Hurra Mathematik! V 7.4 September 2023

978-2-01-520092-7

DHBW 1. Semester (Sd)

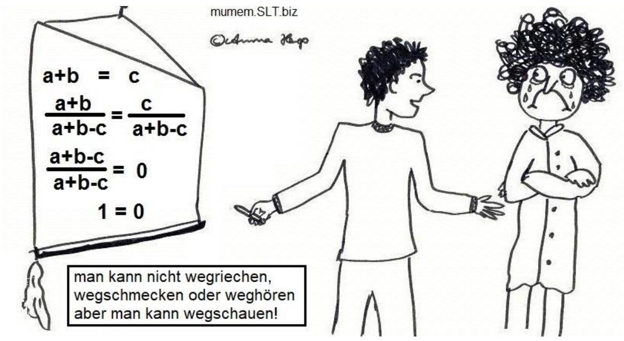
Inhaltsverzeichnis: 387 (1075) Seiten; 943 Ag

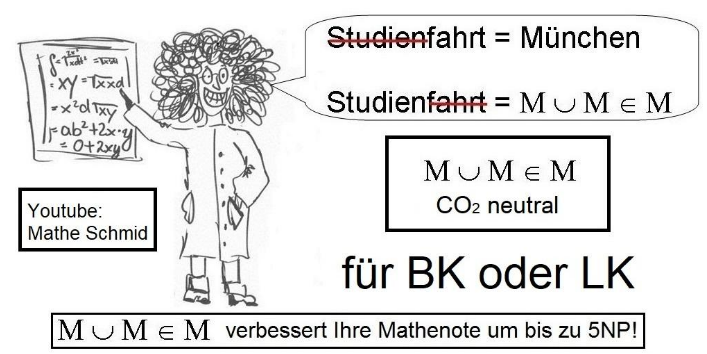
Mit den Seiten: 1071, 2-16, 49-52, 58-62, 90-92, 95-116, 137-200, 249-283, 292-302, 955-957.

Mini-Version: 1071, 49-52, 58-62, 108-116, 137-184, 249-283

Geraden im Raum (Kl 10), LGS (Kl 11), Lineare Algebra (Kl 11-12),
Matrizen und Determinanten (VK 11), komplexe Zahlen (VK 12), Funktionen (Kl 10),
Differenzialrechnung (Kl 10-11), Integralrechnung (Kl 11+VK 12).

Formelsammlung mit Korrekturzeichen: http://Formel72.slt.biz





Die Filme finden Sie auf den Kanälen **'Mathe Schmid'** oder **'Schmid happens'**.

Mein Buch und auch die Lösungsvorschläge finden Sie auf meinem Internetauftritt: Sd.SLT.biz bei den jeweiligen Klassen. User Schueler, Pass erfragen Sie unter Sd@SLT.biz. Dort erhalten Sie auch ein Token für die online-Version von Hurra Mathe: Mobile Mathe.

Alle meine Projekte finden Sie unter mathe.slt.biz.

1 Einleitung Willkommen!

Mathematik macht Spaß + glücklich! Mathematik steckt in mir (und Dir) und muss heraus. Bedenke aber: Beglückenderer, als Mathematik zu machen, ist es, Mathematik zu lehren.

Zum Geleit: *Hurra Mathematik* besteht aus zwei Teilen: Einem Schulteil, der im Großen und Ganzen aus Aufgaben (oft notiert als Seite/Aufgabennummer) besteht und einem Hochschulteil welcher den Stoff noch einmal auf höherem Niveau wiedergibt. Der Unterrichtsteil zeigt meinen Unterricht der Klassen 8-12. Die erwarteten Schülerlösungen zu fast allen Aufgaben finden Sie auf meiner Internetseite sd.slt.biz. User: Schueler. Das Passwort kann bei mir erfragt werden. Bitte beachten Sie dabei die Version; die Aufgabennummern können sich laufend ändern. Sollte bei einer Aufgabe eine Längenmaßeinheit fehlen, so ist für diese *cm* zu wählen. Der Platz im Buch ist knapp, deshalb bitte ich die dichte Darstellung zu entschuldigen. Eine übersichtlichere Version (Thx Alice .. mit gleichen AgNr + anderen Seitenzahlen) oder einen Zugang (Token) zur Online-Version 'Mobile Mathe' mit Aufgaben, LöVo + Filmlinks gibt es auf Anfrage.

Der Bezug zu den eingeführten Lehrwerken: Als ich mich wieder einmal über die Bücher der Mittelstufe beschwert habe, sagte mein Kollege Frohberg: '*Wieso*? Mit diesen Büchern können die Schüler sehr gut *zu Hause* lernen'. Es dauerte etwas, bis ich begriff, dass die Bücher zur Eigenarbeit gedacht sind und nicht (unbedingt) zum Unterrichten. Deshalb arbeiten wir in der Schule allein mit *Hurra Mathematik* und die Schüler sollen zu Hause den Unterrichtsstoff mit den Schulbüchern weiter vertiefen. Den Bezug zu den eingeführten Schulbüchern finden Sie am Anfang vieler Abschnitte:

Klasse 8,9:	Neue Wege 4,5, 2007	(=NW4, NW5),
Klasse 8,9,10:	Lambacher Schweizer 8,9,10, 2017	(=LS8 .. LS10),
Klasse 10:	Elemente der Mathematik 6, 2009	(=EM6),
oder Klasse 10:	Lambacher Schweizer 11, 1998	(=LS11),
Klassen 10-12:	Lambacher Schweizer Kursstufe, 'Jahr'	(=KS_{Jahr}),

Folgende Taschenrechner sind Basis der LöVo des Buches: GTR: Texas TI 83; **WTR:** Casio fx-87DEX

Binnendifferenzierung (BD): (thx Trl) BD bezeichnet die individuelle Förderung Einzelner innerhalb einer Lerngruppe. BD kann nur im offenen Unterricht wirkungsvoll praktiziert werden. Also ist es beim lehrerzentrierten Unterricht sinnvoll, diese in die Hausaufgaben zu verlegen. Deshalb finden Sie bei fast allen Aufgaben Indizes, Bsp: c_2). Die Nr. sagt etwas über deren Niveaustufe aus: 1+2=Basisniveau (bis Note 3-4; 6 NP), 3+4=Könnerniveau (bis Note 1-2, 12 NP), 5(+6)=Profiniveau. Bitte beachten Sie dabei, dass für die Niveaustufe nicht nur relevant ist, *was* gefragt wird, sondern auch *wann* es gefragt wird. Die Minimalanforderungen sind immer auf Niveau 1-2. Sonderniveau sind a=Algorithmus, b=Beispiel, e=Einführung, L=nur LK, r=Regel, und w= Wiederholung (Niveau b und r müssen als HA ins Regelheft (s.u.) übertragen werden). Eine Niveaukonkretisierung bei Einführungsaufgaben ist schwierig, denn die Agstellungen sind eher leicht, es wird aber ein Transfer erwartet. Ag mit Index T bauen teilweise aufeinander auf und sollen noch auf weitere Ergebnisse führen.

Das Regelheft: (thx Lor, Wg) Sie sollten ein Regelheft (als Hausheft) führen. Im Regelheft sollten alle wichtigen Formeln, sowie Regeln und Algorithmen des Unterrichtes kompakt, evtl. mit einem Beispiel, notiert sein. Sollte eine Aufgabe (idR Lückentext) den Niveauindex r haben, so schreiben

Sie die ausgefüllte Variante als Hausaufgabe in Ihr Regelheft ab. Eine Aufgabe mit Index $'b'$ sollte im Unterricht gerechnet werden; die Lösung dieser Aufgabe (eventuell mit Aufgabentext) gehört zu einer Regel und ist ebenfalls ins Regelheft zu übertragen. Außerdem sollten Sie in das Regelheft alle Formeln der Formelsammlung abschreiben, die während des Unterrichtes besprochen wurden. Im Gegensatz zum Regelheft ist das Schulheft ein Arbeitsheft und darf (soll) auch falsche Ansätze oder Durchgestrichenes enthalten. Hausaufgaben und Übungsaufgaben gehören ins Schulheft.

Hausaufgabe sind grundsätzlich alle im Unterricht ausgelassenen Aufgaben. Faustregel: Ein Schüler mit Note n sollte (mindestens) n Aufgaben (pro Unterrichtsstunde) als Hausaufgabe machen (auch wenn dies nicht kontrolliert wird). Eine Aufgabe mit Markierung $\boxed{\mathbf{f}_2}$) wird kontrolliert und muss von jedem Schüler als HA präsentabel vorbereitet werden. Ag mit $\mathbf{a}_2$) (auch (f) (U) oder Index 'f') sind gefilmt worden (Youtube Kanäle Mathe Schmid + Schmid happens). Während des Filmens ist die Mitarbeit freiwillig und es werden keine mündlichen Noten gemacht. Zu allen Aufgaben gibt es Lösungsvorschläge im Netz; diese sollten aber erst konsultiert werden, wenn Sie einige Zeit erfolglos versucht haben, die Aufgabe zu bearbeiten. Damit entfällt auch die Ausrede: 'Ich konnte die Hausaufgabe nicht machen, weil ich diese nicht verstanden habe'. Sollten Sie (trotz auswendig gelernter Formeln) einmal eine Aufgabe (Ihres Niveaus) nicht herausbekommen, gehen Sie wie folgt vor:

1) Schreiben Sie die Lösungsvorschläge ab.
2) Mailen Sie an Sd@slt.biz die Aufgabe - ich versuche dann die LöVo zu ergänzen; (goto 1).
3) Erwirken Sie über den Kurssprecher im Unterricht eine Besprechung der Aufgabe (bis Niveau 3).
Bitte melden Sie mathematische Fehler und auch Rechtschreibfehler sofort (per Mail).

Cartoon 1

Im Falle des **Onlineunterrichts** beginnen wir zur gleichen Zeit wir beim Präsenzunterricht unter stream.slt.biz. Den Plan des Tages finden Sie dann unter 'Klasse'.slt.biz. Ein Thema besteht aus einem Film, einer Aufgabe, die in Kleingruppen (Breakoutrooms Raum n .slt.biz) bearbeitet werden soll und einer anschließenden Besprechung (in der Regel mit Aufzeichnung). Alle Projekte finden Sie unter mathe.slt.biz Bitte geben Sie die HA (LöVo online) spätestens 48 Stunden vor den Meetings eigenhändig handschriftlich als jpg mit dem Datei-Namen [Klasse]_[Nummer]_[Name].jpg per Mail ab. Als Schüler der Klasse 10k gibt Max Müller die HA des Meetings Nr 3 die Datei namens 10k_03_Mueller.jpg ab. Bei Studenten entfällt die Klasse. Bitte schauen Sie sich alle Filme auch die ohne HA bis zum Ende an und kommentieren Sie diese (wenn erwartet) mit Ihrem Kürzel (VorNac, hier MaxMuel).

Notentransparenz: Im Regelfall schreibe ich pro Halbjahr 1 bis 3 Tests (diese zählen einfach → Heft) und 2 KA (diese zählen doppelt). Wer wiederholt bei einem Test oder einer KA oder bei der letzten KA fehlt, muss damit rechnen, diese (oder diesen) während der nächsten Unterrichtsstunde nachschreiben zu müssen. Die mündliche Leistung werte ich wie einen Test. Mit der letzten Arbeit jedes Halbjahres können Sie einen Papier-Streifen mit Ihren bisherigen Leistungen erhalten. Das Erstellen dieses Streifen kann den Datenschutz leicht verletzen. Bitte melden Sie rechtzeitig, wenn Sie sich vor diesen Daten schützen wollen also keinen Streifen wünschen. Wenn Sie einen Streifen haben, können Sie sich in meiner Sprechstunde (nicht im Unterricht - zusammen mit Ihrer besten Freundin) zur erteilten Note äußern. Wenn alle KA/Tests mitgeschrieben wurden, kann die Note eventuell durch einen Vortrag bzw. GFS aufgewertet werden. Goto 381/3a+4a.

