac{(x_1+x_2+..+x_n)!}{x_1!\cdot x_2!\cdot ..\cdot x_n!}$.

c) das Tupel $\overbrace{\underbrace{1,1,..,1}_{k}\underbrace{2,2,..,2}_{\underline{n-k}}}^{n}$ kann auf $\underline{\frac{n!}{k!(n-k)!}}=:\binom{n}{k}$ Weisen ...

d) $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$, $\binom{3}{0} = 1$, $\binom{3}{1} = 3$, $\binom{3}{2} = 3$, $\binom{3}{3} = 1$;

e) Das Pascalsche Dreieck besteht aus Binomialkoeffizienten. Siehe Abschnitt 2.7.5.

f) $\binom{n}{k}$ steht im <u>Pascalschen</u> <u>Dreieck</u> in Zeile $\underline{n}$ und <u>Spalte</u> k.

h) $(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2$, $(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b^1 + \binom{3}{2}a^1b^2 + \binom{3}{3}b^3$.

g+i)* Binomische Formel (und mehr): $(a+b)^5 = 1\cdot a^5 + 5\cdot a^4b + 10\cdot a^3b^2 + 10\cdot a^2b^3 + 5\cdot ab^4 + 1\cdot b^5$.

Aufg. 331/837: a) (Zeile(n),Spalte(k))+(Zeile(n),Spalte($k+1$))=(Zeile($n+1$),Spalte($k+1$)).

b) $\binom{4}{2}+\binom{4}{3}=\frac{4!}{2!\cdot 2!}+\frac{4!}{3!\cdot 1!}=\frac{4!\cdot 3}{2!\cdot 3\cdot 2!}+\frac{4!\cdot 2}{3!\cdot 1!\cdot 2}=\frac{3\cdot 4!}{3!\cdot 2!}+\frac{2\cdot 4!}{3!\cdot 2!}=\frac{(2+3)\cdot 4!}{3!\cdot 2!}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=\binom{5}{3}$.

$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!}=\frac{n!\cdot(k+1)}{k!\cdot(k+1)\cdot(n-k)!}+\frac{n!\cdot(n-k)}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!\cdot(n-k)}$
$=\frac{(k+1)\cdot n!}{(k+1)!\cdot(n-k)!}+\frac{(n-k)\cdot n!}{(k+1)!\cdot(n-k)!}=\frac{(k+1+n-k)\cdot n!}{(k+1)!\cdot(n-k)!}=\frac{(n+1)!}{(k+1)!\cdot(n-k)!}=\binom{n+1}{k+1}$.

c) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$: $\binom{n}{n-k}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot(n-(n-k))!}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}=\binom{n}{k}$.

Aufg. 331/838: Tipp: <u>Reduzieren</u> Sie zunächst das Problem auf <u>2</u> Kleider und <u>3</u> Hüte. Die Zahlen sind variabel, die Idee bleibt. a) $14\cdot 9\cdot 6=756$; b) $2\cdot 4\cdot 5=40$; c) 3^{11} =177147;

d) Einstellige Zahlen 0,..,9; 10:4=2.5 hier 0,4,8 also 3; zweistellige Zahlen 10,..,99; 90:4=22.5 hier 22; dreistellige Zahlen 100,..,999; 900:4=225; vierstellige Zahlen 1000,..,9999; 9000:4=2250;

e) $20\cdot 19\cdot 18=6840$; f) 5!= 120; g) $4\cdot 4=4^2=16$; $n\cdot n\cdot\ldots\cdot n=n^k$; h) $4\cdot 3=\frac{4!}{2!}=12$; $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$; i) 16 Ururgroßeltern 2^4 =256 insgesamt.

j) 6-6-6 $\lightning$ (Quersumme überschritten; damit ist $h=6$ nicht möglich), 5-5-5 $\lightning$ (Quersumme überschritten; damit ist $h=5$ nicht möglich), 4-4-4, 3-3-6, 3-4-5, 2-4-6, 2-5-5, 1-5-6.

erste Ziffer 1: 1-1-x, x hat 6 Möglichkeiten; 1-2-x, x hat 5 Möglichkeiten; usw. $\Rightarrow$ erste Ziffer 1 hat 6+5+4+3+2+1=21 Möglichkeiten; erste Ziffer 2 hat 5+4+3+2+1=15 Möglichkeiten; erste Ziffer 3 hat 4+3+2+1=10 Möglichkeiten; usw. $\Rightarrow$ 21+15+10+6+3+1=56 Möglichkeiten.

Aufg. 332/839: a) Wir ziehen Lotto <u>2</u> aus <u>5</u>. **i)** GGNNN=1,2; **ii)** NGNGN=2,4; **iii)** NNGNG=3,5. Jede Permutation von GGNNN erzeugt genau <u>eine</u> <u>Ziehung</u> von diesem Lotto. Sei κ die Anzahl der gesuchten Ergebnisse, dann gilt $\kappa=\frac{5!}{2!\cdot 3!}$.

b) i) Tupel: GGGNNNN (G=gezogen, N=nicht gezogen) $\kappa=\frac{7!}{3!\cdot 4!}=\binom{7}{3}$

ii) Tupel: GGGGGNNNNNNNNNN $\kappa=\frac{15!}{5!\cdot 10!}=\binom{15}{5}$

iii) Tupel: k Mal G und $n-k$ Mal N $\kappa=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=\binom{n}{k}$ iv) $\kappa=\binom{49}{6}$ =13983816;

c) $\binom{8}{5}=56$ & $\binom{8}{5}+\binom{8}{6}+\binom{8}{7}+\binom{8}{8}$ =93; **d)** $\binom{6}{3}\cdot\binom{8}{4}=20\cdot 70$=1400;

e) $\frac{11!}{4!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 2!}=69300$; **f)** $\frac{14!}{5!\cdot 3!\cdot 4!\cdot 2!}=2522520$; **g)** $\frac{12!}{4!}=19958400$; Tupel: 12345678FFFF;

h) $\frac{9!}{4!\cdot 3!\cdot 2!}=1260$; Tupel: 444433322; **i)** $\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!}$ =180; **j)** $\frac{12!}{4!\cdot 4!\cdot 4!}$ =34650; Tupel: 111122223333;

i) Perm(MISSISSIPI)=Perm(IIIIMPPSSSS)=$\frac{11!}{4!\cdot 1!\cdot 4!\cdot 2!\cdot 4!}$, Perm(STUTTGART) = Perm(AGRSTTTTU)=$\frac{9!}{4!}$, Perm(ABRAKADABRA)=Perm(AAAAABBDKRR)=$\frac{11!}{5!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 2!}$.

k) $\binom{10}{5}$ =252 & $\frac{10!}{5!}$ =30240;

L) Markieren Sie jede Kugel mit 'g' gezogen und 'n' nicht gezogen. dann müssen k mal gezogen und $n-k$ mal nicht gezogen permutiert werden. Damit gibt es $\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=\binom{n}{k}$ Permutationen.

m) Die Idee ist es, die beiden Einsen als eine Doppeleins D zu betrachten:
11222 $\to D222$ also $\frac{4!}{1!\cdot 3!}=4$ Permutationen;
1122222 $\to D22222$ also $\frac{6!}{1!\cdot 5!}=6$ Permutationen;
1122233 $\to D22233$ also $\frac{6!}{1!\cdot 3!\cdot 2!}=60$ Permutationen;

n) Nach Dartsregeln soll es es 71 mögliche 9-Darter geben; dabei werden die Ergebnisse zu Dreiergruppen zusammengefasst. Dies wird hier aber nicht behandelt.

1)	T20	T20	T20	T20	T20	T20	T20	T19	D12	$\frac{8!}{7!1!}=8$ Permutationen;
2)	T20	T20	T20	T20	T20	T19	T19	T19	D15	$\frac{8!}{5!3!}=56$ Permutationen;

3)	T20	T20	T20	T20	T20	T20	T19	T18	D15	$\frac{8!}{6!1!1!} = 56$ Permutationen;
4)	T20	T20	T20	T20	T20	T20	T20	T17	D15	$\frac{8!}{7!1!} = 8$ Permutationen;
5)	T20	T20	T20	T19	T19	T19	T19	T19	D18	$\frac{8!}{3!5!} = 56$ Permutationen;
6)	T20	T20	T20	T20	T19	T19	T19	T18	D18	$\frac{8!}{4!3!1!} = 280$ Permutationen;
7)	T20	T20	T20	T20	T20	T19	T18	T18	D18	$\frac{8!}{5!2!1!} = 168$ Permutationen;
8)	T20	T20	T20	T20	T20	T19	T19	T17	D18	$\frac{8!}{5!2!1!} = 168$ Permutationen;
9)	T20	T20	T20	T20	T20	T20	T18	T17	D18	$\frac{8!}{6!1!1!} = 56$ Permutationen;
10)	T20	T20	T20	T20	T20	T20	T19	T16	D18	$\frac{8!}{6!1!1!} = 56$ Permutationen;
11)	T20	T20	T20	T20	T20	T20	T20	T15	D18	$\frac{8!}{7!1!} = 8$ Permutationen;
12)	T20	T20	T20	T20	T20	T20	T19	D17	Bull	$2 \cdot \frac{8!}{6!1!1!} = 112$ Permutationen;
13)	T20	T20	T20	T20	T20	T20	T17	D20	Bull	$2 \cdot \frac{8!}{6!1!1!} = 112$ Permutationen;
14)	T20	T20	T20	T20	T20	T19	T18	D20	Bull	$2 \cdot \frac{8!}{5!1!1!1!} = 672$ Permutationen;
15)	T20	T20	T20	T20	T19	T19	T19	D20	Bull	$2 \cdot \frac{8!}{4!3!1!} = 560$ Permutationen;
16)	T20	T20	T20	T19	T19	T19	Bull	Bull	Bull	$\frac{8!}{3!3!2!} = 560$ Permutationen;
17)	T20	T20	T20	T20	T19	T18	Bull	Bull	Bull	$\frac{8!}{4!1!1!2!} = 840$ Permutationen;
18)	T20	T20	T20	T20	T20	T17	Bull	Bull	Bull	$\frac{8!}{5!1!2!} = 168$ Permutationen;

Insgesamt gibt es $3944 = 70 \cdot 56 + 3 \cdot 8$ Permutationen. Von diesen enden 2206 auf Bull, 672 auf D20, 782 auf D18, 56 auf D17, 176 auf D15, und 8 auf D12.

Erklärung zur Zwillingsaufgabe im Cartoon 375/66 Auf der Tafel steht Hein Severloh [1923-2006], der ein Veteran aus dem zweiten Weltkrieg war.

Aufg. 332/840: a) Nehmen wir an, die 2 ist doppelt (was nicht von vorne herein klar ist). Dann sieht eine mögliche Kombination so 22357 aus. Es gibt $\frac{5!}{2!1!1!1!} = 60$ Kombinationen. Es gibt nun 4 Möglichkeiten die doppelte Zahl zu belegen. Damit gibt es 240 Möglichkeiten der beschriebenen Art. Benötigte Zeit: $240 \cdot 5s = 1200\text{s} = 20\text{min}$. 15 min reichen nicht sicher.

b) i) Sei 1 = Farbe_1 und 2 = Farbe_2. Folgende Kombinationen sind möglich: 111111111111111112, 11111111111111122, 11111111111111222, ..., 122222222222222; insgesamt 14 Möglichkeiten. Weiterhin gibt es $\binom{3}{2} = 3$ Möglichkeiten 2 aus 3 Farben auszuwählen. Damit gibt es $\binom{3}{2} \cdot 14 = 42$ Möglichkeiten.

ii) Folgende Kombinationen sind möglich: $4 \cdot \text{Farbe}_1$, $5 \cdot \text{Farbe}_2$ und $6 \cdot \text{Farbe}_3$; dies ergibt $3! = 6$ Permutationen und $5 \cdot \text{Farbe}_1$, $5 \cdot \text{Farbe}_2$ und $5 \cdot \text{Farbe}_3$; dies geht nur auf eine Weise. Daher gibt es 7 Möglichkeiten.

c) i) Mutter und Tochter werden als eine Person gesehen. Damit gibt es 6! Möglichkeiten die Familie anzuordnen. Jetzt kann die Tochter links oder rechts von der Mutter sitzen. Damit gibt es insgesamt $2 \cdot 6! = 1440$ Möglichkeiten.

ii) Tupel: SSSHHVV $\frac{7!}{3!2!2!}$ Möglichkeiten.

iii) 1. Fall: Vater + Mutter sind H, dann gibt es $\frac{5!}{3!2!} = \binom{5}{3}$ Möglichkeiten. 2. Fall: Vater + Mutter sind H analog; 3. Fall: Vater + Mutter sind auf dem Sofa: V+M daneben 5 Möglichkeiten. Die restlichen 4 verteilen sich auf das Tupel HHVV: Insgesamt $5 \cdot \binom{4}{2}$ Möglichkeiten.

Insgesamt sind es also $2 \cdot \binom{5}{3} + 5 \cdot \binom{4}{2} = 50$ Möglichkeiten.

Aufg. 333/841: a) n^k, 6, 10 $\quad$ a_1): (11, 12, 13, 22, 23, 33), 6 Stück;

a_2): (111, 112, 113, 122, 123, 133, 222, 223, 233, 333), 10 Stück;

b_1): 2 Kugeln 4 Kästchen (11, 12, 13, 14, 22, 23, 24, 33, 34, 44), 10 Stück;

b_2): 2 Kugeln 5 Kästchen (11, 12, 13, 14, 15, 22, 23, 24, 25, 33, 34, 35, 44, 45, 55), 15 Stück;

b_3): 3 Kugel 4 Kästchen (111, 112, 113, 114, 122, 123, 124, 133, 134, 144, 222, 223, 224, 233, 234, 244, 333, 334, 344, 444), 20 Stk.

b$_4$): 3 Kugel 5 Kästchen (111, 112, 113, 114, 115, 122, 123, 124, 125, 133, 134, 135, 144, 145, 155, 222, 223, 224, 225, 233, 234, 235, 244, 245, 255, 333, 334, 335, 344, 345, 355, 444, 445, 455, 555), 35 Stk.

Aufg. 333/842: a) 111 = ooo|||, 112 = oo|o||, 123 = o|o|o|, 222 = |ooo||, 334 = ||oo|o, 124 = o|o||o, 444 = |||ooo;
b) der | ist eine Fachgrenze, ein o ist eine Kugel; c) Jede Kodierung erzeugt <u>genau</u> <u>ein</u> Ergebnis.

d) $\frac{6!}{3!\cdot 3!}$; e) ooooo|| kann auf $\frac{7!}{5!\cdot 2!}$ Arten permutiert werden; oooooo||| auf $\frac{9!}{6!\cdot 3!}$ Arten; $\frac{(a+b-1)!}{a!\cdot(b-1)!}$

f) Mögliche Ergebnisse: 111, 112, ... also 10 vgl. Ag 841a).

Beispielkombinationen (Codierung): **i)** 111 ($ooo||$), 123 ($o|o|o$), 223 ($|oo|o$), $\kappa = \frac{5!}{3!\cdot 2!}$;

ii) 11 ($oo||||$), 34 ($||o|o|$), 25 ($|o|||o$), $\kappa = \frac{6!}{2!\cdot 4!}$;

iii) 1111 ($oooo||$), 1233 ($o|o|oo$), 2233 ($|oo|oo$), $\kappa = \frac{6!}{4!\cdot 2!}$;

iv) k mal o und $n-1$ mal |), $\kappa = \frac{(k+n-1)!}{k!\cdot(n-1)!}$;

g) Fach $\to$ Kugel; Kugel $\to$ Zug;

Aufg. 333/843: a+b) mZ mBdA: n^k (Baum n Zweige, k Verzweigungen);
oZ mBdA: $\frac{n!}{(n-k)!}$ (Baum mit fallender Zweigeanzahl, k Verzweigungen, die letzte Verzweigung hat $n-k+1$ Verzweigungen oder alle Permutationen des Tupel $(1, 2, .., k, N, ..., N;)$ mit $n-k$ mal N);
oZ oBdA: $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ (Tupel - Ziehung der Lottozahlen);
mZ oBdA: $\frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$ (Codierung / Galtonbrett);

c) Man kann aus 20 Personen auf $\binom{20}{4} = \frac{20!}{4!\cdot 16!}$ Arten einen Ausschuss von 4 P. bilden, wenn man genau 4 P. das Attribut 'gewählt' und genau 16 P. 'nicht gewählt' zuteilt. Das zugehörige Tupel ist (G,G,G,G, N,N,N,N, N,N,N,N, N,N,N,N, N,N,N,N).

Aufg. 333/844: κ ist die Anzahl der gesuchten Kombinationen; a) $\kappa = 11^9$;

b) $\kappa = 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2 = \frac{11!}{1!}$; c) $\kappa = 11^9$;

d) die erste Ziffer ist beliebig, x_2 muss $\neq x_1$ sein, x_3 muss $\neq x_2$ sein usw. $\kappa = 11\cdot 10^9$;

e) Die Anzahl der Permutationen von $ggguuuuuuu$ ist $\frac{10!}{3!\cdot 7!} = \binom{10}{3}$. Für das erste g gibt es 6 Möglichkeiten, für das zweite g 5, für das dritte g nur noch vier; bei jedem u gibt es 5 Möglichkeiten. $\kappa = \binom{10}{3}\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 5^7$;

f) v bedeutet durch 4 teilbare Zahl (also 0,4,8), x eine nicht durch 4 teilbare Zahl (also 1,2,3,5,6,7,9,a). Die Anzahl der Permutationen von $vvxxxxxxxx$ ist $\frac{10!}{2!\cdot 8!} = \binom{10}{2}$. Sei $\mathcal{X}$ die Anzahl der v, dann ist $\kappa(\mathcal{X}=2) = \binom{10}{2}\cdot 3^2\cdot 8^8$; $\kappa(\mathcal{X}\leq 2) = \binom{10}{2}\cdot 3^2\cdot 8^8 + \binom{10}{1}\cdot 3^1\cdot 8^9 + \binom{10}{0}\cdot 3^0\cdot 8^{10}$;

g) $gguuuuuuuu$ kann auf $\frac{10!}{2!\cdot 8!} = 45$ Weisen permutiert werden. Wir suchen nach 'Nichtpärchen':
$gguuuuuuuu$ (no), $guguuuuuuu$ (ja), ... $guuuuuuuug$ (ja),
$ugguuuuuuu$ (no), $uguguuuuuu$ (ja), ... $uguuuuuuug$ (ja),
$uugguuuuuu$ (no), $uuguguuuuu$ (ja), ... $uuguuuuuug$ (ja), usw.
Es gibt also 9 Permutationen mit einem gg Pärchen, also $36 = 45 - 9$ ohne Pärchen. Damit ist $\kappa = 36\cdot 6^2\cdot 5^8$. h) siehe Abb. 522

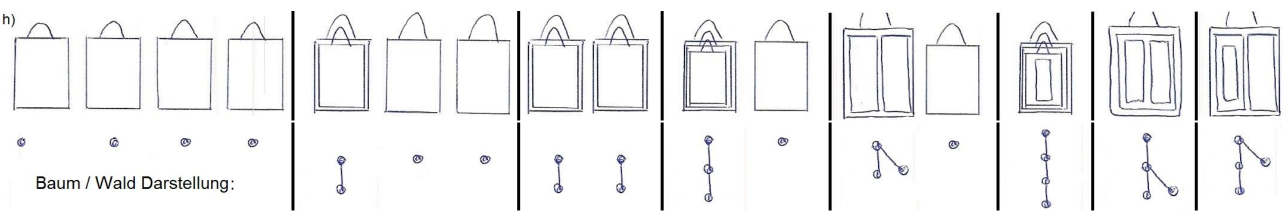


Abb. 522 ein Versackungsproblem

Aufg. 334/845: $P(\bar{T}\bar{T}) = 0.4 \cdot 0.7 = 0.28$;

b) $P(\mathcal{X}=0) = P(\bar{W}\bar{W}\bar{W}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$;
$P(\mathcal{X}=1) = P(W\bar{W}\bar{W}) + P(\bar{W}W\bar{W}) + P(\bar{W}\bar{W}W) = 3 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{10}$;
$P(\mathcal{X}=2) = P(WW\bar{W}) + P(W\bar{W}W) + P(\bar{W}WW) = 3 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1} = \frac{3}{10}$;
$P(\mathcal{X}=3) = P(WWW) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{0}{3} = 0$; $E(\mathcal{X}) = 0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.3 + 0 \cdot 3 = 1.2$;

c) Gesucht ist Han Solo und sein Raumschiff Millennium Falke, der allgemein als Schrottmühle gilt.

Sei $\mathcal{X}$ die Anzahl der ausgefallenen Triebwerke. $P(\mathcal{X}=3) = 0.01 \cdot 0.02 \cdot 0.03 = 0.000006$;
$P(\mathcal{X}=2) = 0.01 \cdot 0.02 \cdot 0.97 + 0.01 \cdot 0.98 \cdot 0.03 + 0.99 \cdot 0.02 \cdot 0.03 = 0.001082$;
$P(\mathcal{X} \geq 2) = 0.001082 + 0.000006 = 0.001088$;

d) $P(B) = P(A) \cdot P_A(B) + P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(B) = p \cdot 0.6 + (1-p) \cdot 0.2 = 0.4p + 0.2$.

i) $0.3 = 0.4p + 0.2 \Leftrightarrow p = 0.25$;

ii) $P(B)$ ist maximal, wenn $p = 1$ (Randmaximum) $P(B) = 0.4 \cdot 1 + 0.2 = 0.6$.

e) Urne A: $P_A(R) = 0.5$; Sei jetzt der Index das, was in Urne A gezogen wurde.

Urne B: $P_R(R) = 0.5$, $P_B(R) = 0.25$;

$P(R) = P_A(R) \cdot P_R(R) + P_A(B) \cdot P_B(R) = 0.5 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 0.25 = 0.375$

f) $P(4) = (1-p)^2$; $P(10) = 2 \cdot p \cdot (1-p)$; $P(25) = p^2$;

$E(\mathcal{X}) = 4 \cdot (1-p)^2 + 10 \cdot 2 \cdot p \cdot (1-p) + 25 \cdot p^2 = 9p^2 + 12p + 4$;

$9p^2 + 12p + 4 = 16 \Leftrightarrow p_1 = \frac{2}{3}$ oder $p_2 = -2$. Da $0 \leq p \leq 1$ gelten muss, ist $p = \frac{2}{3}$.

g) $P(\mathcal{X}=0) = P(WWWW) + P(ZZZZ) = 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$;
$P(\mathcal{X}=1) = P(WWWZ) + P(WWZZ) + P(WZZZ) + P(ZZZW) + P(ZZWW) + P(ZWWW) = 6 \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{8}$;
$P(\mathcal{X}=2) = P(WWZW) + P(WZWW) + P(WZZW) + P(ZWWZ) + P(ZZWZ) + P(ZWZZ) = 6 \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{8}$; $P(\mathcal{X}=3) = P(WZWZ) + P(ZWZW) = 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$; $E(\mathcal{X}) = \frac{3+6+3}{8} = \frac{3}{2}$;

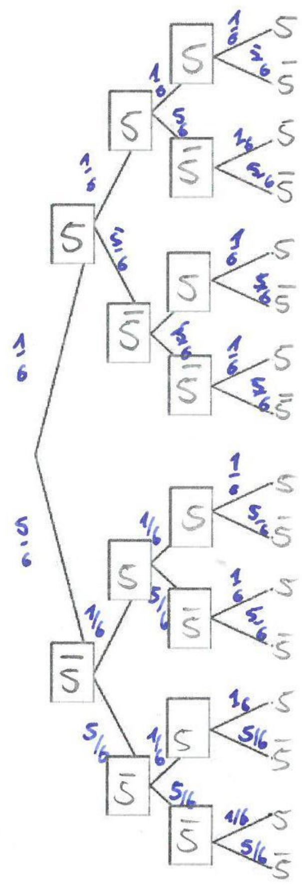
Aufg. 334/846: a) $P(\mathcal{X}=0) = P(ZZZ) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$;
$P(\mathcal{X}=1) = P(WZZ) + P(ZWZ) + P(ZZW) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$;
$P(\mathcal{X}=2) = P(WWZ) + P(WZW) + P(ZWW) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$;
$P(\mathcal{X}=3) = P(WWW) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$;

b) $P(\mathcal{X} \leq 1) = P(\mathcal{X}=0) + P(\mathcal{X}=1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$; $E(\mathcal{X}) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1.5$;

c) $P(\mathcal{X}=0) = P(ZZZ) = 0.4^3 = 0.064$;
$P(\mathcal{X}=1) = P(WZZ) + P(ZWZ) + P(ZZW) = 3 \cdot 0.4^2 \cdot 0.6 = 0.288$;
$P(\mathcal{X}=2) = P(WWZ) + P(WZW) + P(ZWW) = 3 \cdot 0.4 \cdot 0.6^2 = 0.432$;
$P(\mathcal{X}=3) = P(WWW) = 0.6^3 = 0.216$;

Aufg. 335/847: $P(A \text{ gewinnt}) = P(AA) + P(BAA) + P(ABA) = 0.6^2 + 0.4 \cdot 0.6^2 + 0.6 \cdot 0.4 \cdot 0.6 = 0.648$;
$P(B \text{ gewinnt}) = P(BB) + P(ABB) + P(BAB) = 0.4^2 + 0.6 \cdot 0.4^2 + 0.4 \cdot 0.6 \cdot 0.4 = 1 - 0.648 = 0.352$;
$P(\mathcal{X}=2) = P(AA) + P(BB) = 0.6^2 + 0.4^2 = 0.52$, $P(\mathcal{X}=3) = 1 - P(\mathcal{X}=2) = 0.48$.

Binomialverteilung: Bei den folgenden Aufgaben werden die Taschenrechnerbefehle
$P(\mathcal{X}=k) = \mathit{binompdf}(n,p,k)$ und $P(\mathcal{X} \leq k) = \mathit{binomcdf}(n,p,k)$ mitverwendet. Diese erleichtern die Darstellung der Rechnung, sind aber oft (Abitur) als Lösung nicht zugelassen.



Erg	P	$\mathcal{X}$ → wie viele 5er es gibt
5555	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$	4
$555\bar{5}$	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}$	3
$55\bar{5}5$	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$	3
$55\bar{5}\bar{5}$	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}$	2
$5\bar{5}55$	$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$	3
$5\bar{5}5\bar{5}$	$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{2}$	2
$5\bar{5}\bar{5}5$	$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$	2
$5\bar{5}\bar{5}\bar{5}$	$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}$	1
$\bar{5}555$	$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$	3
$\bar{5}55\bar{5}$	$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}$	2
$\bar{5}5\bar{5}5$	$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$	2
$\bar{5}5\bar{5}\bar{5}$	$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}$	1
$\bar{5}\bar{5}55$	$\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$	2
$\bar{5}\bar{5}5\bar{5}$	$\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$	1
$\bar{5}\bar{5}\bar{5}5$	$\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$	1
$\bar{5}\bar{5}\bar{5}\bar{5}$	$\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}$	0

Abb. 523 Einführung in die Binomialverteilung

Aufg. 335/848: a) Siehe Abbildung 523. Bei jedem Pfad mit k Fünfen ist die Wk gleich.

$P(\mathcal{X}=k)$ = Wk von einem Pfad · Anzahl der Pfade. b) Alle Summanden von $P(\mathcal{X}=1)$ sind gleich. (Kommutativgesetz). c) $P(\mathcal{X}=3)=P(555\bar{5})+P(55\bar{5}5)+P(5\bar{5}55)+P(\bar{5}555)$;

d) $4=\frac{4!}{2!\cdot 2!}$; 4 ist die Anzahl der Permutationen von $555\bar{5}$ e) $P(\mathcal{X}=k)=\frac{4!}{k!\cdot(4-k)!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^k\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$;

Sei $\mathcal{X}$ die Anzahl der Fünfen; i) $P(\mathcal{X}=2)=\frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3$,

ii) $P(\mathcal{X}=3)=\frac{6!}{3!\cdot 3!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3$, iii) $P(\mathcal{X}=4)=\frac{10!}{4!\cdot 6!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^6$,

iv) $P(\mathcal{X}=k)=\frac{10!}{k!\cdot(10-k)!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^k\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}$, v) $P(\mathcal{X}=k)=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^k\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$;

Aufg. 335/849: a) Ein Experiment mit den Ergebnissen Erfolg und Misserfolg mit der (gleichbleibenden) Erfolgswahrscheinlichkeit p heißt Bernoulli- Experiment.

b) In Aufgabe 848 ist Erfolg =Werfen einer '5' und $p=\frac{1}{6}$. c) Die n-fache Durchführung eines Bernoulliexperimentes heißt Bernoullikette der Länge n. E= Erfolg, $\bar{E}$= Misserfolg;

$$\begin{aligned} \text{d) } P(\mathcal{X}=k) &= \underline{\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}} \cdot \underline{p^k} \cdot \underline{(1-p)^{n-k}} \\ &= \text{Anz Perm von } k \text{ mal } E \text{ und } (n-k)*\bar{E} \cdot \text{Wk von } k*E \cdot \text{Wk von } (n-k)*\bar{E} \\ &= \underline{\text{Anzahl der Pfade}} \cdot \underline{P(\text{eines Pfades})} \end{aligned}$$

e) Die Wk bei 10 Würfen mit einem idealen Würfel genau 3 mal eine '6' zu würfeln ist:
$P(\mathcal{X}=3)=\frac{10!}{3!\cdot(10-3)!}\cdot(\frac{1}{6})^3\cdot(1-\frac{1}{6})^{10-3}=120\cdot\frac{1}{216}\cdot\frac{5^7}{6^7}=binompdf(10,\frac{1}{6},3)\approx 0.155.$

Aufg. 336/850: **a)** Es handelt sich um eine Bernoullikette (sogar wenn der Würfel nicht ideal ist (Achtung: Evtl. hat die Kette dann ein anderes p); er sollte nur beim Werfen seine Wahrscheinlichkeiten

nicht ändern); $n = 20$, $p = \frac{3}{6}$. **b)** Die Aussage 'aus der laufenden Produktion' sorgt dafür, dass der Eindruck entsteht als ob es ein Ziehen mit Zurücklegen ist. Deshalb gehen wir von einer Bernoullikette der Länge 70 mit $p = 0.07$ aus. **c)** Eindeutig ein Ziehen ohne Zurücklegen mit sich ändernder Wahrscheinlichkeit für 'Brillenträger' und damit keine Bernoullikette. **d)** Bernoullikette mit $n = 15$ und $p = \frac{1}{3}$.
e) Keine Bernoullikette, da sich die Wk für S ändert.

Aufg. 336/851:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(\mathcal{X}=k)$	'0'	0.001	0.044	0.1172	0.2051	0.2461	0.2051	0.1172	0.044	0.001	'0'

Zeigen Sie: $P_{n,1/2}(\mathcal{X}=k) = \underline{P_{n,1/2}(\mathcal{X}=n-k)}$.

$P_{n,1/2}(\mathcal{X}=n-k) = \binom{n}{n-k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = P_{n,1/2}(\mathcal{X}=k)$.

Beachten Sie $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ (Symmetrie des Pascalschen Dreiecks).

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_{10,0.4}(\mathcal{X}=k)$	0.006	0.04	0.121	0.215	0.251	0.201	0.111	0.042	0.011	0.002	'0'

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_{10,0.6}(\mathcal{X}=k)$	'0'	0.002	0.011	0.042	0.111	0.201	0.251	0.215	0.121	0.04	0.006

Zeigen Sie: $P_{n,1-p}(\mathcal{X}=n-k) = \underline{P_{n,p}(\mathcal{X}=k)}$. Beachten Sie wieder $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

$P_{n,1-p}(\mathcal{X}=n-k) = \binom{n}{n-k}\cdot(1-p)^{n-k}\cdot(p)^{n-(n-k)} = \binom{n}{k}\cdot(p)^{k}\cdot(1-p)^{n-k}$.

c) i) $\mathcal{X}\sim B_{10,0}$; $P(\mathcal{X}=0) = \binom{10}{0}\cdot 0^0\cdot 1^{10-0}$ jetzt ist 0^0 nicht definiert, wenn wir aber den erzeugten Baum betrachten, so hat dort nur der Pfad (0,0,0,0,0,0,0,0,0,0) eine positive Wahrscheinlichkeit, nämlich 1. Also: $P(\mathcal{X}=0)=1$, $P(\mathcal{X}\neq 0)=0$. Dies gilt auch für beliebige $B_{n,0}$ Verteilungen für alle n der Form $0 < n \in \mathbb{N}$.

ii) $\mathcal{X}\sim B_{10,1}; P(\mathcal{X}=10) = \binom{10}{10}\cdot 1^{10}\cdot(1-1)^{10-10}$. Analog zum Fall 1 ist $P(\mathcal{X}=10)=1$.
Für beliebige $B_{n,1}$ Verteilungen (mit $0 < n\in\mathbb{N}$) gilt $P(\mathcal{X}=n)=1$, $P(\mathcal{X}\neq n)=0$.

d) $\mathcal{X}\sim B_{9,0.6}; P(\mathcal{X}=6) = \binom{9}{6}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^6\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{3^6\cdot2^3}{5^9} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot3^5\cdot2^2}{5^9} \approx 0.25082$.

$\mathcal{X}\sim B_{9,0.6}; P(\mathcal{X}=5) = \binom{9}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^5\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{3^5\cdot2^4}{5^9} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot3^5\cdot2^2}{5^9} \approx 0.25082$.

$\mathcal{X}\sim B_{10,0.6}; P(\mathcal{X}=6) = \binom{10}{6}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^6\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{3^6\cdot2^4}{5^{10}} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot3^5\cdot2^2}{5^9} \approx 0.25082$:

iv) $P(\mathcal{X}=k) = \binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k} \stackrel{!}{=} \binom{n}{k+1}\cdot p^{k+1}\cdot(1-p)^{n-(k+1)} = P(\mathcal{X}=k+1)$.

$\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k} = \frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!}\cdot p^{k+1}\cdot(1-p)^{n-(k+1)} \xLeftrightarrow{\cdot k!\cdot(n-k-1)!:n!:p^k:(1-p)^{n-k-1}}$
$\frac{1}{n-k}\cdot(1-p) = \frac{1}{k+1}\cdot p \xLeftrightarrow{\cdot(n-k)\cdot(k+1)} (k+1)\cdot(1-p) = (n-k)\cdot p \Leftrightarrow k+1-kp-p = np-kp \xLeftrightarrow{+kp+p}$
$k+1 = np+p = p(n+1) \xLeftrightarrow{:(n+1)} p = \frac{k+1}{n+1}$.

Für $n = 9$ und $k = 5$ erhalten wir $p = 0.6$ wie in der Aufgabe gefordert.

v) Ansatz: $P_n(\mathcal{X}=k) = P_n(\mathcal{X}=k+1) = P_{n+1}(\mathcal{X}=k+1)$:

$P_{n+1}(\mathcal{X}=k+1) = \binom{n+1}{k+1}\cdot p^{k+1}\cdot(1-p)^{n+1-(k+1)} \stackrel{!}{=} \binom{n}{k+1}\cdot p^{k+1}\cdot(1-p)^{n-(k+1)} = P_n(\mathcal{X}=k+1)$

$\frac{(n+1)!}{(k+1)!\cdot((n+1)-(k+1))!}\cdot p^{k+1}\cdot(1-p)^{(n+1)-(k+1)} = \frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!}\cdot p^{k+1}\cdot(1-p)^{n-(k+1)} \xLeftrightarrow{\cdot(k+1)!:n!:p^{k+1}}$

$\frac{n+1}{(n-k)!}\cdot(1-p)^{n-k} = \frac{1}{(n-k-1)!}\cdot(1-p)^{n-k-1} \xLeftrightarrow{\cdot(n-k-1)!:(1-p)^{n-k-1}} \frac{n+1}{n-k}\cdot(1-p) = 1 \xLeftrightarrow{\cdot\frac{n-k}{n+1}} 1-p = \frac{n-k}{n+1}$
$\xLeftrightarrow{+p-\frac{n-k}{n+1}} p = 1-\frac{n-k}{n+1} = \frac{n+1}{n+1}-\frac{n-k}{n+1} = \frac{n+1-n+k}{n+1} = \frac{k+1}{n+1}$.

Wenn also $P_n(\mathcal{X}=k)=P_n(\mathcal{X}=k+1)$ ist, dann ist auch $P_{n+1}(\mathcal{X}=k+1)=P_n(\mathcal{X}=k)$.

e) $\mathcal{X}\sim B_{5,0.5}$; *i)* $P(\mathcal{X}=2.5)=0$, $a\notin\mathbb{N}_0\Rightarrow P(\mathcal{X}=a)=0$;
ii) $P(\mathcal{X}=-1)=0$, $a<0\Rightarrow P(\mathcal{X}=a)=0$; iii) $P(\mathcal{X}=6)$, $a>n\Rightarrow P_n(\mathcal{X}=a)=0$;

Aufg. 336/852: Helmut Rellergerd (Pseudonym Jason Dark) erfand die Figur des Geisterjägers **John Sinclair** der in einer Hörspielreihe Dämonen bekämpft. Der Würfel des Unheils kommt in mehreren Episoden vor; eine Episode ist sogar nach ihm benannt.

Erfolg: 'rot' gewürfelt; $\mathcal{X}$ ist $B_{5,1/6}$ verteilt.
$P_{5,1/6}(\mathcal{X}=k)=\binom{5}{k}(1/6)^k\cdot(5/6)^{n-k}[\![=binompdf(5,1/6,k)]\!]$.

b) k	0	1	2	3	4	5
$P_{5,1/6}(\mathcal{X}=k)$	0.402	0.402	0.161	0.032	0.003	'0'

Eigentlich ist '0' auch ein, im Abi verbotenes, Zeichen. '0'$\approx$ 0 aber '0'$>$ 0. Der Sinn dieses Zeichens ist theoretischer Natur: Eine Wk von 0 definiert das unmögliche Ereignis. Eine Wk von '0' tut dies nicht.
Analog definieren wir '1'$\approx$ 1 aber '1'$<$ 1.
d) $P(\mathcal{X}\le 1)=P(\mathcal{X}=0)+P(\mathcal{X}=1)=binomcdf(5,1/6,1)\approx 0.80376$,

e) k	0	1	2	3	4	5
$P_{5,1/6}(\mathcal{X}\le k)$	0.402	0.804	0.965	0.997	'1'	1

f) Eine Funktion $F(x)=P(\mathcal{X}\le x)$ heißt Verteilungsfunktion. Siehe Tabelle $P(\mathcal{X}\le k)$; in dieser sind die Wk der Wk-verteilung aus Aufgabe 852 aufsummiert. Es ist also eine Verteilungsfunktion, keine WkVert (siehe später). Die Tabelle enthält die VF in der Spalte p=1/6 (Abb. 524).

g) Trivialerweise gilt $P_{n,p}(\mathcal{X}\le n)=1$.

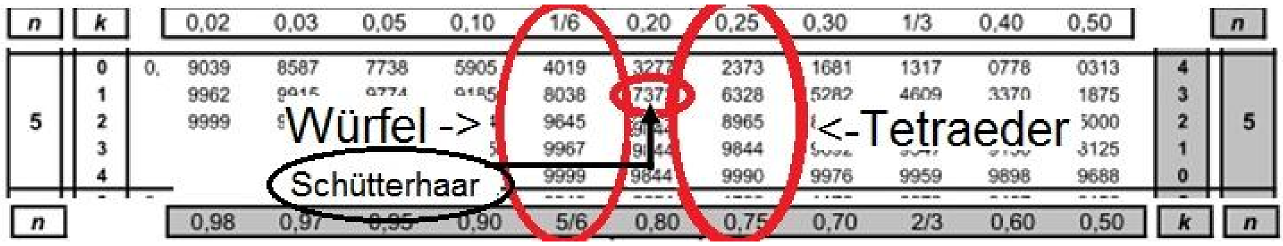


Abb. 524 Tabelle $P_{5,p}(\mathcal{X}\le k)$

g) $P_{5,1/6}(\mathcal{X}\ge 2)=1-\binom{5}{0}(1/6)^0\cdot(5/6)^5-\binom{5}{1}(1/6)^1\cdot(5/6)^4=1-binomcdf(5,1/6,1)$,

h) Die WkVert befindet sich in folgender Abbildung (und **Aufg. 338/855**: a) auch):

i) Formel von Bernoulli: $P_{n,p}(\mathcal{X}_1=k)=\binom{n}{k}p^k\cdot(1-p)^{n-k}$, speziell $P_{5,0.4}(\mathcal{X}_1=k)=\binom{5}{k}0.4^k\cdot 0.6^{5-k}$,
$P_{5,0.6}(\mathcal{X}_1=5-k)=\binom{5}{5-k}0.6^{5-k}\cdot 0.4^{5-(5-k)}=P_{5,0.4}(\mathcal{X}_2=k)$,
oder verallgemeinert: $P_{n,p}(\mathcal{X}_1=k)=P_{n,1-p}(\mathcal{X}_2=n-k)$.

Aufg. 337/853: **Stefan Effenberg** (* 1968) (Ex Bundesligaprofi) ist der Rekordhalter im Sammlen gelber Karten In 370 Bundesligaspielen erhielt er 111 Karten also exakt 0.3 Karten pro Spiel. Heute wird er gerne bei Fußballsendungen als Experte gehört.

a) $P_{5,0.3}(\mathcal{X}\le 3)\approx 0.9692$. $\downarrow$ Abb. 525
b) $P_{5,0.3}(\mathcal{X}\ge 4)=1-P_{5,0.3}(\mathcal{X}\le 3)\approx$
$1-0.9692=0.0308$. Tipp: Gegenereignis.
c) $P(\mathcal{X}\ge k)=\underline{1-P(\mathcal{X}\le k-1)}$ (ausw.)

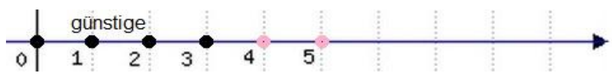


Abb. 525 Zahlenstrahl

c) $P_{5,0.1}(\mathcal{X}\ge 2)=\underline{1-P_{5,0.1}(\mathcal{X}\le 2-1)}\approx\underline{0.0815}$.

d) $P_{5,0.2}(\mathcal{X}\ge 2)=1-P_{5,0.2}(\mathcal{X}\le 1)\approx 1-0.7373=0.2627$;
$P_{5,0.4}(\mathcal{X}\ge 1)=1-P_{5,0.4}(\mathcal{X}\le 0)\approx 1-0.0778=0.9222$;
$P_{5,0.25}(\mathcal{X}\ge 3)=1-P_{5,0.25}(\mathcal{X}\le 2)\approx 1-0.8965=0.1035$;

e) **Raymond van Barnefeld** (* 1967) ist ein ehemaliger Dart-Weltmeister. Sein Spitzname ist 'Barney'.

$\mathcal{X}$ ist die Anzahl der getroffenen Triple 20.

i) $P(\mathcal{X} \leq 3) = \mathit{binomcdf}(10, 0.4, 3) \approx 0.38$; $\quad P(\mathcal{X} < 2) = \mathit{binomcdf}(10, 0.4, 1) \approx 0.05$;

ii) $P(\mathcal{X} \geq 3) = 1 - P(\mathcal{X} \leq 2) = 1 - \mathit{binomcdf}(10, 0.4, 2) \approx 0.95$;
$P(\mathcal{X} > 4) = 1 - \mathit{binomcdf}(10, 0.4, 4) \approx 0.37$;

iii) $P(1 \leq \mathcal{X} \leq 3) = P(\mathcal{X} \leq 3) - P(\mathcal{X} \leq 0) \approx 0.3823 - 0.0061 = 0.3762$,
$P(2 \leq \mathcal{X} \leq 6) = P(\mathcal{X} \leq 6) - P(\mathcal{X} \leq 1) \approx 0.9452 - 0.0464 = 0.8988$.

iv) $P(3 \leq \mathcal{X} \leq 5) = P(\mathcal{X} = 3) + P(\mathcal{X} = 4) + P(\mathcal{X} = 5) = P(\mathcal{X} \leq 5) - P(\mathcal{X} \leq 2) \approx 0.67$;
$[\approx \mathit{binomcdf}(10, 0.4, 5) - \mathit{binomcdf}(10, 0.4, 2)]$

$P(5 < \mathcal{X} < 9) = P(\mathcal{X} = 6) + P(\mathcal{X} = 7) + P(\mathcal{X} = 8) = P(6 \leq \mathcal{X} \leq 8)$
$= P(\mathcal{X} \leq 8) - P(\mathcal{X} \leq 5) \approx 0.16$; $[\approx \mathit{binomcdf}(10, 0.4, 8) - \mathit{binomcdf}(10, 0.4, 5)]$

$P(4 < \mathcal{X} \leq 8) = P(\mathcal{X} = 5) + P(\mathcal{X} = 6) + P(\mathcal{X} = 7) + P(\mathcal{X} = 8) = P(5 \leq \mathcal{X} \leq 8)$
$= P(\mathcal{X} \leq 8) - P(\mathcal{X} \leq 4) \approx 0.37$; $\quad [\approx \mathit{binomcdf}(10, 0.4, 8) - \mathit{binomcdf}(10, 0.4, 4)]$

f) 'Wiebke' war ein schwerer Orkan der im Jahre 1990 über Deutschland wütete und auch in meinem Garten Bäume entwurzelt hat. Gerd ist ein Studienkollege, der mir ua bei meiner Promotion geholfen hat. Heute ist er promovierter Mathelehrer und hat eine Freundin namens Wiebke.

$P(\mathcal{X} \geq 3) = 1 - P(\mathcal{X} \leq 2) = 1 - \mathit{binomcdf}(5, \frac{1}{6}, 2) \approx 0.035$.

Aufg. 337/854: a) $\mathcal{X}$ zählt die 'Ziffer' Anschläge. $\mathcal{X}$ ist $B_{5;0.4}$ verteilt.

$P(A) = \binom{5}{3} \cdot 0.4^3 \cdot 0.6^2 \approx 0.2304$; $\quad P(B) = P_{5;0.4}(\mathcal{X} \leq 2) \approx 0.6826$;
$P(C) = P_{5;0.4}(\mathcal{X} \geq 3) = 1 - P_{5;0.4}(\mathcal{X} \leq 2) \approx 0.3174$;

D: 'Der Affe tippt genau zweimal eine Ziffer und zwar hintereinander.' Folgende Anschläge sind im Fall C möglich: $ZZBBB$, $BZZBB$, $BBZZB$, $BBBZZ$. Die Wk von jedem Fall ist $0.4^2 \cdot 0.6^3$. Damit ist $P(D) = \binom{4}{1} \cdot 0.4^2 \cdot 0.6^3 = 0.13824$;

E: Die Folge kann AFFE'egal' oder 'egal'AFFE sein. $P(E) = 2 \cdot 0.1^4 = 0.0002$;

F:$P(F) = P_{5;0.4}(\mathcal{X} = 2) \cdot P_{5;0.4}(\mathcal{X} \geq 3) \approx 0.3456 \cdot 0.3174 \approx 0.1097$.

b) $\mathcal{X}$ zählt die gezogenen weißen Kugeln. $\mathcal{X}$ ist $B_{10;0.3}$ verteilt.