Zwillingsaufgaben (markiert durch einen Index Z) kommen verstärkt ab der Version 6.8 vor und sind Textaufgaben, die neben der eigentlichen Mathematik noch ein kleines Rätsel beinhalten. Gesucht ist meist eine Person (oft mit einem verfremdeten Namen oder anderem Geschlecht), eine Erzählung oder ein Ereignis; die Lösung wird im Unterricht nicht besprochen und kann in den LöVo auf Sd.SLT.biz nachgeschlagen werden. Aufgaben mit Index 'g' haben einen geschichtlichen Bezug. Goto 16/1.3

Is nich gibts nicht: Grundsätzlich findet jeder Unterricht (auch das Tutorium) statt, selbst wenn auf dem Vertretungsplan 'Entfall' steht. In der Regel werde ich dann von einem Schüler vertreten (SZU), der mit Ihnen Übungsaufgaben oder KA Besprechungen macht.

Ein **Hauptfach** definiert sich u.a. dadurch, dass Sie zur Nacharbeit (zu Hause) etwa die Zeit benötigen, die Sie das Fach in Schule haben (für Mathematik sind dies also etwa 4-5 Schulstunden). Dazu gehört das Rechnen der Hausaufgaben (das waren die im Unterricht ausgelassenen Aufgaben), das Auswendiglernen der Formeln und (als Abivorbereitung) das Rechnen alter Abituraufgaben. Optimalerweise tun Sie dies zu festen Zeiten in der Woche (Stundenplan; gleichverteilt, nicht blockweise) und in Gruppen (wenn Sie nicht zusammen arbeiten, beaufsichtigen Sie sich wenigstens gegenseitig).

1.1 Formelsammlung

Matheformeln auswendig lernen - ist in Mathe nicht viel mehr das Verständnis entscheidend? Man muss doch nicht wissen wie's geht sondern nur wissen wo's steht. **NEIN!** Entscheidend ist, dass man überhaupt weiß, wofür es eine Formel gibt und durch die Formeln Zusammenhänge erst klar werden. Wissen Sie, was die Formel $a^2 + b^2 = |a + ib|^2$ bedeutet? Nein? Aber Sie wissen, dass diese Formel von Formel 29 abstammt, und damit haben Sie schon einen Großteil verstanden. Und Formeln geben Ihnen die Sicherheit in einer Prüfung das Richtige zu tun. Übrigens: Bei einer Sprache verzichten Sie auch nicht aufs Vokabeln lernen, wenn Sie doch ein Wörterbuch haben ☺.

Bitte beachten Sie, dass sowohl die Formelsammlung als auch die Minimalanforderungen (am Ende jeder Unterrichtseinheit) nur als Basis für die weiteren Kapitel zu verstehen sind. Eine KA Vorbereitung sollte weit mehr beinhalten. Besonders relevant zur KA Vorbereitung (für den Reproduktionsteil) sind Aufgaben mit der Markierung (KA_X) ($X \in \{$'B'asis, 'l'okal, 'G'lobal, 'Z'entral$\}$; optional bis zur Markierung ($\overline{\text{KA}}$)). Und denken Sie immer dran: Wenn Sie in einer KA nur Falsches hinschreiben, gibt es 0 Punkte, wenn Sie aber nichts hinschreiben, werden es auch nicht mehr (falsch $\geq$ nichts).

Folgende Formeln sind unbedingt auswendig zu lernen; (W) bedeutet dabei 'wichtig'; (A) 'auswendig'; (Z) 'zentral'. Zentrale Formeln sind praktisch Voraussetzung für jede Unterrichtseinheit. Die Formelsammlung ist nicht unbedingt vollständig. Weitere Formeln dürfen gerne auch gelernt werden. Taucht im Aufgabentext der Hinweis **(Formel 1)** auf, so wird die Formel 1 an dieser Stelle eingeführt. Weitere Erwähnungen sind mit F1 gekennzeichnet. Vielen Dank an Familie Tressel und allen Formelsammlern für die Mithilfe.

1.1.1 Formelsammlung bis Klasse 7

Merkwürdig wenn Sie das Wort hören, denken Sie an sonderbar skurril - im eigentlichen Sinne bedeutet es aber es ist würdig, es sich zu merken. Wenn Sie Information mit einem durchaus merkwürdigen Bild kombinieren, so können Sie sich diese oft viel besser merken. Ziel ist es, jede Formel mit einem merkwürdigen erklärenden Bild zu versehen. Vorschläge sind willkommen (zB Formel 10).

1. (A) Die ersten 20 Quadratzahlen sind: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400; $25^2 = 625$; Kubikzahlen: $2^3 = 8, 3^3 = 27, 4^3 = 64, 5^3 = 125$.

   (A) Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl >1, die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist. Die ersten acht Primzahlen sind 2,3,5,7,11,13,17,19.

2. (A) Ein Term ist immer nach der Verknüpfung benannt, die als letztes ausgeführt wird.

3. (Z) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, dann gilt das Kommutativgesetz $a+b = b+a$, $a \cdot b = b \cdot a$, das Assoziativgesetz $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ und das Distributivgesetz $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;

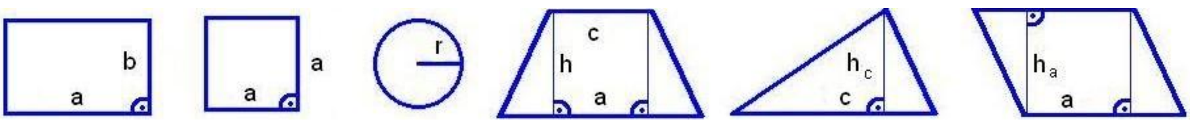
   

   Abb. 1 Rechteck Quadrat Kreis Trapez Dreieck Parallelogramm

4. (A, Ag 55/135) (Vermehrter / verminderter Grundwert) Ein Bestand wächst mit p Prozent pro Zeitschritt, dann gilt für den Wachstumsfaktor q: $q = 1 + \frac{p}{100}$.

5. FD 3: (A) Flächenberechnung von Dreiecken, Vierecken und Kreisen:

Kreis:	$A = \pi \cdot r^2$, $U = 2 \cdot \pi \cdot r$	
Quadrat:	$A = a^2$,	
Rechteck:	$A = a \cdot b$	Länge mal Breite,
Parallelogramm:	$A = g \cdot h$	Grundseite mal Höhe,
Dreieck:	$A = \frac{c \cdot h_c}{2}$	Grundseite mal Höhe durch zwei,
Trapez:	$A = \frac{a+c}{2} \cdot h$	mit $a \vert\vert c$ und Höhe h.

6. (W) Der Schwerpunkt S eines Dreiecks teilt die Schwerlinie im Verhältnis 2:1.

7. (W) $a \cdot b = \text{ggt}(a,b) \cdot \text{kgV}(a,b) =$ größter gemeinsamer Teiler · kleinstes gemeinsames Vielfaches.

8. (W) 'Der kleine Gauß:' $1 + 2 + 3 + 4 + .. + n = \frac{n^2+n}{2}$;

9. (Z) Die Steigung m einer Geraden durch $P(x_1; y_1)$ und $Q(x_2; y_2)$ mit $x_1 \neq x_2$ berechnen wir mit

$$\text{Zwei-Punkte-Formel (ZPF):} \qquad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Angela Merkel [m] fährt auf ihren Ski [=] den Berg hoch gegen ein Haus, dass zu Bruch geht. Im oberen Stockwerk der Ruine [Bruch] wirft ein Sektglas, dass mit Schwanenblut [y_2] gefüllt ist einen Speer [−] auf ein anderes Sektglas und trifft dessen Kerze [y_1]. Im unteren Stockwerk wird ein Andreaskreuz vom Schwanenblut [x_2] betropft der Speer [−] fällt auf ein anderes Andreaskreuz, welches die mit Glück die Kerze auffängt [x_1].

10. (Z) Die Gleichung einer Geraden mit der Steigung m durch $P(x_1; y_1)$ ist

$$\text{Punkt-Steigungs-Form (PSF):} \qquad y = m \cdot (x - x_1) + y_1.$$

Ein Sektglas [y] steht auf zwei Skiern [=] und fährt einen Berg hinauf. Oben steht Angela Merkel [m] mit einem roten Muttermal [·] am Bein. Sie öffnet eine Türe [( ] und man sieht eine Straßenkreuzung [x]. Ein Speer [−] fliegt mitten in eine andere Kreuzung hinein und trifft dort eine Kerze [x_1]. Vom Luftzug wird die Türe wieder zugeschlagen [ )]. Draußen findet eine Party statt auf der Spaten [+] tanzt. Alle Partygäste haben in der rechten Hand ein Sektglas und in der linken Hand eine Kerze [y_1].

Die $x-$Achse hat die Gleichungsdarstellung $y = 0$, die $y-$Achse: $x = 0$.

1.1.2 Formelsammlung Klasse 8

11. (Z, Ag 20/4, FD 2) **Binomische Formeln:** **i)** $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$; **ii)** $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$; **iii)** $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$; (W, Ag 20/5) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

12. (Z, Ag 21/10) Bei Äquivalenzumformungen sind die Multiplikation mit 0 sowie die Division durch 0 und durch x (Tipp: Ausklammern + F14) verboten.

13. (W, Abs 228/9.1.8, FD 9) **Satz des Thales**: Genau die Dreiecke in einem Halbkreis sind rechtwinklig. **Umfangswinkelsatz**: (auf dem Themenfriedhof) Jeder Umfangswinkel ist halb so groß wie der Mittelpunktswinkel. Also sind alle Umfangswinkel auf einer Seite gleich groß.

14. (Z, Ag 22/15) Satz vom Nullprodukt: Sei $a \cdot b = 0$, dann ist $a = 0$ oder $b = 0$.

15. (A, Ag 28/37) Sei $n \geq 0$, $\sqrt{n}$ ist diejenige positive Zahl, die quadriert $= n$ ergibt.
$x^2 = n$ wird von $x = \pm\sqrt{n}$ gelöst. Damit ist $(\sqrt{n})^2 = n$ und für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sqrt{x^2} = |x|$.

    (A, Ag 29/45) Seien $a, b \geq 0$, $n > 0$ dann gilt: i) $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$; ii) $\sqrt{\frac{a}{n}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{n}}$;

16. (W, Ag 89/216) Für den Scheitel $S(x_s; y_s)$ einer Parabel $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ gilt: $x_s = \frac{-b}{2a}$.
Die Scheitelform der Parabel ist: $y = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$.

17. (A, Ag 313/790) Es werden k aus n Kugeln mit Berücksichtigung der Reihenfolge gezogen. Mit Zurücklegen ergeben sich n^k mögliche Ergebnisse, ohne Zurücklegen $\frac{n!}{(n-k)!}$. Die Anzahl der Permutationen von n Elemente ist $n!$.

18. (A, Ag 317/798) Gegeben sei ein mehrstufiges Zufallsexperiment mit zugehörigem Baum.

    Die Pfadregel:
    In einem mehrstufigen Zufallsexperiment erhält man die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses, indem man die Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades multipliziert: Die 'Malrichtung' ist von links nach rechts.

    Der spezielle Additionssatz:
    Die einzelnen Ergebnisse eines Ereignisses dürfen addiert werden: Die 'Plusrichtung' ist von oben nach unten.

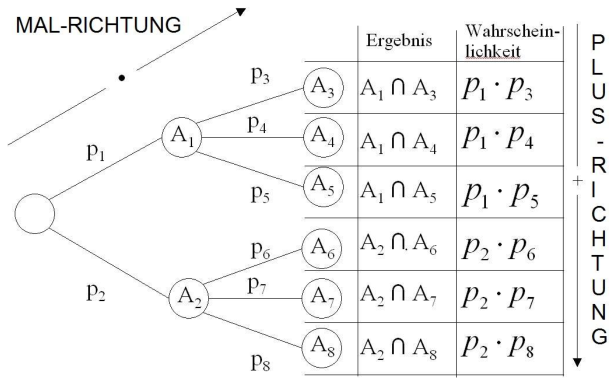


Abb. 2 Pfadregel

19. (Z, Ag 31/57, FD 6) Mitternachtsformel: Seien $a \neq 0$, $D := b^2 - 4ac \geq 0$ (Diskriminante) dann

$$\text{gilt} \qquad ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

    (W, Ag 32/60) Wenn $D > 0$ ist, hat $ax^2 + bx + c = 0$ zwei (verschiedene) Lösungen, bei $D = 0$ hat sie (genau) eine Lösung und bei $D < 0$ hat sie keine Lösung.

20. (A, Ag 32/62) **Linearfaktorzerlegung:** Hat $p(x) = ax^2 + bx + c$ die Nullstellen x_1 und x_2, dann ist $p(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$;
    (W, Ag 33/66) **Satz von Vieta:** $x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \Leftrightarrow p = -(x_1 + x_2), q = x_1 \cdot x_2$.

21. (A, Ag 231/560, FD 1) Der (zweite) Strahlensatz: Seien Z, A, B und Z, A', B' je auf einer Geraden (oder kollinear), $A'A || B'B$, dann gilt: $k = \dfrac{ZA'}{ZA} = \dfrac{ZB'}{ZB} = \dfrac{A'B'}{AB}$. k ist dabei der Streckfaktor der zentrischen Streckung, die das ΔZAB auf das $\Delta ZA'B'$ abbildet.

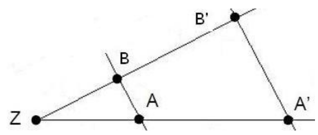


Abb. 3 Strahlensatzfig.

22. (W, Abs 230/9.2.4) Bei einer zentrischen Streckung mit Streckfaktor k wird aus einer Fläche mit dem Inhalt A eine Fläche mit dem Inhalt $k^2 \cdot A$ (aus einem Körper mit Volumen V ein Körper mit Volumen $k^3 \cdot V$).

1.1.3 Formelsammlung Klasse 9

23. (A, Abs 36/2.3.2, FD 5) Seien $a, b > 0$, $n, m \in \mathbb{R}$, dann gilt:

1 PG	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$;	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$;	2 PG	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$; $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$;
3 PG	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$;	$(a^n)^m = (a^m)^n$;	4 PG	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$;
5 PG	$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$;		6 PG	$a^n \cdot b^m$ kann nicht zusammengefasst werden

24. (A, Ag 37/94) Die Gleichung $x^n = a$ hat für ungerades n genau eine Lösung $x = \sqrt[n]{a}$; falls n gerade ist, so hat die Gleichung für $a < 0$ keine Lösung, für $a > 0$ gilt $x = \pm \sqrt[n]{a}$ und für $a = 0$ ist $x = 0$.

25. (W, Abs 225/9.1) Wenn zwei Dreiecke in
    (sss) allen drei Seiten
    (sws) zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel
    (wsw) einer Seite und den zwei anliegenden Winkeln
    (Ssw) zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel
    übereinstimmen, dann sind sie kongruent (deckungsgleich).

Jede der oben angegebenen Kombinationen legt ein Dreieck in Form und Größe eindeutig fest (thx Cf).

26. (A, Abs 39/2.4.1) Seien $a, b > 0$, $a \neq 1$, dann gilt $a^x = b \Leftrightarrow x = \frac{\log b}{\log a} \left(= \frac{\ln b}{\ln a}\right) = \log_a(b)$. Insbesondere ist $\log(10^c) = c$ (für alle $c \in \mathbb{R}$) und $10^{\log(c)} = c$ (nur für $c > 0$) (thx Trs).

    (W) Spezielle Werte: $\log(1) = 0$, $\log(10) = 1$, $\log(100) = 2$, $\log(1000) = 3$, usw.

    $(*)$ Limites: $\log(0) = -\infty$, $\log(\infty) = \infty$, (Klasse 11: $\ln(e) = 1$).

27. (A, Abs 40/2.4.2, FD 5) Seien $a, b > 0$, $n \in \mathbb{R}$, dann gilt:

    1 LogG $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$; $\log(\frac{a}{b}) = \log(a) - \log(b)$;
    2 LogG $\log(a^n) = n \cdot \log(a)$; 3 LogG $\log(a + b)$ kann iA nicht vereinfacht werden.

28. (A, Ag 234/581, FD 21) $y = m_1 \cdot x + c_1$ und $y = m_2 \cdot x + c_2$ sind orthogonal $\Leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$.

29. (Z, Ag 235/585, FD 8) Der Satz von Pythagoras: Im rechtwinkligen Dreieck A, B, C mit $\gamma = 90°$ gilt $a^2 + b^2 = c^2$ oder die Summe der Kathetenquadrate ist gleich dem Hypotenusenquadrat.

    (W, auch Ag 238/602) Die Zahlen (3;4;5) (und entsprechende Vielfache) bilden ein pythagoreisches Tripel, d.h. es gibt ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seitenlängen 3; 4 und 5. Es hat die weiteren Winkel 36.87° und 53.13°. Die Zahlen 1;2;2;3 bilden ein pythagoreisches Quadrupel, d.h. $1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$ oder ein Quader mit den Seitenlängen 1;2;2 hat Diagonale 3.

30. (W, Ag 236/590) Die Diagonale d eines Quadrates mit der Seitenlänge a ist $d = a\sqrt{2}$.

    Die Höhe h eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a ist $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.

31. (A, Ag 236/594) Die Pkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ haben den Abstand $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. (W, Ag 236/596) Jeder Punkt $P(x; y)$ eines Kreises K um $M(m_1; m_2)$ mit Radius r erfüllt

    die Gleichung $(x - m_1)^2 + (y - m_2)^2 = r^2$ oder $x^2 + y^2 = r^2$ falls $M(0; 0)$.

32. (A, Ag 238/602) Die Diagonale d eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b ist $d = \sqrt{a^2 + b^2}$. Die Raumdiagonale d_R eines Quaders (Seitenlängen a, b, c) ist $d_R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

33. (W, Ag 95/238) $f(\overline{f}(x)) = \overline{f}(f(x)) = x$ bzw. $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$ (falls $f^{-1}(x)$ existiert).

34. (Z, Ag 240/614, FD 7) Im rechtwinkligen Dreieck gilt (Regel: GAGA HühnerHof AG)

    $\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$; $\cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$; $\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$;

    Nach dem Satz des Pythagoras gilt $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.

35. (W, Ag 241/618) (auch Ag 108/282) Winkel - spezielle Werte:

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin(\alpha)$	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = 0.5$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

36. (W, Ag 242/620) (auch Ag 112/291) Sinus und Kosinus sind 360° periodisch: Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\sin(\alpha) = \sin(\alpha + k \cdot 360°)$ und $\cos(\alpha) = \cos(\alpha + k \cdot 360°)$.

    Eine Gleichung der Form $\sin(x) = a$ wird von $x_1 = \arcsin\,(a)$ und $x_2 = 180° - x_1$ gelöst.

    Eine Gleichung der Form $\cos(x) = a$ wird von $x_1 = \arccos\,(a)$ und $x_2 = 360° - x_1$

    In diesem Abschnitt sind A, B beliebige Ereignisse.

37. (W, Ag 320/806) Additionssatz: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

38. (W, Ag 321/809, FD 26) Eine Zufallsgröße $\mathcal{X}$ ist ein Wkraum mit reellen Ergebnissen; hier $x_1, .., x_n$. Erwartungswert $\mu = x_1 \cdot P(\mathcal{X} = x_1) + x_2 \cdot P(\mathcal{X} = x_2) + x_3 \cdot P(\mathcal{X} = x_3)$. Varianz: $(x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + (x_3 - \mu)^2 \cdot p_3$; Standardabweichung $\sigma = \sqrt{V(\mathcal{X})}$.

39. (W, Ag 324/818, FD 24) Def. bedingte Wk: $P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

    (W, Ag 326/820) A und B sind unabhängig $\Leftrightarrow P_B(A) = P(A)$ oder $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

40. (W, Ag 328/826) Man muss mindestens $\lceil \frac{\log(1-p)}{\log(1-p_0)} \rceil$ mal ein Experiment mit Erfolgswk p durchführen um mit einer Wk von mind. p_0 ein Mal oder öfter erfolgreich zu sein.

41. (A, Ag 243/633) Die Fläche A eines Kreissektors mit Öffnungswinkel α ist $A = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°}$, die Bogenlänge b ist $b = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360°}$.

42. (A, Ag 245/640) Für Prismen und zylinderförmige Körper (Säulen) mit Grundfläche G gilt $V = G \cdot h$, für kegelförmige Körper gilt $V = \frac{G \cdot h}{3}$. Für Kugeln gilt $V = \frac{4\pi}{3} r^3$; $O = 4\pi \cdot r^2$.

1.1.4 Formelsammlung Klasse 10 teilweise vorgelesen unter http://fs10.slt.biz

43. (A, Ag 100/252) $f(x-a)$ bedeutet 'statt x schreibe $(x-a)$'.

    Beispiel: $f(x) = 2x^2 - 4x \quad \to \quad f(x-a) = 2(x-a)^2 - 4(x-a)$.

    (W, Ag 100/252) Wenn das Schaubild von f um a nach rechts und um b nach oben verschoben werden soll, so hat der resultierende Graph die Funktionsdarstellung $y = f(x-a) + b$.

    (W, Ag 100/254) Soll K_f an der x-Achse gespiegelt werden, so gilt $f_{neu}(x) = -f(x)$; wenn K_f an der y-Achse gespiegelt wird, so gilt $f_{neu}(x) = f(-x)$;

44. (A, Ag 102/260) Die Vielfachheit von Nullstellen (siehe Abb. 4). Einfache Nullstellen x_0 treten als Linearfaktor $(x-x_0)^1$ doppelte Nst als $(x-x_0)^2$ und dreifache Nst als $(x-x_0)^3$ in der Linearfaktorzerlegung auf.

45. (W, Ag 104/267) **Fundamentalsatz** der Algebra: Eine ganzrationale Funktion n-ten Grades hat höchstens n Nullstellen. Eine ganzrat. Fktn ungeraden Grades hat mindestens eine Nullstelle.

    Satz der Linearfaktorzerlegung: $p(x) = 0 \Leftrightarrow p(x)$ ist durch $(x - x_0)$ teilbar.