$P(A) = \binom{10}{3} \cdot 0.3^3 \cdot 0.7^2 \approx 0.2668$; $\quad P(B) = P_{10;0.3}(\mathcal{X} \leq 4) \approx 0.8497$;
$P(C) = P_{10;0.3}(\mathcal{X} \geq 6) = 1 - P_{10;0.3}(\mathcal{X} \leq 5) \approx 0.0473$;

D: Folgende Kombinationen sind im Fall D möglich:
$WWWBBBBBBB$, $BWWWBBBBBB$, ... $BBBBBBBWWW$.
Die Wk von jedem Fall ist $0.3^3 \cdot 0.7^7$. Damit ist $P(D) = \binom{8}{1} \cdot 0.3^3 \cdot 0.7^7 \approx 0.0178$;

E:$P(E) = P_{5;0.3}(\mathcal{X} \geq 3) \cdot P_{5;0.3}(\mathcal{X} \leq 4) = (1 - P_{5;0.3}(\mathcal{X} \leq 3-1)) \cdot P_{5;0.3}(\mathcal{X} \leq 4) \approx (1 - 0.8370) \cdot 0.9976 \approx 0.1626$.

c) ($\mathcal{X}_1 - 1$ ist $B_{5,0.5}$ verteilt); Beachten Sie dabei, dass '$\mathcal{X}_1 - 1$' bedeutet, dass bei der Binomialverteilung eigentlich die Ergebnisse $\mathcal{E}_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ herauskommen, die Notenvergabe aber die Ergebnisse $\mathcal{E}' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ benötigt.

i) k	1	2	3	4	5	6
$P(\mathcal{X}_1 = k)$	0.03125	0.15625	0.3125	0.3125	0.15625	0.03125

ii) $E(\mathcal{X}) = \mu = 1 \cdot 0.03125 + 2 \cdot 0.15625 + 3 \cdot 0.3125 + 4 \cdot 0.3125 + 5 \cdot 0.15625 + 6 \cdot 0.03125 = 3.5$; (das Ergebnis folgt auch aus der Symmetrie der Verteilung). $\quad$ ($\mathcal{X}_2 - 1$ ist $B_{3,0.5}$ verteilt);

iii) k	1	2	3	4
$P(\mathcal{X}_2 = k)$	$\underbrace{\binom{3}{0} \cdot (\frac{1}{2})^3}_{\frac{1}{8}}$	$\underbrace{\binom{3}{1} \cdot (\frac{1}{2})^3}_{\frac{3}{8}}$	$\underbrace{\binom{3}{2} \cdot (\frac{1}{2})^3}_{\frac{3}{8}}$	$\underbrace{\binom{3}{3} \cdot (\frac{1}{2})^3}_{\frac{1}{8}}$

d) Garfield (* 1978) ist ein Comic-Kater, der nach eigenen Angaben 'frech, fett, faul und filosofisch' ist. $binomcdf(n, p, k) = P_{n,p}(\mathcal{X} \le k)$ ein (im Abitur verbotener) GTR Befehl.

d) Erfolg ist 'Aufgabe richtig angekreuzt'; $\mathcal{X}$ ist die Anzahl der Erfolge, dann ist $\mathcal{X}$ $B_{10,0.25}$ verteilt.
i) $P(\mathcal{X} = 2) = binompdf(10, 0.25, 2) \approx 0.28$; ii) $P(\mathcal{X} \le 1) = binomcdf(10, 0.25, 2) \approx 0.24$;
iii) $P(\mathcal{X} \le 2) = binomcdf(10, 0.25, 2) \approx 0.53$; iv) $P(\mathcal{X} \ge 2) = 1 - binomcdf(10, 0.25, 1) \approx 0.76$;

e) Bei der **NDR Quizshow** (moderiert zB von Jörg Pilawa) kämpfen 5 Kandidaten aus den norddeutschen Bundesländern HB, HH, MV, NS, SH um den Titel der 'Leuchte des Nordens'. In Nebenrollen: Der Bremer Roland (* 1404) ist ein Wahrzeichen Bremens und stellt einen Heerführer aus dem 8. Jahrhundert (n. Chr.) dar. Roland Emmerich (*1955 in Stuttgart) ist ein Filmregisseur zB von 'Independence Day'.

$\mathcal{X}$ ist die Anzahl der richtig beantworteten Fragen, dann ist $\mathcal{X} \sim B_{10,1/3}$;
$P_{10,1/3}(\mathcal{X} \le 2) \approx 0.29914$; $P_{10,1/3}(\mathcal{X} \ge 4) = 1 - P_{10,1/3}(\mathcal{X} \le 3) \approx 1 - 0.55926 = 0.44074$;
$P_{10,1/3}(\mathcal{X} = 3) \approx 0.26012 = 1 - 0.29914 - 0.44074$;

f) Bonnie Parker (1910-1934) war der weibliche Teil des Gangsterpärchens **Bonnie und Clyde.**
$P_{50,1/6}(\mathcal{X} \ge 9) = 1 - P_{50,1/6}(\mathcal{X} \le 8) \approx 0.4579$, also nein. Neun danke = nein, danke.

Approximation über die Normalverteilung (Abs. 12.3.9): $P_{50,1/6}(\mathcal{X} \ge 9) \approx 1 - \Phi(\frac{9-50/6+0.5}{\sqrt{50 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}}) \approx 1 - \Phi(0.4427) \approx 0.329$

Old Shatterhand (gespielt von Lex Barker) ist der (Ich-) Erzähler bei den Winnetou-Romanen von Karl May (Carly = Karl). Winnetou (Winni 2) nennt ihn 'liebevoll' Charly.

g) Erfolg: Charly trifft; $\mathcal{X}$ ist $B_{5,0.8}$ verteilt.
$P_{5,0.8}(\mathcal{X} \ge k) = 1 - P_{5,0.8}(\mathcal{X} \le k - 1)$, es gilt $P_{n,p}(\mathcal{X} \le k) = 1 - P_{n,1-p}(\mathcal{X} \le n - 1 - k)$, damit muss $1-$Zahl der mit $p = 0.2$ von unten nach oben (k rechts)genommen werden. $1 - P_{5,0.8}(\mathcal{X} \le k - 1) = P_{5,0.2}(\mathcal{X} \le 4 - k)$; $P_{5,0.8}(\mathcal{X} \ge 4) = 1 - P_{5,0.8}(\mathcal{X} \le 3) = P_{5,0.2}(\mathcal{X} \le 1) \approx 0.7373$.

h) Norbert Hofer und Alexander van der Bellen waren 2016 Kandidaten um das österreichische Präsidentenamt. Die FPÖ (Norbert Hofer) setzte damals eine **Wahlwiederholung** in ganz Österreich wegen Unregelmäßigkeiten bei der Auszählung der Briefwahl durch - ein einmaliger Vorgang ist bis dahin. Bem. USS = Unites States of Schiller war der Staatsname bei Schule als Staat des FSG im Jahre 2016 - es gab dort viele Kleinststaaten.

Sei $\mathcal{X}$ die Anzahl der Bertawähler, dann ist $\mathcal{X} \sim B_{10,0.5}$ $P_{10,0.5}(\mathcal{X} \ge 6) \approx 0.377$; damit muss die Wahl mit Wk 0.377 nicht wiederholt werden.
Sei $\mathcal{Y}$ die Anzahl der durchgeführten Wahlen, dann ist $P(\mathcal{Y} = 1) = 0.377$,
$P(\mathcal{Y} = 2) = 0.377 \cdot 0.623$, $P(\mathcal{Y} = 3) = 0.377 \cdot 0.623^2$, $P(\mathcal{Y} = n) = 0.377 \cdot 0.623^{n-1}$,
$P(\mathcal{Y} > n) = 0.623^n$ (geometrische Verteilung siehe Abschnitt 12.2.6 auf Seite 328),
$P(\mathcal{Y} \le n) = 1 - 0.623^n = 0.9 \Leftrightarrow 0.623^n = 0.1 \Leftrightarrow n = \frac{\log(0.1)}{\log(0.623)} \approx 4.87$
also $P(\mathcal{Y} \le 5) \approx 1 - 0.623^5 \approx 0.906 > 0.9$.

i) **Sledge Hammer** ist Polizist der gleichnamigen Krimi-Parodie aus den achziger Jahren. Seine Fälle löst er unorthodox oft mit Hilfe seiner Partnerin Dori Doreau. Sledge hat eine enge Beziehung zu Susi seiner 44er Magnum, mit der er auch spricht.

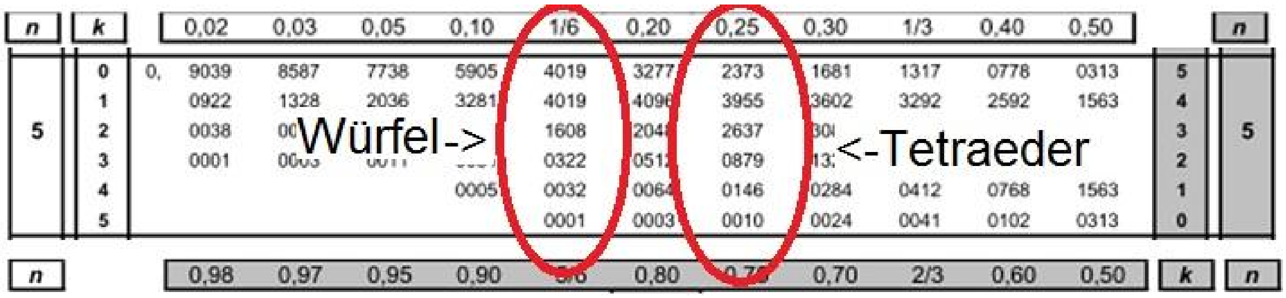
i) Sei $\mathcal{X}$ die Anzahl der Fehlschüsse, dann ist $\mathcal{X}$ ist $B_{5,0.05}$ verteilt.
$P_{5,0.05}(\mathcal{X} = 0) = \binom{5}{0} \cdot 0.05^0 \cdot 0.95^5 = binompdf(5, 0.05, 0) \approx 0.7738$,
$P_{5,0.05}(\mathcal{X} = 4) = \binom{5}{4} \cdot 0.05^4 \cdot 0.95^1 = binompdf(5, 0.05, 4) \approx' 0'$,

$P_{5,0.05}(\mathcal{X} \leq 3) = \binom{5}{0} \cdot 0.05^0 \cdot 0.95^5 + \binom{5}{1} \cdot 0.05^1 \cdot 0.95^4 + \binom{5}{2}\, 0.05^2 \cdot 0.95^3 + \binom{5}{3}\, 0.05^3 \cdot 0.95^2$
$= binomcdf(5, 0.05, 3) \approx' 1'$.

Aufg. 338/855: a) siehe Abb. 526

b)	k	0	1	2	3	4	5
	$P(\mathcal{X} = k)$	'0'	0.0147	0.0879	0.2637	0.3955	0.2373

b) Wer war in der Saison 2015/2016 der Elfmeterkönig der Fußball Bundesliga? Nein, nicht Thomas Müller (FCB), es war **Moritz Hartmann** vom FC Ingolstadt; er trat 8 Mal zum Strafstoß an hat jedes Mal getroffen (Müller trat 6 Mal an und verwandelte 5 Mal).



n	k		0,02	0,03	0,05	0,10	1/6	0,20	0,25	0,30	1/3	0,40	0,50		n
5	0	0,	9039	8587	7738	5905	4019	3277	2373	1681	1317	0778	0313	5	5
	1		0922	1328	2036	3281	4019	4096	3955	3602	3292	2592	1563	4	
	2		0038	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1608	[illegible]	2637	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	3	
	3		0001	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0322	[illegible]	0879	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2	
	4					0005	0032	0064	0146	0284	0412	0768	1563	1	
	5						0001	0003	0010	0024	0041	0102	0313	0	
n			0,98	0,97	0,95	0,90	[illegible]	0,80	[illegible]	0,70	2/3	0,60	0,50	k	n

Abb. 526 Tabelle $P_{5,p}(\mathcal{X} = k)$

c) $P(\mathcal{X}_1 = 2) = \binom{5}{2} \cdot 0.25^2 \cdot 0.75^{5-2} = \binom{5}{3} \cdot 0.75^3 \cdot 0.75^{5-3} = P(\mathcal{X}_2 = 3)$;

Es gilt $P_{n,p}(\mathcal{X} = k) = P_{n,1-p}(\mathcal{X} = n - k)$.

Beweis: $P_{n,1-p}(\mathcal{X} = n-k) = \binom{n}{n-k}\,(1-p)^{n-k} \cdot (1-(1-p))^{n-(n-k)} = \binom{n}{k}\,(1-p)^{n-k} \cdot p^k = P_{n,p}(\mathcal{X} = k)$ (Symmetrie des Pascalschen Dreiecks).

Formel von Bernoulli: $P_{n,p}(\mathcal{X}_1 = k) = \binom{n}{k}\, p^k \cdot (1-p)^{n-k}$,
speziell $P_{5,0.4}(\mathcal{X}_1 = k) = \binom{5}{k}\, 0.4^k \cdot 0.6^{5-k}$,
$P_{5,0.6}(\mathcal{X}_1 = 5-k) = \binom{5}{5-k}\, 0.6^{5-k} \cdot 0.4^{5-(5-k)} = P_{5,0.4}(\mathcal{X}_2 = k)$,
oder verallgemeinert: $P_{n,p}(\mathcal{X}_1 = k) = P_{n,1-p}(\mathcal{X}_2 = n-k)$.

In der Tabelle 199 sind nur Wahrscheinlichkeiten $p\underline{\leq 0.5}$ aufgeführt. Für größere p benötigen Sie die Formel $P_{n,p}(\mathcal{X} = k) = \underline{P_{n,1-p}(\mathcal{X} = n-k)}$.

d) $P_{5,0.9}(\mathcal{X} = 4) = P_{5,0.1}(\mathcal{X} = 5-4) \approx 0.3281$, $P_{5,0.8}(\mathcal{X} = 3) = P_{5,0.2}(\mathcal{X} = 5-3) \approx 0.2048$,
$P_{5,0.6}(\mathcal{X} = 3) = P_{5,0.4}(\mathcal{X} = 5-3) \approx 0.3456$, $P_{5,0.75}(\mathcal{X} = 2) = P_{5,0.25}(\mathcal{X} = 5-4) \approx 0.0879$.

e) Es gilt $P_{5,0.6}(k) = P_{5,0.4}(\mathcal{X}\underline{= 5-k})$ nach Aufgabe 855c).

k	0	1	2	3	4	5
$P_{5,0.6}(\mathcal{X} = k)$	0.01024	0.0768	0.2304	0.3456	0.2592	0.07776

f)
$$\begin{aligned} P_{5,0.6}(\mathcal{X} \leq 3) &= P_{5,0.6}(\mathcal{X} = 0)+ \quad P_{5,0.6}(\mathcal{X} = 1)+ \quad P_{5,0.6}(\mathcal{X} = 2)+ \quad P_{5,0.6}(\mathcal{X} = 3) \\ &= P_{5,0.4}(\mathcal{X} = 5-0)+ \quad P_{5,0.4}(\mathcal{X} = 5-1)+ \quad P_{5,0.4}(\mathcal{X} = 3)+ \quad P_{5,0.4}(\mathcal{X} = 2) \\ = \quad P_{5,0.4}(\mathcal{X}\underline{\geq 2}) &= 1 - P_{5,0.4}(\mathcal{X}\underline{\leq 1}); \end{aligned}$$

g) $P_{n,p}(\mathcal{X} \leq k) = P_{n,\underline{1-p}}(\mathcal{X}\underline{\geq n-k}) = \underline{1-}P_{n,\underline{1-p}}(\mathcal{X}\underline{\leq n-k-1})$.

Diese Formel wird in gewisser Weise in die Tabellen eingearbeitet.

$P_{n,p}(\mathcal{X} \geq k) = 1 - P_{n,p}(\mathcal{X} \leq k-1) = 1 - P_{n,1-p}(\mathcal{X} \geq n-(k-1)) = P_{n,1-p}(\mathcal{X} \leq n-k))$.

h) (1. Teil) Anwendung der Formel:$P_{n,p}(\mathcal{X} \leq k) = 1 - P_{n,1-p}(\mathcal{X} \leq n-k-1)$:

$P_{10,0.8}(\mathcal{X} \leq 7) = 1 - P_{10,0.2}(\mathcal{X} \leq 10-7-1) \approx 0.3222$;
$P_{10,0.7}(\mathcal{X} \leq 8) = 1 - P_{10,0.3}(\mathcal{X} \leq 10-8-1) \approx 0.8507$;
$P_{10,0.97}(\mathcal{X} \leq 9) = 1 - P_{10,0.03}(\mathcal{X} \leq 10-9-1) \approx 0.2626$;

$P_{10,2/3}(\mathcal{X} \leq 7) = 1 - P_{10,1/3}(\mathcal{X} \leq 10 - 7 - 1) \approx 0.7009$;
$P_{10,0.7}(\mathcal{X} \leq 3) = 1 - P_{10,0.3}(\mathcal{X} \leq 10 - 3 - 1) \approx 0.0106$;

2. Teil von d) Anwendung der Formel: $P_{n,p}(\mathcal{X} \geq k) = P_{n,1-p}(\mathcal{X} \leq n - k))$:

$P_{10,0.8}(\mathcal{X} \geq 6) = P_{10,0.2}(\mathcal{X} \leq 10 - 6)) \approx 0.8497$,
$P_{10,0.95}(\mathcal{X} \geq 9) = P_{10,0.05}(\mathcal{X} \leq 10 - 9)) \approx 0.9139$,
$P_{10,0.6}(\mathcal{X} \geq 8) = P_{10,0.4}(\mathcal{X} \leq 10 - 8)) \approx 0.1673$,
$P_{10,2/3}(\mathcal{X} \geq 3) = P_{10,1/3}(\mathcal{X} \leq 10 - 3)) \approx 0.9967$,
$P_{10,0.75}(\mathcal{X} \geq 9) = P_{10,0.25}(\mathcal{X} \leq 10 - 9)) \approx 0.2440$,
$P_{10,0.98}(\mathcal{X} \geq 8) = P_{10,0.02}(\mathcal{X} \leq 10 - 8)) \approx 0.9991$,
$P_{10,5/6}(\mathcal{X} \geq 8) = P_{10,5/6}(\mathcal{X} \leq 10 - 8)) \approx 0.7752$,

i) Aus Abb. 202 kann auch $P(\mathcal{X} = k)$ abgelesen werden: $P(\mathcal{X} = k) = P(\mathcal{X} \leq k) \underline{- P(\mathcal{X} \leq k - 1)}$ Abb. 527.

Aufg. 339/856: Bemerkung: Man beachte die Schülerreduktion von K_1 auf K_2. a) 6: Eine '1' erwartet, 12: Zwei, 18: Drei, 24: Vier, n: $\frac{n}{6}$;   Tetraeder: 6: 1.5 Mal '1' erwartet, 12: Drei, n: $\frac{n}{4}$.

b) Die Wunderkugel ist dem **Überraschungsei** nachempfunden. Bei diesen versteckt sich ab und an in jedem 7 Ei eine kleine Figur mit gewissem Sammlerwert. Die Heinzelmännchen waren Hausgeister, in der Nacht Arbeit verrichteten. Diesen sind ua auch die Mainzelmännchen nachempfunden. Ob es Zweiel oder Mehrelmännchen gibt, ist mir nicht bekannt.

$\mathcal{X}$ ist die Anzahl der Einzelmännchen, dann ist $\mathcal{X} \sim B_{n,0.2}$; 5 Kugeln: Ein Erfolg, 10: Zwei, 15: Drei, $n : \frac{n}{5}$. Man erwartet bei n Kugeln mit $p = \frac{1}{7}$: $\frac{n}{7}$ Erfolge. Man erwartet bei n Kugeln mit Erfolgswk p: $n \cdot p$ Erfolge. c) $E = n \cdot p$. d) $\mu = E(\mathcal{X}) = 10 \cdot \frac{1}{6} = 1.\bar{6}$

e) i) $E(\mathcal{X}) = 100 \cdot 0.3 = 30$, ii) $E(\mathcal{X}) = 30 \cdot 0.03 = 0.9$, f) $E_1 = \frac{20}{6}$, $E_5 = \frac{40}{6}$, $E_5 = \frac{50}{6}$.

Bemerkung: Bei Würfel von Sd ist der Erwartungswert $4.8\bar{3}$; weil ein 'Mensch ärgere Dich nicht' Spiel 40 Felder hat erwartet Herr Sd etwa 8.3 Würfe für eine Runde eines Spielsteines oder 33.2 Würfe (+5 Würfe für das 'Rauskommen') für 4 Spielsteine (also ein komplettes Spiel):
$E_1 = \frac{39}{6}$, $E_5 = \frac{39}{6}$, $E_5 = \frac{39}{6}$. $P(\text{Neundarter}) = (\frac{1}{3})^9 \approx 0.00005$; $\mu = n \cdot p = \frac{30000}{3^5} \approx 1.524$.

Aufg. 339/857: a+b) Die Stabdiagramme haben Glockenform. Der Stab beim Erwartungswert ist am höchsten. $n =$ die letzte Stabnummer oder Anzahl der Stäbe -1. $E =$ längster Stab, $p = \frac{E}{n}$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_{10,0.4}(\mathcal{X} = k)$	0.006	0.04	0.121	0.215	0.251	0.2	0.111	0.042	0.011	0.002	'0'

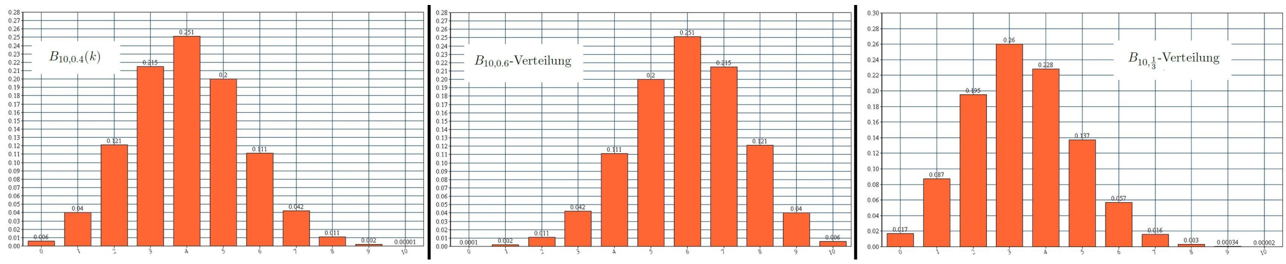


Abb. 527 Säulendiagramme

c) Beim Stabdiagramm einer Binvert. ist der <u>Erwartungswert</u> in <u>der Nähe des</u> längsten Stabes.

d) Bei einer $B_{10;\frac{1}{3}}$ Vert. ist der längste Stab nicht der Erwartungswert, weil $E = \underline{3.\bar{3}}$ kein <u>Ergebnis</u> ist.

e) $8 = 40 \cdot p \Leftrightarrow p = \frac{8}{40} = 0.2$; $8 = n \cdot 0.1 \Leftrightarrow n = \frac{8}{0.1} = 80$;

f) i) Suche den längsten Stab $P(\mathcal{X} = k)$ und interpretiere k als <u>Erwartungswert</u> der Verteilung.

ii) Setze diesen in die Gleichung $\underline{E = n \cdot p}$ ein und löse nach der Unbekannten auf.

g) i) Das Experiment kann als Ergebnis 'Rot' oder 'Nicht Rot' haben. Die Erfolgs-Wk von 0.2 bleibt konstant. $\mathcal{X}$ ist die Anzahl der Erfolge einer Bernoulli-Kette mit n Versuchen.

ii) $P(\mathcal{X} \geq 3) = 1 - (P(\mathcal{X} = 0) + P(\mathcal{X} = 1) + P(\mathcal{X} = 2)) = 1 - 0.01 - 0.06 - 0.14 = 0.79$;

iii) Wir schätzen $E(\mathcal{X}) = 4$, damit ist $E = n \cdot p \Leftrightarrow 4 = n \cdot 0.2 \Leftrightarrow n = \frac{4}{0.2} = 20$.

h) ... ist $n = 10$. Beschreiben Sie, was sich beim Histogramm verändert, wenn man $\underline{p}$ variiert bestimmen Sie $\underline{p}$ in jedem Histogramm.

i) $p = 0.5$, das Schaubild ist symmetrisch zu $x = 5$ (Erwartungswert).

ii) $p = 0.6$, das Schaubild ist leicht nach rechts gekippt. $P_{10,0.6}(\mathcal{X} = 6) > P_{10,0.5}(\mathcal{X} = 5)$, die Glocke ist höher.

iii) $p = 0.2$, das Schaubild ist stark nach links gekippt. $P_{10,0.2}(\mathcal{X} = 2) > P_{10,0.6}(\mathcal{X} = 6)$, die Glocke ist noch höher.

$(0 \leq p \leq 1)$; je größer das p desto weiter ist das Histogramm nach links gekippt. Je weiter p von 0.5 entfernt ist desto höher ist $P(\mathcal{X} = n \cdot p)$

i) Genau für $p =\underline{0.5}$ ist das Histogramm achsensymmetrisch zur Achse $x = \underline{n \cdot p}$.

Aufg. 340/858: $\mu = \underline{n \cdot p}$; a) $\sigma(\mathcal{X})$ ist ein Maß für das <u>Risiko oder auch Streuung</u> einer Verteilung.

b) $P(\mathcal{X} \leq k) \approx \Phi\left(\frac{k-\underline{n\cdot p}+0.5}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}\right)$, **(Formel 52)** ;

c) $\mathcal{X}$ ist $B_{100,0.2}$ verteilt $\Rightarrow \mu = \underline{20}$, $\sigma = \sqrt{100 \cdot 0.2 \cdot 0.8}0\underline{4}$; ('richtige' Erg. in Klammern);

$$\begin{array}{llllll}
P_{100,0.2}(\mathcal{X} \leq 25) & \approx \Phi\left(\frac{25-20+0.5}{4}\right) & \approx \Phi(1.375) & \approx 0.9154, & (0.9125) \\
P_{100,0.2}(\mathcal{X} \leq 20) & \approx \Phi\left(\frac{20-20+0.5}{4}\right) & \approx \Phi(0.125) & \approx 0.5497, & (0.5595) \\
P_{100,0.2}(\mathcal{X} \leq 15) & \approx \Phi\left(\frac{15-20+0.5}{4}\right) & \approx \Phi(-1.125) & \approx 0.1303, & (0.1285) \\
P_{100,0.2}(\mathcal{X} \leq 10) & \approx \Phi\left(\frac{10-20+0.5}{4}\right) & \approx \Phi(-2.375) & \approx 0.0088, & (0.0057)
\end{array}$$

d) $P(\mathcal{X} \geq k) \approx \Phi\left(\frac{k-\mu-0.5}{\sigma}\right)$; $P(\mathcal{X} = k) \approx \Phi\left(\frac{k-\mu+0.5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{k-\mu-0.5}{\sigma}\right)$;

e) **Ag 853:** $\mathcal{X}$ ist $B_{10,0.4}$ verteilt $\Rightarrow \mu = 10 \cdot 0.4 = 4$ $\sigma = \sqrt{10 \cdot 0.4 \cdot 0.6} = \sqrt{2.4} \approx 1.55$;

$$\begin{array}{rllll}
P(\mathcal{X} \leq 3) & \approx \Phi\left(\frac{3-4+0.5}{1.55}\right) & \approx \Phi(-0.3226) & \approx 0.3735, & (0.38); \\
P(\mathcal{X} < 2) = P(\mathcal{X} \leq 1) & \approx \Phi\left(\frac{1-4+0.5}{1.55}\right) & \approx \Phi(-1.613) & \approx 0.0534, & (0.0467); \\
P(\mathcal{X} \geq 3) = 1 - P(\mathcal{X} \leq 2) & \approx 1 - \Phi\left(\frac{2-4+0.5}{1.55}\right) & \approx 1 - \Phi(-0.9677) & \approx 0.8334, & (0.8328); \\
P(\mathcal{X} > 4) = 1 - P(\mathcal{X} \geq 4) & \approx 1 - \Phi\left(\frac{4-4+0.5}{1.55}\right) & \approx 1 - \Phi(0.3226) & \approx 0.3735, & (0.37); \\
\text{c) } P(1 \leq \mathcal{X} \leq 3) & \approx \Phi\left(\frac{3-4+0.5}{1.55}\right) - \Phi\left(\frac{0-4+0.5}{1.55}\right) & \approx \Phi(\text{-}0.323) - \Phi(\text{-}2.258) & \approx 0.3615 & (0.38); \\
P(2 \leq \mathcal{X} \leq 6) & \approx \Phi\left(\frac{6-4+0.5}{1.55}\right) - \Phi\left(\frac{1-4+0.5}{1.55}\right) & \approx \Phi(1.613) - \Phi(\text{-}1.613) & \approx 0.8932 & (0.9); \\
\text{d) } P(3 \leq \mathcal{X} \leq 5) & \approx \Phi\left(\frac{5-4+0.5}{1.55}\right) - \Phi\left(\frac{2-4+0.5}{1.55}\right) & \approx \Phi(0.9677) - \Phi(\text{-}0.9677) & \approx 0.6668 & (0.67); \\
P(5 < \mathcal{X} < 9) & \approx \Phi\left(\frac{8-4+0.5}{1.55}\right) - \Phi\left(\frac{5-4+0.5}{1.55}\right) & \approx \Phi(2.903) - \Phi(0.9677) & \approx 0.1648, & (0.16); \\
P(4 < \mathcal{X} \leq 8) & \approx \Phi\left(\frac{8-4+0.5}{1.55}\right) - \Phi\left(\frac{4-4+0.5}{1.55}\right) & \approx \Phi(2.903) - \Phi(0.3226) & \approx 0.3717, & (0.37);
\end{array}$$

Ag 855 d: $P_{10,0.8}(\mathcal{X} \leq 7)$: $\mu = 8, \sigma = \sqrt{1.6}$,
$P_{10,0.8}(\mathcal{X} \leq 7) \approx \Phi\left(\frac{7-8+0.5}{\sqrt{1.6}}\right) \approx \Phi(-0.4) \approx 1 - 0.6554 = 0.3446, \quad (0.3222)$;

$P_{10,0.7}(\mathcal{X} \leq 8)$: $\mu = 7, \sigma = \sqrt{2.1}$,
$P_{10,0.7}(\mathcal{X} \leq 8) \approx \Phi\left(\frac{8-7+0.5}{\sqrt{2.1}}\right) \approx \Phi(1.04) \approx 0.8508, \quad (0.8507)$;

$P_{10,0.97}(\mathcal{X} \leq 9)$: $\mu = 9.7, \sigma = \sqrt{0.291}$,
$P_{10,0.97}(\mathcal{X} \leq 9) \approx \Phi\left(\frac{9-9.7+0.5}{\sqrt{0.291}}\right) \approx \Phi(-0.37) \approx 1 - 0.6443 = 0.3557, \quad (0.2626)$;

$P_{10,2/3}(\mathcal{X} \leq 7)$: $\mu = 6.\bar{6}, \sigma = \sqrt{2.\bar{2}}$,
$P_{10,2/3}(\mathcal{X} \leq 7) \approx \Phi\left(\frac{7-6.\bar{6}+0.5}{\sqrt{2.\bar{2}}}\right) \approx \Phi(0.56) \approx 0.7123$, (0.7009);

$P_{10,0.7}(\mathcal{X} \leq 3) : \mu = 7, \sigma = \sqrt{2.1}$,
$P_{10,0.7}(\mathcal{X} \leq 3) \approx \Phi\left(\frac{3-7+0.5}{\sqrt{2.1}}\right) \approx \Phi(-2.42) \approx 1 - 0.992 = 0.008$, (0.0106);

$P_{10,0.8}(\mathcal{X} \geq 6)$: $\mu = 8, \sigma = \sqrt{1.6}$,
$P_{10,0.8}(\mathcal{X} \geq 6) \approx 1 - \Phi\left(\frac{6-8-0.5}{\sqrt{1.6}}\right) \approx \Phi(1.98) \approx 0.9761$, (0.8497); stimmt das?

$P_{10,0.95}(\mathcal{X} \geq 9)$: $\mu = 9.5, \sigma = \sqrt{0.475}$,
$P_{10,0.95}(\mathcal{X} \geq 9) \approx 1 - \Phi\left(\frac{9-9.5-0.5}{\sqrt{0.475}}\right) \approx \Phi(1.45) \approx 0.9265$, (0.9139);

$P_{10,0.6}(\mathcal{X} \geq 8)$: $\mu = 6, \sigma = \sqrt{2.4}$,
$P_{10,0.6}(\mathcal{X} \geq 8) \approx 1 - \Phi\left(\frac{8-6-0.5}{\sqrt{2.4}}\right) \approx 1 - \Phi(0.97) \approx 1 - 0.8340 = 0.1660$, (0.1673);

$P_{10,0.75}(\mathcal{X} \geq 9) : \mu = 7.5, \sigma = \sqrt{1.875}$,
$P_{10,0.75}(\mathcal{X} \geq 9) \approx 1 - \Phi\left(\frac{9-7.5-0.5}{\sqrt{1.875}}\right) \approx 1 - \Phi(0.73) \approx 1 - 0.7673 = 0.2527$, (0.2440);

$P_{10,0.98}(\mathcal{X} \geq 8)$: $\mu = 9.8, \sigma = \sqrt{0.196}$,
$P_{10,0.98}(\mathcal{X} \geq 8) \approx 1 - \Phi\left(\frac{8-9.8-0.5}{\sqrt{0.196}}\right) \approx \Phi(5.2) \approx 1$, (0.9991);

$P_{10,5/6}(\mathcal{X} \geq 8)$: $\mu = 8.\bar{3}, \sigma = \sqrt{0.18\bar{3}}$,
$P_{10,5/6}(\mathcal{X} \geq 8) \approx 1 - \Phi\left(\frac{8-8.\bar{3}-0.5}{\sqrt{0.18\bar{3}}}\right) \approx \Phi(1.95) \approx 0.9744$, (0.7752);

f) Sei $\mathcal{X}$ $B_{10,0.8}$ verteilt, dann ist $P(\mathcal{X} \leq 7) = \mathit{binomcdf}(10, 0.8, 7) \approx 0.322$,
mit der Normvert. $P(\mathcal{X} \leq 7) \approx \Phi\left(\frac{7-8+0.5}{\sqrt{10 \cdot 0.8 \cdot 0.2}}\right) = \Phi\left(\frac{-0.5}{\sqrt{1.6}}\right) \approx \Phi(-0.395) \approx 0.3461$.

WTR (casio): mit Menu $\boxed{4}$ $\boxed{2}$ Untere: -99999 $\boxed{=}$ Obere. -0.3953 $\boxed{=}$ $\sigma = 1$ $\boxed{=}$ ergibt: ≈ 0.3463

Aufg. 340/859:

a) i) k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_{10,0.4}(\mathcal{X} \leq k)$	0.006	0.046	0.167	0.382	0.633	0.834	0.954	0.988	0.998	’1’	1

ii) k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_{10,0.6}(\mathcal{Y} \leq k)$	’0’	0.002	0.012	0.058	0.166	0.367	0.618	0.833	0.954	0.994	1

iv) $P_{n,1-p}(\mathcal{Y} \leq n-k) = \underline{1 - P_{n,p}(\mathcal{X} \leq k)}$.

b) i) $P_{5,0.5}(\mathcal{X} \leq 2.5) = 0.5$, $P_{5,0.5}(\mathcal{X} \geq 2.5) = 0.5$. ii) $P_{9,0.5}(\mathcal{X} \leq 4.5) = 0.5$, $P_{9,0.5}(\mathcal{X} \geq 4.5) = 0.5$.

iii) $P_{10,0.5}(\mathcal{X} \leq 5) \approx 0.623$, $P_{10,0.5}(\mathcal{X} \geq 5) \approx 0.623$.
iv) $P_{100,0.5}(\mathcal{X} \leq 50) \approx 0.54$, $P_{100,0.5}(\mathcal{X} \geq 50) \approx 0.54$.

v) Sei $\mathcal{X} \sim B_{n,0.5}$, dann ist $P_{n,0.5}(\mathcal{X} \leq n/2) = \frac{1}{2}$, falls n <u>ungerade</u> ist.

vi) Sei $\mathcal{X} \sim B_{n,0.5}$, n gerade, dann ist die Fktn $f(n) = P_{n,0.5}(\mathcal{X} \leq n/2)$ <u>streng</u> monoton <u>fallend</u>.

c) Sei $\mathcal{X} \sim B_{10,0.4}$, dann gilt $\mu = \underline{n \cdot 0.4}$ und $\sigma = \underline{\sqrt{n \cdot 0.4 \cdot 0.6}}$.

c) ii) n	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$P_{n,0.4}(\mu - \sigma \leq \mathcal{X} \leq \mu + \sigma)$	0.666	0.747	0.648	0.742	0.688	0.644	0.728	0.696	0.667

$n = 10$: $P_{n,0.4}(\mu - \sigma \leq \mathcal{X} \leq \mu + \sigma) = P_{10,0.4}(4 - 1.55 \leq \mathcal{X} \leq 4 + 1.55) = P_{10,0.4}(2.45 \leq \mathcal{X} \leq 5.55) = P_{10,0.4}(3 \leq \mathcal{X} \leq 5) = P_{10,0.4}(\mathcal{X} \leq 5) - P_{10,0.4}(\mathcal{X} \leq 2) \approx 0.834 - 0.167 \approx 0.666$.

$n = 20$: $P_{20,0.4}(8 - 2.19 \leq \mathcal{X} \leq 8 + 2.19) = P_{20,0.4}(5.81 \leq \mathcal{X} \leq 10.19) = P_{20,0.4}(6 \leq \mathcal{X} \leq 10) = P_{20,0.4}(\mathcal{X} \leq 10) - P_{20,0.4}(\mathcal{X} \leq 5) \approx 0.872 - 0.126 \approx 0.747$.

$n = 30$: $P_{30,0.4}(12 - 2.68 \leq \mathcal{X} \leq 12 + 2.68) = P_{30,0.4}(9.32 \leq \mathcal{X} \leq 14.68) = P_{30,0.4}(10 \leq \mathcal{X} \leq 14) = P_{30,0.4}(\mathcal{X} \leq 14) - P_{30,0.4}(\mathcal{X} \leq 9) \approx 0.825 - 0.176 \approx 0.648$.

Ein Anwendung der Sigmaregel: $P_{n,0.4}(\mu - \sigma \leq \mathcal{X} \leq \mu + \sigma) \approx 0.68$.
Eine Konvergenz $P_{n,0.4}(\mu - \sigma \leq \mathcal{X} \leq \mu + \sigma) \xrightarrow{n\to\infty} 0.68$ ist nicht einfach erkennbar.
Die Konvergenz $P_{n,0.4}(\mu - \sigma \leq \mathcal{X} \leq \mu + \sigma) \xrightarrow{n\to\infty} 0.68$ gilt aber, diese ist aber nicht monoton.

Beweis mit der Approximation mit der Normalverteilung $P_{n,p}(\mathcal{X} \leq k) \approx \Phi(\frac{k-\mu+0.5}{\sigma})$:

$$\begin{aligned}
P_{n,p}(\mu - \sigma \leq \mathcal{X} \leq \mu + \sigma) &= P_{n,p}(\mathcal{X} \leq \mu + \sigma) - P_{n,p}(\mathcal{X} \leq \mu - \sigma - 1) \\
&\approx \Phi(\tfrac{(\mu+\sigma)-\mu+0.5}{\sigma}) - \Phi(\tfrac{(\mu-\sigma-1)-\mu+0.5}{\sigma}) \\
&= \Phi(\tfrac{\sigma+0.5}{\sigma}) - \Phi(\tfrac{-\sigma-0.5}{\sigma}) = \Phi(1 + \tfrac{0.5}{\sigma}) - \Phi(-1 - \tfrac{0.5}{\sigma}) \\
&= \Phi\left(1 + \frac{0.5}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}\right) - \Phi\left(-1 - \frac{0.5}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}\right) \\
&\xrightarrow{n\to\infty} \Phi(1) - \Phi(-1) \approx 0.8413 - 0.1587 = 0.6826 \text{ (qed).}
\end{aligned}$$

Insbesondere gilt $P_{n,p}(\mu - k\cdot\sigma \leq \mathcal{X} \leq \mu + k\cdot\sigma) \approx \Phi(k) - \Phi(-k)$.

Aufg. 340/860:

Sei $\mathcal{X}$ die Anzahl der Sechsen, dann ist

a+b) $P(\mathcal{X} = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0.5787$, (es klappt nicht) $\quad P(\mathcal{X} \geq 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0.4213$ (es klappt);

Würfel von Sd: $\quad P(\mathcal{X} = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0.125$, $\quad P(\mathcal{X} \geq 1) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = y < 0.875$;

c) bei n Versuchen: $P(\mathcal{X} = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$; $P(\mathcal{X} \geq 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$;

Würfel von Sd bei n Versuchen: $P(\mathcal{X} = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$; $P(\mathcal{X} \geq 1) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$;

d) $P(\mathcal{X} \geq 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0.9 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0.1 \Leftrightarrow n = \frac{\log(0.1)}{\log(\frac{5}{6})} \approx 12.6$; also 13 mal.

Würfel von Sd: $P(\mathcal{X} \geq 1) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.9 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.1 \Leftrightarrow n = \frac{\log(0.1)}{\log(\frac{1}{2})} \approx 3.3$; also 4 mal.

e) Sei $\mathcal{X}$ die Anzahl der Erfolge, n die Anzahl der durchgeführten Experimente, dann ist $\mathcal{X}$ $B_{n,p}$ verteilt. $\quad P(\mathcal{X} \geq 1) = 1 - P(\mathcal{X} = 0) = 1 - (1-p)^n = p_0 \Leftrightarrow (1-p)^n = 1 - p_0 \Leftrightarrow n = \frac{\log(1-p_0)}{\log(1-p)}$.

f) i) Stellen Sie eine Ungleichung auf, die Sie dann nach <u>n</u> auflösen sollten (aber nicht k<u>önnen</u>).

$P(\mathcal{X} \geq 2) = 1 - P(\mathcal{X} \leq 1) = 1 - \binom{n}{1} \cdot (\frac{1}{6})^1 \cdot (\frac{5}{6})^{n-1} - \binom{n}{0} \cdot (\frac{1}{6})^0 \cdot (\frac{5}{6})^{n-0}$
$= 1 - \frac{n}{6} \cdot (\frac{5}{6})^{n-1} - (\frac{5}{6})^n \geq 0.9$. Diese Gleichung ist transzendent und kann nur numerisch (wird nur mit einem 'm' geschrieben), also durch Approximation gelöst werden.

ii) $n \approx 2 \cdot 13 = 26$.

iii) $P_{n,\frac{1}{6}}(\mathcal{X} \geq 1)$ ist eine Funktion abhängig von von <u>n</u>. Stellen Sie diese in Form einer W<u>ertetabelle</u> dar.

n	12	13	..	19	20	21	22	23	24	25	26
$P_{n,1/6}(\mathcal{X} \geq 1)$	0.619	0.664	..	0.850	0.870	0.887	0.902	0.915	0.927	0.937	0.946

iv) Machen Sie dort einen Strich wo die Funktionswerte <u>0.9</u> <u>überspringen</u>.

g) $P(\mathcal{X} \geq k) = 1 - P(\mathcal{X} \leq k-1) =' 1 - \mathit{binomcdf}(n, p, k-1)'$;

Sd Würfel: $\quad k = 1 \Rightarrow n = 4, \quad k = 2 \Rightarrow n = 7, \quad k = 3 \Rightarrow n = 9, \quad k = 4 \Rightarrow n = 12, \quad k = 5 \Rightarrow n = 14,$

$k = 2$: | n	5	6	7	8
$P_{n,1/2}(\mathcal{X} \geq 2)$	0.81	0.89	0.94	0.96

$k = 3$: | n	7	8	9	10
$P_{n,1/2}(\mathcal{X} \geq 3)$	0.77	0.86	0.91	0.95

$k = 4$: | n	10	11	12	13
$P_{n,1/2}(\mathcal{X} \geq 4)$	0.83	0.89	0.93	0.95

$k = 5$: | n	12	13	14	15
$P_{n,1/2}(\mathcal{X} \geq 5)$	0.81	0.87	0.91	0.94

Idealer Würfel: $k = 1 \Rightarrow n = 13$, $k = 2 \Rightarrow n = 22$, $k = 3 \Rightarrow n = 31$, $k = 4 \Rightarrow n = 39$, $k = 5 \Rightarrow n = 46$,

$k = 2$: n	20	21	22	23
$P_{n,1/6}(\mathcal{X} \geq 2)$	0.87	0.887	0.902	0.915

$k = 3$: n	29	30	31	32
$P_{n,1/6}(\mathcal{X} \geq 3)$	0.884	0.897	0.909	0.920

$k = 4$: n	37	38	39	40
$P_{n,1/6}(\mathcal{X} \geq 4)$	0.886	0.898	0.909	0.919

$k = 5$: n	44	45	46	47
$P_{n,1/6}(\mathcal{X} \geq 5)$	0.878	0.890	0.901	0.911

h) **Kim** (Hurricane) **Huybrechts** (*1985, belgischer Profidarter) schlug 2016 den deutschen Meister Max Hopp in der zweiten Runde der Darts WM glatt mit 4:0.

$P(\mathcal{X} \geq k) = 1 - P(\mathcal{X} \leq k-1) = 1 - binomcdf(n, 1/3, k-1)$;
$k = 1 \Rightarrow n = 6$, $k = 2 \Rightarrow n = 8$, $k = 3 \Rightarrow n = 12$, $k = 4 \Rightarrow n = 16$, $k = 5 \Rightarrow n = 19$,

$k = 2$: | n	6	7	8	9
$P_{n,1/3}(\mathcal{X} \geq 2)$	0.649	0.737	0.805	0.857

$k = 3$: | n	10	11	12	13
$P_{n,1/3}(\mathcal{X} \geq 3)$	0.701	0.766	0.819	0.861

$k = 4$: | n	14	15	16	17
$P_{n,1/3}(\mathcal{X} \geq 4)$	0.739	0.791	0.834	0.870

$k = 5$: | n	17	18	19	20
$P_{n,1/3}(\mathcal{X} \geq 5)$	0.719	0.769	0.812	0.848

i) 'Lesen gefährdet die Dummheit' ist eine Variation des Spruches 'Rauchen gefährdet die Gesundheit'.