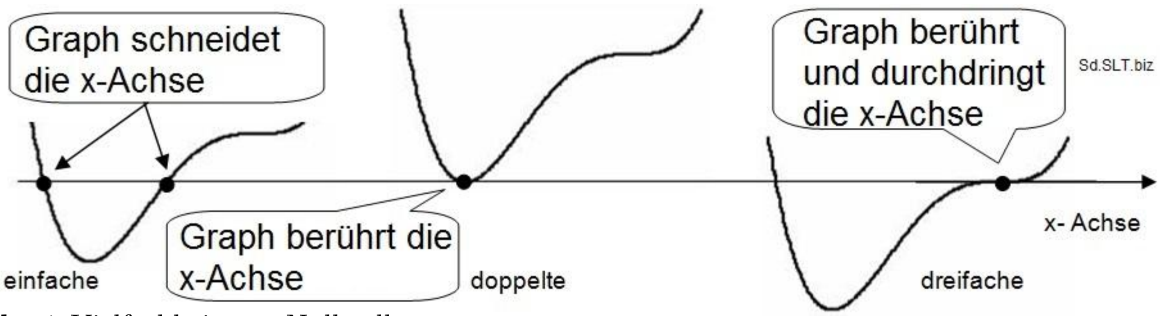


Abb. 4 Vielfachheit von Nullstellen

46. (A, Ag 105/273) Formel der speziellen Symmetrie: Sei f eine Funktion, mit Schaubild K_f.
    K_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse $\Leftrightarrow f(-x) = f(x)$; (gerade Funktion);
    K_f ist punktsymmetrisch zum Ursprung $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$; (ungerade Funktion).

47. (A, Ag 330/12.3.1, FD 25) $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot .. \cdot (n-1) \cdot n$.

    Das n-Tupel $\underbrace{E, .., E}_{k} \; \underbrace{\bar{E}, .., \bar{E}}_{n-k}$ kann auf $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ Weisen angeordnet werden.

    Das Tupel $\underbrace{1, .., 1}_{n_1} \; \underbrace{2, .., 2}_{n_2} \; \underbrace{3, .., 3}_{n_3} \; \underbrace{4, .., 4}_{n_4}$ kann auf $\frac{(n_1+n_2+n_3+n_4)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot n_4!}$ Weisen angeordnet werden.

48. (W, Ag 333/843) Wir ziehen k aus n Kugeln, dann gilt für die Anzahl der möglichen

Permutationen: (das Quadrat)	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen (Tupel)
mit Berücksichtigung der Anordnung (Baum)	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
ohne Berücksichtigung der Anordnung	$\binom{n-1+k}{k}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

49. (W, Ag 335/849) Ein Experiment mit den Ergebnissen Erfolg und Misserfolg und gleichbleibender Erfolgswahrscheinlichkeit p heißt Bernoulliexperiment. Dieses wird n mal durchgeführt. Sei $\mathcal{X}$ die Anzahl der Erfolge, dann gilt die Formel von Bernoulli: $P(\mathcal{X}=k)=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ $[= binompdf(n,p,k)]$. $\mathcal{X}$ heißt dann $B_{n,p}$verteilt oder $\mathcal{X}\sim B_{n,p}$.

50. (A, Ag 337/853) Sei $\mathcal{X}\sim B_{n,p}$, d.g.: $P(\mathcal{X}\geq k)=1-P(\mathcal{X}\leq k-1)[=1-binomcdf(n,p,k-1)]$.

51. (A, Ag 339/856, FD 26) Sei $\mathcal{X}\sim B_{n,p}$, dann gilt: Der Erwartungswert von $\mathcal{X}$ ist $E(\mathcal{X})=\mu=n\cdot p$, $V(\mathcal{X})=\sigma^2=n\cdot p\cdot(1-p)$ ist die Varianz und $\sigma(\mathcal{X})=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$ ist die Standardabweichung.

52. (W, Ag 340/858) Sei $\mathcal{X}\sim B_{n,p}$, dann gilt: $P(\mathcal{X}\leq k)\approx\Phi\left(\dfrac{k-n\cdot p+0.5}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}\right)$.

53. (W, Ag 137/324) $\infty\notin\mathbb{R}$, sei $a\in\mathbb{R}$ $\quad a\pm\infty=\pm\infty$, $\quad\frac{a}{\infty}=0$, $\quad a\cdot\infty=\begin{cases}\infty & (a>0)\\ \text{undefiniert} & (a=0)\\ -\infty & (a<0)\end{cases}$; undefiniert sind $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},0\cdot\infty,\infty-\infty,0^0,1^\infty$

54. (W, Ag 139/329) Die mittlere Geschwindigkeit (Änderungsrate) oder **Sekantensteigung** einer Weg/Zeitfunktion f zwischen x_0 und x_1 ist $\bar{v}=m=\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ **(Differenzenquotient)**.
(FD 13) Die Momentangeschwindigkeit **(Tangentensteigung)** einer Weg/Zeitfunktion f ist $v(x_0)=m(x_0)=f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-(f(x_0))}{h}=\lim\limits_{x_1\to x_0}\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ **(Differenzialquotient)**.

55. (W, Ag 140/338) Eine Funktion $f(x)$ hat an der Stelle x_0 den Steigungswinkel ihrer Tangente: $\alpha=\tan^{-1}(f'(x_0))$ bzw. falls $f(x)=mx+c$ gilt $\alpha=\tan^{-1}(m)$.

56. (Z, Ag 139/332, FD 14) Die Potenzregel der Ableitung: $(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$, für alle $n\in\mathbb{R}$.

57. (A, Ag 139/334, FD 15) Die Linearität der Ableitung: $(r\cdot f(x)+s\cdot g(x))'=r\cdot f'(x)+s\cdot g'(x)$.

58. (A, Abs 140/6.1.7) Tangente in $B(u/f(u))$ (allgemeine Tggleichung): $y=(\,f'(u)\,)\,(x-u)+f(u)$; Normale: $y=\frac{-1}{f'(u)}\cdot(x-u)+f(u)$. **Faustregel:** Ist $P(a;b)$ ein Punkt der Funktion, so setze $u=a$, sonst (externer Punkt) setze $x=a$ und $y=b$; im Zweifelsfalle setze $u=a$.

59. (W, Abs 108/5.4.2, FD 12) Umrechnung (Bogenmaß $\leftrightarrow$ Gradmaß): $\frac{\alpha}{360}=\frac{x}{2\pi}$.

x	$0\mathrel{\hat{=}}0°$	$\frac{\pi}{6}\mathrel{\hat{=}}30°$	$\frac{\pi}{4}\mathrel{\hat{=}}45°$	$\frac{\pi}{3}\mathrel{\hat{=}}60°$	$\frac{\pi}{2}\mathrel{\hat{=}}90°$	$\pi\mathrel{\hat{=}}180°$	$\frac{3\pi}{2}\mathrel{\hat{=}}270°$	$2\pi\mathrel{\hat{=}}360°$
$\sin(x)$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}=0$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}=0.5$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}=1$	0	-1	0
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

60. (A, Abs 109/5.4.3, FD 11) $\sin(-x)=-\sin(x)$, d.h. $\sin(x)$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung; $\cos(-x)=\cos(x)$, d.h. $\cos(x)$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

61. (A, Ag 110/288) $f(x)=a\sin(b(x-c))+d$ hat Periode $p=\frac{2\pi}{b}$.
K_f entsteht aus $K_{\sin(x)}$ durch Streckung mit dem Faktor a in y-Richtung und mit dem Faktor $\frac{1}{b}$ in x-Richtung sowie einer Verschiebung um $(c;d)$ Regel: Erst strecken, dann verschieben.

62. (W, Ag 113/295) Von $f(x)=a\sin(b(x-c))+d$ sind zwei aufeinanderfolgende Extrema $T(x_{min},y_{min})$ und $H(x_{max},y_{max})$ gegeben, dann gilt:
$a=\frac{y_{max}-y_{min}}{2}$; $\quad c=\frac{x_{max}+x_{min}}{2}$; $\quad d=\frac{y_{max}+y_{min}}{2}$; $\quad p=2\cdot(x_{max}-x_{min})$;

63. (A, Ag 114/297, FD 14) $(\sin(x))'=\cos(x)$, $\quad(\cos(x))'=-\sin(x)$, $\quad(\sin(bx+c))'=b\cos(bx+c)$.

64. (A, Ag 249/653) Seien $A(a_1|a_2|a_3)$ und $B(b_1|b_2|b_3)$, dann ist $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}b_1-a_1\\b_2-a_2\\b_3-a_3\end{pmatrix}$ (Ende $-$ Anfang).

65. (A, Abs 417/14.15.16) **Die Parallelogrammgesetze:**

    (1 PaG) Für die Mitte M von A und B gilt $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$;

    (2 PaG) A, B, C, D ist ein Parallelogramm $\Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$;

    (3 PaG) Für jede Spiegelung gilt: Sei A' der an einem Gebilde G (Punkt, Gerade, Ebene) gespiegelte Punkt von A, dann ist $\overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OA}$, wobei L der Lotfußpunkt von A auf G ist.

    (4 PaG) Für den Schwerpkt S eines Dreiecks A, B, C gilt $\overrightarrow{OS} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$; (einer Dreieckspyramide A, B, C, D gilt $\overrightarrow{OS} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{4}$); dies sind Verallgemeinerungen vom (1 PaG).

    Nur bei den Parallelogrammgesetzen dürfen sinnvollerweise Ortsvektoren (Punkte) addiert werden.

66. (A, Ag 253/669) Die Gerade durch A und B in Parameterform ist $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$, $(t \in \mathbb{R})$. Für $t = 0$ ist $\vec{x} = \overrightarrow{OA}$, für $t = 1$ ist $\vec{x} = \overrightarrow{OB}$, für $t = 0.5$ zeigt $\overrightarrow{OX}$ auf die Mitte von A und B. Falls $t < 0$ ist, liegt X 'links' von A; falls $0 < t < 1$ ist, liegt X 'zwischen' A und B und falls $t > 1$ ist, liegt X 'rechts' von B.

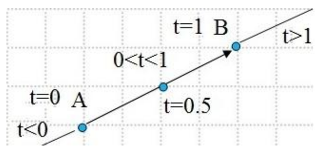
    

    Abb. 5 Skalierung

    (A) Die x_1-Achse ist $\overrightarrow{OX} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; x_2-Achse: $\overrightarrow{OX} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; x_3-Achse: $\overrightarrow{OX} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

67. (W, Ag 254/674) ('Der Baum:') Seien $g_1 : \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP}_1 + t \cdot \vec{r}_1$ und $g_2 : \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP}_2 + t \cdot \vec{r}_2$.

    Es gilt: $\vec{r}_1 \parallel \vec{r}_2 \Leftrightarrow g_1 \| g_2$, wenn zusätzlich das LGS $\overrightarrow{OP}_1 = \overrightarrow{OP}_2 + t \cdot \vec{r}_1$ lösbar ist, so ist $g_1 = g_2$, ansonsten sind g_1 und g_2 echt parallel.

    Falls $\vec{r}_1 \nparallel \vec{r}_2$ so ist $g_1 \nparallel g_2$, wenn zusätzlich das LGS $\overrightarrow{OP}_1 + s \cdot \vec{r}_1 = \overrightarrow{OP}_2 + t \cdot \vec{r}_2$ lösbar ist, so schneiden sich g_1 und g_2 ansonsten sind g_1 und g_2 windschief.

68. (W, Ag 257/685, 273/756) Ein Objekt bewegt sich vom Punkt P aus geradlinig in Richtung $\vec{r}$ mit konstanter Geschwindigkeit v, so befindet es sich zum Zeitpunkt t bei $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \frac{v}{|\vec{r}|} \cdot \vec{r}$.