$P(\mathcal{X} \geq k) = 1 - P(\mathcal{X} \leq k-1) = 1 - binomcdf(n, 1/4, k-1)$;
$k = 1 \Rightarrow n = 9$, $k = 2 \Rightarrow n = 15$, $k = 3 \Rightarrow n = 20$, $k = 4 \Rightarrow n = 25$, $k = 5 \Rightarrow n = 30$,

$k = 2$: n	13	14	15	16
$P_{n,1/4}(\mathcal{X} \geq 2)$	0.873	0.899	0.920	0.937

$k = 3$: n	18	19	20	21
$P_{n,1/4}(\mathcal{X} \geq 3)$	0.865	0.889	0.909	0.925

$k = 4$: n	23	24	25	26
$P_{n,1/4}(\mathcal{X} \geq 4)$	0.863	0.885	0.904	0.912

$k = 5$: n	28	29	30	31
$P_{n,1/4}(\mathcal{X} \geq 5)$	0.865	0.885	0.902	0.917

Aufg. 341/861: a) Das Titellied der Zeichentrickserie der **Biene Maja** wird von Karel Gott gesungen. Die sieben Waben stammt von dem Märchen 'Die 7 Schwaben'.

$E = n\dot{p} = 7 \cdot 0.4 = 2.8$; $P_{n,0.4}(\mathcal{X} \geq 2) = 1 - P_{n,0.4}(\mathcal{X} \leq 2-1) = 1 - P_{n,0.4}(\mathcal{X} \leq 1)$

n	3	4	5	6	7	8	9	10
$1 - P_{n,0.4}(\mathcal{X} \leq 1)$	0.352	0.5248	0.663	0.767	0.841	0.894	0.929	0.954

Sie braucht 10 Waben; muss sich also 3 Waben leihen.

n	1	2	...	7	8	9	10	...
$P_{n,0.4}(\mathcal{X} \geq 2)$	0	0.16	...	0.841	0.894	0.929	0.954	...

b) **Marcos Knight** ist ein US amerikanischer Basketballspieler, der 2020 beim Geisterturnier für die MHP Riesen Ludwigsburg spielte.

Clifton muss mindestens 15 Freiwürfe werfen.:

n	9	...	13	14	15	16	...
$P_{n,0.8}(\mathcal{X} \geq 10)$	0	...	0.747	0.87	0.939	0.973	...

Aufg. 341/862: a) $\mathcal{X}$ =Anzahl der verlorenen Spiele; $\mathcal{X}$ ist $B_{4;\frac{2}{3}}$ verteilt; Erfolg ist 'Spiel verloren'.
$P(\mathcal{X} = 2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 6 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{8}{27}$.

b) $\mathcal{X}$ ist $B_{10;\frac{2}{3}}$ verteilt; Erfolg ist 'Spiel verloren'.
$A = \mathcal{X} \geq 8$ also von 10 Spielen gehen mindestens 8 verloren.

Aufg. 341/863: a) $\mathcal{X}$ =Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln; $\mathcal{X}$ ist $B_{20,0.6}$ verteilt, Erfolg ist 'gezogene Kugel ist schwarz'. $P(X \geq 12) = 1 - P(X \leq 11) \approx 0.596$.

$E(\mathcal{X}) = \mu = n \cdot p = 20 \cdot 0.6 = 12$;
$P(10 \leq \mathcal{X} \leq 14) = P(\mathcal{X} \leq 14) - P(\mathcal{X} \leq 10-1) \approx 0.8744 - 0.1275 = 0.7469$;

b) $P(SSWWWWWW) = 0.3^2 \cdot 0.7^6$, die doppelte schwarz kann an 7 Stellen vorkommen; damit ist $P(b) = 7 \cdot 0.3^2 \cdot 0.7^6 \approx 0.074$.

c) Folgende Fälle müssen betrachtet werden:

i) Aus G_1 werden 2 schwarze Kugeln gezogen mit Wk $\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9}$: $P(S) = \frac{5}{12}$

ii) Aus G_1 werden eine schwarze und eine weiße Kugel gezogen mit Wk $2 \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9}$: $P(S) = \frac{4}{12}$

iii) Aus G_1 werden zwei weiße Kugeln gezogen mit Wk $\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9}$: $P(S) = \frac{3}{12}$

Gesamt gilt: $P(S) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{12} + 2 \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{12} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{3}{12} = 0.35$

Aufg. 341/864: **a)** $\mathcal{X}$ =Anzahl der fehlerhaften Bleistifte; $\mathcal{X}$ ist $B_{800;0.05}$ verteilt. Erfolg ist 'Bleistift ist fehlerhaft'. $P(\mathcal{X} \leq 30)[= \mathit{binomcdf}(800, 0.05, 30)] \approx 0.057$.
b) $E = n \cdot p = 800 \cdot 0.05 = 40$;
$P(31 \leq \mathcal{X} \leq 49)[= \mathit{binomcdf}(800, 0.05, 49) - \mathit{binomcdf}(800, 0.05, 30)] \approx 0.8777$.

c) $H_0 : p \leq 0.02$, $H_1 : p > 0.02$ $n = 800$, $\mathcal{Y}$ ist **im Extremfall** $B_{800;0.02}$ verteilt. Erfolg ist 'Bleistift ist fehlerhaft'. Schätzung mit der Normalverteilung:

$$k \approx 1.645 \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} + 0.5 + n \cdot p = 1.645 \cdot \sqrt{800 \cdot 0.02 \cdot 0.98} + 0.5 + 800 \cdot 0.02 \approx 23.01.$$

$P(\mathcal{Y} \geq 23) \approx 0.05637$, $P(\mathcal{Y} \geq 24) \approx 0.03518$, damit wird die Nullhypothese bei mindestens 24 fehlerhaften Stiften verworfen. Die Schätzformel hat das richtige Ergebnis geliefert.

Aufg. 342/865: mBdA (= mit Berücksichtigung der Anordnung)
a) mBdA: $x = 2$: $\frac{10!}{(10-2)!} = 10 \cdot 9$; $x = 5$: $\frac{10!}{(10-5)!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$; $x = 10$: $\frac{10!}{(10-10)!} = 10!$;
oBdA: $x = 2$: $\frac{10!}{(10-2)! \cdot 2!} = \binom{10}{2}$; $x = 5$: $\frac{10!}{(10-5)! \cdot 5!} = \binom{10}{5}$; $x = 10$: $\frac{10!}{(10-10)! \cdot 10!} = \binom{10}{10} = 1$;
b) $x = 2$: 10^2, $x = 5$: 10^5 und $x = 10$: 10^{10};

Sei $\mathcal{X}$ =Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln; $\mathcal{X}$ ist $B_{100,0.3}$ verteilt:
c) i) $P(\mathcal{X} = 3) = \frac{10!}{3! \cdot 7!} \cdot 0.3^3 \cdot 0.7^7$ $[= \mathit{binompdf}(10, 0.3, 3)] \approx 0.2668$,
ii) $P(\mathcal{X} \leq 3)$ $[= \mathit{binomcdf}(10, 0.3, 3)] \approx 0.6496$,
iii) $P(\mathcal{X} \geq 5) = 1 - P(\mathcal{X} \leq 4)$ $[= 1 - \mathit{binomcdf}(10, 0.3, 4)] \approx 0.1503$,
iv) $P(2 \leq \mathcal{X} \leq 4) = P(\mathcal{X} \leq 4) - P(\mathcal{X} \leq 1)[= \mathit{binomcdf}(10, 0.3, 4) - \mathit{binomcdf}(10, 0.3, 1)] \approx 0.7004$;
d) $E = n \cdot p = 10 \cdot 0.3 = 3$
e) Eine: Sei $\mathcal{Y}$ die Anzahl der Züge bis zur ersten schwarzen Kugel, dann gilt
$P(\mathcal{Y} \leq k) = 1 - P(\mathcal{Y} > k) = 1 - 0.7^k$, $1 - 0.7^k = 0.9 \Leftrightarrow 0.7^k = 0.1 \Leftrightarrow k = \frac{\log(0.1)}{\log(0.7)} \approx 6.456$
also mindestens 7 Züge (kann auch mit $[= 1 - \mathit{binomcdf}(n, 0.3, 0)]$ gerechnet werden).

Drei: Sei $\mathcal{X}$ die Anzahl der schwarzen Kugeln bei n Zügen, dann gilt
$P_{n,0.3}(\mathcal{X} \geq 3) = 1 - P_{n,0.3}(\mathcal{X} \leq 2)$ $[= 1 - \mathit{binomcdf}(n, 0.3, 2)]$;
$P_{15,0.3}(\mathcal{X} \geq 3) \approx 0.87317$, $P_{16,0.3}(\mathcal{X} \geq 3) \approx 0.90064$ also mindestens 16 Züge.

f) E ist vermutlich 8 also ist $E = n \cdot p \Leftrightarrow$
i) $8 = 20 \cdot p \Leftrightarrow p = \frac{8}{20} = 0.4$; **ii)** $8 = n \cdot \frac{1}{3} \Leftrightarrow n = \frac{8}{1/3} = 24$;

Beweis des Erwartungswertes der Binomialverteilung

Aufg. 342/866: $\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$

Aufg. 342/867:

a) T1: k	0	1	2
$P(\mathcal{X} = k)$	q^2	$2 \cdot p \cdot q$	p^2

T2: k	0	1	2	3
$P(\mathcal{X} = k)$	q^3	$3 \cdot p \cdot q^2$	$3 \cdot p^2 \cdot q$	p^3

$n = 2$: $E(\mathcal{X}) = \mu = 0 \cdot q^2 + 1 \cdot 2 \cdot p \cdot q + 2 \cdot p^2 = 2 \cdot p \cdot (q + p) = 2p$.

$$\begin{aligned} n = 3\text{: } E(\mathcal{X}) = \mu &= 0 \cdot q^3 + 1 \cdot 3 \cdot p \cdot q^2 + 2 \cdot 3 \cdot p^2 \cdot q + 3 \cdot p^3 \\ &= 3 \cdot p \cdot q^2 + 3 \cdot p \cdot 2 \cdot p \cdot q + 3 \cdot p \cdot p^2 \\ &= 3 \cdot p(q^2 + 2 \cdot p \cdot q + p^2) = 3 \cdot p(q+p)^2 = 3p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k \cdot P(\mathcal{X}=k) &= k \cdot \tfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!} p^k \cdot q^{n-k} && \mid \text{Formel von Bernoulli} \\
&= n \cdot p \cdot (k \cdot \tfrac{(n-1)!}{k! \cdot (n-k)!} p^{k-1} \cdot q^{n-k}) && \mid n \cdot p \text{ separiert und } (n-1)! = \tfrac{n!}{n} \\
&= n \cdot p \cdot (\tfrac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot ((n-1)-(k-1))!} p^{k-1} \cdot q^{(n-1)-(k-1)}) && \mid (k-1)! = \tfrac{k!}{k} \\
&= n \cdot p \cdot \tbinom{n-1}{k-1} p^{k-1} \cdot q^{(n-1)-(k-1)} = n \cdot p \cdot (P(\mathcal{X}=k-1))
\end{aligned}$$

aufsummiert von $k = \underline{1}$ bis $k = \underline{n}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\underline{E(\mathcal{X})} &= n \cdot p \cdot P_{n-1,p}(\mathcal{X}=0) + n \cdot p \cdot P_{n-1,p}(\mathcal{X}=1) + ... + n \cdot p \cdot P_{n-1,p}(\mathcal{X}=\underline{n-1}) \\
&= n \cdot p \cdot (P_{n-1,p}(\mathcal{X}=0) + P_{n-1,p}(\mathcal{X}=1) + ... + P_{n-1,p}(\mathcal{X}=\underline{n-1})) \\
&= n \cdot p \cdot \underline{1} = n \cdot p \ .
\end{aligned}$$

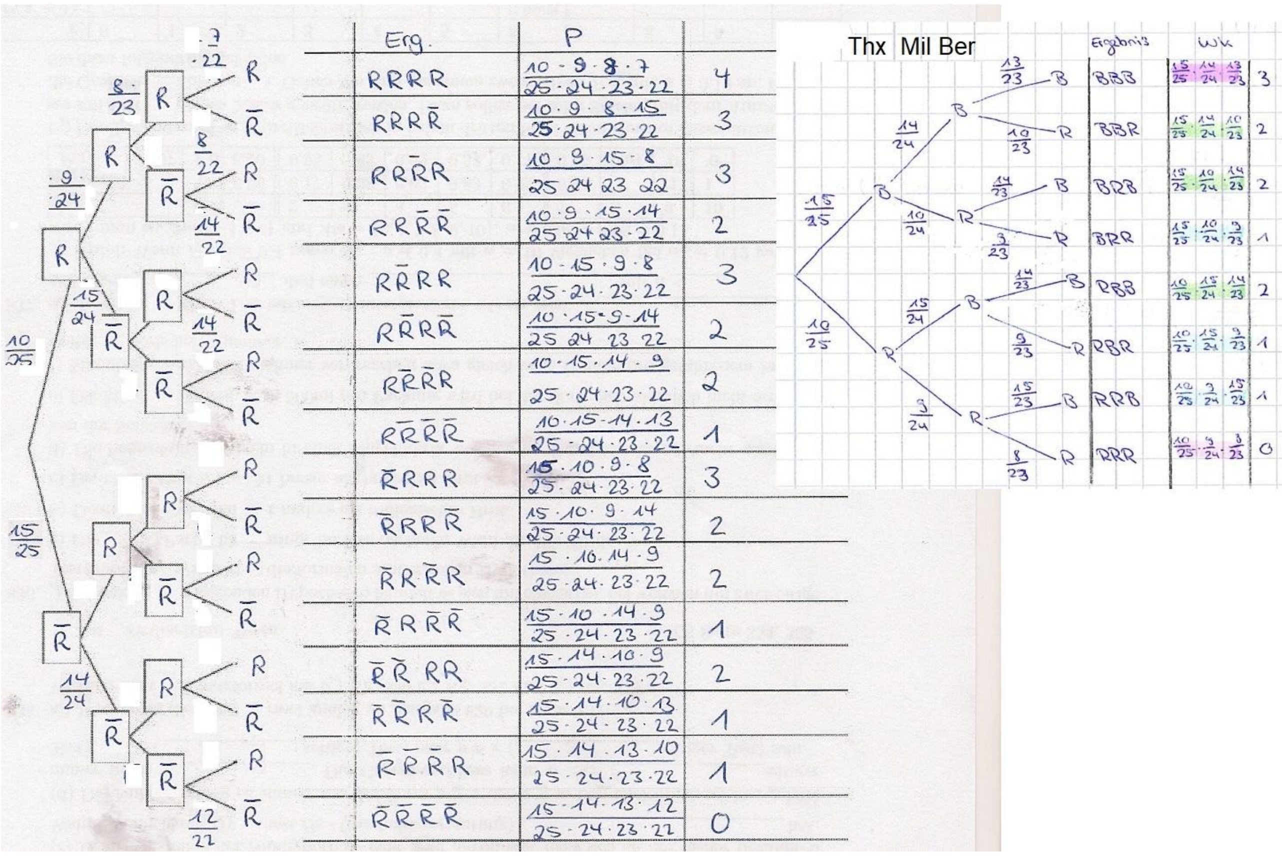


Abb. 528 hgV Baum LöVo zu Aufgabe 343/870

15.12.4 LöVo zu Einheit 12.4 Hypergeometrische Verteilung; beinahe Binvert

Aufg. 342/868: a) $P(1,1,2,2,2,3) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1$, $(1,1,2,2,2,3)$ kann auf $\frac{6!}{2!3!1!}$ Weisen permutiert werden. Damit ist die gesuchte Wk: $p = \frac{6!}{2! \cdot 3! \cdot 1!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1$.

b) die Wk ist $\frac{(n_a+n_b+n_c)!}{n_a! \cdot n_b! \cdot n_c!} \cdot p_a^{n_a} \cdot p_b^{n_b} \cdot p_c^{n_c}$.

Aufg. 343/869: a) i) $P(0,0,0,3,0,3) = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot (\frac{1}{6})^6 \approx 0.0004$; ii) $\frac{6!}{6^6}$.

b) $P(3,3,3,3,3,3) = \frac{18!}{3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3!} \cdot (\frac{1}{6})^{18} \approx 0.0865$; c) $P(2,4,3,1) = \frac{10!}{2! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 1!} \cdot (\frac{1}{4})^{10} \approx 0.012$;

d) $P(1,3,0) = \frac{10!}{1! \cdot 3! \cdot 6!} \cdot 0.05^1 \cdot 0.2^3 \cdot 0.75^6$; e) $P(7,2,1) = \frac{10!}{7! \cdot 2! \cdot 1!} \cdot 0.75^7 \cdot 0.2^2 \cdot 0.05^1 \approx 0.0961$;

Aufg. 343/870: a) fehlt noch b+c) (Abb. 528)

d) Schreiben Sie $25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22$ als Quotient von Fakultäten. $25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = \frac{25!}{21!}$.

$$P(\mathcal{X}=1) = \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot \frac{\frac{10!}{9!} \cdot \frac{15!}{12!}}{\frac{25!}{21!}} = \frac{\frac{10!}{9! \cdot 1!} \cdot \frac{15!}{12! \cdot 3!}}{\frac{25!}{4! \cdot 21!}} = \frac{\binom{10}{1} \cdot \binom{15}{3}}{\binom{25}{4}} \qquad \textbf{e)}\ P(\mathcal{X}=k) = \frac{\binom{5}{k} \cdot \binom{15}{4-k}}{\binom{25}{4}};$$

Aufg. 343/870: f) $P(RRRR\bar{R}\bar{R}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{(6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 3)}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{\frac{6!}{2!} \cdot \frac{4!}{2!}}{\frac{10!}{4!}}$ (mBdA!);

Jetzt oBdA: $P(\mathcal{X}=4) = \frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{\frac{6!}{2!} \cdot \frac{4!}{2!}}{\frac{10!}{4!}} = \frac{\frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{4!}{2!2!}}{\frac{10!}{6!4!}} = \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{10}{6}}$;

g) $N-M$ sind Misserfolge.

$$\text{mBdA:} \quad P(RRRR\bar{R}\bar{R}) = \frac{M}{N} \cdot \frac{M-1}{N-1} \cdot \ldots \cdot \frac{M-k+1}{N-k+1} \cdot \frac{N-M}{N-k} \cdot \frac{N-M-1}{N-k-1} \cdot \ldots \cdot \frac{N-M-(n-k)}{N-n+1}$$

$$= \frac{M \cdot (M-1) \cdot \ldots \cdot (M-k+1) \cdot (N-M) \cdot (N-M-1) \cdot \ldots \cdot (N-M-(n-k))}{N \cdot (N-1) N-1 \cdot \ldots \cdot (N-k+1) \cdot (N-k) \cdot (N-k-1) \cdot \ldots \cdot (N-n+1)}$$

$$= \frac{\frac{M!}{(M-k)!} \cdot \frac{(N-M)!}{(N-M-n+k-1)!}}{\frac{N!}{(N-n)!}};$$

$$\text{oBdA:} \quad P(\mathcal{X}=k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{\frac{M!}{(M-k)!} \cdot \frac{(N-M)!}{(N-M-n+k-1)!}}{\frac{N!}{(N-n)!}}$$

$$= \frac{\frac{M!}{k!(M-k)!} \cdot \frac{(N-M)!}{(n-k)! \cdot (N-M-n+k-1)!}}{\frac{N!}{n! \cdot (N-n)!}} = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

h) $\mathcal{X}$ zählt die Mädchen.
i) $P(\mathcal{X}=3) = \frac{\binom{11}{3}\binom{9}{2}}{\binom{20}{5}} = \frac{165 \cdot 36}{15504} \approx 0.38$; ii) $P(\mathcal{X} \geq 4) = \frac{\binom{11}{4}\binom{9}{1}}{\binom{20}{5}} + \frac{\binom{11}{5}\binom{9}{0}}{\binom{20}{5}} = \frac{330 \cdot 9 + 462}{15504} \approx 0.22$; iii) $P(\text{Anna+Lisa}) = \frac{\binom{2}{2}\binom{18}{3}}{\binom{20}{5}} = \frac{1 \cdot 816}{15504} \approx 0.05$.

Aufg. 343/870: i) In der Lottotrommel sind N =49 Kugeln. M=6 davon wurden von mir getippt – sie können also als andersfarbig gedacht werden. Es werden n =6 Kugeln davon gezogen. Wie groß ist die Wk genau zwei Farbige zu ziehen? $P(\mathcal{X}=2) = \frac{\binom{6}{2}\binom{43}{6-2}}{\binom{49}{6}} \approx 0.132$, $P(\mathcal{X}=k) = \frac{\binom{6}{k}\binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}}$.

k	0	1	2	3	4	5	6
$P(\mathcal{X}=k)$	0.43596	0.41302	0.1324	0.01765	0.0009686	$1.85 \cdot 10^{-5}$	$7.15 \cdot 10^{-8} \approx 1 : 14\,000\,000$

j) Gesucht ist der österreichische Ex Außenminister **Heinz-Christian Strache**, der auf Ibiza einer angeblichen russischen Oligarchen-Nichte Staatsaufträge gegen Parteispenden anbot. Daraufhin zerbrach 2019 die österreichische Regierung. Staatschef war damals Sebastian Kurz, der in Karikaturen immer mit besonders großen Ohren dargestellt wird (dies soll aber seine Leistung als Politiker nicht schmälern).

Sei $\mathcal{X}$ die Anzahl der getroffenen Betrügerinnen, dann ist $N = 16 + 4 = 20, M = 4, n = 3$,

i) $P(\mathcal{X} \geq 1) = 1 - P(\mathcal{X}=0) = 1 - \frac{\binom{4}{0} \cdot \binom{16}{4}}{\binom{20}{4}} = 1 - \frac{1820}{4845} \approx 0.6244$;

ii) $P(\mathcal{X} \geq 2) = P(\mathcal{X}=2) + P(\mathcal{X}=3) \quad = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{16}{2}}{\binom{20}{4}} + \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{16}{1}}{\binom{20}{4}} = \frac{720+64}{4845} \approx 0.1618$

Aufg. 343/871: a) Es ist eine hgV, weil wir ohne Zurücklegen und oBdA ziehen.

b) Wir rechnen mit $E = \frac{20}{50} \cdot n$ markierten Fischen (Abb. 529). $E = n \cdot \frac{M}{N}$.

c) i) $P(\mathcal{X}=3) = \frac{\binom{7}{3}\binom{143}{27}}{\binom{150}{30}} \approx 0.1134$,

ii) $P(\mathcal{X}=5)=\frac{\binom{7}{5}\binom{143}{25}}{\binom{150}{30}}\approx 0.0035$,
iii) $E=\frac{M}{N}\cdot n=\frac{7}{150}\cdot 30=1.4$.

→ Bild zu Aufgabe 870 und 871 →

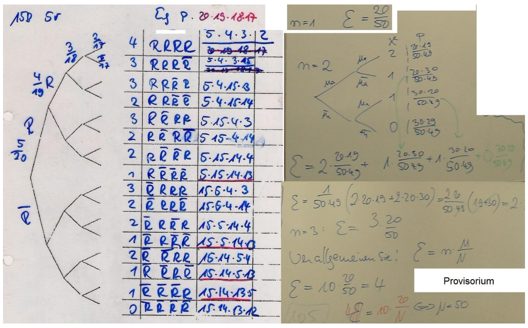


Abb. 529 hgV LöVo zu Aufgabe 343/871

d) i) $P(\mathcal{X}=4)=\frac{\binom{9}{4}\binom{19}{4}}{\binom{28}{8}}=\frac{126\cdot 3876}{3108105}\approx 0.1571$,

ii) $P(\mathcal{X}=8)=\frac{\binom{9}{8}\binom{19}{0}}{\binom{28}{8}}\frac{9\cdot 1}{3108105}\approx 0.0000029='0'$, ;) iii) $E=\frac{M}{N}\cdot n=\frac{9}{28}\cdot 8\approx 2.57$.

e) $P(\mathcal{X}=k)=\frac{\binom{5}{k}\binom{45}{3-k}}{\binom{50}{3}}$, $E=\frac{5}{50}\cdot 3=0.3$.

Aufg. 343/872: $E=\frac{M}{N}\cdot n\ 4=\frac{20}{N}\cdot 10\Leftrightarrow N=50$, verallgemeinert $N=\frac{M}{E}\cdot n$.

Aufg. 344/873: $\underline{p=\frac{\mu}{n}}$ Beachten Sie, dass $(1+\frac{x}{n})^n \xrightarrow{n\to\infty} e^x$.

a) $P(\mathcal{X}=1)=\binom{n}{1}\cdot p\cdot(1-p)^{n-1}=n\cdot\frac{\mu}{n}\cdot(1-\frac{\mu}{n})^{n-1}=n\cdot\frac{\mu}{n}\cdot(1-\frac{\mu}{n})^{n-1}\xrightarrow{n\to\infty}\mu\cdot e^{-\mu}$;

b) $P(\mathcal{X}=2)=\binom{n}{2}\cdot p^2\cdot(1-p)^{n-2}=\frac{n\cdot(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{\mu}{n}\right)^2\cdot(1-\frac{\mu}{n})^{n-2}$

$=\frac{n\cdot(n-1)}{n^2}\cdot\frac{\mu^2}{2!}\cdot(1-\frac{\mu}{n})^n:(1-\frac{\mu}{n})^2\xrightarrow{n\to\infty}\frac{\mu^2}{2!}\cdot e^{-\mu}$;

$P(\mathcal{X}=3)=\binom{n}{3}\cdot p^3\cdot(1-p)^{n-3}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3!}\cdot\left(\frac{\mu}{n}\right)^3\cdot(1-\frac{\mu}{n})^{n-3}$

$=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{n^3}\cdot\frac{\mu^3}{3!}\cdot(1-\frac{\mu}{n})^n:(1-\frac{\mu}{n})^3\xrightarrow{n\to\infty}\frac{\mu^3}{3!}\cdot e^{-\mu}$;

$P(\mathcal{X}=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\cdot\left(\frac{\mu}{n}\right)^k\cdot(1-\frac{\mu}{n})^{n-k}$

$=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k}\cdot\frac{\mu^k}{k!}\cdot(1-\frac{\mu}{n})^n:(1-\frac{\mu}{n})^k\xrightarrow{n\to\infty}\frac{\mu^k}{k!}\cdot e^{-\mu}$;

c) Eine ZG $\mathcal{X}$ heißt Poissonverteilt mit Erwartungswert $\mu>0\Leftrightarrow P(\mathcal{X}=k)=\underline{\frac{\mu^k}{k!}\cdot e^{-\mu}}$

d) $P(\mathcal{X}=0)+P(\mathcal{X}=1)+P(\mathcal{X}=2)+\ldots=e^{-\mu}+\frac{\mu}{1!}\cdot e^{-\mu}+\frac{\mu^2}{2!}\cdot e^{-\mu}+\frac{\mu^3}{3!}\cdot e^{-\mu}+..+\frac{\mu^k}{k!}\cdot e^{-\mu}+..$
$=e^{-\mu}(1+\frac{\mu}{1!}+\frac{\mu^2}{2!}+\frac{\mu^3}{3!}+..+\frac{\mu^k}{k!}+..)=e^{-\mu}(e^{\mu})$ (Taylor) $=1$ (qed).

e) $0\cdot P(\mathcal{X}=0)+1\cdot P(\mathcal{X}=1)+2\cdot P(\mathcal{X}=2)+\ldots=\frac{\mu}{1!}\cdot e^{-\mu}+2\cdot\frac{\mu^2}{2!}\cdot e^{-\mu}+3\cdot\frac{\mu^3}{3!}\cdot e^{-\mu}+..+k\cdot\frac{\mu^k}{k!}\cdot e^{-\mu}+..$

$=\frac{\mu}{0!}\cdot e^{-\mu}+\frac{\mu^2}{1!}\cdot e^{-\mu}+\frac{\mu^3}{2!}\cdot e^{-\mu}+..+\frac{\mu^k}{(k-1)!}\cdot e^{-\mu}+..\quad=\mu\cdot e^{-\mu}\cdot(\frac{1}{0!}+\frac{\mu}{1!}+\frac{\mu^2}{2!}+..+\frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!}+..)$

$=\mu\cdot e^{-\mu}\cdot(e^{\mu})=\mu$ (qed).

f) Anzahl der Unfälle $=0\cdot 109+1\cdot 65+2\cdot 22+3\cdot 3+4\cdot 1=122$; $\mu=\frac{122}{200}=0.61$

Anzahl k der tödlichen Unfälle	0	1	2	3	4
Anzahl der Berichte	109	65	22	3	1
Theoretische Werte $200\cdot\frac{0.61^k}{k!}\cdot e^{-0.61}$	108.67	66.29	20.22	4.11	0.63

Aufg. 344/874: a) $\mu=3$, sei $\mathcal{X}$ die Anzahl der Einsätze in einem Monat, dann ist $\mathcal{X}$ Poissonverteilt mit $\mu=3$.

$P(\mathcal{X}=0)=\frac{3^0}{0!}\cdot e^{-3}\approx 0.0498$, $P(\mathcal{X}=1)=\frac{3^1}{1!}\cdot e^{-3}\approx 0.1494$, $P(\mathcal{X}=2)=\frac{3^2}{2!}\cdot e^{-3}\approx 0.2240$,
$P(\mathcal{X}=3)=\frac{3^3}{3!}\cdot e^{-3}\approx 0.2240$, $P(\mathcal{X}\le 2)\approx 0.0498+0.1494+0.2240=0.4232$
$P(\mathcal{X}\ge 4)=1-P(\mathcal{X}\le 3)\approx 1-0.4232-0.2240=0.3528$

b) $\mu = 4$, sei $\mathcal{X}$ die Anzahl der Unfälle nächstes Jahr, dann ist $\mathcal{X}$ Poissonverteilt mit $\mu = 4$.

$P(\mathcal{X} = 0) = \frac{4^0}{0!} \cdot e^{-4} \approx 0.0183$, $\quad P(\mathcal{X} = 1) = \frac{4^1}{1!} \cdot e^{-4} \approx 0.0732$, $\quad P(\mathcal{X} = 2) = \frac{4^2}{2!} \cdot e^{-4} \approx 0.1465$,
$P(\mathcal{X} = 3) = \frac{4^3}{3!} \cdot e^{-4} \approx 0.1954$, $\quad P(\mathcal{X} \leq 2) \approx 0.0183 + 0.0732 + 0.1465 = 0.2381$
$P(\mathcal{X} \geq 4) = 1 - P(\mathcal{X} \leq 3) \approx 1 - 0.0183 - 0.0732 - 0.1465 - 0.1954 = 0.5666$

c) $\mu = 2.8$, sei $\mathcal{X}$ die Anzahl der geschossenen Tore, dann ist $\mathcal{X}$ Poissonverteilt mit $\mu = 2.8$. $P(\mathcal{X} = 3) = \frac{2.8^3}{3!} \cdot e^{-2.8} \approx 0.2225$, $P(\mathcal{X} = 0) = \frac{0^3}{0!} \cdot e^{-2.8} \approx 0.0608$,

$\mu = 2.8 \cdot 9 = 25.2$, sei $\mathcal{X}$ die Anzahl der geschossenen Tore,

$P(\mathcal{X} = 25) = \frac{25^3}{25!} \cdot e^{-2.8} \approx 0.0796$,

d) i) Hier ist (vernünftigerweise) $\mu = 4/2 = 2$, $P(\mathcal{X} = 3) = \frac{2^3}{3!} \cdot e^{-2} \approx 0.1804$;

ii) Hier ist (vernünftigerweise) $\mu = 4 \cdot 2 = 8$, $P(\mathcal{X} = 5) = \frac{8^5}{5!} \cdot e^{-8} \approx 0.0916$;

e) $\mathcal{X}$ ist die Anzahl der Verwarnungen. i) $\mu = \frac{3}{7}$, $P(\mathcal{X} = 0) = e^{-\frac{3}{7}} \approx 0.6517$,

ii) $\mu = 12$, $P(\mathcal{X} = 12) \approx 0.1144$.

f) $\mu = n \cdot p = 200 \cdot 0.5 = 1$ Sei $\mathcal{X}$ die Anzahl der farbenblinden Frauen, dann ist $\mathcal{X}$ $B_{200,0.005}$ verteilt oder Poissonverteilt mit $\mu = 1$.

$P(\mathcal{X} = 0) = \frac{1^0}{0!} \cdot e^{-1} \approx 0.3679$, $\quad P(\mathcal{X} = 1) = \frac{1^1}{1!} \cdot e^{-1} \approx 0.3679$, $\quad P(\mathcal{X} = 2) = \frac{1^2}{2!} \cdot e^{-1} \approx 0.1839$,
$P(\mathcal{X} = 3) = \frac{1^3}{3!} \cdot e^{-1} \approx 0.0613$, $\quad P(\mathcal{X} \leq 3) \approx 0.3679 + 0.3679 + 0.1839 + 0.0613 = 0.9810$
$P(\mathcal{X} \geq 2) = 1 - P(\mathcal{X} \leq 1) \approx 1 - 0.3679 - 0.3679 = 0.2642$

Vergleich der Verteilungen:

	k	0	1	2	3	4	5	6
Poisson: $\mu = 1$	$P(\mathcal{X} = k)$	0.3679	0.3679	0.1839	0.0613	0.0153	0.003	'0'
$B_{200,0.5}$	$P(\mathcal{X} = k)$	0.3670	0.3688	0.1844	0.0612	0.0151	0.003	'0'

Aufg. 345/875: a) Sei $\mathcal{X}$ die Anzahl der gezogenen gelben Kugeln.

i) Weil mit Zurücklegen gezogen wird, ist $\mathcal{X} \sim B_{3,0.7}$ (verteilt). $P(\mathcal{X} = 2) = \binom{3}{2} \cdot 0.7^2 \cdot 0.3^1$.

ii) Weil ohne Zurücklegen gezogen wird, ist $\mathcal{X}$ hypergeometrisch verteilt. Hier ist $N = 10$, $n = 7$, $M = 3$ und $k = 2$; also ist $P(\mathcal{X} = 2) = \frac{\binom{7}{2} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{10}{3}}$

b) Sei $\mathcal{Y}$ die Anzahl der gezogenen Kugeln bis zur ersten roten Kugel.

i) Weil mit Zurücklegen gezogen wird, ist $\mathcal{Y}$ geometrisch verteilt. $P(\mathcal{Y} = 3) = 0.7^2 \cdot 0.3$.

ii) $P(\mathcal{Y} = 3) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8}$.

c) Sei $\mathcal{X}$ die Anzahl die Anzahl der Unfälle im betrachteten Jahr. Faustregel: Es ist nur der Erwartungswert gegeben und die Anzahl der Versuche (Begegnungen an der Kreuzung) ist sehr groß; ist Unfallwahrscheinlichkeit ist nahe Null, damit wird angenommen, dass $\mathcal{X}$ poissonverteilt mit $\lambda = \mu = 3$ ist. $P(\mathcal{X} = 2) = \frac{3^2}{3!} \cdot e^{-3}$.

d) Sei $\mathcal{Y}$ die Anzahl der Versuche, dann ist i) $P(\mathcal{Y} = 3) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$.

ii) $\mathcal{Y}$ geometrisch verteilt. $P(\mathcal{Y} = 3) = 0.8^2 \cdot 0.2$.

e) Sei $\mathcal{X}$ die Anzahl der teilnehmenden Damen. Weil ohne Zurücklegen gezogen wird, ist $\mathcal{X}$ hypergeometrisch verteilt. Hier ist $N = 20$, $n = 5$, $M = 11$ und $k = 3$; also ist $P(\mathcal{X} = 2) = \frac{\binom{11}{3} \cdot \binom{9}{2}}{\binom{20}{5}}$.

f) Obwohl ohne Zurücklegen gezogen wird, ist $\mathcal{X} \sim B_{10,0.2}$ (verteilt), weil die Grundmenge als sehr groß angenommen wird und die Wk nach einem Zug kaum (nicht) ändert. $P(\mathcal{X} = 2) = \binom{10}{2} \cdot 0.2^2 \cdot 0.8^8$.

15.13 LöVo zu Kapitel 13: Statistik

15.13.1 LöVo zu Einheit 13.1 (Testen UE 11_4)

Bei allen Aufgaben gilt: $binomcdf(n, p, k) = P_{n,p}(\mathcal{X} \leq k)$ (GTR Befehl).

Aufg. 346/876: **Konrad** Paul **Kujau** (1938-2000) hat 1983 die Tagebücher Hitlers gefälscht und an die Zeitschrift 'Stern' verkauft.

$P(6) = \frac{1}{6}$, $E(\mathcal{X}) = (-1) \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{5}{6} = \frac{4}{6} > 0$, damit lohnt das Spiel, also 'ja'.

Vertrauen und Skepsis sind individuell - es gibt also keine eindeutige richtige Antwort.

b) $P(\mathcal{X} = n) = \left(\frac{1}{6}\right)^n$; c) $\left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{1296} \approx 0.00077$;

d) Die Hypothese $H_0 : p = \underline{\frac{1}{6}}$ heißt Nullhypothese (oder Unschuldsvermutung); die Hypothese $H_1 : p > \underline{\frac{1}{6}}$ heißt Gegenhypothese.

e) $\left(\frac{1}{6}\right)^n = 0.01 \Leftrightarrow n = \frac{\log(0.01)}{\log(1/6)} \approx 2.57$; also nach 3 Würfen mit ausschließlich 6 glauben wir ihm mit $\alpha_1 = \left(\frac{1}{6}\right)^4 \approx 0.00465 < 0.01$ nicht mehr.

Aufg. 346/877: Sei $\mathcal{X}$ =Anzahl der funktionierenden Schalter;

a) $\mathcal{X}$ ist $\underline{B_{10,0.8}}$ verteilt. $Abl = \{0..6\}$; $Ann = \{7..10\}$;

b) $P(\mathcal{X} \leq 6) = P(Abl) \approx 0.12$; c) Er glaubt $p < 0.8$ (also H_1);

d+e) $H_0 : p = 0.8$, $H_1 : p < 0.8$ (linksseitiger Test), *Abl* ist immer der Ablehnungsbereich der Hypothese $\underline{H_0}$; $\alpha_1 = \underline{P(Abl)}$.

f) Der Abl enthält die 0, er liegt also l<u>inks</u> vom Ann; der Test heißt l<u>inks</u>seitig.

Aufg. 346/878: a) Gesucht ist die Chemielehrerin Frau **Sipos**; Sipos heißt auf ungarisch Pfeifer. Ach ja und die östliche Gottheit mit Seuche ist Budapest :)

$\mathcal{X}$ ist die Anzahl der richtig erkannten Gerichte; $\mathcal{X}$ ist $B_{20;0.75}$ verteilt; Erfolg = 'Gericht erkannt'; $H_0 : p \geq 0.75$, $H_0 : p < 0.75$ (linksseitiger Test); $\alpha_1 \approx 0.01386$; $Abl = \{0..10\}$.

b) Im Film **'Findet Nemo'** lebt Nemo im Aquarium vom Zahnarzt P. Sherman, Adresse 42 Wallaby Way, Sidney.

Sei $\mathcal{X}$ =Anzahl der Kunden, die Naomi kennen; $\mathcal{X}$ ist **im Extremfall** $B_{100;0.5}$ verteilt; Erfolg = 'Kunde kennt Naomi'; $H_0 : p \geq 0.5$, $H_1 : p < 0.5$ (linksseitiger Test); $\alpha_1 \approx 0.02844$; $Abl = \{0..40\}$.

c) Zaphod Beeblebrox hat in Douglas Adams Werk 'Per Anhalter ins All' den pangalaktischen Donnergurgler gemixt. Die Wirkung eines pangalaktischen Donnergurglers ist in etwa so, als ob man mit einem riesigen Goldbarren, der in Zitronenscheiben gehüllt ist, das Gehirn aus dem Kopf gedroschen. Trinke niemals mehr als zwei pangalaktische Donnergurgler, es sei denn Du bist ein 30 t Elefant mit Bronchialasthma. Arthur (Dent) ist ein Mensch vom Planeten Erde, der von Zaphod (aus Versehen) gerettet wird.

$\mathcal{X}$ ist die Anzahl der richtig gesehenen Münzwürfe. $\mathcal{X}$ ist $B_{10,0.5}$ verteilt.

$H_0 : p = 0.5$, $H_1 : p > 0.5$, $n = 10$ und jetzt kommts: $Abl = \{7..10\}$, $Ann = \overline{Abl} = \{0..6\}$, $\alpha_1 = P(Abl) = P(\mathcal{X} \geq 7) = 1 - P(\mathcal{X} \leq 6) \approx 0.172$. α_1 ist die Wk, dass Sie doch nicht hellsehen können.

ii) Mit Wk 17% akzeptieren wir, dass Arthur hellsehen kann, obwohl es nicht stimmt.

iii) Alle Formulierungen sind immer auf Seiten der <u>Nullhypothese</u>.

d) Vincent Raven (Andreas Plörer *1966) gewann 2008 die Show 'The next Uri Geller'.

Sei $\mathcal{X}$ =Anzahl der richtig genannten Zahlen; $\mathcal{X}$ ist $B_{100;0.25}$ verteilt; Erfolg = 'Reywen erkennt die geworfene Zahl'; $H_0 : p = 0.25$, $H_1 : p > 0.25$ (rechtsseitiger Test); $\alpha_1 \approx 0.01643$; $Abl = \{35..100\}$.

Die Nullhypothese unterstellt Herrn Reywen, dass er nur rät.

e) Selina K. führte die MATHE-Partei bei 'Schule als Staat' 2016 zu grandiosen 16% der Stimmen und war Finanzministerin.

Sei $\mathcal{X}$ =Anzahl der befragten Personen, die MATHE wählen; $\mathcal{X}$ ist $B_{100;1/6}$ verteilt; Erfolg = 'Person wählt MATHE'; $H_0 : p \leq \frac{1}{6}$, $H_1 : p > \frac{1}{6}$ (rechtsseitiger Test); $Abl = \{23..100\}$;
$\alpha_1 = P(\mathcal{X} \geq 23) = 1 - P(\mathcal{X} \leq 22) = 1 - binomcdf(100, \frac{1}{6}, 22) \approx 0.063$;

f) Gesucht ist **Sir Isaak Newton**. Sir Isaac Newton 1643-1727 entdeckte ua die Darstellung gewisser Funktionen in Form von Taylor-Reihen

Sei $\mathcal{X}$ =Anzahl der Teller, die über 1000 Stunden hält; $\mathcal{X}$ ist $B_{100;0.75}$ verteilt; Erfolg = 'Teller hält mehr als 1000 Stunden'; $H_0 : p \leq 0.75$, $H_1 : p > 0.75$ (rechtsseitiger Test); $\alpha_1 \approx 0.09953$; $Ann = \{0..80\}$; $Abl = \{81..100\}$; der Abl ist immer bei den kleinen Wk.

k	78	79	80	81	82	83	84
$P(\mathcal{X} \geq k)$	0.2854	0.2114	0.1488	0.0995	0.0630	0.0376	0.0211

g) Herr Sd hat einen Sohn 'Hans', der (selbstverständlich) gerne Schokolade ißt.

Sei $\mathcal{X}$ =Anzahl der richtig bestimmten Schokoladenstücke; $\mathcal{X}$ ist $B_{10;0.5}$ verteilt; Erfolg = 'Hans ordnet die Schokolade richtig zu'; $H_0 : p \leq 0.5$, $H_1 : p > 0.5$ (rechtsseitiger Test), $\overline{Abl} = \{0..7\}$, $Abl = \{8..10\}$, $\alpha_1 = P(Abl) = 0.0547$. Beachten Sie dabei, dass Abl de Ablehnungsbereich der Nullhypothese ist.

h) Dieter Borsche spricht bei Hörspiel 'per Anhalter ins All' (Douglas Adams) den **Slartibartfaß** (orig. Slartibartfast). Slartibartfaß baut Planeten und lebt auf dem Planeten Magrathea. Bem: Borsche ist eine Mischung aus Porsche und Bosch; zwei Traditionsunternehmen aus der Region.

$\mathcal{X}$ ist die Anzahl bewohnbarer Planeten. $\mathcal{X} \sim B_{10,0.5}$; $H_0 : p = 0.5$, $H_1 : p < 0.5$ (linksseitiger Test), $n = 10$, $\overline{Abl} = \{5..10\}$, $Abl = \{0..4\}$, $\alpha_1 = P(\mathcal{X} \leq 4) \approx 0.377$.

i) Lara M. war im Jahre 2014 wie Karolina K. und Svenja H. (Ag 26/33) in der Mädchenklasse (Kl 9a, Sj 2014/15). Zu meiner großen Freude durfte ich sie (wie auch Karolina) in meinem Kurs M6 (2016-2018 = der Kurs der Superlative) wieder begrüssen. Dort hat Lara nicht nur durch hervorragende Leistungen geglänzt, sondern auch die Ämter des Buchhalters und Kavaliers 💙 hervorragend bekleidet. Ihre Idee war es, die Lernvideos zu durch Vorspann und 'Entwackeln' zu verbessern. Eventuell könnte daraus das neue Amt des Filmverbesserers entstehen (weil ich das mit Sicherheit nicht auf die Reihe bekommen werde).

$\mathcal{X}$ ist die Anzahl der Schüler, die die Videos zur KA Vorbereitung verwenden. $\mathcal{X} \sim B_{10,\frac{1}{6}}$; $H_0 : p = \frac{1}{6}$, $H_1 : p > \frac{1}{6}$ (rechtsseitiger Test), $n = 10$, $\overline{Abl} = \{0..1\}$, $Abl = \{2..10\}$, $\alpha_1 = P(\mathcal{X} \geq 2) \approx 0.51548$.

Aufg. 347/879: a) Der Test funktioniert nur in eine Richtung. Während man bei negativem Test $\overline{T}$ (Abl) ziemlich sicher sein (Wk$\approx$ 0.999733) kann, dass man die Krankheit nicht hat (hier H_0) so kann man bei positivem Test ($\overline{Abl}$) nicht davon ausgehen (Wk$\approx$ 0.0914), dass man die Krankheit hat.

c) Was ist 100 %? Allgemein kann diese Frage leider nicht beantwortet werden. Man kann nur Hinweise zum Auffinden geben. 1) 100 % ist das Ganze; 2) 100 % ist der Bezug - was hinter 'als', 'von' oder 'des' steht; 3) 100 % ist, was früher war;

d) Wir wechseln also hier im Vergleich zu Aufgabe 877 die Position vom Produzenten zum Konsumenten.
(i) Was ich also zeigen möchte, gehört in die Gegenhypothese H_1; und die Nullhypothese H_0 soll widerlegt werden.

(ii) Beim Aufstellen der Nullhypothese geht man davon aus, dass sich an der bisher bekannten Wahrscheinlichkeit (Hypothese H_0 - Unschuldsvermutung) nichts geändert hat. H_0 ist die Unschuldsvermutung bzw. das, was früher war.

(iii) Die Nullhypothese ist meist von der Form $p \geq p_0$ der $p \leq p_0$. Das Gleichheitszeichen gehört also normalerweise in die Nullhypothese. Die Gegenhypothese kann $p < p_0$ (linksseitiger Test), $p > x$ (rechtsseitiger Test) oder $p \neq p_0$ (zweiseitiger Test) sein.

(iv) Wenn (i), (i) und (iii) nicht greifen, dann wählen Sie als H_0 die Wk, die bekannt ist.

e) Sollte die Nullhypothese von der Form $p \leq p_0$ oder $p \geq p_0$ (Signalworte mindestens oder höchstens) sein, so ist in der Abitur-Lösung $\mathcal{X}$ ist 'im Extremfall' B_{n,p_0} verteilt zu notieren.

f) Durch einen Hypothesentest kann die Wk für das irrtümliche Ablehnen von H_0 beschränkt werden;

Lösung von Sd: Kleine Wk ist die Position von H_1. Damit ist H_1: $p > 0.6$ oder H_0: $p \leq 0.6$.

Abi LöVo: Also muss das irrtümliche Ablehnen von H_0 zu einer zu hohen Wk ausgegangen wird. Daher lautet eine geeignetes H_0: $p \leq 0.6$.

Aufg. 348/880: Lügfix ist der Names des Sehers aus dem Asterixband **'Der Seher'**. Der Name 'Asterix' leitet sich dem Wort Asterisk (aus dem Griechischen) = Sternchen als Hinweis auf eine Fußnote ab.

a) Sei $\mathcal{X}$ =Anzahl der gezogenen Gewinne; $\mathcal{X}$ ist $B_{10;2/3}$ verteilt; Erfolg = 'gezogenes ist ein Gewinn'; $H_0 : p \geq \frac{2}{3}$, $H_1 : p < \frac{2}{3}$ (linksseitiger Test);

b) $E = n \cdot p = 10 \cdot \frac{2}{3} = 6,\bar{6}$; c) $Abl = \{0..6\}$; $\overline{Abl} = \{7..10\}$; $\alpha_1 = P(Abl) \approx 0,4407$; d) 44%;

e) Sei $Abl = \{0,..,k\}$, dann gilt $P(Abl) = P(\mathcal{X} \leq k)$ ist eine Funktion abhängig von k, welche man als Wertetabelle darstellen kann. Zeichnen Sie die Grenze zwischen $\overline{Abl}$ und Abl in Form eines Striches ein.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(\mathcal{X} \leq k)$	'0'	0.0004	0.0034	0.0197	0.0766	0.2131	0.4407	0.7009	0.896	0.9827	1

$Abl = \{0,..,4\}$, $\alpha_1 \approx 0.0766$. Das Zeichen $'0'$ bedeutet fast Null aber nicht ganz Null. || markiert die Grenze zwischen $\overline{Abl}$ und Abl.

f) In der Wertetabelle markiert die Grenze zwischen Abl und $\overline{Abl}$ die Stelle, an der das Signifikanzniveau überschritten wird. Dabei ist der Ablehnungsbereich immer der Teil mit den kleinen Wahrscheinlichkeiten. f) $Abl = \{0,..,3\}$.

Aufg. 348/881: a) Wenn H_0: $p \geq 0.75$ gegen $H_1 : p < 0.75$ (linksseitiger Test) mit $n = 10$ Versuchen bei $\alpha = 0.1$ getestet wird, dann ist $Abl = \{0..5\}$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_{10,0.75}(\mathcal{X} \leq k)$	'0'	'0'	'0'	'0'	0.02	0.08	0.22	0.47	0.76	0.94	1

Das amtliche Kennzeichen der **Bundeswehr** ist 'Y'. Zu Zeiten der allgmeinen Wehrpflicht galt der Slogan: 'Y-Tours: Wir buchen, Sie fluchen'. Rommelshausen weist auf Wüstenfuchs Rommel hin. Die größte Kaserne in Deutschland ist die Generalfeldmarschall-Rommel-Kaserne in Augustdorf.

b) Sei $\mathcal{X}$ =Anzahl der Sonnentage in Urlaub; $\mathcal{X}$ ist **im Extremfall** $B_{10;0.6}$ verteilt; Erfolg = 'Sonnentag'; $H_0 : p \geq 0.6$, $H_1 : p < 0.6$ (linksseitiger Test);

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(\mathcal{X} \leq k)$	'0'	0.0017	0.0123	0.0548	0,1662	0,3669	0,6177	0,8327	0,9536	0,994	1

$Abl = \{0,..,3\}$, $\alpha_1 \approx 0.0548$ also nein.

c) Sei $\mathcal{X}$ =Anzahl der gewürfelten Sechsen; $\mathcal{X}$ ist **im Extremfall** $B_{100;1/6}$ verteilt; Erfolg = 'Werfen einer 6'; $H_0 : p \geq \frac{1}{6}$, (kann auch als $p = \frac{1}{6}$ interpretiert werden); $H_1 : p < \frac{1}{6}$ (linksseitiger Test);

k	8	9	10	11	12	13
$P(\mathcal{X} \leq k)$	0.00953	0.02129	0.0427	0.07772	0.12967	0.20001

Abl=$\{0..11\}$, $\alpha_1 \approx 0.07772$.

d) **Adrian Lewis** (*1985, Profidarter) war 2011 und 2012 PDC- Weltmeister.

Sei $\mathcal{X}$ =Anzahl der getroffenen Doppelfelder; $\mathcal{X}$ ist $B_{10;0.4}$ verteilt; Erfolg = 'Doppel wird getroffen'; $H_0 : p \geq 0.4$, $H_1 : p < 0.4$ (linksseitiger Test);

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(\mathcal{X} \leq k)$	0.0061	0.0464	0.1673	0.3823	0.6331	0.8338	0.9452	0.9877	0.9983	0.9999	1

Abl={0..1}, $\alpha_1 \approx 0.0464$ also nein, weil 2 nicht im Abl ist.

e) Die Ag basiert auf dem Witz: Warum nennt man den **Trabant** eigentlich Trabi? - Wenn er schneller wäre, würde man ihn Galoppi nennen!

Sei $\mathcal{X}$ =Anzahl der überholten Fahrzeuge; $\mathcal{X}$ ist $B_{100;0.15}$ verteilt; Erfolg = 'Auto wird überholt'; $H_0 : (p \geq 0.15)$, eigentlich $p = 0.15$; $H_1 : p < 0.15$ (linksseitiger Test);

$P(\mathcal{X} \leq 9) \approx 0.0551$, $\quad P(\mathcal{X} \leq 10) \approx 0.0995$ (Grenze) $\quad P(\mathcal{X} \leq 11) \approx 0.1635$

Also ist Abl=$\{0, .., 10\}$, und NAbl=$\{11, .., 100\}$, $\quad \alpha_1 \approx 0.0995$.
Damit : 'Ja, die Behauptung könnte zutreffen' oder 'nein, H_0 wird abgelehnt'.

f) Die **Büchse der Pandora** enthält Dinge, wie Krankheit und Tod, die entweichen, sollte man sie öffnen.

Sei $\mathcal{X}$ ist die Anzahl der gelungenen Öffnungsversuche, dann ist $\mathcal{X}$ $B_{10,0.6}$ verteilt. Erfolg ist Box konnte nicht geöffnet werden; $H_0 : p = 0.6$, $H_1 : p < 0.6$ (linksseitiger Test). Sechs Mal hat das Öffnen geklappt, damit hat es 4 Mal nicht geklappt. $P(\mathcal{X} \leq 4) \approx 0.0766$, $P(\mathcal{X} \leq 5) \approx 0.2131$. Damit ist ist $Abl = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ und $\overline{Abl} = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Wir lehnen also H_0 ab, dh. wir nehmen die Verbesserung an.

Aufg. 349/882: **a)** $P(\mathcal{X} \leq k) \approx \Phi\left(\frac{k-n \cdot p+0.5}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right)$;

b) $k = 46$ bzw $k \approx 45.78$;

c) k ist dann die Grenze zwischen $\underline{\overline{Abl}}$ und $\underline{Abl}$;

$$\begin{aligned} P(\mathcal{X} \leq k) = \quad & 0.1 && \approx \Phi\left(\frac{k-n \cdot p+0.5}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right) \\ \Leftrightarrow \quad & \Phi^{-1}(0.1) && \approx \frac{k-n \cdot p+0.5}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} \\ \Leftrightarrow \quad & -1.282 \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} && \approx k - n \cdot p + 0.5 \\ \Leftrightarrow \quad & k && \approx -1.282 \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} - 0.5 + n \cdot p. \end{aligned}$$

d+e)	Aufgabe	880 e)	881 b)	881 c)	881 e)	881 d)	881 f)
	Lösung	$4 < k < 5$	$3 < k < 4$	$11 < k < 12$	$10 < k < 11$	$1 < k < 2$	$4 < k < 5$
	Schätzung	4.11	3.37	11.25	9.78	0.63	4.26
	Differenz	0	0	0	1	1	0

Aufg. 349/883: die 10 ziemlich sicher im Ablehnungsbereich. Der *Abl* liegt also rechts.

iii) Beachten Sie, dass $P(\mathcal{X} \geq k) = \underline{1 - P(\mathcal{X} \leq k-1)}$.

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(\mathcal{X} \leq m)$	0.001	0.011	0.055	0.172	0.377	0.623	0.828	0.945	0.989	0.999	1
$k = m+1$	1	2	3	4	5	6	**7**	8	9	10	–
$P(\mathcal{X} \geq k)$	0.999	0.989	0.945	0.828	0.623	0.377	0.172	0.055	0.011	0.001	

$\Rightarrow Abl = \{8, 9, 10\}$, $Ann = \overline{Abl} = NAbl = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

b) Beim Entwerfen eines Testes bei der Gegenhypothese $H_1 : p < p_0$ benötigen wir die Wertetabelle von $P(\mathcal{X} \underline{\leq} k)$ und mit $H_0 : p \leq p_0$ und $H_1 : p > p_0$ die Tabelle von $P(\mathcal{X} \underline{\geq} k)$. Der *Abl* ist immer bei den <u>kleinen</u> Wk.

c) **Wichtig:** Geben Sie bitte bei jedem Test ob er linksseitig oder rechtsseitig ist, auch wenn dies gar nicht gefragt ist (Mathe ist vermutlich doch vermutlich eine Populärwissenschaft – deshalb steht das auch bei jedem Hypothesentest ungefragt überall) dabei. Dies erkennen Sie an H_1. Wenn $\mathcal{X} \sim B_{n,p_0}$ verteilt ist, dann ist beim linksseitigen Test ist $H_1 : p < p_0$, beim rechtsseitigen Test ist $H_1 : p > p_0$ (interpretieren Sie das Ungleichzeichen als Pfeil).

Linksseitiger Test ist $H_1 : p <- p_0$; Rechtsseitiger Test ist $H_1 : p -> p_0$;

Die Gegenhypothese generiert die Wertetabelle: $p < p_0 \longrightarrow P(\mathcal{X} \le k)$; $p > p_0 \longrightarrow P(\mathcal{X} \ge k)$.

d) Analog zu Aufgabe 880 ist Lügfix der Names des Sehers. Gute Minna = Gutemine die Frau von Majestix.

$\mathcal{X}$ ist die Anzahl der Nieten, dann ist $\mathcal{X}$ $B_{100;1/3}$ verteilt; Erfolg = 'Ziehen einer Niete';

$H_0 : p \le \frac{1}{3}$, $H_1 : p > \frac{1}{3}$ (rechtsseitiger Test);

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(\mathcal{X} \le m)$	0.017	0.104	0.299	0.559	0.787	0.923	0.980	0.997	'1'	'1'	1
$k = m + 1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$P(\mathcal{X} \ge k)$	0.983	0.896	0.701	0.441	0.213	0.077	0.020	0.003	'0'	'0'	0

$Abl = \{6, .., 10\}$, $\alpha_1 = P(Abl) = P(\mathcal{X} \ge 6) = 1 - P(\mathcal{X} \le 5) \approx 0.0766$, $Ann = \overline{Abl} = \{0, .., 5\}$;

Wenige Nieten (Erfolge) sollen akzeptiert werden - dies steht im Gegensatz zu 'viele Gewinne (Erfolge) sollen akzeptiert werden'. Die Ergebnisse beider Aufgaben sind gleich lediglich 'Erfolg' ist anders definiert.

e) Wenn H_0: $p \le 0.3$ gegen $H_1 : p > 0.3$ mit $n = 10$ Versuchen bei $\alpha = 0.1$ getestet wird, dann ist $Ann = \{0..5\}$ und $Abl = \{6..10\}$. Beachten Sie: $P_{10,0.3}(\mathcal{X} \ge k) = 1 - P_{10,0.3}(\mathcal{X} \le k - 1)$.

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(\mathcal{X} \le m)$	0.0283	0.1493	0.3828	0.6496	0.8497	0.9527	0.9894	0.9984	'1'
k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P_{10,0.3}(\mathcal{X} \ge k)$	0.9717	0.8507	0.6172	0.3504	0.1503	0.0473	0.0106	0.0016	'0'

f) Toad (engl.) = Kröte; Die Fernsehserie **Freunde und Helden** spielt im 1. Jahrhundert nach Christus. Dort kommen unter anderem Portia (Römerin der 'guten Seite') und der untersetzte grün gekleidete Bösewicht Tobias (genannt Kröte) vor. Sein Motto ist: 'Wenn die Würfel nicht so rollen wie sie sollen, betrüge!'.

Sei $\mathcal{X}$ die Anzahl der geworfenen Sechsen, dann ist $\mathcal{X}$ ist $B_{100;1/6}$ verteilt; Erfolg = 'Werfen einer 6'; $H_0 : p \le \frac{1}{6}$, $H_1 : p > \frac{1}{6}$ (rechtsseitiger Test);

m	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$P(\mathcal{X} \le m)$	0.848	0.8998	0.937	0.962	0.978	0.988	0.994	0.997	0.999
k	21	22	23	24	25	26	27	28	29
$P_{10,0.3}(\mathcal{X} \ge k)$	0.152	0.1002	0.063	0.038	0.022	0.012	0.006	0.003	0.001

$Abl = \{24, .., 100\}, \overline{Abl} = \{0, .., 23\}$, $\alpha_1 \approx 0.038$

Aufg. 350/884: $P(\mathcal{X} \ge k) = 1 - P(\mathcal{X} \le k - 1) \approx 1 - \Phi\left(\frac{(k-1)-n \cdot p+0.5}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{k-n \cdot p-0.5}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right)$.

Linksseitiger Test: $k \approx n \cdot p - 1.282 \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} - 0.5$.

Rechtsseitiger Test: $k \approx n \cdot p + 1.282 \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} + 0.5$.

Beachten Sie bitte dabei, dass $\Phi^{-1}(0.1) \approx -1.282$ und $\Phi^{-1}(0.9) = 1 - \Phi^{-1}(0.1) \approx +1.282$.

$$P(\mathcal{X} \geq k) \approx 1 - \Phi\left(\frac{k-n\cdot p-0.5}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}\right) = \alpha \quad \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{k-n\cdot p-0.5}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}\right) = 1-\alpha \qquad | -\Phi^{-1}(.)$$
$$\Leftrightarrow \frac{k-n\cdot p-0.5}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}} = \Phi^{-1}(1-\alpha) = -\Phi^{-1}(\alpha) \qquad | \cdot\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$$
$$\Leftrightarrow k - n\cdot p - 0.5 = -\Phi^{-1}(\alpha)\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)} \qquad | +0.5+n\cdot p$$
$$\Leftrightarrow k = -\Phi^{-1}(\alpha)\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)} + 0.5 + n\cdot p.$$

Bitte beachten Sie dabei, dass $\Phi^{-1}(\alpha) < 0$ falls $\alpha < 0.5$ ist. $\Phi^{-1}(0.1) \approx -1.282$;

a) $k \approx n\cdot p + 1.282\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)} + 0.5$; b) $k \approx w$;

c) Aufgabe 885 a)		b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)
Lösung	$1 < k < 2$	$2 < k < 3$	$3 < k < 4$	$6 < k < 7$	$5 < k < 6$	$7 < k < 8$	$4 < k < 5$	$3 < k < 4$	$5 < k < 6$
Schätzung	1.373	2.332	3.372	6.672	5.5	7.142	4.263	3.819	5.103
Differenz	0	0	0	0	0	0	0	0	0

d) Aufgabe 886	a)	b)	c)	d)	e)	f)
Lösung	$36 < x < 37$	$43 < x < 44$	$40 < x < 41$	$14 < x < 15$	$8 < x < 9$	$74 < x < 75$
Schätzung	36.4	42.95	41.15	14.23	9.31	74.23
Differenz	1	1	1	0	1	0

Aufg. 350/885: a) $Abl = \{0,1\}$; $\overline{Abl} = \{2,..,10\}$; b) $Abl = \{0,1,2\}$; $\overline{Abl} = \{3,..,10\}$;

c) $Abl = \{0,1,2,3\}$; $\overline{Abl} = \{4,..,10\}$; d) $Abl = \{7,8,9,10\}$; $\overline{Abl} = \{0,..,6\}$;

e) $Abl = \{6,..,10\}$; f) $Abl = \{0,..,7\}$; g) $Abl = \{5,..,10\}$; h) $Abl = \{4,..,10\}$; i) $Abl = \{0,..,5\}$;

Aufg. 350/886:

a) k	36	37
$P_{100;0.3}(\mathcal{X} \geq k)$	0.116	0.080

$Abl = \{37,..,100\}$, $\alpha_1 \approx 0.08$

b) k	43	44
$P_{100;0.5}(\mathcal{X} \leq k)$	0.0967	0.1356

$Abl = \{0,..,43\}$, $\alpha_1 \approx 0.0967$

c) k	40	41
$P_{50;0.7}(\mathcal{X} \geq k)$	0.0789	0.04

$Abl = \{41,..,50\}$, $\alpha_1 \approx 0.04$

d) k	14	15
$P_{100;0.2}(\mathcal{X} \leq k)$	0.0804	0.1285

$Abl = \{0,..,14\}$, $\alpha_1 \approx 0.0804$

e) k	9	10
$P_{50;0.1}(\mathcal{X} \geq k)$	0.0579	0.0245

$Abl = \{10,..,50\}$, $\alpha_1 \approx 0.0245$

f) k	74	75
$P_{100;0.8}(\mathcal{X} \leq k)$	0.0875	0.1314

$Abl = \{0,..,74\}$, $\alpha_1 \approx 0.0875$

Aufg. 350/887: Gottfried 'Godi' Dienst war der Schiedsrichter, der im WM-Finale 1966 das **Wembley-Tor** gegen Deutschland gegeben hat. Wegen dieser Fehlentscheidung hat Deutschland dieses Finale verloren.

Sei $\mathcal{X}$ die Anzahl der geworfenen Wappen, dann ist $\mathcal{X}$ $B_{10,0.5}$ verteilt;

a) Wappen bzw. Zahl sollten bei einer idealen Münze etwa gleich oft auftreten. Weder häufige Wappen noch häufige Zahl unterstützen H_0. Entworfen werden muss ein sowohl linksseitiger als auch rechtsseitiger Test. b) i) Einen zweiseitigen Test mit $\alpha_1 \leq \alpha$ interpretieren wir als zwei <u>einseitige</u> <u>Tests</u> also einen <u>linksseitigen</u> und einen <u>rechtsseitigen</u> <u>Test</u> mit jeweils $\alpha_1 \leq \frac{\alpha}{2}$ (hier $= 0.0983$).

b) ii) Entwerfen Sie einen <u>zwei</u>seitigen Test mit $\alpha = 0.1966$ und $n = 10$.

Wertetabelle: GTR - Version

	Abl			$\overline{Abl}$					Abl		
k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(\mathcal{X} \leq k)$	'0'	0.011	0.055	0.172	0.377	0.623	0.828	0.945	0.989	0.999	1
$P(\mathcal{X} \geq k)$	1	0.999	0.989	0.945	0.828	0.623	0.377	0.172	0.055	0.011	'0'

Wertetabelle: WTR - Version

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(\mathcal{X} \leq m)$	'0'	0.011	0.055	0.172	0.377	0.623	0.828	0.945	0.989	0.999	1

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$P(\mathcal{X} \geq k)$	0.999	0.989	0.945	0.828	0.623	0.377	0.172	0.055	0.011	'0'	

Damit ist der $Abl = \{0, 1, 2, 8, 9, 10\}$ und der $\overline{Abl} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$.

c) $\mathcal{X}$ ist $B_{10,0.4}$ verteilt; Wenn H_0: $p = 0.4$ gegen $H_1 : p \neq 0.4$ (zweiseitiger Test) mit $n = 10$ Versuchen bei $\alpha = 0.1966$ getestet wird, dann ist $\overline{Abl}$ =$\{2..6\}$ und $Abl = \{0, 1, 7, 8, 9, 10\}$, $\alpha_1 \approx 0.05 + 0.05 = 0.1$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_{10,0.4}(\mathcal{X} \leq k)$	'0'	0.05	0.17	0.38	0.63	0.83	0.95	0.99	'1'	'1'	1
$P_{10,0.4}(\mathcal{X} \geq k)$	1	0.99	0.95	0.83	0.62	0.37	0.17	0.05	0.01	'0'	'0'

d) $\mathcal{X}$ ist $B_{10;1/3}$ verteilt; Erfolg = 'Gewinn'; $H_0 : p = \frac{1}{3}$, $H_1 : p \neq \frac{1}{3}$ (zweiseitiger Test);

Wertetabelle: GTR - Version

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$H_0 : P(\mathcal{X} \leq k)$	0.0173	0.1041	0.2991	0.5593	0.7869	0.9234	0.9803	0.9966	0.9996	'1'	'1'
$H_1 : P(\mathcal{X} \geq k)$	1	0.9827	0.896	0.7009	0.4407	0.2131	0.0766	0.0197	0.034	0.0004	'0'

Wertetabelle: WTR - Version

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$H_0 : P(\mathcal{X} \leq m)$	0.0173	0.1041	0.2991	0.5593	0.7869	0.9234	0.9803	0.9966	0.9996	'1'	'1'
$k = m + 1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$H_1 : P(\mathcal{X} \geq k)$	0.9827	0.896	0.7009	0.4407	0.2131	0.0766	0.0197	0.034	0.0004	'0'	

$\overline{Abl}$ =$\{1, .., 6\}$, $\alpha_1 \approx 0.0173 + 0.0197 = 0.037$.

e) Als **'Der Zinker'** von Edgar Wallace wird Frank Sutton enttarnt. Im (sw) Film von 1963 spielt Eddi Arent als Josua Harras mit.

$\mathcal{X}$ ist $B_{100;0.5}$ verteilt; Erfolg = 'Wappen' (Zahl geht genauso); $H_0 : p = \frac{1}{2}$, $H_1 : p \neq \frac{1}{2}$ (zweiseitiger Test);

k	39	40	41	42	43	44	45
$P_{100,0.5}(\mathcal{X} \leq k)$	0.018	0.028	0.044	0.067	0.097	0.136	0.184

$\alpha = 0.05$: $\overline{Abl}$ =$\{40, .., 60\}$, $\alpha_1 \approx 0.018 + 0.018 \approx 0.0352$;

$\alpha = 0.10$: $\overline{Abl}$ =$\{42, .., 58\}$, $\alpha_1 \approx 0.044 + 0.044 \approx 0.0886$;

$\alpha = 0.1963$: $\overline{Abl}$ =$\{44, .., 56\}$, $\alpha_1 \approx 0.097 + 0.097 \approx 0.1933$;

iv) $\alpha_1 = 1 - P(\{41, \ldots 59\}) = P(\mathcal{X} \geq 60) + P(\mathcal{X} \leq 40) \approx 0.0569$.

Aufg. 351/888: b) $\mathcal{X}$ ist $B_{10;0.4}$ verteilt; Erfolg = 'Was bei $p = 0.4$ gedreht wird'; $H_0 : p = 0.4$, $H_1 : p \neq 0.4$ (zweiseitiger Test); $\overline{Abl} = \{5, .., 11\}$.

b) Im Film Ocean 11 überfällt Danny Ocean (gespielt von George Clooney) mit 10 weitere Ganoven ein Casino, welches von Terry Benedict betrieben wird.

$\mathcal{X}$ ist Anzahl der erdrehten 'rot'; es gibt 18 rote, 18 schwarze Felder und die 0 (die keiner Farbe zugeordnet ist). $\mathcal{X}$ ist $B_{10;\frac{18}{37}}$ verteilt; Erfolg = 'rot'; $H_0 : p = \frac{16}{37}$, $H_1 : p \neq \frac{16}{37}$ (zweiseitiger Test) $\overline{Abl} = \{3, .., 8\}$, $\alpha_1 \approx 0.04 + 0.03 = 0.07$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$P_{11,18/36}(\mathcal{X} \leq k)$	'0'	0.01	0.04	0.13	0.31	0.54	0.76	0.90	0.97	'1'	'1'	1
$P_{11,18/36}(\mathcal{X} \geq k)$	1	'1'	0.99	0.96	0.87	0.69	0.46	0.24	0.10	0.03	'0'	'0'

Aufg. 351/889:

a)

Sei $\mathcal{X}$ die Anzahl der defekten Schrauben

0.7 A: Hier ist $\mathcal{X}$ $B_{10\ 0.1}$ verteilt
$P_{0.1}(\mathcal{X} \le 1) \approx 0.74$

0,1: 0.74
2..10: 0.26

0.3 B: Hier ist $\mathcal{X}$ $B_{10\ 0.2}$ verteilt
$P_{0.2}(\mathcal{X} \le 1) \approx 0.38$

0,1: 0.38
2..10: 0.62

Ergebnis	P	
A richtig	0.518	✓
A falsch	0.182	f
B falsch	0.114	f
B richtig	0.186	✓

$P(\text{falsch}) \approx 0.182 + 0.114 = 0.296$

Dieser Baum hat nur wenig mit dem Baum Fehler 2 Art zu tun

b) H_0 wird nicht abgelehnt und H_0 gilt = richtig,

H_0 wird abgelehnt und H_0 gilt = Fehler erster Art (zu Unrecht verdächtigt)

H_0 wird nicht abgelehnt und H_0 gilt nicht = Fehler zweiter Art: $\beta = P_{n,p_1}(\overline{Abl}\ )$, (übers Ohr gehauen worden)

H_0 wird abgelehnt und H_0 gilt nicht = richtig.

Fehler erster Art:	$= \underline{\alpha_1}$	$= P_{n,\underline{p0}}(\underline{Abl})$	(zu Unrecht verdächtigt)
Fehler zweiter Art:	$= \beta$	$= P_{n,\underline{p1}}(\underline{\overline{Abl}\ })$	(übers Ohr gehauen worden)

d) Um β berechnen zu können muss $\underline{H_1}$ ausdrücklich bekannt sein.

e) $\alpha_1 = P(Abl) = P_{10,0.6}(\mathcal{X} \le 3) \approx 0.058$ und $\quad \beta = P(\overline{Abl}\ ) = P_{10,0.3}(\mathcal{X} \ge 4) \approx 0.224$.

binomcdf$(n,p,k) = P_{n,p}(\mathcal{X} \le k)$ ein (im Abitur verbotener) GTR Befehl

f) Für $p_1 \to 0.6$ geht β gegen $P_{10,0.6}(\mathcal{X} \ge 4) = 1 - P_{10,0.6}(\mathcal{X} \le 3) = 1 - \alpha_1 \approx 1 - 0.058 = 0.942$.

g) Zeigen Sie: Sei $H_0 : p = p_0$ und $H_1 : p = p_1$, dann kann β sogar $\underline{1-\alpha_1}$ sein für $\underline{p_0 \approx p_1}$.

$\beta = P_{p_1}(\overline{Abl}\ ) \approx P_{p_0}(\overline{Abl}\ ) = 1 - P_{p_0}(Abl) = 1 - \alpha_1$.

Aufg. 351/890: Weiterhin ist der Ablehnungsbereich *Abl* der Hypothese $\underline{H_0}$ gegeben.

a)	α_1	$= P_{0.4}(\{0..2\})$	$= binomcdf(10, 0.4, 2)$	≈ 0.1673,
	β	$= P_{0.2}(\{3..10\})$	$= 1 - binomcdf(10, 0.2, 3-1)$	≈ 0.3222;
b)	α_1	$= P_{0.4}(\{7..10\})$	$= 1 - binomcdf(10, 0.4, 7-1)$	≈ 0.0548,
	β	$= P_{0.7}(\{0..6\})$	$= binomcdf(10, 0.7, 6)$	≈ 0.3504;
c)	α_1	$= P_{0.6}(\{0..4\})$	$= binomcdf(10, 0.6, 4)$	≈ 0.1662,
	β	$= P_{0.2}(\{5..10\})$	$= 1 - binomcdf(10, 0.7, 5-1)$	≈ 0.0328;
d)	α_1	$= P_{0.5}(\{7..10\})$	$= 1 - binomcdf(10, 0.5, 7-1)$	≈ 0.1719,
	β	$= P_{0.8}(\{0..6\})$	$= binomcdf(10, 0.8, 6)$	≈ 0.1209;

Aufg. 352/891: a) Erstellen Sie einen (linksseitigen) Test, mit $\alpha_1 \le 0.05$. $\mathcal{X}$ ist $B_{10;2/3}$ verteilt;

Erfolg = 'weiße Kugel'; $H_0 : p \ge \frac{2}{3}$, $H_1 : p = \frac{1}{3} < \frac{2}{3}$ (linksseitiger Test);

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$H_0 : P(\mathcal{X} \le k)$	'0'	'0'	0.003	0.0197	0.0766	0.2131	0.4407	0.701	0.896	0.9827	1
$H_1 : P(\mathcal{X} \ge k)$	1	0.9827	0.896	0.701	0.4407	0.2131	0.0766	0.0197	0.003	'0'	'0'

$\alpha_1 \approx 0.0197$, $\beta \approx 0.4407$; Abl={ 0,1,2,3}.

b) Berechnen Sie den Fehler zweiter Art: $\beta = P(\underline{\overline{Abl}\ }) = P(\mathcal{X}\underline{\ge 4})$ unter der Hypothese $\underline{H_1 : p = \frac{1}{3}}$.

c) Je niedriger α_1 desto höher das β und umgekehrt.

d) Je kleiner das α_1 desto größer das β.

Aufg. 352/892: MR2 ist ein Wagen der Firma Toyota, der auf französisch eM Er Deux etwa wie merde also ... ausgesprochen wird.

Sei $\mathcal{X}$ die Anzahl der Personen, welche die Anzeige gelesen haben; $\mathcal{X}$ ist $B_{100;0.1}$ verteilt; Erfolg = 'Anzeige wird gelesen'; $H_0 : p \leq 0.1$, $H_1 : p > 0.1$ (rechtsseitiger Test);

später $H_1 : p = 0.2$; $Abl = \{15..100\}$; $\alpha_1 = P_{100;0.1}(\mathcal{X} \geq 15) \approx 0.072$; $\beta = P_{100;0.2}(\mathcal{X} \leq 14) \approx 0.08$; (Abb. 530)

	Annahmebereich			Ablehnungsbereich	
k	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
$P(X \geq k)$	0.296	0.198	0.123	0.072	0.039

GTR: $P(X \geq k) = 1 - binomcdf(100{,}0.1, X-1)$

Abb. 530 Testen von Hypothesen Wertetabelle

Aufg. 352/893: Ron Weasley und Draco Malfoy kommen im Roman **Harry Potter** vor. Hauke Töpfer = Harry Potter; Draco Malfoy gilt als unfairer Bösewicht.

Sei $\mathcal{X}$ die Anzahl der geworfenen Sechsen; $\mathcal{X}$ ist $B_{10;1/6}$ verteilt; Erfolg = '6' gewürfelt; $H_0 : p \geq \frac{1}{6}$, $H_1 : p < \frac{1}{6}$ (linksseitiger Test); später $H_1 : p = 0.1$; $P(\mathcal{X} \leq 10) = 0,0427$; $\alpha_1 = P_{100,\frac{1}{6}}(\mathcal{X} \leq 11) \approx 0.07772$, $P_{100,\frac{1}{6}}(\mathcal{X} \leq 12) \approx 0.130$, Die Grenze ist also zwischen 11 und 12. $\beta = P_{100,\frac{1}{10}}(\mathcal{X} \geq 11) = 1 - P_{100,\frac{1}{10}}(\mathcal{X} \leq 10) \approx 0.41684$.

Aufg. 352/894: a) **Sam Hawkens** ist ein Westmann aus den Winnetou-Büchern. Er wird in den Filmen von Ralf Wolters gespielt und sagt ständig: 'Wenn ich mich nicht irre (hihi)'. Weitere involvierte Personen sind Samantha S: ist eine meiner Schülerinnen aus dem Abijahrgang 2017, die in dieser Aufgabe zwei Mal vorkommt und Stephen Hawking (*1942) ist ein britischer theoretischer Physiker.

Sei $\mathcal{X}$ die Anzahl der Fehlschüsse von Samatha, $\mathcal{X}$ ist $B_{100,0.1}$ verteilt. $Abl = \{0..5\}$, $\overline{Abl} = \{6..100\}$ $H_0 : p \geq 0.1$, $H_1 : p = 0.05 < 0.1$ (linksseitiger Test), $P_{100,0.1}(\mathcal{X} \leq 5) = \alpha_1 \approx 0.0576$, $P_{100,0.05}(\mathcal{X} \geq 6) = \beta \approx 0.384$.

$binomcdf(n, p, k) = P_{n,p}(\mathcal{X} \leq k)$ ein (im Abitur verbotener) GTR Befehl

b) Achim Mentzels (1946-2016) ist ein ostdeutscher (Volks-)Musiker. Seine Musiksendung Achims Hitparade wurde oft von Oliver Kalkofe (*1965) in Kalkofes Mattscheibe aufs Korn genommen. **Kalkofe und Mentzel** haben sich angefreundet und traten in der Show Großes Gernsehen gemeinsam auf. Besonders sympathisch an Achim Menzel war, dass er über sich selbst lachen konnte.

Sei $\mathcal{X}$ ist die Anzahl der Songs, die ein Hit wurden, dann ist $\mathcal{X}$ **im Extremfall** $B_{10,0.75}$ verteilt, Erfolg ist 'der Song ist ein Hit'. $H_0 : p \geq 0.75$; Es gilt $Abl = \{0..5\}$, $\overline{Abl} = \{6..10\}$:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_{10,0.75}(\mathcal{X} \leq k)$	'0'	'0'	'0'	0.003	0.0197	0.0781	0.2241	0.4744	0.756	0.9437	1

Fehler 1. Art: $\alpha_1 = P_{10,0.75}(\mathcal{X} \leq 5) \approx 0.0781$; Fehler 2. Art: $\beta = P_{10,0.5}(\mathcal{X} \geq 6) \approx 0.378$.

c) Tatsächlich wurde das Amt des Kavaliers von Julia (Vertreterin), Samantha (die Dirndlverbot hat, um Herrn Sd nicht den Kopf zu verdrehen) und Sofie (Oppositionsführerin) im März 2017 entdeckt und beschrieben. So, oder so ähnlich hat es sich wohl zugetragen :).

Sei $\mathcal{X}$ die Anzahl der, von Julia vertretenen Stunden, dann ist $\mathcal{X}$ $B_{10,0.1}$ verteilt. Erfolg ist 'Stunde wurde von Julia vertreten'. $H_0 : p = 0.1$, $H_1 : p = 0.4$ insbesondere $p > 0.1$ (rechtsseitiger Test).

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_{10,0.1}(\mathcal{X} \geq k)$	1	0.651	0.264	0.070	0.013	0.001	'0'	'0'	'0'	'0'	'0'

Fehler 1. Art: $\alpha_1 = P_{10,0.1}(\mathcal{X} \geq 3) \approx 0.070$; Fehler 2. Art: $\beta = P_{10,1/3}(\mathcal{X} \leq 2) \approx 0.299$.

Aufg. 352/895: a) i) Die Zufallsvariable $\mathcal{X}$ beschreibt die Anzahl der keimfähigen Weizenkörner. Sie ist **im Extremfall** binomialverteilt mit $n = 500$ und $p = 0.8$, also $B_{500,0.8}$. $H_0 : p \geq 0.8$, $H_1 : p < 0.8$,es handelt sich um einen linksseitigen Test mit $\alpha = 0.1$. Die Schätzformel ergibt

$$k = n \cdot p - 1.282 \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} - 0.5 = 500 \cdot 0.8 - 1.282 \cdot \sqrt{500 \cdot 0.8 \cdot 0.2} - 0.5 \approx 388.033.$$

Damit muss die Wertetabelle um 388 untersucht werden

k	386	387	388	389	390	391
$P(\mathcal{X} \leq k)$	0.067	0.083	0.1004	0.121	0.144	0.171

Entscheidungsregel: H_0 wird abglehnt, wenn 387 oder weniger Körner keimen, sonst nicht.

$Abl = \{0..387\}$, $Ann = \{388..500\}$; $\alpha_1 = P(Abl) = P_{500,0.8}(\mathcal{X} \leq 387) \approx 0.083$.

ii) $P(Abl) = P_{500,0.82}(\mathcal{X} \leq 387) \approx 0.0053$.

b) Die Zufallsvariable $\mathcal{X}$ beschreibt die Anzahl der weißen Autos. $H_0 : p = 0.151$, Gegenhypothese: H_1: $p > 0.151$. Es handelt sich um einen rechtsseitigen Test. $\mathcal{X}$ ist binomialverteilt mit $n = 500$ und $p = 0.151$. Die Schätzformel ergibt

$$k = n \cdot p + 1.282 \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} + 0.5 = 500 \cdot 0.151 + 1.282 \cdot \sqrt{500 \cdot 0.151 \cdot 0.845} + 0.5 \approx 86.24.$$

m	83	84	85	86	87
$P_{500,0.151}(\mathcal{X} \leq m)$	0.841	0.869	0.893	0.913	0.931
k	84	85	86	87	88
$P_{500,0.151}(\mathcal{X} \geq k)$	0.159	0.131	0.107	0.087	0.069

Entscheidungsregel: H_0 wird abglehnt, es wird also geglaubt, dass es mehr weiße Autos gibt, wenn 86 oder mehr Auto weiß sind, sonst nicht.

$Ann = \{0..86\}$, $Abl = \{87..500\}$; $\alpha_1 = P(Abl) = P_{500,0.151}(\mathcal{X} \geq 86) \approx 0.087$.

Aufg. 352/896:

$$\begin{array}{llll}
\text{a) } Abl = \{0..2\} & \alpha_1 = P_{0.5}(\{0..2\}) & = binomcdf(10, 0.5, 2) & \approx 0.0547, \\
 & \beta = P_{0.2}(\{3..10\}) & = 1 - binomcdf(10, 0.2, 3-1) & \approx 0.3222; \\
\text{b) } Abl = \{0, 1\} & \alpha_1 = P_{1/3}(\{0..1\}) & = binomcdf(10, 1/3, 1) & \approx 0.1041, \\
 & \beta = P_{0.1}(\{2..10\}) & = 1 - binomcdf(10, 0.1, 2-1) & \approx 0.2639; \\
\text{c) } Abl = \{0..4\} & \alpha_1 = P_{0.7}(\{0..4\}) & = binomcdf(10, 0.7, 4) & \approx 0.0474, \\
 & \beta = P_{0.4}(\{5..10\}) & = 1 - binomcdf(10, 0.4, 5-1) & \approx 0.3669; \\
\text{d) } Abl = \{0..7\} & \alpha_1 = P_{0.9}(\{0..7\}) & = binomcdf(10, 0.9, 7) & \approx 0.0702, \\
 & \beta = P_{0.4}(\{8..10\}) & = 1 - binomcdf(10, 0.4, 8-1) & \approx 0.0123; \\
\text{e) } Abl = \{7..10\} & \alpha_1 = P_{0.4}(\{7..10\}) & = 1 - binomcdf(10, 0.4, 7-1) & \approx 0.0548, \\
 & \beta = P_{0.8}(\{0..6\}) & = binomcdf(10, 0.8, 6) & \approx 0.1209; \\
\text{f) } Abl = \{5..10\} & \alpha_1 = P_{0.25}(\{5..10\}) & = 1 - binomcdf(10, 0.25, 5-1) & \approx 0.0781, \\
 & \beta = P_{0.5}(\{0..4\}) & = binomcdf(10, 0.5, 4) & \approx 0.3770; \\
\text{g) } Abl = \{9..10\} & \alpha_1 = P_{0.6}(\{9..10\}) & = 1 - binomcdf(10, 0.6, 9-1) & \approx 0.0464, \\
 & \beta = P_{0.9}(\{0..8\}) & = binomcdf(10, 0.9, 8) & \approx 0.2639; \\
\text{h) } Abl = \{9..10\} & \alpha_1 = P_{0.7}(\{9..10\}) & = 1 - binomcdf(10, 0.7, 9-1) & \approx 0.1493, \\
 & \beta = P_{0.8}(\{0..8\}) & = binomcdf(10, 0.8, 8) & \approx 0.6242; \\
\text{i) } Abl = \{0..4\} & \alpha_1 = P_{2/3}(\{0..4\}) & = binomcdf(10, 2/3, 4) & \approx 0.0766, \\
 & \beta = P_{0.3}(\{5..10\}) & = 1 - binomcdf(10, 0.3, 5-1) & \approx 0.1503;
\end{array}$$

Aufg. 353/897: und **Aufgabe 898**

n	Abl	$\frac{g}{n}$	μ =Erw	α_1	β_1	β_2	β_3	β_4
10	$\{0, .., 5\}$	0.5	8	0.033	0.377	0.633	0.85	0.922

20	{0,..,12}	0.6	16	0.032	0.132	0.416	0.77	0.898
40	{0,..,26}	0.65	32	0.019	0.019	0.211	0.70	0.897
80	{0,..,56}	0.7	64	0.022	0.00009	0.025	0.46	0.818
160	{0,..,118}	0.738	128	0.022	'0'	0.0002	0.17	0.68
320	{0,..,242}	0.756	256	0.032	'0'	'0'	0.01	0.377
640	{0,..,492}	0.769	512	0.029	'0'	'0'	0.00004	0.126
1280	{0,..,997}	0.779	1024	0.033	'0'	'0'	'0'	0.00717

Fazit: Bei wachsendem n verbessert sich die Güte eines Testes kaum, weil der Abl nur (fast) proportional wächst. Tatsächlich verbessert sich die Trennschärfe zu einer Gegenhypothese H_1 sehr stark (β wird klein). Das bedeutet, dass wir uns (bei konkreter Gegenhypothese) und mit wachsendem n häufiger richtig entschieden.

(exemplarische) Rechnung zu $n = 10$: $E = n \cdot p = 10 \cdot 0.8 = 8$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(\mathcal{X} \leq k)$ =binomcdf$(10, 0.8, k)$	„0“	„0“	„0“	„0“	0.006	0.033	0.12	0.32	0.62	0.89	1

Suchen Sie das k, für welches $P(\mathcal{X} < k) \leq 0.035$ aber $P(\mathcal{X} \leq k+1) > 0.035$. Dies ist für $k = 5$ der Fall, denn $P(\mathcal{X} \leq k) = 0.033 \leq 0.035$ aber $P(\mathcal{X} \leq k+1) = 0.12 > 0.035$. Damit ist Abl={0, .., 5} und $\alpha_1 = P(Abl) = P(\{0,..,5\}) = 0.033$. $\beta_1 = P(\overline{Abl}\ ) = P(6,..,10) = 1-$ binomcdf$(10, 0.5, \mathbf{5}) =$ 0.377 .

b) Mit der Verdopplung des n verdoppelt sich auch der Erwartungswert; die obere Grenze g des *Abl* wächst wenig stärker, bleibt aber sicher unterhalb des Erwartungswertes. Die Erhöhung des Stichprobenumfangs senkt den Fehler zweiter Art, erhöht also die Trennschärfe.

c) $\frac{\mu}{n} = \frac{np}{n} = p$; $\frac{g}{n} \approx \frac{\Phi^{-1}(0.1)\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}+n\cdot p+0.5}{n} = \frac{\Phi^{-1}(0.1)\cdot\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}} + p + \frac{0.5}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 + p + 0 = p$.

Aufg. 353/898: siehe Aufgabe 897

Aufg. 353/899: a) $P(\mathcal{X} = \frac{1}{2}) = \frac{1}{\infty} = 0$, $P(\mathcal{X} = a) = \frac{1}{\infty} = 0$ und $P(\mathcal{X} = b) \leq 0 = 0$.

b) Wenn die Grundmenge unendlich ($\subset \mathbb{R}$) ist, dann ist die uns bekannte Wahrscheinlichkeitstheorie $P(\mathcal{X} = k)$ nicht sinnvoll.

c) Das Ereignis $[0; 1]$, $P([0; 1]) = 1$; $[0.5; 1]$: $P([0.5; 1]) = 0.5$;

d) Eine Funktion der Form $P(\mathcal{X} \leq x)$ heißt Verteilungsfunktion.

e) $P(\mathcal{X} \leq x) = F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ x & \text{für} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{für} \quad 1 \leq x \end{cases}$;

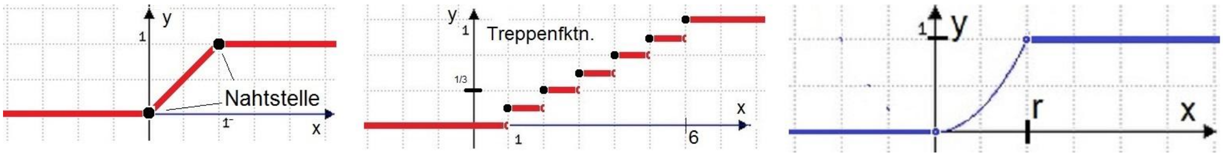


Abb. 531 Gleichverteilung Würfel Dartscheibe

x	-1	0	0.25	0.5	0.75	1	2	3
$F_1(x)$		0	0.25	0.5	0.75	1	1	1

f)

x	-1	0	1	1.5	2	2.5	3	4	5
$F_2(x)$	0	0	0	0.25	0.5	0.75	1	1	1

$$P(\mathcal{X} \le x) = F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 1 \\ \frac{1-0}{3-1}(x-1)+0 = 0.5x - 0.5 & \text{für} \quad 1 \le x < 3 \\ 1 & \text{für} \quad 3 \le x \end{cases};$$

g) i) $F_3(4) = P(\mathcal{X}_3 \le 4) = 0$, $F_3(14) = P(\mathcal{X}_3 \le 14) = 1$.

Zwischen (4/0) und (14/1) linear interpoliert: ZPF: $m = \frac{1-0}{14-4} = 0.1$, PSF: $y = 0.1(x-4)+0$,

$$F_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x \le 4 \\ 0.1x - 0.4 & \text{falls} \quad 4 < x \le 14 \\ 1 & \text{falls} \quad x > 14 \end{cases}$$

g) ii) $F_3(-2) = P(\mathcal{X}_3 \le -2) = 0$, $F_3(3) = P(\mathcal{X}_3 \le 3) = 1$.