    Bogenlängenparametrisierung: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \frac{d}{|\vec{r}|} \cdot \vec{r}$. X hat von P den (orientierten) Abstand d.

69. (A, Ag 145/357) f ist bei x_0 (lokal) extremal $\Leftrightarrow f'(x)$ wechselt bei x_0 das Vorzeichen $\Rightarrow f'(x_0) = 0$; VZW $+ \to -$ bedeutet Maximum; VZW $- \to +$ bedeutet Minimum.
    Signalwort maximal (minimal) bedeutet: 'Ableiten und die Ableitung =0 setzen'.

70. (A 6.2.4) $f''(x_0) < 0$ und $f'(x_0) = 0 \Rightarrow H(x_0; f(x_0))$ ist Hochpunkt; $[f''(x_0) > 0$ usw. ... Tiefpunkt].

    $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$ ist eine hinreichende Bedingung für Extremwert, $f'(x_0) = 0$ ist eine notwendige Bedingung: $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0 \;\Rightarrow\; E(x_0; f(x_0)) \;\Rightarrow\; f'(x_0) = 0$.

71. (A, Ag 148/369) $W(x_0; f(x_0))$ ist ein Wendepunkt $\Leftrightarrow$ VZW von $f''(x)$ bei $x_0 \Rightarrow f''(x_0) = 0$;

72. (W, Ag 151/381) Sei f differenzierbar auf $(a; b)$ mit $f'(x) > 0$ (für alle $x \in (a; b)$), dann ist f streng monoton wachsend ($f'(x) > 0 \Rightarrow f$ smw); smf analog. Im Abitur gibt es nur <u>strenge</u> Monotonie!
    Innere Extrempunkte zerstören die strenge Monotonie; Terrassen(Sattel)punkte <u>hingegen</u> nicht.
    Monotoniebereiche: Zwischen einem Minimum und einem Maximum ist f smw und umgekehrt.
    Streng monotone Funktionen sind umkehrbar (injektiv).

1.1.5 Formelsammlung Klasse 11

73. (Z, Ag 160/409, FD 14) $(e^x)' = e^x$, $(e^{ax+b})' = a \cdot e^{ax+b}$ und (A, Ag 163/424) $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$.

74. (A, Ag 160/411) Seien $a, b > 0; a \neq 1$, dann gilt $a^x = b \Leftrightarrow x = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$; $e^{\ln b} = b; \ln(e^b) = b$;

    (W) $[\ln(0) = -\infty,]$ $\ln(1) = 0$, $\ln(2) \approx 0.693$, $\ln(e) = 1$ $[, \ln(\infty) = \infty]$.

75. (A, Ag 161/413, FD 18) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0$ (waagrechte Asymptote $y = 0$),
$\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \ln(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0; \qquad e^x > 0,\ e^{-x} > 0.$

76. (A, Ag 161/415, FD 15) Die Kettenregel: $(f(g(x)))' = g'(x) \cdot f'(g)$ oder $\frac{df}{dx} = \frac{dg}{dx} \cdot \frac{df}{dg}$
$\Leftrightarrow (f \circ g)'^x(x) = f'^g(g(x)) \cdot g'^x(x)$. Beachten Sie, dass bei $f'(g)$ nach g abgeleitet wird.
Die innere Funktion $g(x)$ ist immer das, was zuerst berechnet wird.
Bsp: $(e^{x^2})'$ sagt $g(x) = x^2, f(g) = e^g$, $(e^{x^2})' = 2x \cdot e^g = 2x \cdot e^{x^2}$;
$(a^x)' = (e^{x\ln(a)})' = \ln(a) \cdot e^{x\ln(a)} = \ln(a) \cdot a^x \ (a > 0)$.

77. (A, Ag 162/419, FD 15) Die Produktregel: $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$.

78. (Kl. 11, Ag 164/427) Quotientenregel: $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.

79. (W, Ag 174/454, FD 16) Der Hauptsatz der Differenzial und Integralrechnung:

$$\text{'Ableiten ist das Gegenteil vom Integrieren'} \qquad \text{oder} \qquad \left(\int_a^x f(t)dt\right)' = (F_a(x))' = f(x).$$

80. (W, Ag 175/455, FD 17) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =$ (orientierte) Fläche begrenzt von K_f und den Geraden $x = a, x = b$ und $y = 0$.

81. (A, Ag 176/460) Potenzregel: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ bzw. $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a\cdot(n+1)} + c$, falls $n \neq -1$;
(A, Ag 183/496) für $n = -1$ gilt: $\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$.
(A, Ag 176/461) Die Linearität des Integrals: $\int (r \cdot f(x) + s \cdot g(x))dx = r \cdot \int f(x)dx + s \cdot \int g(x)dx$.

82. (A, Ag 178/473) Lineare Substitution: Sei $F'(x) = f(x)$, dann gilt für $a \neq 0$:
$\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$; **Bsp:** $\int \sin(ax+b)dx = \frac{-\cos(ax+b)}{a} + c$; $\int e^{ax+b}dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c$;

83. (W, Ag 181/487, FD 19) Rotiert der Graph einer Funktion f um die $x-$ Achse, so gilt für das Volumen des entstehenden Rotationskörpers im Intervall $[a; b]$: $V = V_a(b) = \pi \cdot \int_a^b f^2(t)dt$.

84. (W, Ag 182/493) Der Mittelwert m einer Funktion f auf $[a, b]$ ist $m = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx$.

85. (A, Ag 256/683, FD 22) Das Skalarprodukt: $\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$; $\vec{a} \circ \vec{a} = |\vec{a}|^2$.
$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}} = \sqrt{(\vec{a})^2}$. Multipliziere zwei Vektoren **nie** komponentenweise.
Normierter Vektor: Sei $\vec{a} \neq \vec{0}$ dann zeigt $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ in Richtung $\vec{a}$ und hat Länge 1.

86. (Z, Ag 258/692) Für den von $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ eingeschlossenen Winkel γ gilt: $\cos(\gamma) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.
Insbesondere gilt $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 0$. Hinweis: Teile **nie** durch einen Vektor!

87. (Kl. 11, Ag 260/700) Sei $\vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b}$, dann ist deren Winkelhalbierende: $\vec{w} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

88. (W, Abs 353/13.2.1) Sei F eine Verteilungsfunktion einer Zufallsgrößen $\mathcal{X}$ mit Dichte f, dann gilt: $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$, $P(a < \mathcal{X} \le b) = F(b) - F(a)$, $\lim_{n\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{n\to\infty} F(x) = 1$, $F(x)$ ist monoton wachsend und F ist rechtsseitig stetig. $\mu = E(\mathcal{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)dt$;
(nur HM III) $\sigma = \sqrt{V(\mathcal{X})} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}(t-\mu)^2 \cdot f(t)dt}$;

89. (W, Abs 356/13.2.2, FD 26) Sei $\mathcal{X} \sim N(0; 1) \Rightarrow \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$; $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t)dt$. Sei $\mathcal{X} \sim N(\mu, \sigma)$(normalverteilt), dann gilt: Dichte$= \varphi(x) = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$; $P(\mathcal{X} \le k) = \Phi(\frac{k-\mu}{\sigma})$,
$P(a \le \mathcal{X} \le b) = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ und $\Phi^{-1}(1-\alpha_0) = -\Phi^{-1}(\alpha_0)$.
Sigmaregel: (FD 27) Mit Wk 68% hat ein Wert höchstens Abstand σ vom Erwartungswert μ, mit Wk 95% Abstand 2σ und mit Wk 99% Abstand 3σ.

1.1.6 Formelsammlung Klasse 12

90. (W, Ag 261/705, FD 23) Die Ebene durch (drei) nicht kollineare Punkte A, B und C in Parameterform ist $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC} = \vec{a} + r \cdot \vec{s}_1 + t \cdot \vec{s}_2$ $(r, t \in \mathbb{R})$.

    Es gibt (mindestens) drei Darstellungsformen der Ebene:
    a) Die Parameterform (s.o.) wenn aus drei Punkten eine Ebene berechnet werden soll;
    b) Die Punktnormalenform $(\vec{x} - \vec{p}) \circ \vec{n} = 0$ ($\vec{n}$ heißt Normalenvektor, bei Verfahren Abs. 10.5.8);
    c) die Koordinatenform $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = e$ (sonst immer gut).

    Es gilt $\vec{n} \perp \vec{s}_1$ und $\vec{n} \perp \vec{s}_2$; Ein möglicher Normalenvektor $\vec{n}$ kann durch $\vec{s}_1 \times \vec{s}_2$ berechnet werden.

91. (A 255/678+264/716) Die Koordinatenebenen sind: x_1x_2-Ebene: $x_3 = 0$; x_1x_3-Ebene: $x_2 = 0$; x_2x_3 Ebene: $x_1 = 0$. Die Ebene $x_1 + x_3 = 1$ ist echt parallel zur x_2- Achse.

92. (A, Ag 266/725) Seien $\vec{a}, \vec{b}$ dreidimensional, dann definieren wir $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$ (Vektor- oder Kreuzprodukt).
    Sei $E : \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \vec{s}_1 + t \cdot \vec{s}_2$ eine Ebene (in Parameterform mit $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ l.u.). Berechne $\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2$; setze P in die Koordinatenform $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = e$ ein und berechne so e.

93. (A, Abs 266/10.4.1) Seien $\vec{a}, \vec{b}$ dreidimensional, dann gilt: i) $\vec{a} \perp (\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$;
    ii) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}$ und $\vec{b}$ sind parallel (linear abhängig);
    iii) $|\vec{a} \times \vec{b}|$ = die Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.
    iv) Die Fläche eines Dreiecks A, B, C ist $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$.

94. (A, Ag 268/732) Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ dreidimensional, dann gilt: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ ist das (orientierte) Volumen, des von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten Spates (räumliches Parallelogramm). Dabei ist $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} > 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden ein Rechtssystem; $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind linear abhängig.

    Das Volumen V einer Pyramide mit Spitze S und
    parallelogrammförmiger Grundfläche A, B, C, D ist: $V = \frac{1}{3}\left|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \circ \overrightarrow{AS}\right|$.
    dreieckiger Grundfläche A, B, C, ist: $V = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \circ \overrightarrow{AS}|$.

95. In den Formeln 95-97 sind $g_i : \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP}_i + t \cdot \vec{r}_i$ (Geraden) und $E_i : (\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OQ}_i) \circ \vec{n}_i = 0$ (Ebenen). $\sphericalangle (g_1, g_2) = \cos^{-1}\left(\left|\frac{\vec{r}_1 \circ \vec{r}_2}{|\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2|}\right|\right)$, $\sphericalangle (E_1, E_2) = \cos^{-1}\left(\left|\frac{\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}\right|\right)$,
    (W, Ag 271/742) $\sphericalangle (E_1, g_1) = \sin^{-1}\left(\left|\frac{\vec{n}_1 \circ \vec{r}_1}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{r}_1|}\right|\right)$. aber $\sphericalangle (\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{v}_1 \circ \vec{v}_2}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|}\right)$.

    $g \perp E \Leftrightarrow \vec{r} || \vec{n}$; $g || E \Leftrightarrow \vec{r} \perp \vec{n}$; $E_1 || E_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 || \vec{n}_2$; $E_1 \perp E_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$.

96. (A, Ag 272/752) Sei $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = e$ eine Ebene, dann ist deren Abstandsform (HNF): $d = \left|\frac{n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 - e}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}\right|$ oder $d_{\text{orient}} = \frac{n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 - e}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$ (Orientierung in Richtung von $\vec{n}$).

97. (W, Ag 273/754) Der Abstand windschiefer Geraden ist $d = \left|(\overrightarrow{OP}_2 - \overrightarrow{OP}_1) \circ \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|}\right|$.

1.1.7 Formeln des Themenfriedhofs, die früher auswendig zu lernen waren

98. (Kl. 9, Ag 234/578) Sei A, B, C ein rechtwinkliges Dreieck, $q = c_a$ und $p = c_b$ die Hypotenusenabschnitte, dann gilt: $h^2 = p \cdot q$ Höhensatz $a^2 = c \cdot p$, $b^2 = c \cdot q$ Kathetensätze.

99. (Kl. 9, Abs 242/9.4.5) Sei A, B, C ein allgemeines Dreieck, R dessen Umkreisradius, dann gilt

    Sinussatz: $\dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{b}{\sin(\beta)} = \dfrac{c}{\sin(\gamma)} = 2R$ Kosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$

    Damit ist der Kosinussatz eine Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras.

100. (Kl. 9+10, Ag 108/280) Die Additionstheoreme lauten:

    $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$

101. (Kl. 9+10, Ag 328/824 + 59/149) Geometrische Summe: $1+q+q^2+q^3+..+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
Für $|q<1|$ geht $q^{n+1} \to 0$: Damit gilt: $1+q+q^2+q^3+... \ = \frac{1}{1-q}$ (geometrische Reihe).
3. binomische Formel: $(a-b)\cdot(a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+a^{n-3}b^3+...+ab^{n-1}+b^n) = a^{n+1}-b^{n+1}$.

102. (Kl. 10, Ag 106/276 + 107/278) Formel der allgemeinen Symmetrie:
K_f ist achsensymmetrisch + zur Achse $x=a \Leftrightarrow f(a-t)=f(a+t)$;
K_f ist punktsymmetrisch zum Punkt $(a;b) \Leftrightarrow f(a-t)+f(a+t)=2b$; ($t$ hebt sich weg).

103. (Kl. 8+11, Ag 21/9 + 258/690) $\det\left(\binom{a_1}{a_2},\binom{b_1}{b_2}\right) = a_1\cdot b_2 - a_2\cdot b_1 \mathrel{\hat{=}}$ der (orientierten) Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

104. (A, Abs 200/8.1) Ein exponentielles Wachstum wird durch die Funktion $f(x)=y=c\cdot e^{kx}$ beschrieben. Es genügt der Dgl $y'=k\cdot y$. Ein beschränktes Wachstum (mit Schranke S) wird durch die Funktion $y=S-c\cdot e^{kx}$ beschrieben. Es genügt der Dgl $y'=k\cdot S-k\cdot y \Leftrightarrow y'=k\cdot(S-y)$.

1.1.8 Formeln von M_+ oder aus HM

105. (A $\to$ 3.1.2, S. 50) Komplexe Zahlen: **Die vierte Binomische Formel:** $(a+ib)\cdot(a-ib)=a^2+b^2$;
$|z|=|a+ib|=\sqrt{a^2+b^2}$; $\tan(\varphi)=\frac{b}{a}$; **Eulerformel:** $e^{i\varphi}=\cos(\varphi)+i\cdot\sin(\varphi)$;
$e^{2\pi i}=e^{2k\pi i}=1$ für alle $k\in\mathbb{Z}$. **Moivreformel:** $z^n=r\cdot e^{i\varphi} \Leftrightarrow z=\sqrt[n]{r}\cdot e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$ $k=0..n-1$.

106. (A 202/8.2.1) Für $x\in\mathbb{R}$ gilt: $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$; $\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$; $\cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{(2n)!}$;
für $|x<1|$ gilt: $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$; $-\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$;

107. (A 184/503) Partielle Integration: Seien u,v,f,g diffbar, dann gilt: $\int u'v dx = uv-\int uv'dx$;
Substitutionsregel der Integration: $\int f(g)\cdot dg=\int f(g(x))\cdot g'(x)\cdot dx$ oder $dg=g'(x)\cdot dx$.

108. Sei $\underline{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine 2×2 Matrix mit $\det(\underline{A})=ad-bc\neq0$, dann gilt $\underline{A}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\cdot\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

109. ($\to$ 12.4, S. 342) Es werden n aus N Kugeln ohne Zurücklegen gezogen; M der N Kugeln sind Erfolge. Sei $\mathcal{X}$ die Anzahl der gezogenen Erfolge, dann ist $P(\mathcal{X}=k)=\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}:\binom{N}{n}$; $E=\frac{n\cdot M}{N}$.

110. (W) (360/13.3.2) Seien $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ Zufallsgrößen, $|\mathcal{X}|=n$, $P(\mathcal{X}=x_i)=p_i$, $(i=1..n)$, $a,b\in\mathbb{R}$,
$\mu=E(\mathcal{X})=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot p_i$; Standardabweichung: $\sigma=\sigma(\mathcal{X})=\sqrt{V(\mathcal{X})}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\cdot p_i}$
$E(\mathcal{X}+\mathcal{Y})=E(\mathcal{X})+E(\mathcal{Y})$, $E(a\mathcal{X}+b)=a\cdot E(\mathcal{X})+b$, $V(\mathcal{X})=E(\mathcal{X}^2)-(E(\mathcal{X}))^2$,
$V(a\mathcal{X}+b)=a^2\cdot V(\mathcal{X})$, $\chi^2=\sum\frac{(n_O-n_e)^2}{n_e}$
Falls $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ unabhängig sind, gilt $E(\mathcal{X}\cdot\mathcal{Y})=E(\mathcal{X})\cdot E(\mathcal{Y})$, $V(\mathcal{X}+\mathcal{Y})=V(\mathcal{X})+V(\mathcal{Y})$.
Eine **Stichprobenverteilung** $\bar{\mathcal{X}}=\frac{\mathcal{X}_1+..+\mathcal{X}_n}{n}$ ($\mathcal{X}_i$ identisch verteilt mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ) ist näherungsweise $N(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ verteilt ($\sigma(\bar{\mathcal{X}})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$).

111. (A) (367/930) **Satz von Schwarz:** Sei $z=f(x,y)$ diffbar, dann gilt $\frac{d}{dx}(\frac{d}{dy}(f))=\frac{d}{dy}(\frac{d}{dx}(f))$.
Die Hessematrix ist symmetrisch.

112. (L) (367/932, 368/933 und 368/934) Sei $P_i(x_i;y_i)$ $(i=1..n)$ eine Punktwolke.
Die RGP optimierte Regressionsgerade berechnen wir mit folgendem LGS:
$$\begin{array}{lll} m\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2 & +c\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i & =\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot y_i \\ m\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i & +c\cdot n & =\sum_{i=1}^{n}y_i \end{array}$$
Kovarianz: $Cov(\mathcal{X},\mathcal{Y}):=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})\cdot(y_i-\bar{y})}{n}$; Korrelationskoeffizient $r_{x,y}:=\frac{Cov(\mathcal{X},\mathcal{Y})}{\sigma(\mathcal{X})\cdot\sigma(\mathcal{Y})}$;

113. **Lambertsche W-Funktion:** $W(x)$ ist die UKF von xe^x; $e^x+ax=b\Leftrightarrow x=\frac{b}{a}-W(\frac{e^{b/a}}{a})$ $(a,b>0)$.

114. **(Vorbereitung auf Wettbewerbe)** Wichtige Zahlen sind: $e \approx 2.718$, $\pi \approx 3.1416$, $\sqrt{2} \approx 1.414$, $\sqrt{3} \approx 1.732$, $\sqrt{5} \approx 2.236$, $\sqrt{10} \approx 3.162$, $\ln(2) \approx 0.693$, $\sin^{-1}(0.6) \approx 36.87°$, $\sin^{-1}(0.8) \approx 53.13°$. Ein n-Eck hat $\frac{n}{2}(n-3)$ Diagonalen. Wichtige Zahlenfolgen sind:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	natürliche Zahlen $\cup \{0\}$
$\sum_{i=1}^{n}$	0	1	3	6	10	15	21	28	Dreieckszahlen
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5040	Fakultäten
$\frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$	1	1	2	3	5	8	13	21	Fibonacci-Zahlen

1.1.9 Fehlercodes und Abkürzungen

Folgende Fehlercodes verwende ich in der Regel bei der Korrektur von Arbeiten.

Kürzel	Erklärung	Punktabzug
R, *Vz*, *PvS*, ug	Rechenfehler, Vorzeichen, Punkt vor Strich, ungenau	manchmal
uv / *ub* / *D* / !	unvollständig / unbrauchbar / Denkfehler / schlimmer Fehler	normal ja

Alg = Algorithmus; *Arg*= Argumentation; *AS*= Antwortsatz; *EH*=Einheit; *Erg*=Ergebnis; *Int*=Interpretation; *MA*= mathematischer Ansatz; *Rg* = Rechnung; *Tg*=Tangente sind Zusätze z.B. bei *uv*

Deshalb	Deshalb bringe ich Ihnen es anders bei	ja
Ad, *FS* , *S*, *SF*, *Sw*	Ausdruck, Fachsprache, Schreibfehler, Schreibweise	nein
Agtxt / *f* / *uk*	Aufgabentext - in der Aufgabe steht etwas anderes / falsch / unklar	meistens
folgenschwer	auch *fatal* R oder SF mit problemändernden Folgen	ja
$\surd$ / ($\surd$)	richtig / mit falschem Wert richtig weitergerechnet	nein
PRWT	die Produktregel (der Ableitung) gilt auch im Wahlteil	ja
Algebra!	die Algebra der Mittelstufe ist mangelhaft	normal ja
GTR	GTR Befehle sind (im Abitur) nicht zugelassen	nein
'I hope so'	hier wurde der Aufgabentext vom Schüler falsch (oder eben anders) interpretiert, was aber leider möglich war	nein
naja	falsche oder dürftige Ausdrucksweise, vermutlich richtig gedacht	nein

wdh, *kü*, *un* **Hinweise:** wiederholen, kürzen, unnötig, *Ü* = Übertrag (aktuelle Punktzahl)

Die volle Punktzahl ohne Korrekturzeichen bedeutet meist, dass alles richtig ist.

Abkürzungen: Abs= Abschnitt, Ag = Aufgabe oft als Seite/Nummer,
as = achsensymmetrisch, BAg= Basisaufgabe, BD = Binnendifferenzierung,
ber = berechnen, best=bestimmen, beschr = beschreiben, BFS = Banachscher Fixpunktsatz,
$\overline{DHBW}$= kein Stoff der DHBW Dgl = Differenzialgleichung, diffbar = differenzierbar,
ExAg = Extremwertaufgaben, exp = exponentielles, Fkt = Funktion,
GTR = grafischer Taschenrechner, HA = Hausaufgabe, HP = Hochpunkt,
ihlDglmkK = inhomogene lineare Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten,
HgV = hypergeometrische Vert. ia = im allgemeinen, idR = in der Regel,
KA=Klassenarbeit, KF = Koordinatenform, kü = kürzen
LFZ = Linearfaktorzerlegung, LGS = lineares Gleichungssystem, l.a. (l.u.) linear(un)abhängig
LöVo = Lösungsvorschläge mBdA (oBdA) = mit (ohne) Berücksichtigung der Anordnung
mEn = meines Erachtens nach, MNF = Mitternachtsformel, mf = monoton fallend,
MK = Mathe Känguru Ne = Nenner, **Nst** = Nullstelle,
oZ = ohne Zurücklegen, PFZ = Primfaktorzerlegung, Pkt = Punkt,
PNF = Punktnormalenform, PF = Parameterform ps = punktsymmetrisch,
PSF = Punktsteigungsform, sA= senkrechte Asymptote, smw = streng monoton wachsend,
Twwz = teilweise Wurzelziehen SvN = Satz vom Nullprodukt, SvP = Satz von Pythagoras,
TdV = Trennung der Variablen, Tg = Tangente, **TP** = Tiefpunkt,
trig = trigonometrische, UE = Unterrichtseinheit, UKF = Umkehrfunktion,
VdK = Variation der Konst. Vert = Verteilung Vorber= Vorbereitung
VZW = Vorzeichenwechsel wA= waagrechte Asymptote Wk= Wahrscheinlichkeit

WP=Wendepunkt	Wt = Wachstum	Wth =Wahrscheinlichkeitstheorie
Zä = Zähler **Zch** = Zeichnung	ZPF = Zweipunkteformel	ZG=Zufallsgröße.