Zwischen (-2/0) und (3/1) linear interpoliert: ZPF: $m = \frac{1-0}{3-(-2)} = 0.2$, PSF: $y = 0.2(x-(-2))+0$,

$$F_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x \le -2 \\ 0.2x + 0.4 & \text{falls} \quad -2 < x \le 3 \\ 1 & \text{falls} \quad x > 3 \end{cases}$$

g) iii) $F_3(a) = P(\mathcal{X}_3 \le a) = 0$, $F_3(b) = P(\mathcal{X}_3 \le b) = 1$.

Zwischen $(a/0)$ und $(b/1)$ linear interpoliert: ZPF: $m = \frac{1-0}{b-a}$, PSF: $y = \frac{1}{b-a}(x-a)+0$,

$$F_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x \le a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{falls} \quad a < x \le b \\ 1 & \text{falls} \quad x > b \end{cases}$$

h) i) $P(\mathcal{X}_2 \in (1;2]) = F(2) - F(1) = 0.5 - 0 = 0.5$,

ii) $P(\mathcal{X}_2 \in (1;1.5]) = F(1.5) - F(1) = 0.25 - 0 = 0.25$,

iii) $P(\mathcal{X}_2 \in (1;2.5]) = F(2.5) - F(1) = 0.75 - 0 = 0.75$,

iv) $P(\mathcal{X}_2 \in (2;3]) = F(3) - F(2) = 1 - 0.5 = 0.5$,

v) $P(\mathcal{X}_2 \in (1.5;2]) = F(2) - F(1.5) = 0.5 - 0.25 = 0.25$,

vi) $P(\mathcal{X}_2 \in (1.5;2.5]) = F(2.5) - F(1.5) = 0.75 - 0.25 = 0.5$,

vii) $P(\mathcal{X}_2 \in (1.5;3]) = F(3) - F(1.5) = 1 - 0.25 = 0.75$.

i) Sei $F(x) = P(\mathcal{X} \le x)$ und sei $a < b$, dann ist $P((a;b]) = \underline{F(b) - F(a)}$.

Aufg. 354/900: a)

$$P(\mathcal{X} \le x) = F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für} \quad a \le x < b \\ 1 & \text{für} \quad b \le x \end{cases}$$

x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$F(x)$	0	0	0.2	0.2	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1

siehe Abb. 532 a

b) $$P(\mathcal{X} \le x) = F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ \frac{0.2-0}{1-0}x & \text{für} \quad 0 \le x < 1 \\ 0.2 & \text{für} \quad 1 \le x < 3 \\ \frac{1-0.2}{7-3}(x-3)+0.2 & \text{für} \quad 3 \le x < 7 \\ 1 & \text{für} \quad 7 \le x \end{cases};$$

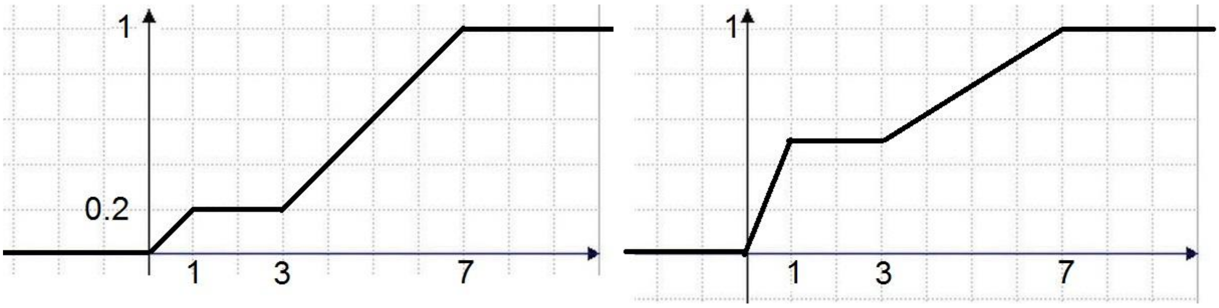


Abb. 532 stetige Verteilungsfunktionen

c) x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$F(x)$	0	0	0.5	0.5	0.5	0.625	0.75	0.875	1	1

siehe Abb. 532 b

$$P(\mathcal{X} \leq x) = F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ \frac{0.5-0}{1-0}(x-0)+0 & \text{für} \quad 0 \leq x < 1 \\ 0.5 & \text{für} \quad 1 \leq x < 3 \\ \frac{1-0.5}{7-3}(x-3)+0.5 & \text{für} \quad 3 \leq x < 7 \\ 1 & \text{für} \quad 7 \leq x \end{cases}$$; Zeichnung siehe Abschnitt 14.19.1.

d) $P(\mathcal{X} \leq 0) = 0$ und $P(\mathcal{X} \leq r) = 1$. Sei $0 < x < r$ dann ist $P(\mathcal{X} \leq x) =$ der Anteil der innenliegenden Fläche $= \frac{x^2}{r^2}$. Damit ist $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ \frac{x^2}{r^2} & \text{für} \quad 0 \leq x < r \\ 1 & \text{für} \quad r \leq x \end{cases}$

Zeichnung siehe Abschnitt 14.19.3.

e) $P(\mathcal{X} \leq x) = F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 1 \\ \frac{1}{6} & \text{für} \quad 1 \leq x < 2 \\ \frac{2}{6} & \text{für} \quad 2 \leq x < 3 \\ \ldots & \\ 1 & \text{für} \quad 6 \leq x \end{cases}$ $F(x)$ ist unstetig.

Zeichnung siehe Abschnitt 14.19.2.

x	-1	0	1	1.5	1.9	2	2.2	2.9	3	6
$F(x)$	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{6}{6}$

f) Genau bei unstetigen Zufallsvariablen $\mathcal{X}$ gibt es Stellen x_0 mit $P(\mathcal{X} = x_0) > 0$.

g) i) $F(x)$ ist die Fläche des Dreiecks A, $(x, 0)$, (x, x) geteilt durch die Gesamtfläche $= \frac{x^2/2}{1/2} = x^2$;

(im mittleren Bereich). Damit ist $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ x^2 & \text{falls } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{falls } x \geq 1 \end{cases}$

g) ii) Die Fläche wird begrenzt von der Geraden $g(x) = 2(x-1)+0$; $F(x) = \frac{0.5(x-1)\cdot(2x-2)}{1}$

damit ist $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 1 \\ 0.5 \cdot (x-1) \cdot (2x-2) & \text{falls } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{falls } x \geq 1 \end{cases}$

g) iii) Die Fläche (im Mittelteil) wird begrenzt von der Geraden $g_{BC}(x) = 1 - x$ $F(x)$ ist die Fläche des Trapezes $A, (x; 0), (x, 1-x), C = 2 \cdot \frac{1+(1-x)}{2} \cdot x = 2x - x^2$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ 2x - x^2 & \text{falls } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{falls } x \geq 1 \end{cases}$$

g) iv) Die Fläche wird begrenzt von den Geraden $g_{AC}(x) = x$ und $g_{BC}(x) = -(x-1)+1$; damit ist

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ x^2/2 & \text{falls } 0 \leq x < 1 \\ 0.5 + \frac{0.5(1+(2-x))(x-1)}{1} & \text{falls } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{falls } x \geq 1 \end{cases}$$

Aufg. 354/901: a) $\lim_{x\to\infty} F_1(x) = 1$. b) $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$. Die Grundmenge $G \subset \mathbb{R} = (-\infty;\infty)$, also ist $1 = P(G) \leq P(\mathbb{R}) = F(\infty)$. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

c) $F(x)$ ist monoton wachsend (mw): Annahme: F ist nicht mw, dass heißt es gibt $x_1 < x_2$ mit $F(x_1) > F(x_2)$. $P(\mathcal{X} \in (x_1; x_2]) = F(x_2) - F(x_1) < 0$ ↯ - Wahrscheinlichkeiten sind immer ≥ 0.

Es gibt in Mädchen mit nicht langen Haaren. Aus alle wird ein 'es gibt.'

d) $F(x)$ ist rechtsseitig-stetig (siehe Ag 900 e); Beweis: Siehe Maßtheorie.

Aufg. 354/902: a) i) $s \approx \frac{10000}{6}$; ii) $k \approx n \cdot p$; iii) $\frac{s}{100000} \approx \frac{1}{6}$; $\frac{k}{n} \approx p$;

Das Gesetz der großen Zahlen:$_e$ Die relative Häufigkeit eines Zufallsergebnisses stabilisiert sich bei einer großen Anzahl von Durchführungen um dessen theoretische Wahrscheinlichkeit.

... Damit lohnt sich das Angreifen.

b) $\mathcal{X}$ = Anzahl der Armeen die Verteidiger (V) verliert. Thx Sof Kre

$P(\mathcal{X}=2) \approx \frac{3780}{100000}$ $P(\mathcal{X}=1) \approx \frac{3210}{100000}$ $P(\mathcal{X}=0) \approx \frac{3010}{100000}$

$x_3 = 2$ $f(x_1) = 3780$

$x_2 = 1$ $f(x_2) = 3210$

Thx Sof Kre $x_1 = 0$ $f(x_3) = 3010$

$$F(x) \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 3010 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 6220 & \text{für } 1 \leq x < 2 \\ 10000 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

c) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 2$, $f(x_1) = 3010$, $f(x_2) = 3210$ und $f(x_3) = 3780$, $F(-1) = 0$, $F(x_1) = 3010$, $F(x_2) = 6220$ und $F(x_3) = 10000$

e) Dies ist die Aufgabe 900 a.

i) x	-∞ < x <0	$0 \leq x$ <1	$1\leq x$ <3	$3\leq x$ <5	$5\leq x$ <6	$6\leq x$ <7	$x \geq 7$
Anz	0	200	0	400	200	200	0
$F(x)$	0	$\frac{200}{1000}$	$\frac{200}{1000}$	$\frac{600}{1000}$	$\frac{800}{1000}$	$\frac{1000}{1000}$	1

ii) Dies ist die Ag 900 e. ↓ Die Zeilen $F(x)$ und Wk Dichte sind doppelt angegeben: ↓

x	$-\infty < x$ <0	$0 \leq x$ <0.1	$0.1 \leq x$ <0.4	$0.4\leq x$ <0.5	$0.5 \leq x$ <0.9	$0.9 \leq x < 1$	$x \geq 1$
$Anz(x)$	0	100	1500	900	5600	1900	0
$F(x)$	0	$\frac{100}{10000}$	$\frac{100+1500}{10000}$	$\frac{100+1500+900}{10000}$	$\frac{8100}{10000}$	$\frac{10000}{10000}$	$\frac{10000}{10000}$
$F(x)$	0	0.01	0.16	0.25	0.81	1	1
Wk-Dichte	0	$\frac{0.01}{0.1}$	$\frac{0.15}{0.3}$	$\frac{0.09}{0.1}$	$\frac{0.56}{0.4}$	$\frac{0.19}{0.1}$	0
Wk-Dichte	0	0.1	0.5	0.9	1.4	1.9	0

f) x	-∞ < x <0	$0 \leq x$ <1	$1\leq x$ <3	$3\leq x$ <5	$5\leq x$ <9	$9\leq x$ <10	$x \geq 10$
Anz	0	100	200	200	400	100	0
$F(x)$	0	$\frac{100}{1000}$	$\frac{300}{1000}$	$\frac{500}{1000}$	$\frac{900}{1000}$	$\frac{1000}{1000}$	1

f) Sei $m_{a,b}$ die Steigung der Verteilung zwischen $x = a$ und $x = b$; dann gilt $m_{-\infty,0} = 0 = m_{10,\infty}$, $m_{0;1} = 0.1$, $m_{1;3} = \frac{0.3-0.1}{3-1} = 0.1$, $m_{3;5} = \frac{0.5-0.3}{5-3} = 0.1$, $m_{5;9} = m_{9;10} = 0.1$.

Damit ist $\mathcal{X}$ gleichverteilt zwischen 0 und 10, also $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x < 0 \\ 0.1 \cdot x & \text{falls} \quad 0 \leq x < 10 \\ 1 & \text{falls} \quad 10 \leq x \end{cases}$

Aufg. 355/903: a) $[x_1, x_2) = \{x \in \mathbb{R} | x_1 < x \leq x_2\}$ (halboffenes Intervall). Zwischen 0.4 und 0.5 ist die Verteilung dichter als zwischen 0.1 und 0.4. Beweis: Siehe b)

b) Absolute Dichte, in Treffer pro Längeneinheit:

AbsDichte([0.1;0.4))=$\frac{1600-100}{0.4-0.1} = 5000$; AbsDichte([0.4;0.5))=$\frac{2500-1600}{0.5-0.4} = 9000$;

c) Wahrscheinlichkeits-Dichte in Wahrscheinlichkeit pro Längeneinheit siehe auch Tabelle in Ag 902 b).

Dichte([0.1;0.4))=$\frac{\frac{1600}{10000}-\frac{100}{10000}}{0.4-0.1} = 0.5$; Dichte([0.4;0.5))=$\frac{\frac{2500}{10000}-\frac{1600}{10000}}{0.5-0.4} = 0.9$;

d) Dichte($[x_1; x_2)$)=$\frac{F(x_2)-F(x_1)}{x_2-x_1}$;

e) Dichte($[0; 1)$)=$\frac{F(1)-F(0)}{1-0}=\frac{1-0}{1} = 1$; Dichte($[0; 0.5)$)=$\frac{F(0.5)-F(0)}{0.5-0}=\frac{0.5-0}{0.5} = 1$;
Dichte($[0.75; 1)$)=$\frac{F(1)-F(0.75)}{1-0.75}$=1;

Die Dichte scheint in jeder Teilmenge des Intervalls [0;1] gleich (=1) zu sein.

f) Dichte(x_1)=$f(x_1)$=$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{F(x_2)-F(x_1)}{x_2-x_1} = F'(x_1)$; (sofern F differenzierbar ist).

g) Ag 899 e) (Gleichverteilung) $f_{gleich}(x) = F'_{gleich}(x) = \begin{cases} 0 = 1' & \text{für} \quad x < 0 \\ 1 = x' & \text{für} \quad 0 < x < 1 \\ 0 = 0' & \text{für} \quad 1 < x \end{cases}$

Ag 899 f) (Gleichverteilung) $f_{gleich}(x) = F'_{gleich}(x) = \begin{cases} 0 = 1' & \text{für} \quad x < 1 \\ 0.5 = (0.5(x-1))' & \text{für} \quad 1 < x < 3 \\ 0 = 0' & \text{für} \quad 3 < x \end{cases}$

Ag 900 (Gleichverteilung) a) $f_{gleich}(x) = F'_{gleich}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad a < x \\ \frac{1}{b-a} & \text{für} \quad a < x < b \\ 0 & \text{für} \quad b < x \end{cases}$

Ag 900 b) $F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ 0.2 & \text{für} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{für} \quad 1 < x < 3 \\ \frac{1-0.2}{7-3} = 0.2 & \text{für} \quad 3 < x < 7 \\ 0 & \text{für} \quad 7 < x \end{cases}$; Zeichnung siehe Abschnitt 14.19.1.

c) $F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ \frac{0.5-0}{1-0} = 0.5 & \text{für} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{für} \quad 1 < x < 3 \\ \frac{1-0.5}{7-3} = 0.125 & \text{für} \quad 3 < x < 7 \\ 0 & \text{für} \quad 7 < x \end{cases}$; Zeichnung siehe Abschnitt 14.19.1.

d) $f_{dart} = F'_{dart}(x) = \begin{cases} 0 = 0' & \text{für} \quad x < 0 \\ \frac{2x}{r^2} = (\frac{x^2}{r^2})' & \text{für} \quad 0 < x < r \\ 0 = 1' & \text{für} \quad r < x \end{cases}$

g) + Ag 900 e) Unstetige Verteilungsfunktionen haben <u>keine</u> Dichtefunktion. Dichten sind immer $\underline{\geq}$0.

i) Sei $f(x)$ die Dichte einer Verteilungsfunktion F, $b \in \mathbb{R}$, dann entspricht $F(x)$ der F<u>läche</u> zwischen K_f, der x-Achse und der Geraden $\underline{x}$=$\underline{b}$.

j) Eine Funktion f ist eine Dichte einer Vertfktn $F \Leftrightarrow f(x) \geq \underline{0}$ und $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \underline{1}$.

Aufg. 355/904: a) $f(x) = 1$ für $x \in [1; 2]$; (Gleichverteilung); $E(\mathcal{X}) = 1.5$; $P(\mathcal{X} \le 2) = 1$; $P(\mathcal{X} \ge 1) = 1$; $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 1 \\ x - 1 & \text{für} \quad 1 \le x < 2 \\ 1 & \text{für} \quad 2 \le x \end{cases}$

b) (Gleichverteilung) $E(\mathcal{X}) = 4$; $P(\mathcal{X} \le 2) = 0$; $P(\mathcal{X} \ge 1) = 1$; $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 2 \\ 0.25(x - 2) & \text{für} \quad 2 \le x < 6 \\ 1 & \text{für} \quad 6 \le x \end{cases}$

c) (Gleichverteilung) $F(x) = 2(x + 1)$ $(x \in [-1; b])$, $F(b) = 1 = 2(b + 1) \Leftrightarrow b = -0.5$;
$E(\mathcal{X}) = -0.75$; $P(\mathcal{X} \le 2) = 1$; $P(\mathcal{X} \ge 1) = 0$; $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < -1 \\ 2(x + 1) & \text{für} \quad -1 \le x < -0.5 \\ 1 & \text{für} \quad -0.5 \le x \end{cases}$

d) (Gleichverteilung) $F(x) = 0.1(x - 4) + 1$ $(x \in [a; 4])$, $F(a) = 0 = 0.1(a - 4) + 1 \Leftrightarrow a = -6$;
$E(\mathcal{X}) = -1$; $P(\mathcal{X} \le 2) = 0.8$; $P(\mathcal{X} \ge 1) = 0.3$; $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < -6 \\ 0.1(x - 4) + 1 & \text{für} \quad -6 \le x < 4 \\ 1 & \text{für} \quad 4 \le x \end{cases}$

e) $\downarrow$ $E(\mathcal{X}) = 2$; $P(\mathcal{X} \le 2) = 0$; $P(\mathcal{X} \ge 1) = 0.5$;

e) $F_1(x) \equiv 0$ für $-\infty < x < 0$, $F_2(x) = 0.5 \cdot x$ für $0 \le x < 1$,
$F_3(x) = a \cdot (x - 1) + 0.5$ für $1 \le x < 6$, $F_4(x) \equiv 1$ für $6 \le x < \infty$,

$F_3(5) = a \cdot (6 - 1) + 0.5 = F_4(5) = 1 \Leftrightarrow 5a = 0.5 \Leftrightarrow a = 0.1$;

f) $F_1(x) \equiv 0$ für $-\infty < x < a$, $F_2(x) = 0.1 \cdot (x - a)$ für $a \le x < 1$,
$F_3(x) = 0.2 \cdot (x - 4) + 1$ für $1 \le x < 4$, $F_4(x) \equiv 1$ für $4 \le x < \infty$,

$F_3(1) = 0.2 \cdot (1 - 4) + 1 = 0.4$ $F_2(1) = 0.1 \cdot (1 - a) = F_3(1) = 0.4 \Leftrightarrow 0.1 - 0.1a = 0.4 \Leftrightarrow 0.1a = -0.3 \Leftrightarrow a = -3$;

g) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{für} \quad 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{für} \quad 1 \le x \end{cases}$ $\leftarrow$ $E(\mathcal{X}) = 2/3$; $P(\mathcal{X} \le 2) = 1$; $P(\mathcal{X} \ge 1) = 0$;

f) $\uparrow$ $E(\mathcal{X}) = -1$; $P(\mathcal{X} \le 2) = 0.6$; $P(\mathcal{X} \ge 1) = 0.6$;

h) $F_1(x) \equiv 0$ für $-\infty < x < 0$, $F_2(x) = 0.25 \cdot x$ für $0 \le x < a$,
$F_3(x) = 0.5 \cdot (x - 3) + 1 = 0.5(x - 2) + 0.5$ für $a \le x < 3$, $F_4(x) \equiv 1$ für $3 \le x < \infty$,

$F_3(a) = 0.5 \cdot (a - 3) + 1 = F_2(a) = 0.25a \Leftrightarrow 0.5a - 1.5 + 1 = 0.25a \Leftrightarrow 0.25a = 0.5 \Leftrightarrow a = 2$;

i) $F(x) = x^2 + c$ $(x \in [1; b])$, $F(1) = 1^2 + c = 0 \Rightarrow c = -1$ $F(b) = 1 = b^2 - 1 \Rightarrow b = (\pm)\sqrt{2}$; $+\sqrt{2}$, da $b > a$; $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{für} \quad 1 \le x < \sqrt{2} \\ 1 & \text{für} \quad \sqrt{2} \le x \end{cases}$ $\leftarrow$ $E(\mathcal{X}) = \text{nnf}$; $P(\mathcal{X} \le 2) = 1$; $P(\mathcal{X} \ge 1) = 0$;

h) $\uparrow$ $E(\mathcal{X}) = \text{nnf}$; $P(\mathcal{X} \le 2) = 0.5$; $P(\mathcal{X} \ge 1) = 1$;

Stetige Verteilungen Buch S. 344|904 Berechnen Sie $F(x)$ $f(x) = 0{,}2$ für $x \in (-3; 1)$ $f(x) = 0{,}1$ $x \in (a; 6)$

$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = F(x)$. $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$ $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1$ $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \int_{-3}^{1} 0{,}2\,dt + \int_{a}^{6} 0{,}1\,dt = 0{,}8 + (6 - a)\,0{,}1 = 1$

$= 0{,}8 + 0{,}6 - 0{,}1a = 1 \Leftrightarrow a = 4$

Thx Jac Pat

$(F(x))' = f(x)$

$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x < -3 \\ {}^{*}0{,}2(x+3) + 0 & \text{falls} \quad -3 \le x < 1 \\ 0{,}8 & \text{falls} \quad 1 \le x < 4 \\ {}^{*}0{,}1(x-4) + 0{,}8 & \text{falls} \quad 4 \le x < 6 \\ 1 & \text{falls} \quad 6 \le x \end{cases}$

* Gerade durch $P(-3|0)$ mit Steigung $0{,}2$
$F_2(1) = F_3(1) = 0{,}8$
$F_2(x) = 0{,}2(x+3) + 0$
* Gerade durch $Q(4|0{,}8)$ mit Steigung $0{,}1$
$Q_2(6|1)$ $0{,}1(x-6) + 1$

$f(x) = \frac{1}{4} \quad x \in (3, a) \longrightarrow F(x)$

Was ist a? Wir wissen, dass $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = P(X < \infty) - P(X < -\infty) = 1 - 0$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_3^a \frac{1}{4}\,dx = 1$

Thx Jac Pat

weil f außerhalb 0 ist

$\Rightarrow \int_3^a \frac{1}{4}\,dx = \left[\frac{1}{4}x\right]_3^a = \frac{1}{4}a - \frac{3}{4} = 1 \quad | \cdot 4$

$\Leftrightarrow a - 3 = 4 \Rightarrow a = 7$ Dichte konstant $\frac{1}{4} \rightarrow$ Intervalllänge $= 4$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 3 \\ \frac{1}{4}(x-3) + 0 & 3 \leq x < 7 \\ 1 & 7 \leq x \end{cases}$$

Aufg. 356/905: a) Die ZG habe als WkRaum $\{x_1, .., x_n\}$, dann ist
$\mu = x_1 \cdot P(\mathcal{X} = x_1) + ...x_n \cdot P(\mathcal{X} = x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(\mathcal{X} = x_i)$,
$\sigma^2 = (x_1 - \mu)^2 \cdot P(\mathcal{X} = x_1) + ...(x_n - \mu)^2 \cdot P(\mathcal{X} = x_n) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot P(\mathcal{X} = x_i)$;

b) Beim Übergang von einer diskreten ZG zu einer stetigen ZG wird aus der diskreten Wk $P(\mathcal{X} = x_i) \to \underline{f(x_i)}$, die Dichte der Verteilungsfunktion $P(\mathcal{X} \leq x) = F(x)$ und aus der Summe wird ein Integral. Definition $E(\mathcal{X})$:

$$\begin{array}{llllllllll} \mu = E(\mathcal{X}) = & \sum_{i=1}^{n} & x_i & \cdot P(\mathcal{X} = x_i) & & \text{und} & \sigma^2 = V(\mathcal{X}) = & \sum_{i=1}^{n} & (x_i - \mu)^2 & \cdot P(\mathcal{X} = x_i) \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ E(\mathcal{X}) = & \int_{-\infty}^{\infty} & t & \cdot f(t) & dt & & V(\mathcal{X}) = & \int_{-\infty}^{\infty} & (t - \mu)^2 & \cdot f(t) \quad dt \end{array}$$

Aufg. 356/905: c) **Erwartungswerte:** Aufgabe 904 a): $E(\mathcal{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)dt$
$= \int_{-\infty}^{1} t \cdot 0dt + \int_1^2 t \cdot 1dt + \int_2^{\infty} t \cdot 0dt = \int_1^2 tdt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{t=1}^{t=2} = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{3}{2}$;

b): $E(\mathcal{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)dt = \int_2^6 t \cdot 0.25dt = \left[\frac{0.25t^2}{2}\right]_{t=2}^{t=6} = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 4$;

c): $E(\mathcal{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)dt = \int_{-1}^{-0.5} t \cdot 2dt = \left[t^2\right]_{t=-1}^{t=-0.5} = \frac{(-0.5)^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = -0.75$;

d): $E(\mathcal{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)dt = \int_{-6}^{4} t \cdot 0.1dt = \left[\frac{0.1 \cdot t^2}{2}\right]_{t=-6}^{t=4} = \frac{0.1 \cdot 4^2}{2} - \frac{0.1 \cdot (-6)^2}{2} = -1$;

Bemerkung: Tatsächlich gilt bei Gleichverteilungen über dem Intervall $[a; b]$ (also mit $f(t) = \frac{1}{b-a}$), dass $E(\mathcal{X}) =$ Intervallmitte$=\frac{a+b}{2}$; dies entspricht Aufgabe 900 a).

e): $E(\mathcal{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)dt = \int_0^1 t \cdot 2tdt = \left[\frac{2t^3}{3}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{2}{3}$;

f): $E(\mathcal{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)dt = \int_1^{\sqrt{2}} t \cdot 2tdt = \left[\frac{2t^3}{3}\right]_{t=1}^{t=\sqrt{2}} \approx 1.22$;

Aufgabe 900 b): $E(\mathcal{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)dt = \int_0^1 t \cdot 0.2dt + \int_3^7 t \cdot 0.2dt = \left[0.2\frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{t=1} + \left[0.2\frac{t^2}{2}\right]_{t=3}^{t=7} = 3.4$;

c): $E(\mathcal{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)dt = \int_0^1 t \cdot 0.5dt + \int_3^7 t \cdot 0.125dt = \left[0.5\frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{t=1} + \left[0.125\frac{t^2}{2}\right]_{t=3}^{t=7} = 2.75$;

d): $E(\mathcal{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)dt = \int_0^r \frac{2t}{r^2} \cdot tdt = \left[\frac{2t^3}{3r^2}\right]_{t=0}^{t=r} = \frac{2r}{3}$;

e) ist keine stetige Verteilung; E ist hier 3.5.

c) **Varianzen:** Ag 904 a): $V(\mathcal{X}) = \int_{-\infty}^{\infty}(t-\mu)^2 \cdot f(t)dt = \int_1^2 (t-1.5)^2 \cdot 1dt = \left[\frac{(t-1.5)^3}{3}\right]_{t=1}^{t=2} = \frac{1}{12}$;

b): $V(\mathcal{X}) = \int_{-\infty}^{\infty}(t-\mu)^2 \cdot f(t)dt = \int_2^6 (t-4)^2 \cdot 0.25dt = \left[\frac{0.25(t-4)^3}{3}\right]_{t=2}^{t=6} = \frac{16}{12}$;

c): $V(\mathcal{X}) = \int_{-\infty}^{\infty}(t-\mu)^2 \cdot f(t)dt = \int_{-1}^{-0.5}(t+0.75)^2 \cdot 2dt = \left[t^2\right]_{t=-1}^{t=-0.5} = \frac{1/4}{2}$;

d): $V(\mathcal{X}) = \int_{-\infty}^{\infty}(t-\mu)^2 \cdot f(t)dt = \int_{-6}^{4}(t+1)^2 \cdot 0.1dt = \left[\frac{0.1\cdot(t+1)^3}{3}\right]_{t=-6}^{t=4} = \frac{100}{12}$;

Bemerkung: Tatsächlich gilt bei Gleichverteilungen über dem Intervall $[a;b]$ (also mit $f(t) = \frac{1}{b-a}$), dass $V(\mathcal{X}) = \frac{(b-a)^2}{12}$; dies entspricht $V(\mathcal{X})$ Aufgabe 900 a).

e): $V(\mathcal{X}) = \int_{-\infty}^{\infty}(t-\mu)^2 \cdot f(t)dt = \int_0^1 (t-2/3)^2 \cdot 2tdt = \frac{1}{18}$;

f): $V(\mathcal{X}) = \int_{-\infty}^{\infty}(t-\mu)^2 \cdot f(t)dt = \int_1^2 (t-1.22)^2 \cdot 2tdt \approx 0.141$

Aufgabe 900 b): $V(\mathcal{X}) = \int_{-\infty}^{\infty}(t-\mu)^2 \cdot f(t)dt = \int_0^1 (t-3.4)^2 \cdot 0.2dt + \int_3^7 (t-3.4)^2 \cdot 0.2dt \approx 1.7 + 3.1 = 4.8$;

c): $V(\mathcal{X}) = \int_{-\infty}^{\infty}(t-\mu)^2 \cdot f(t)dt = \int_0^1 (t-2.75)^2 \cdot 0.5dt + \int_3^7 (t-2.75)^2 \cdot 0.125dt \approx 2.57 + 3.20 = 5.77$;

d): $V(\mathcal{X}) = \int_{-\infty}^{\infty}(t-\mu)^2 \cdot f(t)dt = \int_0^r \frac{2t}{r^2}\cdot(t-\frac{2r}{3})^2 dt = \int_0^r \frac{2t}{r^2}\cdot(t^2 - \frac{4tr}{3} + \frac{4r^2}{9})dt = \int_0^r \frac{2t^3}{r^2} - \frac{8t^2}{3r} + \frac{8t}{9}dt = \left[\frac{t^4}{2r^2} - \frac{8t^3}{9r} + \frac{4t^2}{9}\right]_0^r = \frac{r^4}{2r^2} - \frac{8r^3}{9r} + \frac{4r^2}{9} = \frac{r^4}{2r^2} - \frac{8r^3}{9r} + \frac{4r^2}{9} = \frac{r^2}{2} - \frac{8r^2}{9} + \frac{4r^2}{9} = \frac{r^2}{18}$;

e) ist keine stetige Verteilung; V ist hier $\frac{35}{12}$.

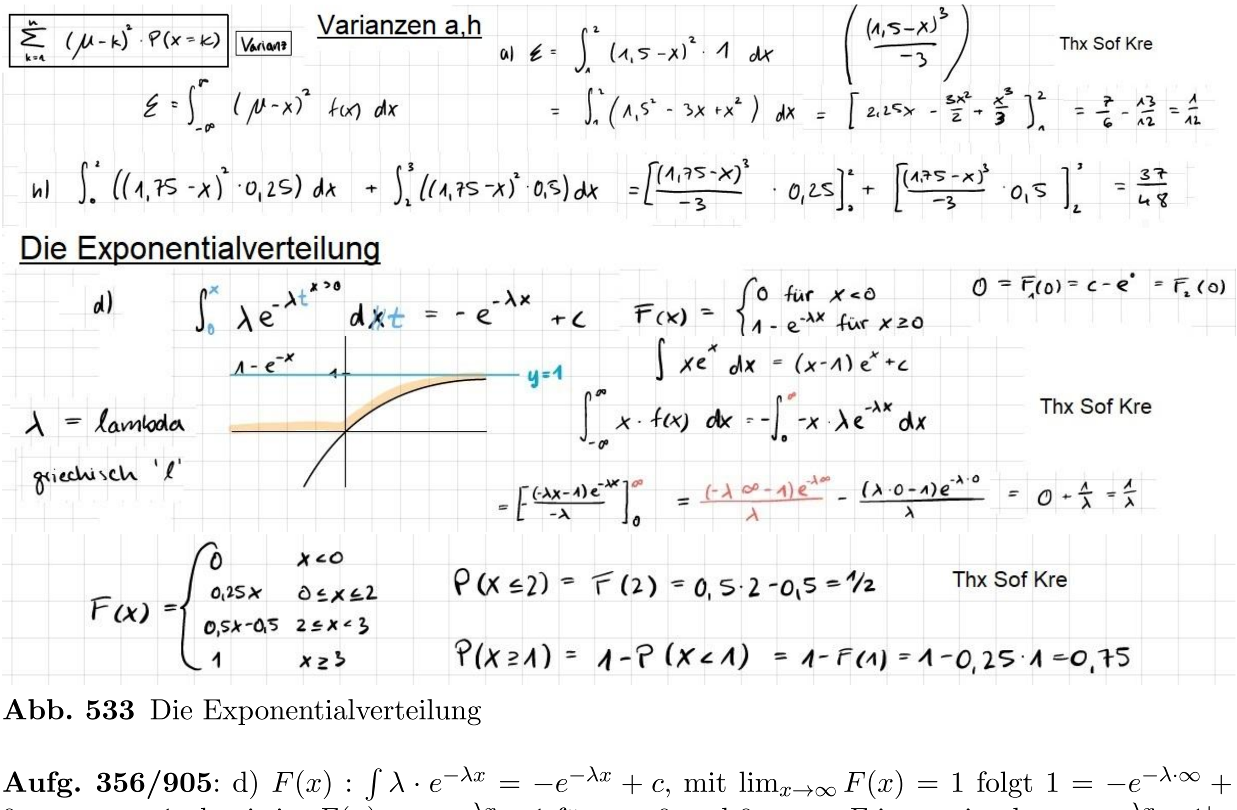


Abb. 533 Die Exponentialverteilung

Aufg. 356/905: d) $F(x) : \int \lambda \cdot e^{-\lambda x} = -e^{-\lambda x} + c$, mit $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ folgt $1 = -e^{-\lambda\cdot\infty} + c = 0 + c \Rightarrow c = 1$; damit ist $F(x) = -e^{-\lambda x} + 1$ für $x > 0$ und 0 sonst. F ist stetig, denn $-e^{-\lambda x} + 1|_{x=0} = -e^{-\lambda\cdot 0} + 1 = 0$.

$E(\mathcal{X}) = \int_0^\infty x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}$ mit (Produktintegration)

$$\begin{array}{ccccccccccc} \int_0^\infty & \lambda x & \cdot e^{-\lambda x} dx & = & \lambda x & \cdot \frac{-1}{\lambda}e^{-\lambda x} & - \int_0^\infty & \lambda & \cdot \frac{-1}{\lambda}e^{-\lambda x}dx & = \left[-x\cdot e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_{x=0}^{\infty} = \frac{1}{\lambda} \\ \int & u & v' \; dx & = & u & v & -\int & u' & v \; dx & \end{array}$$

$V(\mathcal{X}) = \int_0^\infty (x - \frac{1}{\lambda})^2 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} = \frac{1}{\lambda^2}$ wieder mit (Produktintegration)

$$\begin{array}{llllllll} \int_0^\infty & \lambda(x-\frac{1}{\lambda})^2 & \cdot e^{-\lambda x}dx & = & \lambda(x-\frac{1}{\lambda})^2 & \cdot\frac{-1}{\lambda}e^{-\lambda x} & -\int_0^\infty & 2\lambda(x-\frac{1}{\lambda}) \quad \cdot\frac{-1}{\lambda}e^{-\lambda x}dx \\ \int & u & v' \quad dx & = & u & v & -\int & u' \quad v \quad dx \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} = & \lambda(x-\frac{1}{\lambda})^2\cdot\frac{-1}{\lambda}e^{-\lambda x} & +2\int x\cdot e^{-\lambda x}dx & -\frac{2}{\lambda}\int e^{-\lambda x}dx & \\ = & \big[\lambda(x-\frac{1}{\lambda})^2\cdot\frac{-1}{\lambda}e^{-\lambda x}) & +\frac{2}{\lambda}(-x\cdot e^{-\lambda x}-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}) & +\frac{2}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\big]_{x=0}^{\infty} & \\ = & -\big(\lambda(-\frac{1}{\lambda})^2\cdot\frac{-1}{\lambda} & +\frac{2}{\lambda}\cdot(-\frac{1}{\lambda}) & +\frac{2}{\lambda^2}) & \\ = & -\big(-\frac{1}{\lambda^2} & -\frac{2}{\lambda^2} & +\frac{2}{\lambda^2}) & = \frac{1}{\lambda^2}; \end{array}$$

15.13.2 LöVo zu Einheit 13.2 (Normalverteilung)

Aufg. 356/906: $(e^x)' = \underline{e^x}$; $(\Phi(x))' = \underline{\varphi(x)}$;

a) i) $\varphi(0) \approx 0.4$; $\varphi'(x) = \frac{-x}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$, $\varphi''(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$.
(M) $\varphi(x)$ ist smw für $x \le 0$ und smf für $x \ge 0$, (A) $\lim_{x\to\pm\infty}\varphi(x) = 0$, also wA $y = 0$,
(D) $\mathbb{D} = (-\infty;\infty), \mathbb{W} = (0; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}]$, (N) keine Nullstellen,
(E) $H(0; \frac{1}{\sqrt{2\pi}})$, $W_{1,2}(\pm 1; \frac{1}{\sqrt{2\pi e}})$, (S) K_φ ist achsensymmetrisch zur y-Achse, (S) φ ist stetig.

a) ii) $\Phi(0) = 0.5$ (Mitte von 0 und 1); (M) $\Phi(x)$ ist smw, weil $\varphi(x) > 0$
(A) $\lim_{x\to-\infty}\Phi(x) = 0$, also wA $y = 0$, $\lim_{x\to\infty}\Phi(x) = 1$, also wA $y = 1$,
(D) $\mathbb{D} = (-\infty;\infty), \mathbb{W} = (0;1)$, (N) keine Nullstellen,
(E) $W(0;\frac{1}{2})$, (S) K_Φ ist punktsymmetrisch zum Wendepunkt, (S) Φ ist stetig.

b) $\Phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-t^2}{2}}dt$. Bis heute ist keine geschlossene Form einer Stammfunktion von $\varphi(x)$ bekannt. c) $E(\mathcal{X}) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} t\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-t^2}{2}}dt = 0$, $\varphi(x)$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse. $V(\mathcal{X}) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}(t-0)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-t^2}{2}}dt = 1$ (GTR) $\Rightarrow \sigma(\mathcal{X}) = \sqrt{V(\mathcal{X})} = 1$.

Aufg. 356/907: a) In der Tabelle steht links oben 5000 in Zeile 0.0 und Spalte +0.00 $\Rightarrow \Phi(0) \approx 0.5000$ - beachten Sie, dass $0 < \Phi(x) < 1$ gilt. $\Phi(1.23) \approx 0.8907$ in Zeile 1.2 und Spalte +0.03 steht 8907. b) $\Phi(-a)$ ist durch $\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$ berechenbar: $\Phi(0.1) \approx 0.5398$ also ist $\Phi(-0.1) \approx 1 - 0.5398 = 0.4602$. $\Phi(-1.645) = 0.05$ und $\Phi(-1.282) = 0.1$

c) $P(\mathcal{X} \le k) = \Phi(k)$, $P(\mathcal{X} < k) = P(\mathcal{X} < k) + P(\mathcal{X} = k) = P(\mathcal{X} \le k) = \Phi(k)$, $(P(\mathcal{X} = k) = 0)$;
$P(a \le \mathcal{X} \le b) = \Phi(b) - \Phi(a) = normalcdf(a,b)$;
$P(-1 \le \mathcal{X} \le 1) \approx 0.6827$, $P(-2 \le \mathcal{X} \le 2) \approx 0.9545$, $P(-3 \le \mathcal{X} \le 3) \approx 0.9973$.

Aufg. 356/908: a) $a \cdot b \cdot A$; b) $\mu = \underline{x_H}$ und $\sigma = \underline{|x_H - x_1| = |x_H - x_2|}$;

b$_e$) Eine ZG $\mathcal{X}$ heißt $\mathbf{N}(\mu;\sigma)$ verteilt, wenn $\mathcal{X}$ normal verteilt mit Erwartungswert μ und Standardabweichung $=\sigma$ ist. Sei $\varphi_{\mu,\sigma}$ die Dichte einer $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$ Verteilung mit Hochpunkt $H(x_H;y_H)$ und Wendepunkten $W_1(x_1;y_1)$ und $W_2(x_2;y_2)$, dann ist $\mu =$ xH und $\sigma =$ xH - x1 $=$ xH - x2 .

Abb. 534 LöVo zur Normalverteilung

c) Verschiebung um 2 nach rechts; $P(\mathcal{X} \le 3) = \Phi(1)$ und $P(\mathcal{X} \le k) = \Phi(k-2)$;

d) $P(\mathcal{X} \le k) = \Phi(k-\mu)$. **e)** Streckung mit Faktor 2 in $x-$Richtung. Problem: $P(\mathcal{X} \le \infty) = 2 > 1$; Lösung: Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in y-Richtung. Eine ZG $\mathcal{X}$ heißt $N(\mu;\sigma)$ verteilt, wenn $\mathcal{X}$ <u>normal</u>verteilt mit <u>Erwartungswert</u>$= \mu$ und <u>Standardabweichung</u>$=\sigma$ ist.

Bis 2019 habe ich die allgemeine Normalverteilung $N(\mu;\sigma^2)$ (Wikipedia) genannt: Seit 2019 habe ich mich der Schulschreibweise $N(\mu;\sigma)$ angepasst.

Es gilt $P(\mathcal{X} \leq k) = \Phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)$ (auswendig).

f) $K_{\varphi_{\mu,\sigma}}$ ist <u>achsen</u>symmetrisch zur <u>Achse $x = \mu$</u>. $K_{\Phi_{\mu,\sigma}}$ ist <u>punkt</u>symmetrisch zu <u>$P(\mu; 0.5)$</u>.

g) i) $z = \frac{k-\mu}{\sigma}$, $\sigma = \sqrt{12.25} = 3.5$:
$P(\mathcal{X} \leq 4) : z = \frac{4-7.2}{3.5} \approx -0.914, P(\mathcal{X} \leq 4) \approx \Phi(-0.914) \approx 0.18;$
$P(\mathcal{X} \geq 10) : z = \frac{10-7.2}{3.5} = 0.8, P(\mathcal{X} \geq 10) = 1 - \Phi(-0.914) \approx 1 - 0.788 = 0.212;$
$P(5 \leq \mathcal{X} \leq 8)$: $z_1 = \frac{5-7.2}{3.5} \approx -0.629, z_2 = \frac{8-7.2}{3.5} \approx 0.229,$
$P(5 \leq \mathcal{X} \leq 8) \approx \Phi(0.229) - \Phi(-0.629) \approx 0.326$

ii) $z = \frac{k-\mu}{\sigma}$, $\sigma = \sqrt{4} = 2$:
$P(\mathcal{X} \leq -2) : z = \frac{-2-(-2)}{2} = 0, P(\mathcal{X} \leq -2) = \Phi(0) = 0.5;$
$P(\mathcal{X} \leq -3) : z = \frac{-3-(-2)}{2} = -0.5, P(\mathcal{X} \leq -3) = \Phi(-0.5) = 1 - \Phi(0.5) \approx 0.3085;$
$P(\mathcal{X} \geq -1) : z = \frac{-1-(-2)}{2} = 0.5, P(\mathcal{X} \geq -1) = 1 - \Phi(0.5) \approx 0.3085;$
$P(-4 \leq \mathcal{X} \leq 0)$: $z_1 = \frac{-4-(-2)}{2} = -1, z_2 = \frac{0-(-2)}{2} = 1,$
$P(-4 \leq \mathcal{X} \leq 0) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2 \cdot \Phi(1) - 1 \approx 0.6826$

h) $\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-0.5(\frac{x-\mu}{\sigma})^2};$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-0.5(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}\right)' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{-0.5}{\sigma^2} \cdot 2(x-\mu) \cdot e^{-0.5(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} = \frac{-1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma^2} \cdot (x-\mu) \cdot e^{-0.5(\frac{x-\mu}{\sigma})^2};$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-0.5(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}\right)'' = \left(\frac{-1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma^2} \cdot (x-\mu) \cdot e^{-0.5(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}\right)'$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma^2} \cdot \left(e^{-0.5(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} + \frac{-0.5}{\sigma^2} \cdot 2(x-\mu) \cdot (x-\mu) \cdot e^{-0.5(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma^2} \cdot e^{-0.5(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} \cdot \left(1 - \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)$$

i) $\frac{-1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma^2} \cdot (x-\mu) \cdot e^{-0.5(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} = 0 \Leftrightarrow x = \mu;$

$$\frac{-1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma^2} \cdot e^{-0.5(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} \cdot \left(1 - \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right) = 0 \Leftrightarrow 1 = \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} \Leftrightarrow \pm 1 = \frac{x-\mu}{\sigma} \Leftrightarrow \pm\sigma = x - \mu \Leftrightarrow x = \mu \pm \sigma;$$

$\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ hat ihr Maximum bei $x_m = \underline{\mu}$ und ihre Wendestellen bei $x_w = \underline{\mu \pm \sigma}$. $|x_m - x_w| = \underline{\sigma}$.

j) $P(a \leq \mathcal{X} \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$:

$n = 1 : P(\mu - \sigma \leq \mathcal{X} \leq \mu + \sigma) = \Phi\left(\frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) \approx 0.6827.$

Mit Wk 68% hat ein Wert höchstens Abstand σ vom Erwartungswert μ.

$n = 2 : P(\mu - 2\sigma \leq \mathcal{X} \leq \mu + 2\sigma) = \Phi\left(\frac{\mu+2\sigma-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu-2\sigma-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(2) - \Phi(-2) \approx 0.9545.$

Mit Wk 95% hat ein Wert höchstens Abstand 2σ vom Erwartungswert μ.

$P(\mu - n \cdot \sigma \leq \mathcal{X} \leq \mu + n \cdot \sigma) = \Phi\left(\frac{\mu+n\cdot\sigma-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu-n\cdot\sigma-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(n) - \Phi(-n) \approx 0.9973$ (falls n=3).