1.1.10 Die Vorbereitung zwischen den Schuljahren

Wie soll ich mich auf das nächste Schuljahr vorbereiten? Was soll ich in den Sommerferien wiederholen? Diese Fragen versuche ich in diesem Abschnitt zu beantworten. Zu einer guten Vorbereitung gehört auch die Wiederholung (Beherrschung) der bis zu diesem Zeitpunkt bekannten Formeln.

Vorbereitung auf Klasse 9: 19/2, 21/11, 30/51 89/216, 96/242f, 318/800, später 24/27 und 33/64.

Klasse 10: 33/64, 89/216 ab f, 95/239, 96/242f, 243/630, 330/833, später 91/220 und 241/618.

Vorbereitung auf Klasse 11 (GK + LK) 106/275, 116/305, 144/354, 158/406, 258/688, 342/865, danach 95/239, 141/343, 146/361, 148/370, 255/676, 341/12.3.11, LK: 154/393.

Vorbereitung auf den SemKu bzw. auf HM2 für den Abs. 'Die Normalverteilung' 353/13.2
96/242, 110/289, 156/397, ((I*) 163/421, Abs. 187/7.4), 318/800, nur SemKu: 321/809 + 342/865.

Klasse 12: 255/676, (255/677, 257/686), 258/688, 258/691, 258/692f, 259/696, 342/865, 341/12.3.11.

Vorbereitung auf das Ingenieurstudium
Sie möchten sich auf ein MINT Studium vorbereiten? Dann ist dieses Buch für Sie genau richtig. Aus dem Schulteil empfehle ich Ihnen besonders folgende Abschnitte:

Klasse 9: Ungleichungen (Abs: 2.2.7), Anwendungen des Umfangswinkelsatzes (Abs: 9.2.11 nur M+I), der Kosinussatz (Abs: 9.4.6), Kugeln (Abs: 9.6.4), Restklassenringe (Abs: 2.4.5, nur M+I);

Klasse 10: das komplette Wachstum (Abs: 4.2), Linearfaktorzerlegungn (Abs: 5.3.11), Symmetrie + Additionstheoreme (Abs: 5.4.3), trigonometrische Gleichungen (Abs: 5.4.6), der Monotoniesatz (Abs: 6.2.6, nur M+I; ja, diesen unterrichte ich in Klasse 10 tatsächlich!);

Klasse 11: Folgen (Abs: 4.3), implizites Differenzieren (Abs: 6.3.6, oder wie haben Sie bewiesen, dass $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$?), die komplette Integralrechnung (Abs: 7.1) - beachten Sie hierbei, dass die schweren Themen (Abs: 7.4 und 7.5) kein Schulstoff mehr sind, Beweise mit Vektoren (Abs: 10.2.4, nur M+I);

Klasse 12 inkl. Vertiefungskurs: Komplexe Zahlen (Abs: 3.1), die Regel von de l'Hospital (Abs: 6.3.11), Taylor und Dgln (Abs: 8.2), das Spatprodukt (Abs: 10.4), die HNF (Abs: 10.5.5).
Falls Sie Mathe, Informatik oder Wirtschaft studieren möchten, sollten Sie auch die komplette Wahrscheinlichkeitstheorie Abs. 12.1 bis 13.2.2 wiederholen.

Vorber **HM1:** 125f, 128g, 130j, 418, 420, 428, 443, 500, 503 a,b,d, 688, 723, 733, 761, 770b, 774, 781g, 779f.
Vorber **HM2:** 518, 526g, 527gh, 528e, 531e, 533e, 534e, 819, 825, 833, 860f, 865, 871, 875.
Vorber **HM3:** 305, 878, 896, 904, 905e, 909d, 918d, 919b, 13.3.4, 13.3.5, 931, 932, 934e.

1.1.11 Der Versuch eines 1 NP Plans für LK und BK (ohne Garantie)

Das Abi ist sicher, nur es besteht die Gefahr 0 NP im Mathe-LK-Abi zu schreiben? Dann ist dieser Abschnitt für Sie! Wenn Sie folgende Aufgaben (Themen) beherrschen sollte 1 NP (oder mehr) drin sein. Grundsätzlich empfehle ich die Minimalanforderungen am Ende vieler Kapitel.

Analysis: 144/354; 170/441; 179/480; 179/481; 106/275; 116/305; 120/322$_{LK}$; 158/406; 183/500;

Geometrie: (241/617$_{LK}$); 258/688; 259/696; 265/723; 270/739$_{LK}$; 275/761; 280/776;

Wahrscheinlichkeit: 330/833$_{LK}$; 342/865; 352/896$_{LK}$; 358/911;

1.2 Der Themenfriedhof (GFS)

Dieser Abschnitt soll an die Themen einnern, die zu meiner Zeit noch Schulstoff waren und inzwischen ersatzlos aus dem Lehrplan gestrichen wurden - (sie nennen es 'entrümpeln'). Ich vermisse Euch alle!

2016: Folgen + Differentialgleichungen, beschränktes Wachstum;

2012: zweiseitiger Hypothesentest, **s**chiefe Asymptoten und Näherungskurven, LGS mit Parameter, rechnerischer Nachweis der linearen Abhängigkeit, die Sehnentrapezregel, **K**epler-Fass-Regel (Simpsonregel), Polynomdivision, **v**ollständige Induktion;

2011: ε, n_0- Definition der **K**onvergenz, ε, δ-Definition der **S**tetigkeit, logistisches Wachstum;

2004: äußere nicht lineare **S**ubstitutionsregel der Integration, **p**artielle Integration, lineare Optimierung, Kreisgleichungen, Kugelgleichungen, Additionstheoreme, Sinussatz, Kosinussatz, Boolesche Algebra, Schalteralgebra, Körper und Gruppentheorie auch zyklische Gruppen, **S**chubspiegelungen, **D**rehstreckungen inkl. Konstruktion eines Drehstreckzentrums, **E**llipsen inkl. Gärtnerkonstruktion und Krümmungskreiskonstruktion, affine Abbildungen, affine Koordinatensysteme, **E**igenwerte und Eigenvektoren, Invariantes Rechtwinkelpaar, Nichtdiagonalisierbarkeit von Scherstreckungen, Hauptachsentransformation auch von Kegelschnitten, Konstruktionen bei Achsenaffinitäten, **a**llgemeine Skalarprodukte, Die **C**antorschen Diagonalverfahren, Die **R**ussellsche Antinomie, **I**nnere Substitution der Integration, **R**otationskörper um die y-Achse, Diskussion von Wurzel und Betragsfunktionen, Aussagenlogik inkl. Isomorphie zur Mengenlehre, Zahlensysteme, Aufbau eines Zahlenbereiches mit den Peanoaxiomen, Satz von Bolzano-Weiherstraß (Weiherstraß'sches Halbierungsverfahren), geometrische Summe, geometrische und die **h**armonische Reihe, Potenzmengen, Mengenlehre, Determinante;

Bemerkung: 2012 war in BW der flächendeckende Übergang von G9 auf G8 und dieser sollte eigentlich keinen Stoff kosten. Die Einführung des LK 2019 brachte (eigentlich) keinen neuen Stoff.

1.3 Vorworte

1.3.1 Vorwort zur Version 7.0 (2019): mobile Mathe

Hurra Mathe gibt es ab V 7 (Probezeit 2018: V6.9) als online Version mobile Mathe und wurde von Pascal Köstler entwickelt (vielen Dank). Gezeigt werden Aufgabe, Lösung und zugehörige Videos. Jetzt kann Hurra Mathe überall hin mitgenommen werden und ist auch im Unterricht Tablet-fähig.

1.3.2 Vorwort zur Version 6.7 (2016): Die Mathematik ist ein Rosamunde-Pilcher-Film

Welche Filme schauen Sie am liebsten? Einen, bei dem am Ende der Held nicht seine Angebetete bekommt, gar stirbt und die Welt in Schutt und Asche liegt? Nein! Deshalb braucht auch jede Mathematikaufgabe ein Happy End. Mein neues Ziel ist es, dass bei allen Aufgaben 'schöne' Ergebnisse (was auch immer das sein mag) herauskommen, auch wenn das mit der Realität nur selten etwas zu tun hat. Es ist wichtig dem Schüler ein gutes Gefühl zu vermitteln. Die Beschreibung der Wirklichkeit ist nicht unsere Aufgabe, sondern die der anwendenden Wissenschaften. Der Mathematik-Unterricht ist wie ein Rosamunde-Pilcher Film: Die Probleme scheinen anfangs unlösbar, am Ende werden alle (manchmal noch mehr) gelöst, und nie geglaubte Verwandtschaften treten zu Tage. Bei Winkelaufgaben (und bei Ag mit ($\overline{\mathrm{RP}}$)) kann dies leider kaum gelingen, deshalb sind diese von diesem Umbau ausgenommen.

1.3.3 Vorwort zur Version 6.5 (2014)

Mathematik hat viel mit Freude und Spaß zu tun, manchmal ist sie auch ein Bisschen selbstironisch. Deshalb habe ich von Anfang an in *Hurra Mathematik* mehr oder weniger passende Cartoons (Zeichnungen: Anna Herp) eingebaut. In diesen werde ich als schlanker Dozent mit wildem Haar (manchmal mit Brille) und Kittel (oder Hemd, das nicht in der Hose steckt), dargestellt. Oftmals treffen hier die heile Welt des Mathematikers und die unverständliche reale Welt schonungslos aufeinander, was nicht immer ohne Blessuren endet. Nachdem ich festgestellt habe, dass sich die Cartoons beinahe einer

Für $a = b = 1$ ist $$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 1^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}$$

und für $a = 1$ und $b = -1$ ist $$0 = (-1+1)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\ .$$

3 Die komplexen Zahlen C

3.1 Komplexe Zahlen (UE $M{+}_1$)

Vorwort: Mathe Plus (M_+) ist ein zweijähriges Schulfach und soll ein Ersatz für den 2004 abgeschafften Mathematik Leistungskurs sein. Seit 2008 unterrichte ich M_+ u.a. in Form einer Schulvorlesung. Mein Schwerpunkt dabei ist das zweite Unterrichtsjahr. Im Jahre 2012 wurde ein vorläufiger Bildungsplan ⟦Hinweis für den Ersteller: Ein Lehrplan ist sollte besser brauchbaren Stoff enthalten als wenig Stoff⟧ für M_+ verabschiedet. Im zweiten Unterrichtsjahr findet man dort die Pflichtmodule

1) Mengen, Relationen, Funktionen und Graphen

2) Parameterdarstellung und Polarkoordinaten

3) komplexe Zahlen

Etwa 80 % der Schüler, die M_+ gewählt haben machen Physik als vierstündiges Fach. Leider sind wichtige Grundlagen wie Differenzialgleichungen und die Substitutionsregel der Integration kein Schulstoff mehr (Abs. 1.2), so dass die Hinzunahme eines Differenzialgleichungskalküls als wichtig erscheint. Um mehr Schüler für M_+ gewinnen zu können, beleuchte ich auch Teile des Abiturstoffs mit Schwerpunkt auf den Beweisen. Somit teilt sich mein Unterricht in M_+ in vier Teile:

1) Pflichtmodule (PM) **2)** Wahlmodule (WM): Taylorreihen und Intergrationsregeln

3) Physik: Differenzialgleichungen **4)** Abiturstoff: Spatprodukt, nach Bedarf

Geplante Unterrichtsreihenfolge und Inhalte von Mathe Plus

1) Komplexe Zahlen (PM): Abs. 49/3.1

2) Die Regel von de l'Hospital Abs. 170/6.3.11.