Mit Wk 99% hat ein Wert höchstens Abstand 3σ vom Erwartungswert μ.

k) i) $P(\mathcal{X} < 490) = \Phi\left(\frac{490-500}{10}\right) \approx 0.1587;$

ii) $P(495 \leq \mathcal{X} \leq 505) = \Phi\left(\frac{505-500}{10}\right) - \Phi\left(\frac{495-500}{10}\right) \approx 0.3829;$

iii) $1 - P(475 \leq \mathcal{X} \leq 525) = 1 - \left(\Phi\left(\frac{525-500}{10}\right) - \Phi\left(\frac{475-500}{10}\right)\right) \approx 0.0124;$

L,m fehlen noch

Aufg. 357/909: a) $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 3$, $\mu_3 = 1$, μ ist das Maximum von $\varphi_{\mu;\sigma}(\mu)$.

b) $\varphi_{\mu;\sigma}(\mu) = \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi\left(\frac{\mu-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx \frac{0.4}{\sigma}$ Damit ist der $y-$ Wert des Maximums (y_M) etwa $\frac{0.4}{\sigma}$. oder $\sigma \approx \frac{0.4}{y_M}$. $\quad \sigma_1 \approx \frac{0.4}{0.2} = 2; \quad \sigma_2 \approx \frac{0.4}{0.26} \approx 1.5; \quad \sigma_3 \approx \frac{0.4}{0.16} = 2.5;$

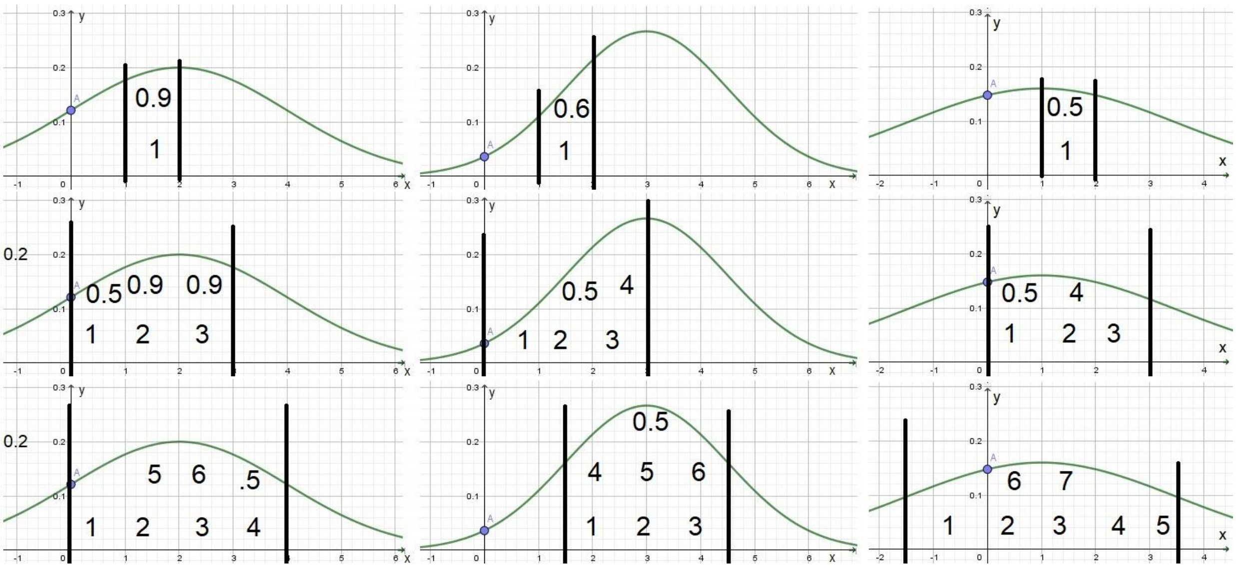


Abb. 535 Ablesen von Wahrscheinlichkeiten von $N(\mu, \sigma)$ Verteilungen

c) Sei $H(a; b)$ Hochpunkt des Graphen der Dichtefunktion $\varphi_{\mu;\sigma}$, dann gilt $\mu = \underline{a}$ und $\sigma = \frac{1/\sqrt{2\pi}}{b} \approx \underline{\frac{0.4}{b}}$.

d) Erstes Schaubild: $P(1 \leq \mathcal{X} \leq 2) \approx 1.9$ Kästchen$=0.19$ (WTR ≈ 0.19146);
$P(0 \leq \mathcal{X} \leq 3) \approx 5.3$ Kästchen$=0.53$ (WTR ≈ 0.53281);
$P(\mu - \sigma \leq \mathcal{X} \leq \mu + \sigma) \approx 6.5$ Kästchen$=0.65$ (WTR ≈ 0.68269); (68% Regel)

Zweites Schaubild: $P(1 \leq \mathcal{X} \leq 2) \approx 1.6$ Kästchen$=0.16$ (WTR ≈ 0.16128);
$P(0 \leq \mathcal{X} \leq 3) \approx 4.5$ Kästchen$=0.45$ (WTR ≈ 0.47725);
$P(\mu - \sigma \leq \mathcal{X} \leq \mu + \sigma) \approx 6.5$ Kästchen$=0.65$ (WTR ≈ 0.68269); (68% Regel)

Drittes Schaubild: $P(1 \leq \mathcal{X} \leq 2) \approx 1.5$ Kästchen$=0.15$ (WTR ≈ 0.15542);
$P(0 \leq \mathcal{X} \leq 3) \approx 4.5$ Kästchen$=0.45$ (WTR ≈ 0.44357);
$P(\mu - \sigma \leq \mathcal{X} \leq \mu + \sigma) \approx 7$ Kästchen$=0.68$ (WTR ≈ 0.68269); (68% Regel)

Aufg. 358/910:

a) Vergleichen Sie diese mit der Gaußglockenkurve. Eine Binomialverteilung kann durch eine Normalverteilung approximiert werden. b) $P(\mathcal{X} \leq k) \approx \Phi\left(\frac{k-np}{\sigma}\right)$.

Die Stetigkeitskorrektur: c_e) Abb. 351/212a Zeigt das Histogramm einer $B_{n,p}$ verteilten Zufallsgröße $\mathcal{X}$. Zeichnen Sie in die approximierende Glockenkurve $\varphi_{\mu,\sigma}$ ein. Zeichnen Sie auch $P(\mathcal{X} \leq 4)$ und $\Phi_{\mu,\sigma}(4) = \int_{-\infty}^{4} \varphi_{\mu,\sigma} dx$ ein und interpretieren Sie.
d_e) Bei der Approximation der (d**iskreten**) Binomialverteilung ($B_{n,p}$) durch die (s**tetigen**) Normalverteilungsfunktion ($\Phi(x)$) gilt **(Formel 52)** : $P(\mathcal{X} \leq k) \approx \Phi\left(\frac{k-np+0.5}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right)$

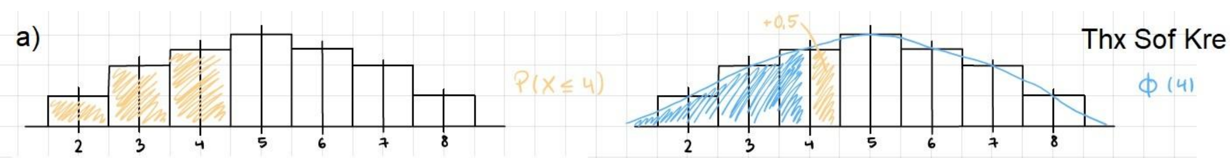


Abb. 536 Stetigkeitskorrektur

d) $P(\mathcal{X} \leq k) \approx \Phi\left(\frac{k-\mu+0.5}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{k-np+0.5}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right)$; e) $P(\mathcal{X} \leq v) \approx \Phi\left(\frac{v-\mu+0.5}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{v-np+0.5}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right)$;

$P(\mathcal{X} \geq u) = 1 - P(\mathcal{X} \leq u-1) \approx 1 - \Phi\left(\frac{u-1-\mu+0.5}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{u-np-0.5}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right)$;

$P(u \leq \mathcal{X} \leq v) \approx \Phi\left(\frac{v-np+0.5}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{u-np-0.5}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right)$;

$P(\mathcal{X} = k) \approx \Phi\left(\frac{k-np+0.5}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k-np-0.5}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right)$;

Aufg. 358/911: a) i) $\mu = 6; \sigma = 2$, ii) $\mu = -1$;, ja, das geht, $\sigma = 4$; $P_i(\mathcal{X} \leq 5) \approx 0.3$, $P_{ii}(\mathcal{X} \leq 0) \approx 0.6$.

b) $P(\mathcal{X} < 250) \approx 0.159$; c) $P(0.98 \cdot 250 \leq \mathcal{X} \leq 1.02 \cdot 250) \approx 0.933$;
d) Die Dichtefunktion ist eine Glockenkurve, die zur Achse $x = 252$ symmetrisch ist. Damit ist $P(245 \leq \mathcal{X} \leq 250) = P(254 \leq \mathcal{X} \leq 259)$.
e) Sei $\mathcal{Y}$ die Füllmenge der neuen ANlage, dann ist $\mathcal{Y}$ $N(\mu; 1)$ verteilt (μ gesucht). Gesucht ist der kleinste Wert von μ, Für welchen $P(\mathcal{X} < 250) < 0.15$ gilt (Schrittweite 0.1 g).

Für $\mu = 251$ ist $P(\mathcal{X} < 250) \approx 0.159$; für $\mu = 251.1$ ist $P(\mathcal{X} < 250) \approx 0.136$; Der Erwartungswert der Füllmenge muss also 251.1g betragen.

Aufg. 360/912: a) Einheiten: i) PKW: α_1 = Hubraum $x_1 \in [0, \infty)$ (Verhältnisskala, stetig), α_2 = Gewicht $x_2 \in (0, \infty)$ (Verhältnisskala, stetig), α_3 = AHK $x_3 \in$ {ja, nein} (Anhängerkupplung) (Nominalskala),
α_4 = Mietpreis $x_4 \in [0, \infty)$ (ist optional), (Verhältnisskala, quasi stetig), α_5 = Antriebsart $x_5 \in$ {Benzin, Elektro, Hybrid, ... } (Nominalskala), α_6 = Sitzplätze $x_6 \in [1..9]$ (Verhältnisskala, diskret).

ii) Wohnung: α_1 = Zimmer $x_1 \in \{0, 1, 2, 3, ..\}$ (Verhältnisskala, diskret), α_2 = Mietpreis $x_2 \in [0, \infty)$ (Verhältnisskala, quasi stetig), α_3 = Etage $x_3 \in \{0, 1, 2, 3, .., 163\}$ (Verhältnisskala, diskret), α_4 = EBK $x_4 \in$ {ja,nein} Einbauküche (Nominalskala), α_5 = Stellplätze $x_5 = \{0, 1, 2, 3, ..\}$ (Verhältnisskala, diskret). α_6 = Nutzfläche $x_6 \in [0, \infty)$ (Verhältnisskala, stetig),

iii) Gymnasium: α_1 = Fächerschwerpunkt $x_1 \in$ {Mathe, Musik, ... } (Nominalskala), α_2 = Lehreranzahl $x_2 \in \{0, 1, 2, 3, ..\}$ (Verhältnisskala, diskret), α_3 = Nutzfläche $x_3 \in [0, \infty)$ (Verhältnisskala, stetig), zur Not auch α_4 = Zimmer $x_4 \in \{0, 1, 2, 3, ..\}$ (Verhältnisskala, diskret), α_5 = Etage $x_5 \in \{0, 1, 2, 3, ..\}$ (Verhältnisskala, diskret), α_6 = Stellplätze $x_6 \in \{0, 1, 2, 3, ..\}$ (Verhältnisskala, diskret),

Aufg. 360/913: a) $E(\mathcal{X}) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{3}{6} + 3 \cdot \frac{2}{6} = \frac{13}{6}$; (Abb. 537)

b) $P(\mathcal{Y} = \underline{0}) = \frac{1}{2}$; $E(\mathcal{Y}) = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$;

c) i) Die Zufallsvariablen $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ sind unabhängig. $\mathcal{X} + \mathcal{Y}$ wird über einen Baum und die Pfadregel definiert. $E(\mathcal{X} + \mathcal{Y}) = 2 \cdot \frac{1}{12} + 2 \cdot \frac{1}{12} + 3 \cdot \frac{3}{12} + 2 \cdot \frac{3}{12} + 4 \cdot \frac{2}{12} + 3 \cdot \frac{2}{12} = \frac{32}{12} = \frac{8}{3} = \frac{13}{6} + \frac{1}{2}$;

ii) $E(\mathcal{X} + \mathcal{Y}) = E(\mathcal{X}) + E(\mathcal{Y})$; diese Formel gilt auch für abhängige ZG; Bew. siehe Abs. 14.16.11. Das Glücksrad und der Würfel werden je ein Mal geworfen und die Ergebnisse werden addiert.

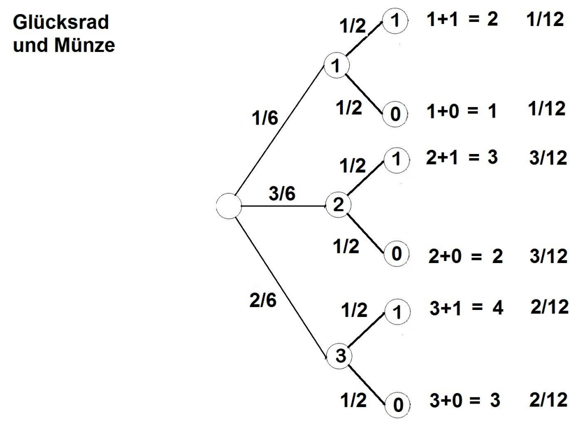


Abb. 537 Erwartungswert der Summe
d) $P(2) = \frac{1}{12}$; $P(6) = \frac{3}{12}$; $P(7) = \frac{3}{12}$; $P(10) = \frac{2}{12}$; $P(11) = \frac{3}{12}$; $E(\mathcal{X} + \mathcal{Y}) = 7.8\bar{3}$.

e) Statt $p(x_i) = p_i$ gilt jetzt $P(a \cdot x_i + b) = p_i$.

e) $(3X+7)$ $E = 2{,}1\bar{6}$ $E = 13{,}5$

Danke an Frau Smandzig

k	x_1	x_2	x_3	x_4
$P(X=k)$	p_1	p_2	p_3	p_4

$\longrightarrow$

	ax_1+b	ax_2+b	ax_3+b	ax_4+b
	p_1	p_2	p_3	p_4

$\longrightarrow 13{,}5 = 3 \cdot 2{,}1\bar{6} + 7 \longrightarrow E(aX+b) = a\,E(X) + b$

f) $E(a\cdot\mathcal{X}+b) = (ax_1+b)p_1+...+(ax_n+b)p_n$ Definition von Erwartungswert
$= ax_1\cdot p_1+b\cdot p_1+...+ax_n\cdot p_n+b\cdot p_n$ Distributivgesetz
$= a\underbrace{(x_1\cdot p_1+...+x_n\cdot p_n)}_{E(\mathcal{X})} + b\cdot\underbrace{(p_1+...+p_n)}_{1}$ Distributivgesetz
$= a \quad E(\mathcal{X}) \quad +b\cdot \quad 1 \quad = aE(\mathcal{X})+b$

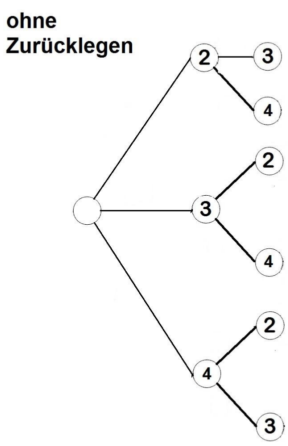
g) Sei $\mathcal{X}_1=\{x_1,x_2,..,x_n\},\mathcal{X}_2=\{y_1,y_2,..,y_m\}$, $P(\mathcal{X}_1=x_i)=p_i$, $P(\mathcal{X}_2=y_i)=q_i$;
Der Beweis sei hier für $n=3$ und $m=2$ notiert: $E(\mathcal{X}_1\cdot\mathcal{X}_2)$
$= x_1\cdot y_1\cdot p_1\cdot q_1+x_1\cdot y_2\cdot p_1\cdot q_2+x_2\cdot y_1\cdot p_2\cdot q_1+x_2\cdot y_2\cdot p_2\cdot q_2+x_3\cdot y_1\cdot p_3\cdot q_1+x_3\cdot y_2\cdot p_3\cdot q_2$
$= x_1\cdot p_1\cdot(y_1\cdot q_1+y_2\cdot q_2)+x_2\cdot p_2\cdot(y_1\cdot q_1+y_2\cdot q_2)+x_3\cdot p_3\cdot(y_1\cdot q_1+y_2\cdot q_2)$
$= (x_1\cdot p_1+x_2\cdot p_2+x_3\cdot p_3)\cdot(y_1\cdot q_1+y_2\cdot q_2)=E(\mathcal{X}_1)\cdot E(\mathcal{X}_2)$; Abb. 538

Jetzt für allgemeines n und m: $E(\mathcal{X}_1\cdot\mathcal{X}_2)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m x_i\cdot p_i\cdot y_j\cdot q_j=\sum_{i=1}^n x_i\cdot p_i\cdot\left(\sum_{j=1}^m y_j\cdot q_j\right)$
$=(\sum_{i=1}^n x_i\cdot p_i)\cdot\left(\sum_{j=1}^m y_j\cdot q_j\right)=E(\mathcal{X}_1)\cdot E(\mathcal{X}_2)$;

Aufg. 360/914: a,b)

mit/ohne Z	k	2	3	4
$\mathcal{X}_1=\mathcal{X}_2$	$P(\mathcal{X}=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$E(\mathcal{X}_1)=E(\mathcal{X}_2)=3$;



Erg.	$\mathcal{X}_1$	$\mathcal{X}_2$	p	$\mathcal{X}_1\cdot\mathcal{X}_2$	$\mathcal{X}_1+\mathcal{X}_2$
(2;3)	2	3	$\frac{1}{6}$	2*3=6	5
(2;4)	2	4	$\frac{1}{6}$	2*4=8	6
(3;2)	3	2	$\frac{1}{6}$	3*2=6	6
(3;4)	3	4	$\frac{1}{6}$	3*4=12	7
(4;2)	4	2	$\frac{1}{6}$	4*2=8	6
(4;3)	4	3	$\frac{1}{6}$	4*3=12	7

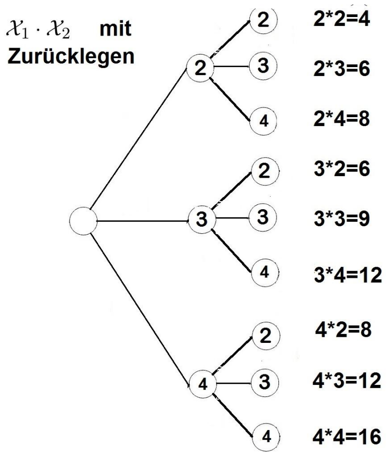


Abb. 538 Erwartungswert Produkt

ohne Z	k	6	8	12
$\mathcal{X}_1\cdot\mathcal{X}_2$	$P(\mathcal{X}=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

mit Z	k	4	6	8	9	12	16
$\mathcal{X}_1\cdot\mathcal{X}_2$	$P(\mathcal{X}=k)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

a) oZ $E(\mathcal{X}_1\cdot\mathcal{X}_2)=6\cdot\frac{1}{3}+8\cdot\frac{1}{3}+12\cdot\frac{1}{3}=\frac{13}{3}=8.\bar{6}\neq 9=E(\mathcal{X}_1)\cdot E(\mathcal{X}_2)$ (abhängig);

oZ $E(\mathcal{X}_1+\mathcal{X}_2)=5\cdot\frac{1}{3}+6\cdot\frac{1}{3}+7\cdot\frac{1}{3}=6=E(\mathcal{X}_1)+E(\mathcal{X}_2)$ (stimmt, obwohl abhängig);

Beim Ziehen ohne Zurücklegen sind die Zufallsvariablen $\mathcal{X}_1$ (Ergebnis des ersten Zuges) und $\mathcal{X}_2$ abhängig. Für abhängige ZG gilt $E(\mathcal{X}_1\cdot\mathcal{X}_2)$ ist nicht unbedingt gleich $E(\mathcal{X}_1)\cdot E(\mathcal{X}_2)$.

b) mZ $E(\mathcal{X}_1\cdot\mathcal{X}_2)=4\cdot\frac{1}{9}+6\cdot\frac{2}{9}+8\cdot\frac{2}{9}+9\cdot\frac{1}{9}+12\cdot\frac{2}{9}+16\cdot\frac{1}{9}=\frac{81}{9}=9=E(\mathcal{X}_1)\cdot E(\mathcal{X}_2)$ (unabhängig);

mZ $E(\mathcal{X}_1+\mathcal{X}_2)=4\cdot\frac{1}{9}+5\cdot\frac{2}{9}+6\cdot\frac{3}{9}+7\cdot\frac{2}{9}+8\cdot\frac{1}{9}=\frac{54}{9}=6=E(\mathcal{X}_1)\cdot E(\mathcal{X}_2)$ (unabhängig);

Aufg. 361/915: a,b,d) siehe Abschnitte 14.16.11, 14.16.14 und 14.16.13;

c) $V(a\cdot\mathcal{X}+b) \stackrel{Ag\ 361/915}{=\!=\!=} E((a\cdot\mathcal{X}+b)^2)-(E(a\cdot\mathcal{X}+b))^2$
$\stackrel{BinF}{=\!=} E(a\cdot\mathcal{X})^2+2E(ab\mathcal{X})+E(b^2)-[(aE(\mathcal{X})+E(b))^2]$
$\stackrel{BinF}{=\!=} a^2E(\mathcal{X}^2)+2abE(\mathcal{X})+b^2-[a^2(E(\mathcal{X}))^2+2abE(\mathcal{X})+b^2]$
$= a^2E(\mathcal{X}^2)-a^2(E(\mathcal{X}))^2 \quad = a^2\cdot V(\mathcal{X})$.

der Erwartungswert der konstanten Verteilung b^2 ist natürlich b^2.

Aufg. 361/916: a) die $\mathcal{X}_i$ sind identisch verteilt und unabhängig; $\bar{x}=\frac{x_1+..+x_n}{n}$.

b) $9.6 = \frac{9.5+10+9.3+9.1+10+9.8+10.1+9.2+9.4}{9}$.

$s^2 = \frac{(9.5-9.6)^2+(10-9.6)^2+(9.3-9.6)^2+(9.1-9.6)^2+(10-9.6)^2+(9.8-9.6)^2+(10.1-9.6)^2+(9.2-9.6)^2+(9.4-9.6)^2}{8} = 0.145$

$\Rightarrow s = \sqrt{0.145} \approx 0.38$.

c) Elena L. (TFM 2017) =♡; Sie sehen nicht nur meiner Frau sehr ähnlich, sondern Sie sind auch mathematisch gesehen hervorragend (Brain) - ich bin wirklich begeistert von Ihnen! Als Vorleserin mussten Sie den Text ab und an zwei oder zehn Mal vorlesen, weil ich Ihre Stimme nochmals hören wollte. Vielen Dank für die schönen drei Semester (WS 2018, SS 2018 + WS 2019) und für das Armband, dass Sie extra für mich getragen haben.

c) Originalaufgabe: $\bar{x} = \frac{1.92+1.63+1.65+1.70+1.85+1.78+1.78+1.78+1.60}{9} = 1.74\bar{3}$; die Schätzung war also gut. Umgebaute Aufgabe: $\bar{x} = \frac{1.92+1.63+1.65+1.70+1.85+1.78+1.78+1.78+1.57}{9} = 1.74$; Die Ag wurde wg der Varianz umgebaut. $s^2 = \frac{0.1}{9-1} = 0.0125$; $s = \sqrt{0.0125} \approx 0.112$;

Sie haben von der Stichprobe das arithmetische Mittel berechnet.

d) (das Bergwerk) i) $P(\mathcal{X}=0) = 0.75$; $P(\mathcal{X}=4) = 0.25$;

ii) $E(\mathcal{X}) = 1$, $V(\mathcal{X}) = (0-1)^2 \cdot \frac{3}{4} + (4-1)^2 \cdot \frac{1}{4} = 3$, $\sigma(\mathcal{X}) = \sqrt{3}$;

iii) $\mathcal{S} = \frac{\mathcal{X}_1+\mathcal{X}_2}{2}$, $P(\mathcal{X} = \frac{0+0}{2}) = (0.75)^2$; $P(\mathcal{X} = \frac{0+4}{2}) = 2 * 0.75 * 0.25$; $P(\mathcal{X} = \frac{4+4}{2}) = (0.25)^2$;

$E(\frac{\mathcal{X}_1+\mathcal{X}_2}{2}) = 2 \cdot 0.75 \cdot 0.25 \cdot 2 + (0.25)^2 \cdot 4 = 1$;

$V(\frac{\mathcal{X}_1+\mathcal{X}_2}{2}) = (0.75)^2 \cdot (0-1)^2 + 0.375 \cdot (2-1)^2 + (0.25)^2 \cdot (4-1)^2 = 1.5 = \frac{3}{2}$,

Damit ist $\sigma(\frac{\mathcal{X}_1+\mathcal{X}_2}{2}) = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sigma(\mathcal{X})}{\sqrt{2}}$.

e) abhängig von $\mu = E(\mathcal{X}_1) = E(\underline{\mathcal{X}_i})$ und $\sigma = \sqrt{V(\mathcal{X}_1)} = \sqrt{V(\underline{\mathcal{X}_i})}$ $(i = 1..n)$.

$E\left(\frac{\mathcal{X}_1+\mathcal{X}_2+..+\mathcal{X}_n}{n}\right) = \frac{E(\mathcal{X}_1)+E(\mathcal{X}_2)+..+E(\mathcal{X}_n)}{n} = \frac{n \cdot E(\mathcal{X}_1)}{n} = \mu$

und $(\sigma(\bar{\mathcal{X}}) =)\sqrt{V\left(\frac{\mathcal{X}_1+\mathcal{X}_2+..+\mathcal{X}_n}{n}\right)} = \sqrt{\frac{V(\mathcal{X}_1)+V(\mathcal{X}_2)+..+V(\mathcal{X}_n)}{n^2}} = \sqrt{\frac{n \cdot V(\mathcal{X}_1)}{n^2}} = \frac{\sigma(\mathcal{X}_1)}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Beginn z-Test;

Aufg. 361/917: a) 1.2 Jahre; b) Dichte: $f(x) = F'(x) = \left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)' = \frac{e^x \cdot (e^x+1) - e^{2x}}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0$, damit ist $F(x)$ smw; $\lim_{n\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{n\to\infty} F(x) = 1$. $F(x)$ ist stetig.

$\frac{e^x}{e^x+1} = \alpha \Leftrightarrow e^x = \alpha(e^x+1) \Leftrightarrow (1-\alpha)e^x = \alpha \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)$. Damit ist $x_1 = \ln(0.5/(1-0.5)) = 0$, $x_2 = \ln(0.9/(1-0.9)) = \ln(9) \approx 2.2$, $x_3 = \ln(0.99/(1-0.99)) = \ln(99) \approx 22$,

$(F(x) = \underline{\alpha}$ nach $\underline{x}$ auflösen).

c) $k = \underline{F^{-1}(\alpha)}$ ... $F(x) = \underline{P(\mathcal{X} \leq x)}$ .... Für alle $x \leq k$ ist $P(\mathcal{X} \leq x) \leq \underline{\alpha}$ und für alle $y \geq k$ ist $P(\mathcal{X} \geq y) \leq \underline{1-\alpha}$; Abb. 539 Das Quantil der Ordnung 0.5 heißt auch Median.

Lösen Sie $F(x) = \alpha$ nach x auf.

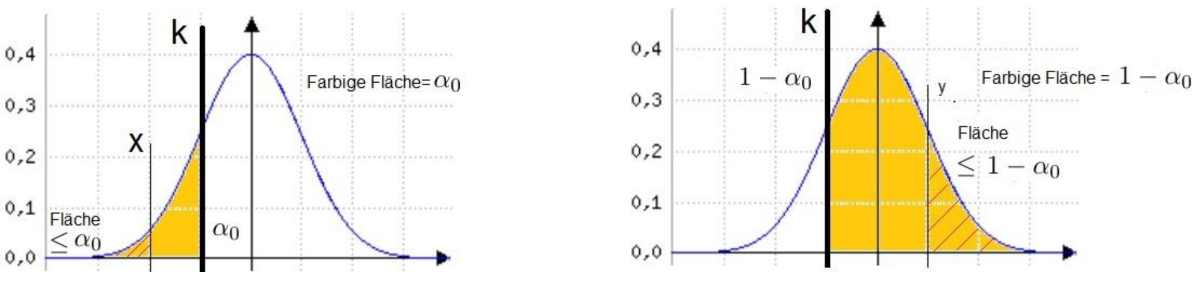


Abb. 539 Normalverteilung

d) $F^{-1}(0.3) = 7$; $F^{-1}(0.5) = 9$; $F^{-1}(0.9) = 13$;

e) $\Phi^{-1}(1-\alpha) = -\Phi^{-1}(\alpha)$

α	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5	0.8	0.9	0.95	0.99
$\Phi^{-1}(\alpha)$	-2.326	-1.645	-1.282	-0.8416	0	0.8416	1.282	1.645	2.326

f) $P(\mathcal{X} \le k) = \Phi(\frac{k-\mu}{\sigma})$, damit ist $\alpha = \Phi(\frac{k-\mu}{\sigma}) \Leftrightarrow \Phi^{-1}(\alpha) = \frac{k-\mu}{\sigma} \Leftrightarrow k = \Phi^{-1}(\alpha)\cdot\sigma + \mu$.

i) $\mu = 1, \sigma = 1, \alpha = 0.1$: $k = \Phi^{-1}(0.1)\cdot 1 + 1 \approx -1.282 \cdot 1 + 1 = -0.282$.

ii) $\mu = 20, \sigma = 10, \alpha = 0.05$; $k = \Phi^{-1}(0.05)\cdot 10 + 20 \approx -1.645 \cdot 10 + 20 = 3.551$.

iii) $\mu = \mu, \sigma = \sigma, \alpha = 0.5$; $k = \Phi^{-1}(0.5)\cdot\sigma + \mu = 0\cdot\sigma + \mu = \mu$.

Bei normalverteilten ZG gilt $k = \Phi^{-1}(\alpha)\cdot\sigma + \underline{\mu}$.

g) $\alpha \approx \Phi(\frac{k-n\cdot p+0.5}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}) \Leftrightarrow k \approx \Phi^{-1}(\alpha)\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)} + 0.5 + n\cdot p$.

i) $n = 10, p = 0.4, \alpha = 0.1$: $k \approx \Phi^{-1}(0.1)\cdot\sqrt{10\cdot 0.4\cdot 0.6} + 0.5 + 10\cdot 0.4 \approx 2.514$.

ii) $n = 20, p = 0.2, \alpha = 0.05$: $k \approx \Phi^{-1}(0.05)\cdot\sqrt{20\cdot 0.2\cdot 0.8} + 0.5 + 20\cdot 0.2 \approx 1.557$.

iii) $n = 100, p = 0.3, \alpha = 0.9$: $k \approx \Phi^{-1}(0.9)\cdot\sqrt{100\cdot 0.3\cdot 0.7} + 0.5 + 100\cdot 0.3 \approx 36,375$.

Aufg. 362/918: a) 1.76: $\Phi(\frac{1.74-1.76}{0.1}\cdot\sqrt{9}) = \Phi(-0.6) \approx 0.382$, damit wird H_0 angenommen;
1.80: $\Phi(-1.8) \approx 0.036$, damit wird H_0 abgelehnt;
1.71: $\Phi(0.9) \approx 0.816$, damit wird H_0 angenommen;
1.65: $\Phi(2.7) \approx 0.997$, damit wird H_0 abgelehnt.

b) Die Verteilung $\bar{\mathcal{X}} = \frac{\mathcal{X}_1+\ldots+\mathcal{X}_n}{n}$ ist die Verteilung des Mittelwertes.

$\bar{\mathcal{X}}$ sollte näherungsweise $N(\underline{\mu,\sigma})$ verteilt sein.

c) i) $H_1 : E(\mathcal{X}) < \mu$, $n = 9$, $(9.5 + 10 + 9.3 + 9.1 + 10 + 9.8 + 10.1 + 9.2 + 9.4)\cdot\frac{1}{9} = \frac{86.4}{9} = 9.6$; $\Phi\left(\frac{9.6-10}{1}\cdot\sqrt{9}\right) = \Phi(-1.2) \approx 0.115 > 0.1$ wir akzeptieren H_0.

ii) $\bar{x} = 174 > \mu$ (rechtsseitiger Test) $\Phi(\frac{1.74-1.72}{0.1}\cdot\sqrt{9}) = \Phi(0.6) \approx 0.7257 < 0.9$; $H_0 : \mu$ unverändert wird angenommen.

iii) $\bar{x} = 174 < \mu$ (linksseitiger Test) $\Phi(\frac{1.74-1.80}{0.1}\cdot\sqrt{9}) = \Phi(-1.8) \approx 0.0359 < 0.1$; $H_0 : \mu$ unverändert wird abgelehnt.

d) $H_1 : E(\mathcal{X}) < \mu$, $n = 9$, $(105 + 100 + 107 + 109 + 100 + 102 + 99 + 108 + 106)\cdot\frac{1}{9} = \frac{936}{9} = 104$; $\Phi\left(\frac{104-100}{8}\cdot\sqrt{9}\right) = \Phi(1.5) \approx 0.933 > 1 - 0.1$ wir akzeptieren H_1.

$P(\bar{\mathcal{X}} \le k) \approx \Phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\cdot\sqrt{n}\right)$.

e) i) $H_0 : \mu \ge 2500$, $\quad H_1 : \mu < 2500$; ii) $\bar{x} = \frac{2400+2450+2350+2500+2550}{5} = 2450$;

iii) $z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma}\cdot\sqrt{n} = \frac{2450-2500}{70}\cdot\sqrt{5} \approx -1.5972$, also ist $\Phi(-1.5972) \approx 0.055$. Ja, man kann davon ausgehen, weil $\Phi(-1.5972) < 0.1$ ist. Mit Tabelle: $\Phi(-1.5972) \approx 1 - \Phi(1.6) = 0.055$.

f) $\bar{x} = 176$; $\Phi(\frac{176-175}{5}\cdot\sqrt{9}) = \Phi(0.6) \approx 0.7257 < 0.9 = 1 - 0.1$ also 'nein'.

g) $\bar{x} = \frac{6246}{9} = 694$; $s = \sqrt{\frac{4+81+49+296+25+9+4+16+100}{8}} = \sqrt{73} \approx 8.5$, $\Phi(\frac{694-700}{9}\cdot\sqrt{9}) = \Phi(-2) \approx 0.023 < 0.1$ also 'nein', wir vertrauen nicht.

Aufg. 362/919: a) $P(\mu > v) = 1 - P(\mu \le v) \approx 1 - \Phi\left(\frac{v-\bar{x}}{s:\sqrt{n}}\right)$. Weil die Normalverteilung eine stetige Verteilung ist, gilt $P(\mathcal{X} < k)$=$P(\mathcal{X} \le k)$.

$\Phi^{-1}(\frac{\alpha}{2}) \approx \frac{u-\bar{x}}{s:\sqrt{n}} \Leftrightarrow u \approx \bar{x} + \Phi^{-1}(\frac{\alpha}{2})\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}$,

$\Phi^{-1}(\frac{\alpha}{2}) \approx \frac{-v+\bar{x}}{s} \Leftrightarrow \Phi^{-1}(\frac{\alpha}{2}) \cdot s \cdot \sqrt{n} \approx \bar{x} - v \Leftrightarrow v \approx \bar{x} - \Phi^{-1}(\frac{\alpha}{2}) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}};$

$\Rightarrow P(\mu \notin [u;v]) = P(\mu \notin \left[\ \bar{x} - \Phi^{-1}(\frac{\alpha}{2}) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\ ;\ \bar{x} + \Phi^{-1}(\frac{\alpha}{2}) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right]) \approx \alpha$. (Intervallschätzung).

Beachten Sie dabei, dass $\Phi^{-1}(\frac{\alpha}{2}) < 0$ für $\alpha < 0.5$ ist.

$u = \bar{x} + \Phi^{-1}(\frac{\alpha}{2}) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad v = \bar{x} - \Phi^{-1}(\frac{\alpha}{2}) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ oder $v = 2\bar{x} - u;$

Eine Wertetabelle von Φ^{-1} finden Sie im Abschnitt 14.19.8 auf Seite 434.

i) $u = 50 + \Phi^{-1}(0.1) \cdot \frac{7}{\sqrt{49}} \approx 50 - 1.282 = 48.718$, $v = 50 - \Phi^{-1}(0.1) \cdot \frac{7}{\sqrt{49}} \approx 50 + 1.282 = 51.282;$

ii) $u = 200 + \Phi^{-1}(0.05) \cdot \frac{15}{\sqrt{100}} \approx 200 - 1.645 \cdot 1.5 \approx 197.55,$
$v = 200 - \Phi^{-1}(0.05) \cdot \frac{15}{\sqrt{100}} \approx 100 + 1.645 \cdot 1.5 \approx 202.467;$

iii) $u = 1000 + \Phi^{-1}(0.025) \cdot \frac{100}{\sqrt{400}} \approx 1000 - 1.96 \cdot 5 \approx 990.2$, $u = 1000 + \Phi^{-1}(0.025) \cdot \frac{100}{\sqrt{400}} \approx 1000 - 1.96 \cdot 5 \approx 1009.8$.

Beginn Chi^2 Test; Ende z-Test

Aufg. 363/920: Die Standardabweichung (oder Varianz) der Grundmenge hat einen großen Einfluss auf unsere Tests.

b) Die Münze wurde 100 mal geworfen; erwartet wurden 50 mal W und 50 mal Z. $\sum \frac{(n_0-n_e)^2}{n_e} = \frac{(48-50)^2}{50} + \frac{(52-50)^2}{50} = \frac{8}{50} = 0.16$. Je größer die Teststatistik, desto größer ist die Abweichung vom erwarteten Wert. Wir lesen die Zahl in der Tabelle in Zeile 1 (Freiheitsgrade) und Spalte 0.1 ab: 2.71. Weil $0.16 < 2.71$ ist, wird H_0 angenommen.

c) $n_O = 47$: $\sum \frac{(n_0-n_e)^2}{n_e} = \frac{(47-50)^2}{50} + \frac{(53-50)^2}{50} = \frac{18}{50} = 0.36 < 2.71;$
$n_O = 43$: $\sum \frac{(n_0-n_e)^2}{n_e} = \frac{(43-50)^2}{50} + \frac{(57-50)^2}{50} = \frac{98}{50} = 1.96 < 2.71;$
$n_O = 40$: $\sum \frac{(n_0-n_e)^2}{n_e} = \frac{(40-50)^2}{50} + \frac{(60-50)^2}{50} = \frac{200}{50} = 4 \not< 2.71$; (bei $n_O = 40$ wird abgelehnt);

$n_O = $x: $\sum \frac{(n_0-n_e)^2}{n_e} = \frac{(x-50)^2}{50} + \frac{(100-x-50)^2}{50} = 2.71 \Leftrightarrow \frac{x^2-100x+2500}{50} + \frac{x^2-100x+2500}{50} = 2.71 \Leftrightarrow \frac{x^2-100x+2500}{25} = 2.71 \Leftrightarrow x^2 - 100x + 2500 = 67.75 \Leftrightarrow x_1 \approx 41.77, x_2 \approx 58.23;$
Also wird H_0 angenommen falls $42 \le x \le 58$ ($x \in \mathbb{Z}$).

Aufg. 363/921: a) $n = 13 + 32 + 15 = 60$ b) $n = 30 + 70 + 20 = 120$

a)	1	2	3
n_O	13	32	15
n_e	10	30	20

b)	1	2	3
n_O	30	72	18
n_e	20	60	40

a) $\sum \frac{(n_0-n_e)^2}{n_e} = \frac{(13-10)^2}{10} + \frac{(32-30)^2}{30} + \frac{(15-20)^2}{20} = \frac{137}{60} = 2.28\bar{3} < 5.99$; H_0 wird akzeptiert.

b) $\sum \frac{(n_0-n_e)^2}{n_e} = \frac{(30-20)^2}{20} + \frac{(72-60)^2}{60} + \frac{(18-40)^2}{40} = 19.5 \not< 5.99$; H_0 wird abgelehnt.

c) i) Vermutung: $\bar{f}(i) = \frac{768}{6} = 128$: $\chi^2 = \sum_{i=1}^{6} \frac{(f(i)-128)^2}{128} = \frac{(116-128)^2}{128} + \frac{(122-128)^2}{128} + \frac{(144-128)^2}{128} + \frac{(134-128)^2}{128} + \frac{(114-128)^2}{128} + \frac{(138-128)^2}{128} = \frac{144+36+256+36+196+100}{128} = \frac{768}{128} = 6;$
Der Test hat 5 Freiheitsgrade $\Rightarrow \chi^2 = 6 < 9.24 \Rightarrow H_0$ wird angenommen.
ii) In diesem Falle wären 1536 Personen befragt worden und $\bar{f}(i) = \frac{1536}{6} = 256;$
Hier wäre $\chi^2 = \frac{3072}{256} = 12 > 9.24; \Rightarrow H_0$ wird abgelehnt.

d) Standardisierung $z = \frac{x-9}{1}$; Anzahl der Freiheitsgrade=3

Bereich	erwartete Wahrscheinlichkeit	erwartet	gemessen	$\frac{(x_g-x_e)^2}{x_e}$
$B \leq 8.5$:	$\Phi(8.5-9) \approx 0.3085$	308.5	248	11.86
$8.5 < B \leq 9$:	$\Phi(9-9) - \Phi(8.5-9) \approx 0.5 - 0.3085 = 0.1915$	191.5	180	0.69
$9 < B \leq 9.5$:	$\Phi(9.5-9) - \Phi(9-9) \approx 0.6915 - 0.5 = 0.1915$	191.5	242	13.22
$B > 9.5$:	$1 - \Phi(9.5-9) \approx 1 - 0.6915 = 0.3085$	308.5	330	1.50
Summe	1.0000	1000.0	1000	27.37

$27.37 > 6.25$ also 'Nein' diese Verteilung ist nicht (höchstwahrscheinlich) normalverteilt.

e) i)	A	B	C	Summe
n_O	32	35	33	100
n_e	$33.\bar{3}$	$33.\bar{3}$	$33.\bar{3}$	100

$\chi^2_{emp} = \frac{(32-33.\bar{3})^2}{33.\bar{3}} + \frac{(35-33.\bar{3})^2}{33.\bar{3}} + \frac{(33-33.\bar{3})^2}{33.\bar{3}} = 0.14 < 4.61$ also gleichverteilt.

e) ii)	A	B	C	Summe
n_O	10	5	3	18
n_e	6	6	6	18

aus der GFS von Leonie H.
$\chi^2_{emp} = \frac{(10-6)^2}{6} + \frac{(5-6)^2}{6} + \frac{(3-6)^2}{6} = 4.\bar{3} < 4.61$
also wird gleichverteilt akzeptiert.

e) iii)	A	B	C	Summe
n_O	9	4	2	15
n_e	5	5	5	15

aus der GFS von Leonie H.
$\chi^2_{emp} = \frac{(9-5)^2}{5} + \frac{(4-5)^2}{5} + \frac{(2-5)^2}{5} = 5.2 \not< 4.61$
also wird gleichverteilt nicht akzeptiert.

Aufg. 363/922: a) $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$; b) $\mu = n \cdot p = 180 \cdot \frac{1}{18} = 10$;

b)	A	$\bar{A}$	Σ
B	10	50	60
$\overline{B}$	20	100	120
Σ	30	150	180

c)	C	$\bar{C}$	Σ
D	2	10	12
$\overline{D}$	4	20	24
Σ	6	30	36

d)	A	$\bar{A}$	Σ
B	12	18	30
$\overline{B}$	48	102	150
Σ	60	120	180

c) Jedes Element berechnen sich als Spaltensumme · Zeilensumme : Gesamtzahl; 10=30 · 60 : 180. Ein Wert ist variabel, der Rest liegt fest; damit hat der Test einen Freiheitsgrad.

d) Die Werte von n_e stehen in Tabelle b). $\chi^2 = \frac{(12-10)^2}{10} + \frac{(12-10)^2}{10} + \frac{(18-20)^2}{20} + \frac{(12-10)^2}{10} + \frac{(48-50)^2}{50} + \frac{(102-100)^2}{100} = 0.72 < 2.71$ also ja, wir gehen von Unabhängigkeit aus.

Aufg. 363/922: e):

822 'Ist'	A	$\bar{A}$	Σ
B	470	150	620
$\overline{B}$	149	231	380
Σ	619	381	1000

822 'Soll'	A	$\bar{A}$	Σ
B	383.78	236.22	620
$\overline{B}$	235.22	144.78	380
Σ	619	381	1000

$\chi^2_{emp} = \frac{(470-383.78)^2}{383.78} + \frac{(150-236.22)^2}{236.22} + \frac{(149-235.22)^2}{235.22} + \frac{(231-144.78)^2}{144.78} \approx 19.37 + 31.47 + 31.6 + 5{\cdot}35 = 133.79 > 2.71$ also abhängig.

808 a) 'Ist'	T	$\bar{T}$	Σ
F	50	72	122
$\overline{F}$	28	850	878
Σ	78	922	1000

808 a) 'Soll'	T	$\bar{T}$	Σ
F	9.516	112.484	122
$\overline{F}$	68.484	809.516	878
Σ	78	922	1000

$\chi^2_{emp} = \frac{(50-9.516)^2}{9.516} + \frac{(72-112.484)^2}{112.484} + \frac{(28-68.484)^2}{68.484} + \frac{(850-809.516)^2}{809.516} \approx 172.23 + 14.57 + 23.93 + 2.02 > 2.71$ also abhängig.

808 b) 'Ist'	L	$\bar{L}$	Σ
D	3	6	9
$\overline{D}$	4	87	91
Σ	7	93	100

808 b) 'Soll'	L	$\bar{L}$	Σ
D	0.63	8.37	9
$\overline{D}$	6.37	84.63	91
Σ	7	93	100

$\chi^2_{emp} = \frac{(3-0.63)^2}{0.63} + \frac{(6-8.37)^2}{8.37} + \frac{(4-6.37)^2}{6.37} + \frac{(87-84.63)^2}{84.63} \approx 8.92 + 0.67 + 0.88 + 0.07 > 2.71$ also abhängig.

808 c) 'Ist'	L	$\bar{L}$	Σ
R	25	23	48
$\overline{R}$	12	40	52
Σ	37	63	100

808 c) 'Soll'	L	$\bar{L}$	Σ
R	17.76	30.24	48
$\overline{R}$	19.24	32.76	52
Σ	37	63	100

$\chi^2_{emp} = \frac{(15-17.76)^2}{17.76} + \frac{(33-30.24)^2}{30.24} + \frac{(22-19.24)^2}{19.24} + \frac{(30-32.76)^2}{32.76} \approx 0.43+0.25+0.4+0.23 < 2.71$ die Ereignisse 'liniert' und mit Rand gelten also als unabhängig.

f) n_e	A	$\bar{A}$	Σ
B	9	6	15
$\overline{B}$	3	2	5
Σ	12	8	20

g) n_e	A	$\bar{A}$	Σ
B	21	14	35
$\overline{B}$	9	6	15
Σ	30	20	50

h) n_e	A	$\bar{A}$	Σ
B	63	117	180
$\overline{B}$	77	143	220
Σ	140	260	400

f) $\chi^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{10}{9} < 2.71$ unabhängig.

g) $\chi^2 = \frac{4}{21} + \frac{4}{14} + \frac{4}{9} + \frac{4}{6} = \frac{100}{63} \approx 1.59 < 2.71$ unabhängig.

h) $\chi^2 = 29^2 \cdot \left(\frac{1}{63} + \frac{1}{117} + \frac{1}{77} + \frac{1}{143}\right) \approx 37.34 > 2.71$ abhängig.

LöVo der Ag 363/922 i) Ag 326/822: $P(V) = \frac{620}{1000}, P(S) = \frac{619}{1000}$; $P(V) \cdot P(S) \approx 0.384 < 0.47 = P(V \cap S)$, S und V mögen sich.

Ag 321/808a: L und D mögen sich; b: T und F mögen sich; c) L und R meiden sich (ein Bisschen); Ag 363/922d,f,g,h mögen sich (alle).

Aufg. 364/923: a) 2000: Insgesamt wurden 2000 Personen befragt. 780 davon verdienten weniger als 1500 €, 46 von den 2000 Personen hatten keinen Bildungsabschluss. 34 Personen verdienten weniger als 1500 € und hatten keinen Bildungsabschluss. Die Kontingenztafel ist aufgebaut, wie eine Vierfeldertafel nur eben nicht mit vier Feldern.

b) $17.94=\frac{46\cdot 780}{2000}$; $230.762=\frac{622\cdot 742}{2000}$

Einkommen\Abschluss	ohne	Hauptschule	Realschule	Abitur	≥ Bachelor	Summe
< 1500 €	17.94	117	139.62	242.58	262.86	780
1500 bis 3000 €	10.994	71.7	85.562	148.658	161.086	478
> 3000 €	17.066	111.3	132.818	230.762	250.054	742
Summe	46	300	358	622	674	2000

c+d) als Reminder sei in Abb. 540 nocheinmal die Tabelle aus Teil a abgedruckt. Jeder der Kringel erzeugt einen Freiheitsgrad (n=8).

Einkommen\Abschluss	ohne	Hauptschule	Realschule	Abitur	≥ Bachelor	Summe
< 1500 €	34	264	206	190	86	780
1500 bis 3000 €	10	12	64	190	202	478
> 3000 €	2	24	88	242	386	742
Summe	46	300	358	622	664	2000

Abb. 540 Chi Quadrat Unabhängigkeitstest

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \frac{(34-17.94)^2}{17.94} + \frac{(264-117)^2}{117} + \frac{(206-139.62)^2}{139.62} + \frac{(190-242.58)^2}{242.58} + \frac{(86-262.86)^2}{262.86}\\ &+ \frac{(10-10.994)^2}{10.994} + \frac{(12-71.7)^2}{71.7} + \frac{(64-85.562)^2}{85.562} + \frac{(190-148.658)^2}{148.658} + \frac{(202-161.086)^2}{161.086}\\ &+ \frac{(2-17.066)^2}{17.066} + \frac{(24-111.3)^2}{111.3} + \frac{(88-132.818)^2}{132.818} + \frac{(242-230.762)^2}{230.762} + \frac{(386-250.054)^2}{250.054} \approx 609.49855\end{aligned}$$

Allein der zweite Summand liegt schon bei 184, damit ist die Summe $> 184 > 20.09$ damit sind die Größen (fast) sicher abhängig $\overline{H_0}$.

Aufg. 364/924: χ^2 **Homogenitätstest:**$_e$:

χ^2 = Chi² Homogenitätstest $a, b, c \in \mathbb{N}$ (>0)

Thx Mil Ber

	A	B	C	
V_1	a	b	c	$a+b+c$
V_2	ta	tb	tc	$t(a+b+c)$
	$(t+1)a$	$(t+1)b$	$(t+1)c$	$(t+1)(a+b+c)$

$$= \frac{(a+b+c)\cdot(t+1)a}{(t+1)(a+b+c)}$$

χ^2 Unabhängigkeitstest

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ $P_B(A) = P(A)$

4 Feldertafel Wahrscheinlichkeiten

$$n \cdot P(A \cap B) = \frac{n \cdot P(A) \cdot n \cdot P(B)}{n}$$

	A	$\bar{A}$	Σ
B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
Σ	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1

	A	$\bar{A}$	Σ
B	$nP(A \cap B)$	$nP(\bar{A} \cap B)$	$nP(B)$
$\bar{B}$	$nP(A \cap \bar{B})$	$nP(\bar{A} \cap \bar{B})$	$nP(\bar{B})$
Σ	$nP(A)$	$nP(\bar{A})$	n

a)

Messung \ Merkmal	A	B	C
	12	8	16
	24	16	32
	3	2	4

Restaurant \ Speise	Hamburger	Chickenwings	Pommes Frites	Salat	Summe
Stadtmitte	90	60	120	30	300
Bahnhof	150	100	200	50	500
Schulzentrum	60	40	80	20	200
Summe	300	200	400	100	1000

als Reminder sei in Abb. 541 nocheinmal die Tabelle aus Teil a abgedruckt. Jeder der Kringel erzeugt einen Freiheitsgrad $\Rightarrow n = 6$.

Restaurant \ Speise	Hamburger	Chickenwings	Pommes Frites	Salat	Summe
Stadtmitte	105	54	108	33	300
Bahnhof	135	110	210	45	500
Schulzentrum	60	36	82	22	200
Summe	300	200	400	100	1000

Abb. 541 Chi Quadrat Homogenitätstest

$$\begin{aligned}\chi^2_{emp} &= \frac{(105-90)^2}{90} + \frac{(54-60)^2}{60} + \frac{(108-120)^2}{120} + \frac{(33-30)^2}{30} \\ &+ \frac{(135-150)^2}{150} + \frac{(110-100)^2}{100} + \frac{(210-200)^2}{200} + \frac{(45-50)^2}{50} \\ &+ \frac{(60-60)^2}{60} + \frac{(36-40)^2}{40} + \frac{(82-80)^2}{80} + \frac{(22-20)^2}{20} = 8.75 < 10.64 \Rightarrow H_0 \surd\end{aligned}$$

b) i) $\chi^2 = 0.25$ homogen; ii) $\chi^2 = 5$ nicht homogen; iii) homogen; $\downarrow$ Teil e)

i) $\alpha = 0{,}1$

n_0	A	$\bar{A}$	
B	1	2	3
$\bar{B}$	3	4	7
	4	6	10

$\longrightarrow$

n_E	A	$\bar{A}$	
B	$\overset{\frac{4\cdot 3}{10}}{1{,}2}$	1,8	3
$\bar{B}$	2,8	4,2	7
	4	6	10

Anzahl Freiheitsgrade hier: 1

FG = ('Anzahl Spalten' − 1) · ('Anzahl Zeilen' − 1) → hier: (2 − 1) · (2 − 1) = 1

Freiheitsgrade \ α	0.99	0.95	0.90	0.75	0.50	0.25	0.10	0.05	0.01
1	0.000	0.004	0.016	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	6.63
2	0.020	0.103	0.211	0.575	1.386	2.77	4.61	5.99	9.21

$< 2{,}71 \Rightarrow$ homogen

$$\chi^2 = \sum \frac{(n_0 - n_E)^2}{n_E} = \frac{(1-1{,}2)^2}{1{,}2} + \frac{(2-1{,}8)^2}{1{,}8} + \frac{(3-2{,}8)^2}{2{,}8} + \frac{(4-4{,}2)^2}{4{,}2} \approx 0{,}0794$$

n_0	A	$\bar{A}$	
B	20	40	60
$\bar{B}$	60	80	140
	80	120	200

$\longrightarrow$

$\frac{80\cdot 60}{200}$

n_E	A	$\bar{A}$	
B	24	36	60
$\bar{B}$	56	84	140
	80	120	200

homogen (H0 angenommen)

$$\chi^2 = \sum \frac{(n_0 - n_E)^2}{n_E} = \frac{(20-24)^2}{24} + \frac{(40-36)^2}{36} + \frac{(60-56)^2}{56} + \frac{(80-84)^2}{84} \approx \underline{1{,}587} < \mathbf{2.71}$$

$\alpha = 0{,}1$

n_0	A	$\bar{A}$	
B	0	1	1
$\bar{B}$	2	7	9
	2	8	10

$\longrightarrow$

$\frac{2\cdot 1}{10}$

n_E	A	$\bar{A}$	
B	0,2	0,8	1
$\bar{B}$	1,8	7,2	9
	2	8	10

$$\chi^2 = \sum \frac{(n_0 - n_E)^2}{n_E} = \frac{(0-0{,}2)^2}{0{,}2} + \frac{(1-0{,}8)^2}{0{,}8} + \frac{(2-1{,}8)^2}{1{,}8} + \frac{(7-7{,}2)^2}{7{,}2}$$

$= 0{,}2 + 0{,}05 + 0{,}0\bar{2} + 0{,}00\bar{5} = 0{,}2\bar{7} < 2{,}71 \Rightarrow$ homogen

Ende χ^2-Test; Beginn t-Test

Aufg. 365/925: a) $T(2; 0.2) = -1.001$; $T(10; 0.1) = -1.372$;
b) Dies sind die Werte der Standardnormalverteilung; $T(\infty, x) = \Phi^{-1}(x)$.
c) $T(2; 0.8) = 1.001$; $T(10; 0.9) = 1.372$; $T(n; \alpha) = -T(n; 1-\alpha)$;

Aufg. 365/926: a) $T(3; 0.2) = -0.978 (= -T(3; 0.8))$; $\bar{x} = \frac{6+9+9+12}{4} = 9$,
$s^2 = \frac{(9-6)^2+(9-9)^2+(9-9)^2+(9-12)^2}{4-1} = 6$, $\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n} = \frac{9-10}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{4} \approx -0.82$.

Weil $\frac{\bar{x}-\mu_0}{s} \cdot \sqrt{n} = -0.82 > -0.978 = T(3; 0.2)$ wird H_0 angenommen.

b) $\frac{\bar{x}-\mu_0}{s} \cdot \sqrt{n} = \frac{9-11}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{4} \approx -1.63$. Weil $\frac{\bar{x}-\mu_0}{s} \cdot \sqrt{n} \approx -1.63 < -0.978 \approx T(3; 0.2)$ wird H_0 abgelehnt.

c) i) $\frac{\bar{x}-\mu_0}{s} \cdot \sqrt{n} = \frac{9-10.1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{4} \approx -0.898 > -0.978$. H_0 wird angenommen.

ii) $\frac{\bar{x}-\mu_0}{s} \cdot \sqrt{n} = \frac{9-10.5}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{4} \approx -1.22 < -0.978$. H_0 wird abgelehnt.

d) $\frac{9-\mu_1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{4} \approx -0.978 \Leftrightarrow (9-\mu_1) \cdot 2 \approx -2.396 \Leftrightarrow \mu_1 \approx 10.198$.

e) **Der linksseitige t-Test:** $\frac{\bar{x}-\mu_0}{s} \cdot \sqrt{n} < T(n; \alpha) \Rightarrow H_0$ wird abgelehnt.

f) **Der rechtsseitige t-Test:** $\frac{\bar{x}-\mu_0}{s} \cdot \sqrt{n} > T(n; 1-\alpha) \Rightarrow H_0$ wird abgelehnt.

g) i) $\bar{x} = \frac{2+5}{2} = 3.5$, $s^2 = \frac{(2-3.5)^2+(5-3.5)^2}{2-1} = 4.5$, $H_1 : \mu > \mu_0 = 3$;
$\frac{\bar{x}-\mu_0}{s} \cdot \sqrt{n} = \frac{3.5-3}{\sqrt{4.5}} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{3} < T(1; 1-0.1) = 3.078$, deshalb wird H_0 angenommen.

ii) Aus der Seminararbeit von Pascal K.: $\bar{x} = \frac{10+9.2+10.9+11.3+10.5+10.9+10.6+11.5+9.2+10.9}{10} = 10.5$, $H_1 : \mu > \mu_0 = 10$; $s^2 = \frac{(10-10.5)^2+(9.2-10.5)^2+(10.9-10.5)^2+(11.3-10.5)^2+\ldots+(10.9-10.5)^2}{10-1} = 0.64$,
$\frac{\bar{x}-\mu_0}{s} \cdot \sqrt{n} = \frac{10.5-10}{\sqrt{0.64}} \cdot \sqrt{10} \approx 1.98 > T(9; 0.1) = 1.383$, deshalb wird H_0 abgelehnt.

Aufg. 366/927: a) $n = 2$, $\bar{x} = \frac{13+17}{2} = 15$, $m = 4$, $\bar{y} = \frac{6+8+8+10}{4} = 8$; $FG = 2+4-2 = 4$,
$s* = \sqrt{\frac{(13-15)^2+(17-15)^2+(6-8)^2+(8-8)^2+(8-8)^2+(10-8)^2}{2+4-2}} = 2$,
$\omega_0 = 16 - 7 = 9$, $t = \frac{15-8-9}{2} \cdot \sqrt{\frac{2\cdot 4}{2+4}} = \frac{-2}{2} \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} \approx -1.1547 > -1.533 \approx T(4; 0.1)$; deshalb wird H_1 abgelehnt ().

b) $\bar{x} = \frac{10.5+9+9.5+9+10.5+11.5}{6} = 10$; $\bar{y} = \frac{14.5+12+13.5+12+13.5+12.5}{6} = 13$;

$s_x = \sqrt{\frac{(10.5-10)^2+(9-10)^2+(9.5-10)^2+(9-10)^2+(10.5-10)^2+(11.5-10)^2}{6-1}} = 1$

$s_y = \sqrt{\frac{(14.5-13)^2+(12-13)^2+(13.5-13)^2+(12-13)^2+(13.5-13)^2+(12.5-13)^2}{6-1}} = 1$

$s^* = \sqrt{\frac{(n_x-1)s_x+(n_y-1)s_y}{n_x+x_y-2}} = \sqrt{\frac{(6-1)\cdot 1+(6-1)\cdot 1}{6+6-2}} = 1.$ $\omega_0 = 10.3 - 12.8 = -2.5;$

$T = \frac{10-13-(-2.5)}{1} \cdot \sqrt{\frac{6\cdot 6}{6+6}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \approx -0.866;$

$T_{min} = T(\alpha, n_x - 1 + n_y - 1) = T(0.1, 10) \approx -1.372 < -0.866$

damit wird H_0 akzeptiert und H_1 verworfen.

Aufg. 366/928: a) $P = \{(50,54);(10,8)\}$, $D = (-4,2)$; $d_1 = -4, d_2 = 2$, $\bar{d} = \frac{-4+2}{2} = -1$; H_0 : $\bar{d} - \omega_0 \geq 0$, $H_1 : \bar{d} - \omega_0 < 0$; $s_d = \sqrt{\frac{(-4+1)^2+(2+1)^2}{2-1}} = \sqrt{18}$, $t = \frac{-1-0}{\sqrt{18}} \cdot \sqrt{2} = -\frac{1}{3}$; $t > -1.415$ deshalb wird H_0 akzeptiert / H_1 abgelehnt.

b) $P = \{(5,6);\ (9,8);\ (8,9);\ (17,14);\ (22,20);\ (45,40)\}$ $D = (-1,1,-1,3,2,5)$, $\bar{d} = \frac{9}{6} = 1.5$ H_0 : $\bar{d} - \omega_0 \leq 0$, $H_1 : \bar{d} - \omega_0 > 0$; $t = \frac{\bar{d}-\omega_0}{s} \cdot \sqrt{n}$; $t = \frac{1.5-0.5}{\sqrt{5.5}} \cdot \sqrt{6} \approx 1.044 < 1.415$, deshalb wird H_1 abgelehnt oder H_0 akzeptiert. Ende t-Test; Beginn mehrdim Fktn

Aufg. 366/929: In Kooperation mit dem Seminarkurs 2019/2020

a) (thx PH) $\bar{x} = 2.5$; $s_x^2 = 1.1$; $\bar{y} = 2.6$; $s_y^2 = 1.3$;
$F_{pr} = \frac{1.3}{1.1} = 1.\overline{18} \approx 1.2 < 3.52 \approx F(0.1, 4, 5)$ Es wird H_0 geglaubt
b) (thx RZ) $\bar{x} = 3.2$; $s_x^2 = 4.7$; $\bar{y} = 3.5$; $s_y^2 = 3.5$;
$F_{pr} = \frac{4.7}{3.5} \approx 1.34 < 4.05 \approx F(0.1, 4, 5)$ Es wird H_0 geglaubt
c) (thx KM) $\bar{x} = 10$; $s_x^2 = 77.5$; $\bar{y} = 10$; $s_y^2 = 50$;
$F_{pr} = \frac{77.5}{50} \approx 1.55 < 3.45 \approx F(0.1, 5, 5)$ Es wird H_0 geglaubt
d) (thx MH) $\bar{x} = 5; s_x^2 = \frac{160}{10} = 16$; $\bar{y} = 5; s_y^2 = \frac{32}{8} = 4$;
$F_{pr} = \frac{16}{4} = 4 > 2.38 \approx F(0.1, 10, 8)$ damit wird H_1 angenommen.
e) (thx HG) $\bar{x} = 6; s_x^2 = 23.2$; $\bar{y} = 7; s_y^2 = 13.6$;
$F_{pr} = \frac{23.2}{13.6} \approx 1.706 < 2.32 \approx F(0.1, 10, 10)$ Es wird H_0 geglaubt

Aufg. 367/930: a) $z = \underline{0.4x} + \underline{0.5y}$ ist eine zweidimensionale Funktion mit $\mathbb{D} = \underline{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}$ und $\mathbb{W} = \underline{\mathbb{R}}$. Der Graph ist eine Ursprungsebene. $f(x;y) = 0 = 0.4x + 0.5y \Leftrightarrow y = -0.8x$ (Ursprungsgerade) - Interpretation nach Sd: Wenn man für jedes Brötchen 0.8 Brezeln mitbringt, dann muss man nichts bezahlen.

b) Der Graph von $f(x;y) = x^2 + y^2 - 4$ ist ein Paraboloid. $f(x;y) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$ dies entspricht einem Kreis um (0;0) mir $r = 2$.
Allgemein ist der Graph einer zweidimensionalen Funktion eine 'deformierte Ebene'.

c) Aus einer Tangente bei Funktionen mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ wird eine Tangentialebene bei zweidimensionalen Funktionen.

Die Tangenten sind in der Form $z = g(x)$ notiert: $z = z'(1)(x-1) + z(1)$.

$$\begin{array}{llllll} y = 1: & z = x^2; & z(1) = 1, & z'(x) = 2x, & z'(1) = 2; & z = 2(x-1) - 2; \\ y = 2: & z = 4x^2; & z(1) = 4, & z'(x) = 8x, & z'(1) = 8; & z = 8(x-1) + 4; \\ y = k: & z = k^2 \cdot x^2; & z(1) = k^2, & z'(x) = 2k^2x, & z'(1) = 2k^2; & z = 2k^2(x-1) + k^2; \end{array}$$

$y = 1 : \vec{x} = \binom{1}{1} + t \cdot \binom{1}{2}$; $y = 2 : \vec{x} = \binom{1}{4} + t \cdot \binom{1}{8}$; $y = k : *\vec{x} = \binom{1}{k^2} + t \cdot \binom{1}{2k^2}$;

d) Die Ableitung von $f(x;y)$ nach x geschrieben als $\frac{d}{dx}(f(x;y))$ heißt partielle Ableitung nach x; y gilt dabei als konstant.

$$\begin{array}{llll}
f_1(x;y): & \frac{d}{dx}(x^2+y^2-4) = 2x; & & \frac{d}{dy}(x^2+y^2-4) = 2y; \\
f_2(x;y): & \frac{d}{dx}((y-2)\cdot(x+1)) = y-2; & & \frac{d}{dy}((y-2)\cdot(x+1)) = x+1; \\
f_3(x;y): & \frac{d}{dx}(x\cdot\sin(xy)) = \sin(xy)+xy\cdot\sin(xy); & & \frac{d}{dy}(x\cdot\sin(xy)) = x^2\cdot\sin(xy); \\
f_4(x;y): & \frac{d}{dx}(x^2\cdot y^2) = 2xy^2 & & \frac{d}{dy}(x^2\cdot y^2) = 2x^2y; \\
f_5(x;y): & \frac{d}{dx}(\frac{xy}{x^2+y^2}) = \frac{y(x^2+y^2)-2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2} & & \frac{d}{dy}(\frac{xy}{x^2+y^2}) = \frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2};
\end{array}$$

e) i) $P(1;1)$; $t(1)=f(1)=1$ und $f'(1)=2\cdot 1=2=t'(1)$.
ii) $t:\vec{x}=\binom{1}{1}+s\cdot\binom{1}{2}$, $s\in\mathbb{R}$;
iii) Woher kommt die zweite Komponente des Richtungsvektors, wenn dessen erste Komponente $\underline{1}$ ist? $2=f'(1)$.
iv) $t:\vec{x}=\binom{x_0}{f(x_0)}+s\cdot\binom{1}{f(x_0)}$, $s\in\mathbb{R}$.
v) $t_x:\vec{x}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\f(x_0,y_0)\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{d}{dx}f(x_0,y_0)\end{pmatrix}$ und $t_y:\vec{x}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\f(x_0,y_0)\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{d}{dy}f(x_0,y_0)\end{pmatrix}$, $s\in\mathbb{R}$.

vi) Berechnen Sie die Tangentialebene an $f(x,y)=x^2\cdot y+2y+2$ an der Stelle $(2;3)$.

f) In einem Extrempunkt $E(x_e;y_e;f(x_e;y_e))$ von $f(x;y)$ ist die Tangentialebene T parallel zur xy-Ebene. Dort gilt für deren Normalenvektor $\vec{n}$: $n_1=\underline{0}$ und $n_2=\underline{0}\Rightarrow\frac{d}{dx}(f(x_e;y_e)=\underline{0}$ und $\Rightarrow\frac{d}{dy}(f(x_e;y_e)=\underline{0}$.

Punkte mit waagrechter Tangentialebene (diese werden hier mit W_i bezeichnet): Partielle Ableitungen siehe Teil d);

$$\begin{array}{llll}
f_1(x;y): & 2x=0, & 2y=0 & \Rightarrow W(0;0;-4) \\
f_2(x;y): & y=2, & x=1 & \Rightarrow W(1;2;0) \\
f_3(x;y): & e^{xy}+xy\cdot e^{xy}=0, & x^2\cdot e^{xy}=0 & \Rightarrow x=0\ (y\text{ beliebig})\Rightarrow W(0;y;0) \\
f_4(x;y): & 2xy^2=0, & 2x^2y=0 & \Rightarrow x=0\text{ oder }y=0\Rightarrow W_1(0;y;0),W_2(x;0;0) \\
f_5(x;y): & \frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2}=0, & \frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}=0 & \Rightarrow x=0\text{ oder }y=0\Rightarrow W_1(0;y;0),W_2(x;0;0)\text{ ohne }(0;0;0)
\end{array}$$

Bemerkung: $f_5(x;y)$ ist bei $(0;0)$ nicht einmal stetig (Standardfunktion).

g) Bei zweidimensionalen Funktionen ist f' ein Vektor; f'' ist eine Matrix.

h) $\underline{H}(f(x;y))=\begin{pmatrix}\frac{d^2}{dxdx}(f(x;y)) & \frac{d^2}{dydx}(f(x;y))\\ \frac{d^2}{dxdy}(f(x;y)) & \frac{d^2}{dydy}(f(x;y))\end{pmatrix}$; $\underline{H}(x\cdot e^{xy})=\begin{pmatrix}(2y+xy^2)\cdot e^{xy} & (2x+x^2y)\cdot e^{xy}\\ (2x+x^2y)\cdot e^{xy} & x^3\cdot e^{xy}\end{pmatrix}$;

Vermutung: Satz von Schwarz: $\frac{d^2}{dxdy}(f(x;y))=\frac{d^2}{dydx}(f(x;y))$. Beweis: Schwer.

Aufg. 367/931: a) $\frac{d}{dx}(f(x,y))=2x-2=0\Leftrightarrow x=1$; $\frac{d}{dy}(f(x,y))=2y+4=0\Leftrightarrow y=-2$;

$f(1;-2)=1^2+(-2)^2-2\cdot 1+4\cdot(-2)=-5$ Hesse-Matrix: $\underline{H}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$; $\det(\underline{H})=4$; $a_{11}=2>0\Rightarrow$ Tiefpunkt $(1,-2,-5)$ (Abb. 542a).

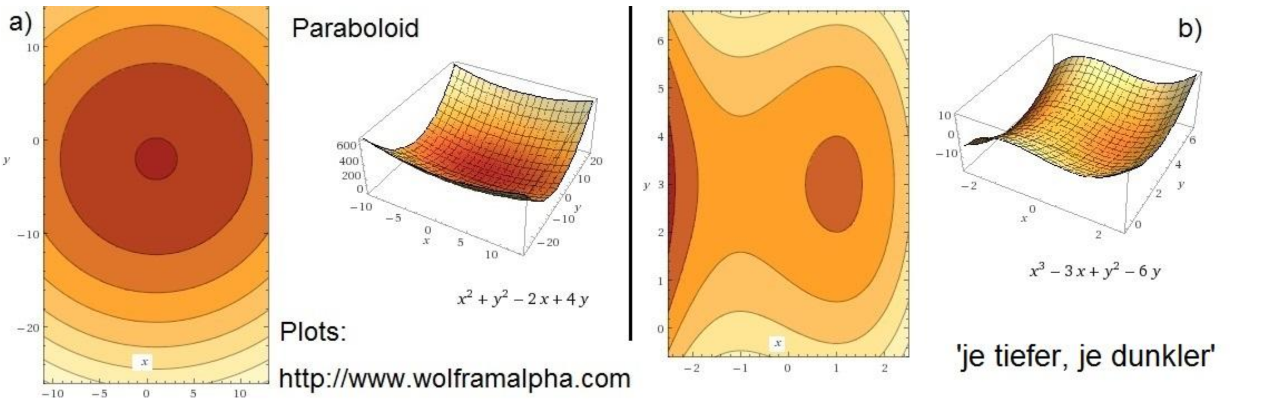


Abb. 542 Mehrdimensionale Funktionen Höhenlinien

b) $\frac{d}{dx}(f(x,y)) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$; $\frac{d}{dy}(f(x,y)) = 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow y = 3$;

$f(-1,3) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 3^2 - 6 \cdot 3 = -7$; $f(1,3) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 3^2 - 6 \cdot 3 = -11$;

$\underline{H} = \left(\begin{smallmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$; $\det(\underline{H}(1;3)) = 12 > 0$; $a_{11} = 6 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt $(1,3,-11)$;
$\det(\underline{H}(-1;3)) = -12 < 0$; $\Rightarrow$ Sattelpunkt $(-1,3,-7)$.

c) $\frac{d}{dx}(f(x,y)) = 3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$; $\frac{d}{dy}(f(x,y)) = 4y^3 - 36y = 0 \Leftrightarrow y = \pm 3$ oder $y = 0$;

$f(-2,\pm 3) = (-2)^3 - 12 \cdot (-2) + (\pm 3)^4 - 18 \cdot (\pm 3)^2 = -65$; $f(2,\pm 3) = 2^3 - 12 \cdot 2 + (\pm 3)^4 - 18 \cdot (\pm 3)^2 = -97$;
$f(-2,0) = (-2)^3 - 12 \cdot (-2) + 0^4 - 18 \cdot 0^2 = 16$; $f(2,0) = 2^3 - 12 \cdot 2 + 0^4 - 18 \cdot 0^2 = -16$;

$\underline{H} = \left(\begin{smallmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 12y^2 - 36 \end{smallmatrix}\right)$; $\det(\underline{H}(2;\pm 3)) = 864 > 0$; $a_{11} = 12 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkte $(2,\pm 3,-97)$;
$\det(\underline{H}(-2;\pm 3)) = -864 < 0$; $\Rightarrow$ Sattelpunkte $(-2,\pm 3,-65)$; (Abb. 543)
$\det(\underline{H}(\pm 2;0)) = \pm 432$; $\Rightarrow$ Sattelpunkt $(-2,0,16)$; Tiefpunkt $(2,0,-16)$ weil $a_{11} = 12 > 0$.

d) $\frac{d}{dx}(f(x,y)) = y$; $\frac{d}{dy}(f(x,y)) = x \Rightarrow$ Kritischer Punkt $(0;0)$; $\underline{H} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$; (Abb. 543)

$\det(\underline{H}(0;0)) = -1 < 0$; $\Rightarrow$ Sattelpunkte $(0,0,0)$; (hyperbolisches Paraboloid, glaube ich);

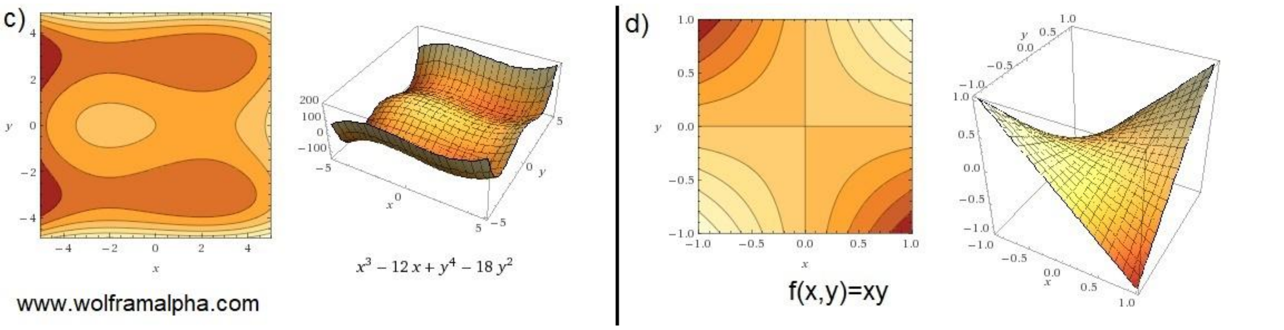


Abb. 543 Mehrdimensionale Funktionen Höhenlinien

e) $\frac{d}{dx}(f(x,y)) = 2x + 4y$; $\frac{d}{dy}(f(x,y)) = 4x$; LGS $2x + 4y = 0$ und $4x = 0 \Rightarrow$ kritischer Punkt $(0;0)$, $f(0,0) = 0$; $\underline{H} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{smallmatrix}\right)$; $\det(\underline{H}) = -16 < 0$; $\Rightarrow$ Sattelpunkt $(0;0;0)$; (Abb. 544)

f) $\frac{d}{dx}(f(x,y)) = 4x - 12 - 2y$; $\frac{d}{dy}(f(x,y)) = 2y - 2x$; LGS: $4x - 12 - 2y = 0$, $2y - 2x = 0 \Leftrightarrow x = y \Rightarrow$
$4x - 12 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 6$, $y = 6$, $f(6,6) = 2 \cdot 6^2 + 6^2 - 12 \cdot 6 - 4 - 2 \cdot 6 \cdot 6 = -20$,

$\underline{H} = \left(\begin{smallmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$; $\det(\underline{H} = 4 > 0$; $a_{11} = 4 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt $(6,6,-20)$; (Abb. 544)

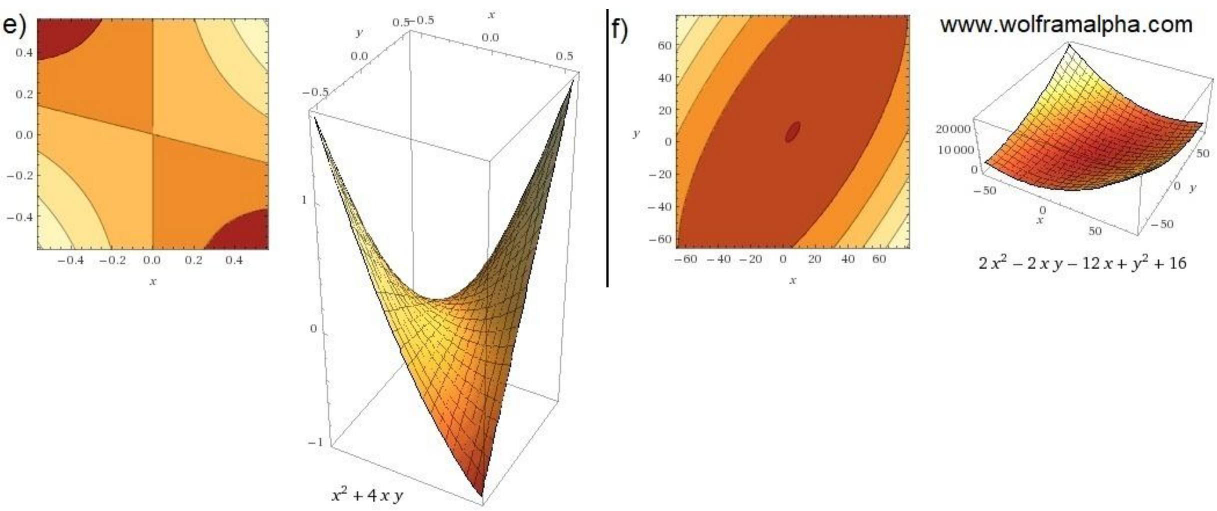


Abb. 544 Mehrdimensionale Funktionen mit Höhenlinien

g) Tiefpunkt an der Stelle $(-1;1)$; h) Hochpunkt H(1;2;1); i) Sattel an der Stelle (1;-2);

j) $\nabla(f(x;y)) = \binom{4x^3-16x}{4y^3-4y}$; $\underline{H}(f(x;y)) = \begin{pmatrix} 12x^2-16 & 0 \\ 0 & 12y^2-4 \end{pmatrix}$; (Abb. 545)
$4x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_{2,3} = \pm 2$; $4y^3 - 4y = 0 \Leftrightarrow y_1 = 0, y_{2,3} = \pm 1$; (9 mögliche Extrema).
$det(\underline{H}) = (12x^2 - 16) \cdot 12y^2 - 4$. In der Tabelle bedeutet (S; -16)=Sattel mit z Koord -16.

y/x	-2	0	2
-1	$32 \cdot 8 = 256 > 0$ (T; -17)	$(-16) \cdot 8 = -128$ (S; -1)	$32 \cdot 8 = 256$ (T; -17)
0	$32 \cdot (-4) = -128 < 0$ (S; -16)	$(-16) \cdot (-4) = 64$ (H; 0)	$32 \cdot (-4) = -128$ (S; -16)
1	$32 \cdot 8 = 256 > 0$ (T; -17)	$(-16) \cdot 8 = -128$ (S; -1)	$32 \cdot 8 = 256$ (T; -17)

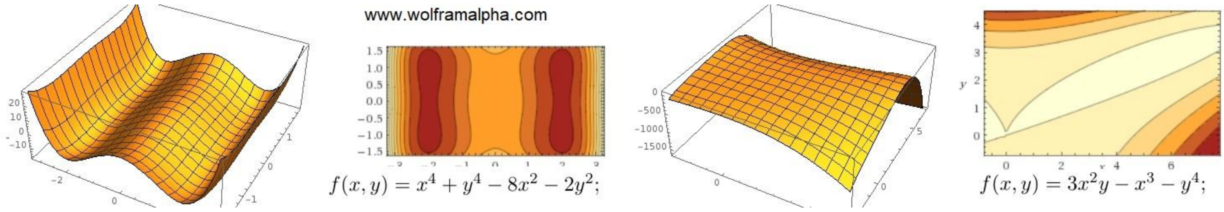


Abb. 545 Mehrdimensionale Funktionen mit Höhenlinien

k) $\nabla(f(x;y)) = \binom{6xy-3x^2}{3x^2-4y^3}$; $\underline{H}(f(x;y)) = \begin{pmatrix} 6x-6y & 6x \\ 6x & 12y^2 \end{pmatrix}$;
$\nabla(f(x;y)) = \vec{0} \Leftrightarrow 6xy = 3x^2$ ($\Leftrightarrow 3x(x-2y) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = 2y$)
und $3x^2 = 4y^3$; mit $x = 2y$ gilt: $3(2y)^2 = 4y^3 \Leftrightarrow y^3 - 3y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$ oder $y = 3$.

$\nabla(f(x;y)) = \vec{0}$ falls $(x;y) = (0;0)$ oder $(x;y) = (6;3)$ (Abb. 545)

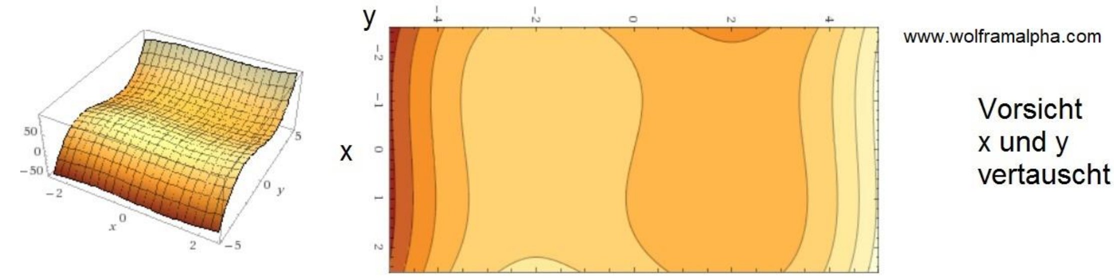


Abb. 546 Mehrdimensionale Funktionen mit Höhenlinien

$\det(\underline{H}(f(6;3))) = \det(\begin{pmatrix} 18 & 36 \\ 36 & 108 \end{pmatrix}) = 648 > 0 \Rightarrow$ T(6;3;27); $\underline{H}(f(0;0)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; Dieser Punkt ist ein Analogon zum Terrassenpunkt (kein Extremum - dies wird nicht weiter erläutert).

L) $\nabla(f(x;y)) = \binom{3x^2-3}{3y^2-12}$; $\underline{H}(f(x;y)) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$;
$\nabla(f(x;y)) = \vec{0} \Leftrightarrow x = \pm 1; y = \pm 2$; (4 Extremstellen) (Abb. 546)

$$\begin{array}{llll}
\det(\underline{H}(f(-1;-2))) & = \det\left(\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}\right) & = 72 > 0 & \Rightarrow H(-1;-2;18); \\
\det(\underline{H}(f(1;-2))) & = \det\left(\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}\right) & = -72 < 0 & \Rightarrow S(1;-2;14); \\
\det(\underline{H}(f(-1;2))) & = \det\left(\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}\right) & = -72 < 0 & \Rightarrow S(-1;2;-14); \\
\det(\underline{H}(f(1;2))) & = \det\left(\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}\right) & = 72 > 0 & \Rightarrow S(1;2;-18);
\end{array}$$

m) $f(x,y) = -5x^2 + 2x + 4xy - y^2 - 1$: $\frac{d}{dx}(f(x,y)) = -10x + 2 + 4y$; $\frac{d}{dy}(f(x,y)) = 4x - 2y$; LGS: $-10x + 2 + 4y = 0, 4x - 2y = 0, \Rightarrow y = 2x \Rightarrow -10x + 2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ und $y = 2$
$\Rightarrow (1;2)$ ist Kandidat für eine Extremstelle; $f(1,2) = 3$.

$\underline{H}=\begin{pmatrix} -10 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$; $\det(\underline{H}(1;2)) = 4 > 0, a_{11} = -10 < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt $(1;2;2)$; (Abb. 547)

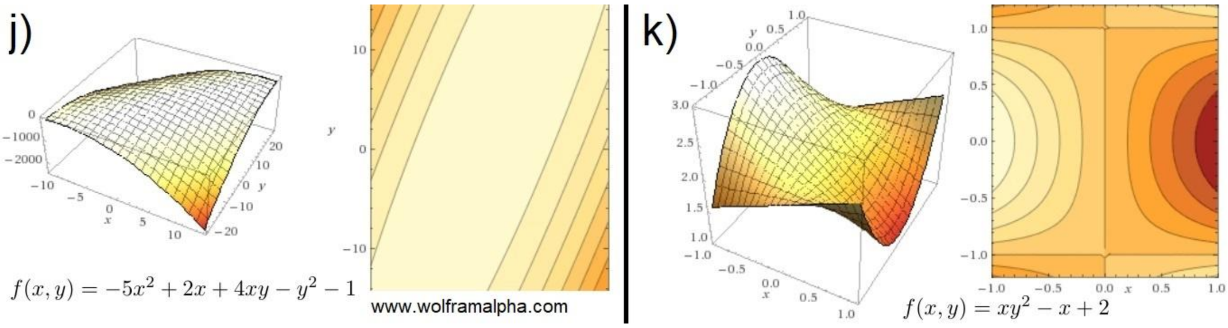


Abb. 547 Mehrdimensionale Funktionen mit Höhenlinien

n) $f(x,y) = xy^2 - x + 2$: $\frac{d}{dx}(f(x,y)) = y^2 - 1$; $\frac{d}{dy}(f(x,y)) = 2xy$;
NLGS: $y^2 - 1 = 0$; $2xy = 0$, $\Rightarrow y = \pm 1$ und $x = 0$
$\Rightarrow (0;1)$ und $(0;-1)$ sind Kandidaten für eine Extremstelle; $f(0,1) = f(0,-1) = 2$.

$\underline{H}=\begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$; $\quad$ $\det(\underline{H}(0;1))=\det\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right) = -4 < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt $(0;1;2)$;

$\det(\underline{H}(0;-1))=\det\left(\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\right) = -4 < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt $(0;-1;2)$; (Abb. 547)

o) $\frac{d}{dx}(f(x,y)) = 3y - 3x^2$; $\frac{d}{dy}(f(x,y)) = 3x - 3y^2$; $\quad$ NLGS: $3y - 3x^2 = 0$; $3x - 3y^2 = 0$,
$\Rightarrow y = x^2 \Rightarrow 3x - 3(x^2)^2 = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = 1$
$\Rightarrow (0;0)$ und $(1;1)$ sind Kandidaten für Extremstellen; $f(0,0) = 0, f(1,1) = 3 - 1 - 1 = 1$.

$\underline{H}=\begin{pmatrix} -6x & 3 \\ 3 & -6y \end{pmatrix}$; $\det(\underline{H}(0;0) = -9 < 0 \Rightarrow$ Sattel $(0;0;0)$ $\det(\underline{H}(1;1) = 27 > 0, a_{11} = -6 < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt $(1;1;1)$; (Abb. 548)

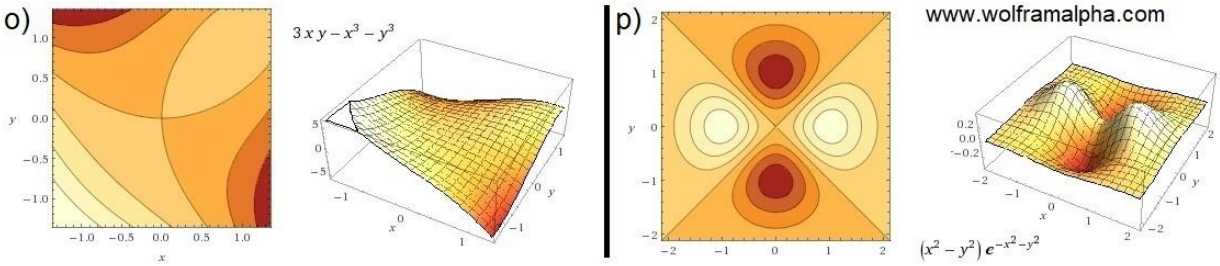


Abb. 548 Mehrdimensionale Funktionen mit Höhenlinien

p) $\frac{d}{dx}(f(x,y)) = 2x \cdot e^{-x^2-y^2} - 2x \cdot (x^2 - y^2) \cdot e^{-x^2-y^2} = 2x(1 - x^2 + y^2) \cdot e^{-x^2-y^2}$;
$\frac{d}{dy}(f(x,y)) = -2y \cdot e^{-x^2-y^2} - 2y \cdot (x^2 - y^2) \cdot e^{-x^2-y^2} = -2y(1 + x^2 - y^2) \cdot e^{-x^2-y^2}$;
NLGS: $x \cdot (1 + x^2 - y^2) = 0$; $\quad y \cdot (1 - x^2 + y^2) = 0$; $\quad \Rightarrow$ (SvN) $(0;0)$, $(0;\pm 1)$, $(\pm 1;0)$;
$f(0;0) = 0$, $f(0;\pm 1) = -e^{-1}$, $f(\pm 1;0) = e^{-1}$;

$$\underline{H}=\begin{pmatrix} 2 \cdot (2x^4 - x^2(2y^2+5) + y^2 + 1) \cdot e^{-x^2-y^2} & 8xy(x^2 - y^2) \cdot e^{-x^2-y^2} \\ 8xy(x^2 - y^2) \cdot e^{-x^2-y^2} & (x^2(4y^2 - 2) - 4y^4 + 10y^2 - 2) \cdot e^{-x^2-y^2} \end{pmatrix};$$

$\det(\underline{H}) = 4e^{-2x^2-2y^2}(-2x^6 + x^4(2y^2 + 3) + 2x^2(y^4 - 11y^2 + 2) - 2y^6 + 3y^4 + 4y^2 - 1)$

$\det(\underline{H}(0;0) = -4 < 0 \Rightarrow$ Sattel $(0;0;0)$ $\det(\underline{H}(0;\pm 1) \approx 2.165 > 0, a_{11} \approx 1.472 \Rightarrow$ Tiefpunkt $(0;\pm 1;-e^{-1})$ $\det(\underline{H}(\pm 1;0) \approx 2.165 > 0, a_{11} \approx -1.472 \Rightarrow$ Hochpunkt $(\pm 1;0;e^{-1})$ (Abb. 548)

Aufg. 367/932: a) Diese Werte haben verschiedene <u>Vorzeichen</u> ...

x_n	2	6	8
y_n	3	4	8
$f(x_n)$	1	5	7
$f(x_n) - y_n$	-2	1	-1

$RGP = \sum_{i=1}^{3}(f(x_i) - y_i)^2 = (-2)^2 + 1^2 + (-1)^2 = 6$;
b)
$RGP_1 = \sum_{i=1}^{3}(f_1(x_i) - y_i)^2 = (2.6 - 3)^2 + (5 - 4)^2 + (6.2 - 8)^2 = 4.4$;
$RGP_2 = (2.5 - 3)^2 + (5.5 - 4)^2 + (7 - 8)^2 = 3.5$;

c) Die $RGP(\underline{m,c})$ ist eine <u>zwei</u>dimensionale Funktion mit den Unbekannten $\underline{m \text{ und } c}$. Um $RPG(m,c)$ zu minimieren muss man RPG <u>partiell</u> <u>ableiten</u> und null setzen. Es entsteht ein <u>LGS</u>.

$RGP(m,c) = (2m+c-3)^2 + (6m+c-4)^2 + (8m+c-8)^2$, partielle Ableitung nach m berechnen wir mit Hilfe der Kettenregel: $\frac{d}{dm}((6m+c-4)^2) = 6 \cdot 2 \cdot (6m+c-4)$;

$\frac{d}{dm}RGP(m,c) = 2 \cdot 2 \cdot (2m+c-3) + 6 \cdot 2 \cdot (6m+c-4) + 8 \cdot 2 \cdot (8m+c-8)$,

$\frac{d}{dc}RGP(m,c) = 2 \cdot (2m+c-3) + 2 \cdot (6m+c-4) + 2 \cdot (8m+c-8)$,

Die partiellen Ableitungen werden Null gesetzt (ausführliche Rechnung siehe unten):

$2 \cdot 2 \cdot (2m+c-3) + 6 \cdot 2 \cdot (6m+c-4) + 8 \cdot 2 \cdot (8m+c-8) = 0 \Leftrightarrow 4m+2c-6+36m+6c-24+64m+8c-64 = 0 \Leftrightarrow 104m+16c-94 = 0$,

$2 \cdot (2m+c-3) + 2 \cdot (6m+c-4) + 2 \cdot (8m+c-8) = 0 \Leftrightarrow 2m+c-3+6m+c-4+8m+c-8 = 0$
$\Leftrightarrow 16m+3c-15 = 0$ $\Leftrightarrow m = 0.75$ und $c = 1$. f_3 ist damit sogar optimal.

Ausführliche Rechnung: Abb. 549

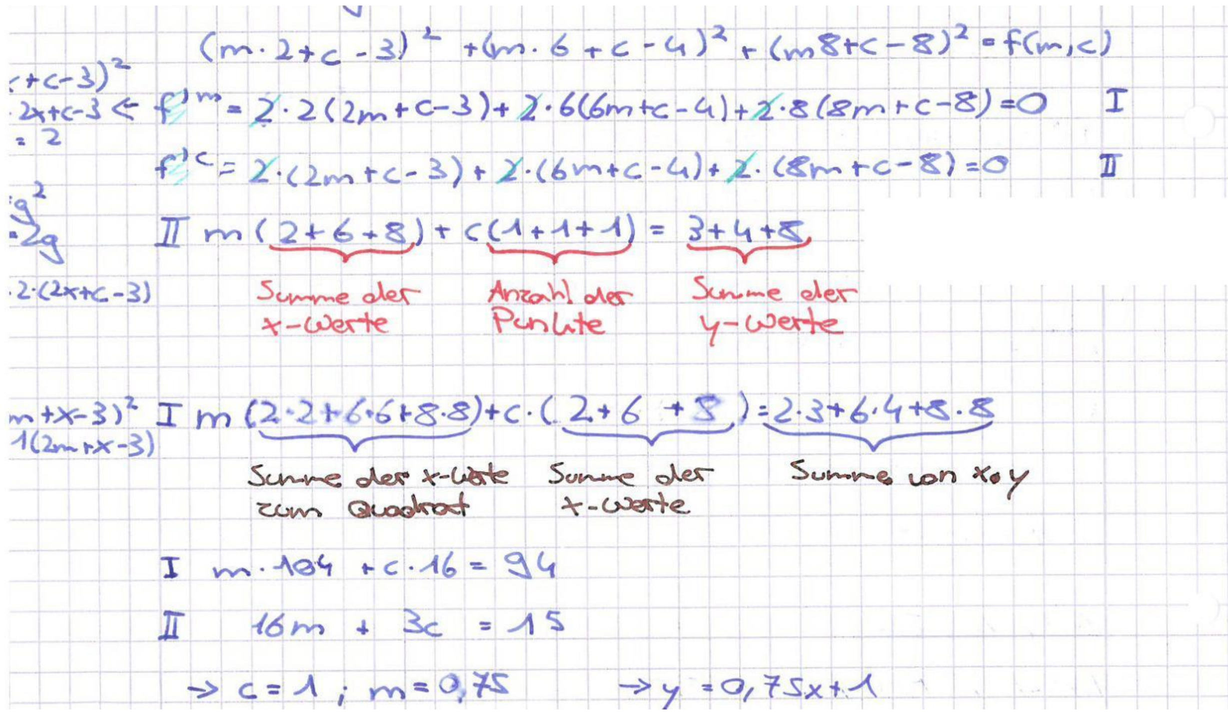


Abb. 549 Methode der kleinsten Quadrate

d,e) $RGP = \sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(m \cdot x_i + c - y_i)^2$

Ableitung nach m: $\frac{d}{dm}\sum_{i=1}^{n}(m \cdot x_i + c - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dm}(m \cdot x_i + c - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot x_i \cdot (m \cdot x_i + c - y_i)$

Ableitung nach c: $\frac{d}{dc}\sum_{i=1}^{n}(m \cdot x_i + c - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dc}(m \cdot x_i + c - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot (m \cdot x_i + c - y_i)$

$\frac{d}{dm}(RGP) = 0$: $\sum_{i=1}^{n} 2 \cdot x_i \cdot (m \cdot x_i + c - y_i) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (m \cdot x_i + c - y_i) = 0$
$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} m \cdot x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} c \cdot x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = 0 \Leftrightarrow m \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$

$\frac{d}{dc}(RGP) = 0$: $\sum_{i=1}^{n} 2 \cdot (m \cdot x_i + c - y_i) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} m \cdot x_i + c - y_i = 0$
$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} m \cdot x_i + \sum_{i=1}^{n} c = \sum_{i=1}^{n} y_i \Leftrightarrow m \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + n \cdot c = \sum_{i=1}^{n} y_i$

$$\text{f) } \begin{array}{llllllll} m \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & +c \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i & = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i & \Leftrightarrow & m \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{n} & +c \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} & = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i \cdot y_i}{n} \\ m \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i & +c \cdot n & = \sum_{i=1}^{n} y_i & \Leftrightarrow & m \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} & +c & = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{n} \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} \Leftrightarrow & m \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{n} & +c \cdot \bar{x} & = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i \cdot y_i}{n} & \Leftrightarrow & m \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{n} + (\bar{y} - m\bar{x}) \cdot \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i \cdot y_i}{n} \\ \Leftrightarrow & m \cdot \bar{x} & +c & = \bar{y} & \Leftrightarrow & c = \bar{y} - m\bar{x} \nearrow \end{array}$$

$\Leftrightarrow m \cdot \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) - n \cdot \bar{x}^2\right) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i\right) - n \cdot \bar{x}\bar{y}$

Betrachten wir jetzt die Behauptung (beachten Sie $\sum_{i=1}^n x_i = n \cdot \bar{x}$):

$$\begin{array}{lll} & m \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 & = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) \\ \Leftrightarrow & m \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \cdot x_i\bar{x} + \bar{x}^2 & = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - x_i\bar{y} - \bar{x} \cdot y_i + \bar{x}\bar{y} \\ \Leftrightarrow & m \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \cdot \sum_{i=1}^n x_i + n \cdot \bar{x}^2\right) & = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \bar{y}\sum_{i=1}^n x_i - \bar{x} \cdot \sum_{i=1}^n y_i + n \cdot \bar{x}\bar{y} \\ \Leftrightarrow & m \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n \cdot \bar{x}^2\right) & = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - n \cdot \bar{y}\bar{x} - n \cdot \bar{x}\bar{y} + n \cdot \bar{x}\bar{y} \\ \Leftrightarrow & m \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2\right) & = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - n \cdot \bar{y}\bar{x} \text{ (qed)} \end{array}$$

g) i) $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 2^2 + 4^2 + 4^2 = 36$, $\sum_{i=1}^n x_i = 2 + 4 + 4 = 10$, $\sum_{i=1}^n y_i = 2 + 2 + 4 = 8$, $\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 28$

$\Rightarrow$ LGS $\begin{array}{lll} m \cdot 36 & +c \cdot 10 & = 28 \\ m \cdot 10 & +c \cdot 3 & = 8 \end{array} \Leftrightarrow m = 0.5; c = 1 \Leftrightarrow y = 0.5x + 1$

g) ii) $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$, $\sum_{i=1}^n x_i = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$, $\sum_{i=1}^n y_i = 1 + 2 + 4 + 5 = 12$, $\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 = 37$;

$\Rightarrow$ LGS $\begin{array}{lll} m \cdot 30 & +c \cdot 10 & = 37 \\ m \cdot 10 & +c \cdot 4 & = 12 \end{array} \Leftrightarrow m = 1.4; c = -0.5 \Leftrightarrow y = 1.4x - 0.5;$

iii) $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 18^2 + 24^2 + 30^2 + 34^2 + 38^2 = 4400$, $\sum_{i=1}^n x_i = 18 + 24 + 30 + 34 + 38 = 144$, $\sum_{i=1}^n y_i = 18 + 26 + 30 + 40 + 70 = 184$, $\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i = 18 \cdot 18 + 24 \cdot 26 + 30 \cdot 30 + 34 \cdot 40 + 38 \cdot 70 = 5868$;

$\Rightarrow$ LGS $\begin{array}{lll} m \cdot 4400 & +c \cdot 144 & = 5868 \\ m \cdot 144 & +c \cdot 5 & = 184 \end{array} \Leftrightarrow m = 2.25; c = -28 \Leftrightarrow y = 2.25x - 28$

iv) $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 2.5^2 + 3^2 + 2^2 + 3.5^2 + 4^2 = 47.5$, $\sum_{i=1}^n x_i = 2.5 + 3 + 2 + 3.5 + 4 = 15$, $\sum_{i=1}^n y_i = 5 + 4 + 6 + 3 + 2 = 20$, $\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i = 2.5 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 3.5 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 55$;

$\Rightarrow$ LGS $\begin{array}{lll} m \cdot 47.5 & +c \cdot 15 & = 55 \\ m \cdot 15 & +c \cdot 5 & = 20 \end{array} \Leftrightarrow m = -2; c = 10 \Leftrightarrow y = -2x + 10$

g) v) $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 10^2 + 18^2 + 30^2 + 22^2 + 26^2 + 14^2 + 24^2 + 21^2 + 15^2 = 3922$,
$\sum_{i=1}^n y_i = 480 + 632 + 702 + 630 + 645 + 545 + 606 + 630 + 530 = 5400$,
$\sum_{i=1}^n x_i = 10 + 18 + 30 + 22 + 26 + 14 + 24 + 21 + 15 = 180$,
$\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i = 480 \cdot 10 + 632 \cdot 18 + 702 \cdot 30 + 630 \cdot 22 + 645 \cdot 26 + 545 \cdot 14 + 606 \cdot 24 + 630 \cdot 21 + 530 \cdot 15 = 111220$;

$\Rightarrow$ LGS $\begin{array}{lll} m \cdot 3922 & +c \cdot 180 & = 111220 \\ m \cdot 180 & +c \cdot 9 & = 5400 \end{array} \Leftrightarrow m = 10; c = 400 \Leftrightarrow y = 10x + 400;$

j) LöVo fehlen noch.

Aufg. 368/933: a) Kovarianz von Ag 932 g) i) $Cov(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$;
$\bar{x} = \frac{2+4+4}{3} = \frac{10}{3}$, $\bar{y} = \frac{2+2+4}{3} = \frac{8}{3}$,
$Cov(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \frac{1}{3} \cdot ((2 - \frac{10}{3}) \cdot (2 - \frac{8}{3})(4 - \frac{10}{3}) \cdot (2 - \frac{8}{3})(4 - \frac{10}{3}) \cdot (4 - \frac{8}{3})) = \frac{8-4+8}{27} = \frac{4}{9}$;

g) ii) $\bar{x} = \frac{1+2+3+4}{4} = \frac{10}{4} = 2.5$, $\bar{y} = \frac{1+2+4+5}{4} = 3$,
$Cov(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \frac{1}{4} \cdot (\ (1 - 2.5) \cdot (1 - 3) + (2 - 2.5) \cdot (2 - 3) + (3 - 2.5) \cdot (4 - 3) + (4 - 2.5) \cdot (5 - 3)) = \frac{3+0.5+0.5+3}{4} = \frac{7}{4}$;

g) iii) $\bar{x} = \frac{18+24+30+34+38}{5} = 28.8$, $\bar{y} = \frac{18+26+30+40+70}{5} = 36.8$,
$Cov(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \frac{1}{5} \cdot ((18 - 28.8) \cdot (18 - 36.8) + (24 - 28.8) \cdot (26 - 36.8) + (30 - 28.8) \cdot (30 - 36.8) + (34 - 28.8) \cdot (40 - 36.8) + (38 - 28.8) \cdot (70 - 36.8)) = \frac{203.04+61.44-8.16+58.24+305.44}{5} = 124$;

g) iv) $\bar{x} = \frac{2.5+3+2+3.5+4}{5} = 3$, $\bar{y} = \frac{5+4+6+3+2}{5} = 4$,
$Cov(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \frac{1}{5} \cdot ((2.5 - 3) \cdot (5 - 4) + (3 - 3) \cdot (4 - 4) + (2 - 3) \cdot (6 - 4) + (3.5 - 3) \cdot (3 - 4) + (4 - 3) \cdot (2 - 4)) = \frac{-0.5+0-2-0.5-2}{5} = -1$;

g) v) $\bar{x} = \frac{10+18+30+22+26+14+24+21+15}{9} = 20$, $\bar{y} = \frac{480+632+702+630+645+545+606+630+530}{5} = 600$,
$Cov(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \frac{1}{5} \cdot ((10 - 20) \cdot (480 - 600) + (18 - 20) \cdot (632 - 600) + (30 - 20) \cdot (702 - 600) + (22 - 20) \cdot$

$(630-600)+(26-20)\cdot(645-600)+(14-20)\cdot(545-600)+(24-20)\cdot(606-600)+(21-20)\cdot(630-600)+(15-20)\cdot(530-600)) = \frac{1200-64+1020+60+270+330+24+30+350}{5} = 644;$

b) Das Vorzeichen der Kovarianz entspricht dem Vorzeichen der <u>Steigung</u> der Regressionsgeraden.

c) Ist die Kovarianz < 0, so ähnlet die Punktwolke einer <u>fallenden</u> Geraden ist sie =0, so ähnelt sie <u>keiner</u> Geraden.

d) $Cov(\mathcal{X},\mathcal{X}) := \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2}{n} = V(\mathcal{X}) \geq 0$. Alle Punkte sind von der Form $(x;x)$ liegen also auf der steigenden Geraden $y = x$. Nur für $\mathcal{X} = \{\bar{x}\}$ ist $V(\mathcal{X}) = 0$, dann ist die Punktwolke in einziger Punkt.

Aufg. 368/934: Ein besseres Maß für den l<u>inearen</u> Zusammenhang zweier Zufallsvariablen bietet der **metrische Korrelationskoeffizient**: $r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})\cdot(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i-\bar{y})^2}}$ wobei die x_i, y_i nicht k<u>onstant</u> sein dürfen.

a) $r_{xy} = \frac{Cox(\mathcal{X},\mathcal{Y})}{\sigma(\mathcal{X})\cdot\sigma(\mathcal{Y})}$.

b) Wenn $y \equiv mx + c$, dann gilt $y_i = mx_i + c$ und $\bar{y} = m\bar{x} + c$. Für x_i, y_i nicht konstant folgt $m \neq 0$ und $m \neq \infty$ (die Gerade ist nicht senkrecht).

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})\cdot(mx_i+c-(m\bar{x}+c))}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^n mx_i+c-(m\bar{x}+c)}} \quad \Leftrightarrow \quad r_{xy} = \frac{m\cdot(\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2)}{\sqrt{m^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2}}$$

$$\xLeftrightarrow{\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{a^2}=a^2} r_{xy} = \frac{m}{\sqrt{m^2}} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2} = \frac{m}{\sqrt{m^2}} = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad m > 0 \\ -1 & \text{falls} \quad m < 0 \end{cases}.$$

c) Ist r_{xy} nahe bei $\underline{\pm 1}$ dann ist es sinnvoll, das Ersatzmerkmal x_i zu betrachten, wenn r_{xy} nahe bei $\underline{0}$ liegt, dann nicht. $r_{xy} \approx 1 \Rightarrow m > 0$; $r_{xy} \approx -1 \Rightarrow m < 0$.

d) $\bar{x} = \frac{1+2+3}{3} = 2$; $\bar{y} = \frac{2.2+5.0+6.3}{3} = 4.5$;

Zähler von $r_{xy} = (1-2)\cdot(2.2-4.5)+(2-2)\cdot(5-4.5)+(3-2)\cdot(6.3-4.5) = 4.0$;

Nenner von $r_{xy} = \sqrt{((1-2)^2+(2-2)^2+(3-2)^2)\cdot((2.2-4.5)^2+(5-4.5)^2+(6.3-4.5)^2)} = \sqrt{17.56}$;
$\Rightarrow \quad r_{xy} = \frac{4}{\sqrt{17.56}} \approx 0.955 \approx 1$ (starker linearer Zusammenhang) also ja, eine Approximation durch eine Gerade ist sinnvoll.

e) i) $P_1(2;2), P_2(4;2), P_3(4;4)$; $\bar{x} = \frac{2+4+4}{3} = \frac{10}{3} = 3.\bar{3}$; $\bar{y} = \frac{2+2+4}{3} = \frac{8}{3} = 2.\bar{6}$;

Zähler von $r_{xy} = (2-10/3)\cdot(2-8/3)+(4-10/3)\cdot(2-8/3)+(4-10/3)\cdot(4-8/3) = \frac{4}{3}$;

$\Rightarrow Cov(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = \frac{4}{3} : 3 = \frac{4}{9} \Rightarrow m > 0$;

Nenner von $r_{xy} =$

$\sqrt{((2-10/3)^2+(4-10/3)^2+(4-10/3)^2)\cdot((2-8/3)^2+(2-8/3)^2+(4-8/3)^2)} = \frac{64}{9}$

$\Rightarrow \quad r_{xy} = \frac{4/3}{8/3} = 0.5$ (schwacher linearer Zusammenhang) das gilt vermutlich als zu schlecht.

e) ii) $P_1(1;1), P_2(2;2), P_3(3;4), P_4(4;5)$; $\bar{x} = \frac{1+2+3+4}{4} = 2.5$; $\bar{y} = \frac{1+2+4+5}{4} = 3$;

Zähler von $r_{xy} = (1-2.5)\cdot(1-3)+(2-2.5)\cdot(2-3)+(3-2.5)\cdot(4-3)+(4-2.5)\cdot(5-3) = 7$;

$\Rightarrow Cov(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = \frac{7}{4} \Rightarrow m > 0$;

Nenner von $r_{xy} = \sqrt{((1-2.5)^2+(2-2.5)^2+(3-2.5)^2+(4-2.5)^2)\cdot} \hookleftarrow$ (Formel geht weiter)

$\hookrightarrow \sqrt{((1-3)^2+(2-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2)} = \sqrt{50}$;

$\Rightarrow \quad r_{xy} = \frac{7}{\sqrt{50}} = 0.99$ das ist super (starker linearer Zusammenhang).

e) iii) $P_1(18;18), P_2(24;26), P_3(30;30), P_4(34;40), P_5(38;70)$; $\bar{x} = \frac{18+24+30+34+38}{5} = 28.8$;

$\bar{y} = \frac{18+26+30+40+70}{5} = 36.8$;

Zähler von $r_{xy} = (18-28.8)\cdot(18-36.8)+(24-28.8)\cdot(26-36.8)+ \hookleftarrow$

$\hookrightarrow (30-28.8)\cdot(30-36.8)+(34-28.8)\cdot(40-36.8)+(38-28.8)\cdot(70-36.8) = 568.8$

$\Rightarrow Cov(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = \frac{568.8}{5} = 113.76 \Rightarrow m > 0;$

Ne. von $r_{xy} = \sqrt{((18-28.8)^2+(24-28.8)^2+(30-28.8)^2+(34-28.8)^2+(38-28.8)^2)}\cdot \hookleftarrow$

$\hookrightarrow \sqrt{(18-36.8)^2+(26-36.8)^2+(30-36.8)^2+(40-36.8)^2+(70-36.8)^2} = 411761;$

$\Rightarrow \quad r_{xy} = \frac{568.8}{\sqrt{411761}} \approx 0.89 - 1$ (starker linearer Zusammenhang) das ist ok.

e) iv) $P_1(2.5;5), P_2(3;4), P_3(2;6),\ P_4(3.5;3), P_5(4;2);\ \bar{x} = \frac{2.5+3+2+3.5+4}{5} = 3;\ \bar{y} = \frac{5+4+6+3+2}{5} = 4;$

Zähler von $r_{xy} = (2.5-3)\cdot(5-4)+(3-3)\cdot(4-4)+(2-3)\cdot(6-4)+ \hookleftarrow$

$\hookrightarrow (3.5-3)\cdot(3-4)+(4-3)\cdot(2-4) = -5;$

$\Rightarrow Cov(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = \frac{-5}{5} = -1 \Rightarrow m < 0;$

Nenner von $r_{xy} = \sqrt{(2.5-3)^2+(3-3)^2+(2-3)^2+(3.5-3)^2+(4-3)^2}\cdot \hookleftarrow$

$\hookrightarrow \sqrt{(5-4)^2+(4-4)^2+(6-4)^2+(3-4)^2+(2-4)^2} = \sqrt{25} = 5;$

$\Rightarrow \quad r_{xy} = \frac{-5}{5} = -1$ (totaler linearer Zusammenhang) das ist optimal.

e) v) $P_1(10;480), P_2(18;632),\ P_3(30;702),\ P_4(22;630), P_5(26;645), P_6(14;545), P_7(24;606),$

$P_8(21;630), P_9(15;530); \qquad \bar{x} = \frac{10+18+30+22+26+14+24+21+15}{9} = 20;$

$\bar{y} = \frac{480+632+702+630+645+545+606+630+530}{9} = 600;$

Zähler von $r_{xy} = (10-20)\cdot(480-600)+(18-20)\cdot(632-600)+(30-20)\cdot(702-600)+ \hookleftarrow$

$\hookrightarrow (22-20)\cdot(630-600)+(26-20)\cdot(645-600)+(14-20)\cdot(545-600)+ \hookleftarrow$

$\hookrightarrow (24-20)\cdot(606-600)+(21-20)\cdot(630-600)+(15-20)\cdot(530-600) = 3220$

$\Rightarrow Cov(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = \frac{3220}{9} \Rightarrow m > 0;$

Ne. von $r_{xy}^2 = ((10-20)^2+(18-20)^2+(30-20)^2+(22-20)^2+(26-20)^2+(14-20)^2+(24-20)^2 \hookleftarrow$

$\hookrightarrow +(21-20)^2+(15-20)^2)\cdot((480-600)^2+(632-600)^2+(702-600)^2+(630-600)^2 \hookleftarrow$

$\hookrightarrow +(645-600)^2+(545-600)^2+(606-600)^2+(630-600)^2+(530-600)^2) = 12111708.$

$r_{xy} = \frac{3220}{\sqrt{12111708}} \approx 0.925237$ (starker linearer Zusammenhang). Damit lohnt eine lineare Regression.

Aufg. 369/935: (Maximum-Likelyhood-Schätzung) .. dann ist $\bar{\mathcal{X}}$ näherungsweise <u>normal</u>-verteilt mit unbekannten μ und σ.

a) Weil $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ unabhängig sind, gilt $P(x_1,x_2) = P(\mathcal{X}_1 = x_1)\cdot P(\mathcal{X}_2 = x_2)$.

$L := P(x_1,x_2) = P(\mathcal{X}_1 = x_1)\cdot P(\mathcal{X}_2 = x_2)$.

b) Sei $\mathcal{X}$ eine diskrete ZG mit $P(\mathcal{X} \le x) \approx F(x)$ (F ist eine normalverteilte Verteilungsfunktion mit Dichte $\underline{\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma}}}$), dann gilt $P(\mathcal{X} = x) \approx \underline{\varphi(x)}$. $P(\mathcal{X}_1 = x_1) = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

$L := P(\mathcal{X}_1 = x_1)\cdot P(\mathcal{X}_2 = x_2) = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_2-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{(\sigma\cdot\sqrt{2\pi})^2}e^{-\frac{(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2}{2\sigma^2}};$

$LL := \ln(L) = \ln(P(\mathcal{X}_1 = x_1)\cdot P(\mathcal{X}_2 = x_2)) = \ln(P(\mathcal{X}_1 = x_1)) + \ln(P(\mathcal{X}_2 = x_2)).$

$$
\begin{aligned}
LL := \ln(L) &= \ln\left(\frac{1}{(\sigma\cdot\sqrt{2\pi})^2} \quad\cdot\quad e^{-\frac{(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right)\\
&= \ln\left(\frac{1}{(\sigma\cdot\sqrt{2\pi})^2}\right) \quad+\quad \ln\left(e^{-\frac{(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right)\\
&= -\ln((\sigma\cdot\sqrt{2\pi})^2) \quad-\quad \frac{(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2}{2\sigma^2}\\
&= -2\ln(\sigma)-\ln(2\pi) \quad-\quad \frac{(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2}{2\sigma^2};
\end{aligned}
$$

Verallgemeinert: $L := P(\mathcal{X}_1 = x_1)\cdot\ldots\cdot P(\mathcal{X}_n = x_n) = \frac{1}{(\sigma\cdot\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{(x_1-\mu)^2+..+(x_n-\mu)^2}{2\sigma^2}}$;

$LL = -n\ln(\sigma) - \frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{(x_1-\mu)^2+..+(x_n-\mu)^2}{2\sigma^2}$;

L ist eine Funktion abhängig von μ und σ. 'Optimieren' heißt partiell ableiten und Null setzen.

c) $(\ln(f(x)))' = 0 \overset{Kettenregel}{\Longleftrightarrow} f'(x)\cdot\frac{1}{f(x)} = 0 \overset{f(x)>0}{\Longleftrightarrow} f'(x) = 0.$

d) Finden Sie das optimale μ und σ mit Hilfe der partiellen Ableitungen von LL.

$\frac{d\,LL}{d\,\mu} = -\frac{1}{2\sigma^2}\cdot(2\cdot(-1)\cdot(x_1-\mu)+..+2\cdot(-1)\cdot(x_n-\mu)) = \frac{(x_1-\mu)+..+(x_n-\mu)}{\sigma^2} \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow \quad x_1+..+x_n = n\cdot\mu \quad \Leftrightarrow \quad \mu = \frac{x_1+..+x_n}{n} = \bar{x}.$

Die optimale Schätzung für den Erwartungswert ist also das arthmetische Mittel.

$\frac{d\,LL}{d\,\sigma} = -\frac{n}{\sigma} + ((x_1-\mu)^2+..+(x_n-\mu)^2)\cdot\sigma^{-3} \overset{!}{=} 0 \quad \overset{\cdot(-\sigma^3)}{\Longleftrightarrow} \quad n\cdot\sigma^2 = ((x_1-\mu)^2+..+(x_n-\mu)^2)$

$\overset{:n}{\Leftrightarrow} \quad \sigma^2 = \frac{(x_1-\mu)^2+..+(x_n-\mu)^2}{n} \quad \overset{\sqrt{\cdot}}{\Leftrightarrow} \quad \sigma = (\pm)\sqrt{\frac{(x_1-\mu)^2+..+(x_n-\mu)^2}{n}};$

Dies entspricht (beinahe) der empirischen Varianz dort steht statt des n das $n-1$ im Nenner.

Aufg. 369/936: a) $P(x_0; f(x_0))$; die Tangente in P kann berechnet werden:

$t(x) = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0).$

b) $f(x_0+h) \approx t(x_0+h) = f'(x_0)(x_0+h-x_0) + f(x_0) = h\cdot f'(x_0) + f(x_0).$

c) $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$, i) $x_0 = 1, f'(x_0) = 2x_0 = 1$ $t(x) = 1 + 2(x-1) = 2x-1$,

ii) $x_0 = 2, f'(x_0) = 0.5$ $t(x) = 2 + 0.5(x-2) = 0.5x+1$;

d) (als Verallg. der Tangente) Vermutung: $p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)(x-x_0)^2$;

e) $x_0 = f(x_0) = f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 2$:

$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)(x-x_0)^2 = 0 + 0(x-x_0) + 2(x-0)^2 = 2x^2$;

unsere Vermutung war wohl falsch, es hätte $p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$ heißen müssen. Das $\frac{1}{2}$ kommt von der Potenzregel der Ableitung.

Aufg. 369/937: a) Ergebnismenge: $\{-1, 0, 1\}$; Wk:$P(-1) = P(0) = P(1) = \frac{1}{3}$. (Abb. 550)

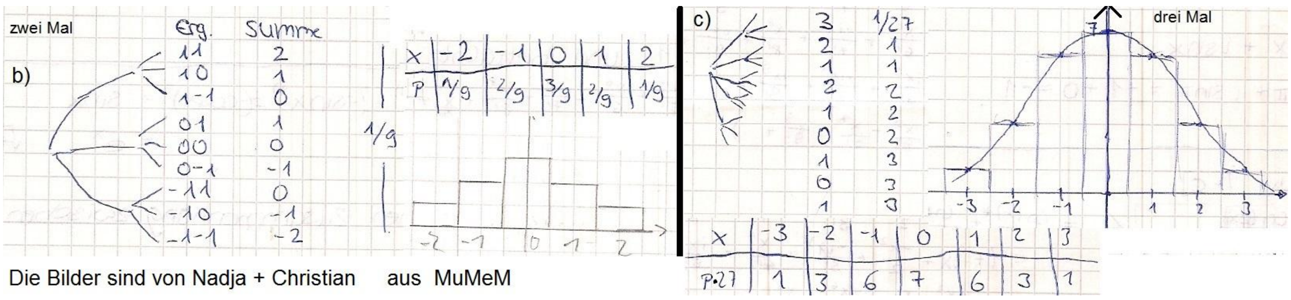


Abb. 550 Man dreht nur zwei Mal :)

$\mathcal{X}_1+\mathcal{X}_2+\mathcal{X}_3+\mathcal{X}_4$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
Rechnung	1	3+1	6+3+1	7+6+3	6+7+6	3+6+7	1+3+6	1+3	1
$P\cdot 81$	1	4	10	16	19	16	10	4	1

$\mathcal{X}_1+\mathcal{X}_2+\mathcal{X}_3+\mathcal{X}_4+\mathcal{X}_5$: (es ist nur ein Teil der Tabelle dargestellt - sie ist symmetrisch zur 0)

$\mathcal{X}_1+..+\mathcal{X}_5$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
Rg	1	4+1	10+4+1	16+10+4	19+16+10	16+19+16	10+16+19	4+10+16
$P\cdot 243$	1	5	15	30	45	51	45	30

d) $P_{n+1}(k)=\frac{1}{3}P_n(k-1)+\frac{1}{3}P_n(k)+\frac{1}{3}P_n(k+1)$;

e) Varianz	σ_1^2		σ_2^2		σ_3^2		σ_4^2		σ_5^2
	$\frac{2}{3}$	$\xrightarrow{\cdot\frac{2}{1}}$	$\frac{12}{9}$	$\xrightarrow{\cdot\frac{3}{2}}$	$\frac{54}{27}$	$\xrightarrow{\cdot\frac{4}{3}}$	$\frac{216}{81}$	$\xrightarrow{\cdot\frac{5}{4}}$	$\frac{810}{243}$

$\sigma_{n+1}^2=\frac{n+1}{n}\cdot\sigma_n^2$ oder $\sigma_{n+1}=\sqrt{\frac{n+1}{n}}\cdot\sigma_n$ explizit: $\sigma_n^2=\frac{2n}{3}$.

f) $\sigma^2(\mathcal{X})=2a^2\cdot\frac{1}{3}=1\Leftrightarrow a=(\pm)\sqrt{\frac{3}{2}}$;   g) $a=\sqrt{\frac{3}{2n}}$;

h) Sei $f_n(x)$ eine darstellende Funktion der Zufallsvariablen $\mathcal{X}_1+..+\mathcal{X}_n$ d.h. das Glücksrad wird <u>n mal</u> gedreht und die <u>Wertesumme</u> notiert. $f_n(k)$ hat die Form einer <u>Glocke</u> (nach Sd auch Hut), die mit wachsendem n immer <u>flacher</u> und <u>breiter</u> wird. Wenn wir $f_n(x)$ mit einem Faktor a in y-Richtung und einem Faktor $\frac{1}{a}$ in x-Richtung strecken, dann wird die eingeschlossene Fläche <u>nicht geändert</u>. $\varphi_n(x)=a\cdot f_n(ax)$, $a=\sigma\cdot\sqrt{n}$.

i) $P_n(\mathcal{X}=k)=f_n(k)=\frac{1}{a}\cdot\varphi_n(\frac{k}{a})$ (mit $x=\frac{k}{a}$) $=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{n}}\cdot\varphi_n(\frac{k}{\sigma\cdot\sqrt{n}})$ (mit $a=\sigma\cdot\sqrt{n}$) .

Bemerkung: Hurra, das ist die Formel 2.2 aus dem Skript (wir sind bei 30%)!

j) $P_{n+1}(\mathcal{X}=k)=\frac{1}{\sigma\sqrt{n+1}}\varphi_{n+1}(\frac{k}{\sigma\sqrt{n+1}})=\underline{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\cdot\Big(\varphi_n(\frac{k-1}{\sigma\sqrt{n}})+\varphi_n(\frac{k}{\sigma\sqrt{n}})+\varphi_n(\frac{k+1}{\sigma\sqrt{n}})\Big)}$.

Aufg. 370/938: Falls die (rekursive) Funktionenfolge gegen einen Grenzwert konvergiert, so gilt nach dem <u>Banachschen</u> Fixpunktsatz $\varphi_{n+1}(x)=\underline{\varphi_n(x)=}:\varphi(x)$.

Die gesuchte Verteilungsfunktion $\varphi(x)$ muss also die Bedingung

$\varphi(\frac{k}{\sqrt{\sigma}\sqrt{n+1}})=\sqrt{\frac{n+1}{n}}\cdot\frac{1}{3}\cdot[\varphi(\frac{k-1}{\sqrt{\sigma}\sqrt{n}})+\varphi(\frac{k}{\sqrt{\sigma}\sqrt{n}})+\varphi(\frac{k+1}{\sqrt{\sigma}\sqrt{n}})]$ erfüllen.

a) $\varphi(\frac{k}{\sqrt{\sigma}\sqrt{n+1}})=\sqrt{\frac{n+1}{n}}\frac{1}{3}[\varphi(x_0-\frac{1}{\sqrt{\sigma}\sqrt{n}})+\varphi(x_0)+\varphi(x_0+\frac{1}{\sqrt{\sigma}\sqrt{n}})]=\sqrt{\frac{n+1}{n}}\frac{1}{3}[\varphi(x_0-h)+\varphi(x_0)+\varphi(x_0+h)]$.

b) $\varphi(\frac{k}{\sqrt{\sigma}\sqrt{n+1}})=\sqrt{\frac{n+1}{n}}\cdot\frac{1}{3}\cdot[\varphi(x_0-h)+\varphi(x_0)+\varphi(x_0+h)]$

$\approx\sqrt{\frac{n+1}{n}}\cdot\frac{1}{3}\cdot[\varphi(x_0)+\varphi'(x_0)(-h)+\frac{\varphi''(x_0)}{2}(-h)^2+\varphi(x_0)+\varphi(x_0)+\varphi'(x_0)h+\frac{\varphi''(x_0)}{2}h^2]$

$=\sqrt{\frac{n+1}{n}}\cdot\frac{1}{3}\cdot[3\varphi(x_0)+2\frac{\varphi''(x_0)}{2}h^2]=\sqrt{\frac{n+1}{n}}\cdot[\varphi(x_0)+\frac{\varphi''(x_0)h^2}{3}]$ mit $h=\frac{1}{\sqrt{\sigma}\sqrt{n}}$ gilt

$\varphi(\frac{k}{\sqrt{\sigma}\sqrt{n+1}})\approx\sqrt{\frac{n+1}{n}}\cdot[\varphi(x_0)+\frac{\varphi''(x_0)(\frac{1}{\sqrt{\sigma}\sqrt{n}})^2}{3}]=\sqrt{\frac{n+1}{n}}\cdot[\varphi(x_0)+\frac{\varphi''(x_0)}{3\sigma n}]$;

LoeVo sind noch nicht fertig - da bin ich gerade

Aufg. 370/939:

$$\begin{array}{llllll}
a) & y=c\cdot e^{\frac{-x^2}{2}} & & y'=-cx\cdot e^{\frac{-x^2}{2}} & & y''=-c\cdot e^{\frac{-x^2}{2}}+cx^2\cdot e^{\frac{-x^2}{2}} \quad \text{in Dgl:} \\
 & y & + & xy' & + & y'' \quad =0 \\
 & c\cdot e^{\frac{-x^2}{2}} & + & x(-cx\cdot e^{\frac{-x^2}{2}}) & + & -c\cdot e^{\frac{-x^2}{2}}+cx^2\cdot e^{\frac{-x^2}{2}} \quad =0\ \surd.
\end{array}$$

b) $(xy+y')' = y + xy' + y'' \Rightarrow (xy+y')' = 0 \Leftrightarrow xy + y' = c_1$. Weil y achsensymmetrisch zur $y-$Achse ist, gilt $y'(0) = 0$ also ist $xy + y'|_{x=0} = 0y + 0 = c_1$ also ist $c_1 = 0$. Die Dgl $xy + y' = 0$ lösen wir mit Trennung der Variablen: $y \equiv 0$ löst die Dgl. Sei $y \neq 0$, dann gilt: $xy + y' = 0 \Leftrightarrow -x = \frac{y'}{y} \Leftrightarrow \int -x dx = \int \frac{y'}{y} dx \Leftrightarrow \frac{-x}{2} + \tilde{c} = \ln|y| \Leftrightarrow |y| = e^{\frac{-x}{2}+\tilde{c}} \Leftrightarrow y = c \cdot e^{\frac{-x}{2}}$ (siehe auch 8.6.3).

Aufg. 370/940: b) Zwei Mengen A und B sind gleich mächtig, wenn es eine Abbildung f gibt, die jedem $x \in A$ genau ein $y \in B$ und umgekehrt jedem $y \in B$ genau ein $x \in A$ zuordnet. Eine solche Abbildung heißt Bijektion. (Abb. 551)

a)

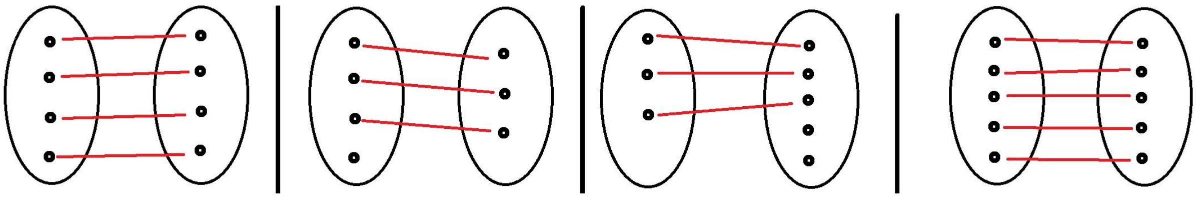


Abb. 551 Abbildung, Injektion, Surjektion, Bijektion

c) i) $f(1) = A, f(2) = B, f(3) = C$; ii) $f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 3, \ldots f(n) = n + 1$;
iii) $f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 6, \ldots f(n) = 2n$;
iv) $f(1) = 0, f(2) = 1, f(3) = -1, \ldots f(n) = \frac{(2n-1)(-1)^n+1}{4}$;

d) Eine Menge ist genau dann unendlich, wenn es eine Bijektion auf eine echte Teilmenge gibt.

Aufg. 370/941: a) $(1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + (\ldots) + (50 + 51) = 50 \cdot 51 = 5050$.
b) $(1 + n) + (2 + n - 1) + (3 + n - 2) + (4 + n - 3) + (\ldots.) = (n + 1)\frac{n}{2} = \frac{n^2+n}{2}$ (auswendig).
c) $1{+}2{=}\frac{2^2+2}{2} = 3$; $1{+}2{+}3{=}\frac{3^3+3}{2} = 6$; $1{+}2{+}3{+}4{=}\frac{4^4+2}{2} = 10$; $1{+}2{+}3{+}4{+}5{=}\frac{5^2+5}{2} = 15$.
d) Die Zahlen 1;3;6;10;15; .. heißen Dreieckszahlen.

Aufg. 370/942: Dabei zählen die äquivalenten Zahlen $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$ usw. als verschieden. a) Eine Zahl ist rational, wenn man sie als Quotient einer ganzen Zahl und einer natürlichen Zahl schreiben kann. Bei den positiven rationalen Zahlen steht im Zähler auch eine natürliche Zahl.
b) In der folgenden Tabelle kommt jedes $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$ vor und zwar in Spalte p und Zeile q.

c)

1/1 (1)	2/1 (3)	3/1 (6)	4/1 (10)	5/1 (15)	6/1 (21)	...
1/2 (2)	2/2 (5)	3/2 (9)	4/2 (14)	5/2 (20)	6/2 (27)	...
1/3 (4)	2/3 (8)	3/3 (13)	4/3 (19)	5/3 (26)	...	
1/4 (7)	2/4 (12)	3/4 (18)	4/4 (25)	5/4 (33)	...	
1/5 (11)	2/5 (17)	3/5 (24)	4/5 (32)	5/5 (41)	...	
1/6 (16)	2/6 (23)	3/6 (31)	4/6 (40)	5/6 (50)	...	
...	...	...	...	...	...	

d) In der obersten Zeile stehen die Dreieckszahlen aus Aufgabe 941.
e) i) 1/5, 2/4, 3/3, 4/2, 5/1; **ii)** $p/q : d = p + q - 1$. **iii)** $\frac{d^2+d}{2} = \frac{(p+q-1)^2-(p+q-1)}{2}$; **iv)** Nenner 2: $\frac{(p+q-1)^2-(p+q-1)}{2} - 1$; **v)** Nenner 3: $\frac{(p+q-1)^2-(p+q-1)}{2} - 2$; **vi)** Nenner q: $\frac{(p+q-1)^2-(p+q-1)}{2} - (q - 1)$;
vii) $(1/4) \to \frac{(1+4-1)^2-(1+4-1)}{2} - (4 - 1) = 10 - 3 = 7$
und $(5/6) \to \frac{(5+6-1)^2-(5+6-1)}{2} - (6 - 1) = \frac{110}{2} - 5 = 50$.

Aufg. 371/943: a) $b_6 = 0.\ 1\,0\,1\,1\,0$ Die erste Stelle von b_1 wurde geswitcht also $0 \to 1$, ebenso die zweite Stelle von b_2 $1 \to 0$, die dritte Stelle von b_3 $0 \to 1$ usw. (Abb. 552)

a)
$$\begin{array}{lllllll}
b_1 = & 0. & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
b_2 = & 0. & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
b_3 = & 0. & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
b_4 = & 0. & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
b_5 = & 0. & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
b_6 = & 0. & \underline{1} & \underline{0} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{0}
\end{array}$$

b)
$$\begin{array}{lllllll}
b_1 = & 0. & 1 & 2 & 3 & 3 & 0 \\
b_2 = & 0. & 2 & 5 & 6 & 8 & 1 \\
b_3 = & 0. & 3 & 2 & 8 & 9 & 3 \\
b_4 = & 0. & 2 & 7 & 0 & 9 & 4 \\
b_5 = & 0. & 5 & 8 & 9 & 3 & 6 \\
\hline
b_6 = & 0. & \underline{2} & \underline{6} & \underline{9} & \underline{0} & \underline{7}
\end{array}$$

c)
$$\begin{array}{lllllll}
r_1 = & 0. & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\
r_2 = & 0. & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\
r_3 = & 0. & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\
r_4 = & 0. & a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\
r_5 = & 0. & a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \\
\hline
r = & 0. & \underline{a_{1,1}+1} & \underline{a_{2,2}+1} & \underline{a_{3,3}+1} & \underline{a_{4,4}+1} & \underline{a_{5,5}+1} \ldots
\end{array}$$

Abb. 552 Cantor Diagonalverfahren 2. Art

b) $d_6 = 0.\,2\,6\,9\,0\,7$; hier und auch im Teil c) gilt $9 + 1 = 0$ also $a + b = (a + b)$ mod 10.

c) mit $a_{i,j} \in \underline{0,1,2,3,..,9}$. $r = 0.\ a_{1,1} + 1\, a_{2,2} + 1\, a_{3,3} + 1\, a_{4,4} + 1\, a_{5,5} + 1 \ldots$; Unter der Annahme, dass es eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to [0; 1]$ gibt finden wir eine Zahl $r \in \underline{[0; 1]}$, die kein Urbild hat. Dies ist ein Widerspruch zur Bijektivität. Damit kann es diese Abbildung nicht geben.

d) Die Zahl r ist nicht (unbedingt) rational.

Cartoon nahe bei Abs 424/14.16.13

Gezeigt wird das Emblem der Neusprache (English Socialism) ⟦vielleicht nicht IngSoc sondern IngSoz⟧ und damit quasi der diktatorischen **Partei des großen Bruders** aus George Orwells doppel plus gutem Roman 1984. Durch Änderung der Sprache sollen Gedankenverbrechen unmöglich gemacht werden.

15.13.3 Die Nullhypothesen der Abivorbereitung (von Sd)

Entscheidungskriteium ist nach 347/879 d ii): 'Beim Aufstellen der Nullhypothese geht man davon aus, dass sich an der bisher bekannten Wahrscheinlichkeit (Hypothese H_0) nichts geändert hat.' oder 'Unschuldsvermutung'.

Abs 1025/16.11.13 C1: H_0: $p = 0.57$ oder $p \geq 0.57$; H_1: $p < 0.57$. Relevanter Satz für H_1: 'Der Vereinsvorsitzende behauptet, dass der Anteil der Übergewichtigen in seinem Verein geringer als in der sonstigen Bevölkerung ist'.

Abs 1035/16.11.21 C2: H_0: $p = 0.4$ oder $p \geq 0.4$; H_1: $p < 0.4$). Relevanter Satzteil für H_1: 'zu selten ein Sternsymbol zeigt'.

Abs 1029/16.11.17 C1: H_0: $p = 0.3$ oder $p \leq 0.3$; H_1: $p > 0.3$) Relevanter Satz für H_1: 'Er behauptet, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Muschel eine Perle hervorbringt, zu erhöhen'.

Abs 980/16.6.4 C1 e: H_0: $p = 0.345$ oder $p \geq 0.345$; H_1: $p < 0.345$) Relevanter Satz für H_1: 'Man bezweifelt, dass der Anteil der 2-Personen-Haushalte heute immer noch 34.5 % beträgt'.

Ende der Lösungsvorschläge