3) Integralrechnung: Abs. 173/7.1, 187/7.4 und 189/7.5. Schwerpunkt: Beweise z.B. 175/7.1.7.

4) Taylor und Differenzialgleichungen (WM): Abs. 202/8.2 incl. Lösen der Dgln aus Abs. 200/8.1.

5a) Spatprodukt: Abs. 266/10.4 **5b)** Partialbruchzerlgung: Abs. 126/5.8 + 191/7.6

6) Parameterdarstellungen (PM): Ortskurven (Abs. 156/6.2.11), Parameterdarstellungen (PD) von Kreis und Kugel (Abs. 289/10.10). Hyperbolische Funktionen (Abs. 130/5.10.4). Zusammenhang zwischen trigonometrischen und hyperbolischen Fktn. Die PD von Ellipse und Hyperbel.

7) Relationen (PM): Die Umkehrfunktion UE 9_4 Abs. 92/5.2 (verkürzt) zusätzlich: Diskussion (Madness) der Arcussinusfunktion sowie Interpretation von sin(arccos (x))und arcsin (cos(x)) (Abs. 404/14.10.3). Berechnung von areasinushyperbolikus(x) (Abs. 130/5.10.4).

3.1.1 Einfuehrung in C

→ 14.5.1 − 14.5.3

123. (Ü) **a**$_w$) In Ag 29/42 haben wir bewiesen, dass die Gleichung $x^2 = 2$ nicht lösbar ist. Wir haben uns damals durch die Einführung eines neuen merkwürdigen Symbols _____ und durch eine E______________ des Zahlenbereichs der _______________ Zahlen zum Zahlenbereich der _______________ Zahlen, beholfen. Weiterhin ungelöst bleibt die Gleichung $x^2 = -1$; beweisen Sie, dass diese Gleichung nicht lösbar ist. **b**$_w$) Wie lösen wir das Problem?
c$_e$) Berechnen Sie $i + i$, $i + 2i$, $3i + 5i + 1$, $6i - 3 + 7i + 4$, $3(4i - 2)$, $4i(2i - 3)$, $(2 - i) \cdot (4i + 2)$;
d$_r$) Eine komplexe Zahl ist von der Form $z =$__________ wobei a und b _______________ Zahlen sind. a heißt Realteil von z: $a = Re(z)$, $b = Im(z)$ heißt I_______________.
e$_r$) Sei $z = a + ib$ und $\bar{z} = a - ib$, dann heißt $\bar{z}$ die zu z k_______________komplexe Zahl. Berechnen Sie $z + \bar{z}$ und $z - \bar{z}$.

124. (Ü) **a**$_e$) Sei $z_1 = a_1 + ib_1$ und $z_2 = a_2 + ib_2$; definieren Sie $z_1 + z_2$.
b$_e$) Die Addition zweier komplexer Zahlen ist k_______________ weise definiert. Wo haben Sie

dieses Phänomen schon einmal gesehen?
c$_e$) Eine komplexe Zahl kann als V__________ (Punkt) in der Gaußschen Zahlen____________ gedeutet werden. Dabei entspricht der Realteil der Abszisse (____________) und der Imaginärteil der O_______________ (____________) des Punktes z.
d$_e$) Zeichnen Sie die folgenden Zahlen in die Gaußsche Zahlenebene ein: i) $1+i$, ii) $3+2i$, iii) $2i$, iv) $-2+i$, v) $2-i$, vi) $-3-0.5i$, vii) 4.

125\. (U) **a**$_e$) Definieren Sie das Produkt $z_1 \cdot z_2$.
b$_r$) Die 4. binomische Formel (nach Sd): Faktorisieren Sie a^2+b^2. Tipp: k___________ kompl. Zahl.
c$_e$) Woran erinnert Sie a^2+b^2? Definieren Sie damit den B__________ einer komplexen Zahl z.
d$_w$) Seien $b>a>0$; machen Sie die Nenner rational i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; ii) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^2+1}}$; iii) $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; iv) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;
e$_e$) Stellen Sie den Quotienten $\frac{z_1}{z_2}$ in der Form $a+ib$ dar. Tipp: ____________________ Formel.
f$_2$) (KA$_B$) Ber. Sie den Imaginärteil von i) $\frac{1-7i}{3+4i}$, ii) $\frac{2+2i}{1-3i}$, iii) $\frac{1-2i}{1+2i}$, iv) $\frac{1-i}{1+i}$, v) $\frac{13+26i}{5-12i}$.

3.1.2 Die Formel von Euler

→ 14.5.4 − 14.5.5

126\. (U) **a**$_e$) Betrachten Sie die Funktionen $e^x, \sin(x)$ und $\cos(x)$ sowie deren mehrfache Ableitungen. Was fällt Ihnen auf? Wir vermuten, dass $e^x, \sin(x)$ und $\cos(x)$ v_______________ sind.
b$_r$) Die Formel von Euler **(Formel 105)** (vorerst ohne Beweis): Es gilt $e^{ix}=$_______________.
c$_1$) Berechnen Sie: i) $e^{i\pi}$; ii) $e^{i\frac{\pi}{4}}$; iii) $2\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$; iv) $e^{1+i\pi}$; v) $e^{\ln(4)+i\frac{\pi}{3}}$;
d$_e$) i) Stellen Sie $e^{i\frac{\pi}{6}}$ in einem Koordinatensystem dar. ii) Bei $z=e^{i\varphi}$ entspricht φ dem W________ im __________maß zwischen dem Vektor $e^{i\varphi}$ und dem Vektor (_) bzw. der (positiven) _−Achse. iii) Wo liegt $e^{i\frac{3\pi}{4}}$ in der Gaußschen Zahlenebene?
e$_e$) i) Sei $r>0$; ber. Sie $|e^{i\varphi}|$ und $|r\cdot e^{i\varphi}|$. ii) Best. Sie den Radius und den Winkel von $e^{i\frac{3\pi}{4}}$.
f$_1$) (KA$_B$) Geben Sie von den Zahlen $z_1=1+i\sqrt{3}$, $z_2=2+2i$, $z_3=3+4i$, $z_4=1-i$, $z_5=-1-i$, $z_6=-2+2i\sqrt{3}$, $z_7=i$, $z_8=-3i$, $z_9=-6$ den Betrag r und den Winkel φ an und berechnen Sie $r\cdot e^{i\varphi}$. Problem: $\tan(x)$ ist nur im Intervall $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ eineindeutig.
g$_r$) Eine komplexe Zahl kann in kartesischen Koordinaten (Form: $z=$__________) oder in Polarkoordinaten (Form: $z=$__________) angegeben werden: $r=$ _______________,

$$\varphi=\begin{cases} \rule{5cm}{0.4pt} & \text{falls } \rule{2.5cm}{0.4pt} \quad \text{Bsp.: } z_1=1+i\sqrt{3} \\ \rule{5cm}{0.4pt} & \text{falls } \rule{2.5cm}{0.4pt} \quad \text{Bsp.: } z_7=-1-i \\ \rule{5cm}{0.4pt} & \text{falls } \rule{2.5cm}{0.4pt} \quad \text{Bsp.: } z_4=i \\ \rule{5cm}{0.4pt} & \text{falls } \rule{2.5cm}{0.4pt} \quad \text{Bsp.: } z_5=-3i \\ \rule{5cm}{0.4pt} & \text{falls } \underline{a=b=0} \quad \textbf{(Formel 105)} \end{cases}$$

h$_r$) Die Menge aller Zahlen $e^{i\varphi}$ ($\varphi\in[0;2\pi)$) beschreibt einen __________ um _____ mit _____.
i$_1$) Wie rechnen Sie Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten um?
j$_2$) (KA$_G$) Wandeln Sie $z_1=\sqrt{3}+i$, $z_2=-\sqrt{8}+2i\sqrt{2}$ und $z_3=-2-i\sqrt{12}$ in Polarkoordinaten um.

127\. (U) a$_e$) i) Berechnen Sie $e^{i\frac{\pi}{3}}\cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$ und stellen Sie das Ergebnis auch in Polarkoordinaten dar.
ii) Multiplizieren Sie $\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}$ mit $2\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$. Interpretieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene.
b$_r$) Sei $z_k=r_k\cdot e^{i\varphi_k}$ ($k=1,2$); berechnen Sie $z_1\cdot z_2$. Bei der Multiplikation komplexer Zahlen werden die Beträge _______________ und die Winkel _______________.
c$_e$) Zeigen Sie $|z^2|=|z|^2$ bzw. $|z^n|=|z|^n$. Welche Darstellung komplexer Zahlen bevorzugen Sie?
d$_r$) i) Wir haben drei Darstellungsformen komplexer Zahlen kennengelernt, die ineinander umgerechnet werden können. Welche Form ist für welche Operation geeignet?

Operation →	plus	minus	mal	geteilt	Potenz	Wurzel	Logarithmus	’Vorstellung’
kartesische K.								
Vektor								
Polarkoord.								

ii) Berechnen Sie $(\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}+2\cdot e^{i\frac{3\pi}{2}})^4$.
e$_4$) ($\bar{f}$) Sei $x\in\mathbb{R}$. Es ist $\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ und $\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$. Berechnen Sie $\cosh(ix)$ und damit $\cos(ix)$ und $\sin(ix)$.

3.1.3 komplexe Logarithmen → 14.5.6 + 14.5.7

128. (Ü) a_w) $\sin(x)$ ist ___ periodisch, weil $\sin(x) = \sin(x$____) gilt.
Eine Funktion f heißt periodisch mit Periode $p \Leftrightarrow$ ____________ ($p > 0$ minimal).

b_2) Berechnen Sie $e^{2\pi i}$ und $e^{2k\pi i}$ für $k \in \mathbb{Z}$.

c$_e$) $e^{x+2\pi i} =$ ____; damit ist $f(x) = e^x$ __________ periodisch. Die Darstellung komplexer Zahlen in Polarkoordinaten ist nicht e ______________; in kartesischen Koordinaten hingegen schon.

d_2) ($\bar{f}$) Finden Sie alle (komplexen) Zahlen z, für die $e^z = 1$ {später $e^x = 2$} ist.

e_e) Finden Sie eine (später alle) Zahlen z, für die $e^z = r \cdot e^{i\varphi}$ {später $_f$) $e^z = -1 + i$} ist.

f_r) Der komplexe Logarithmus ist m_______________.

g_2) (KA) Ber. Sie alle komplexen Zahlen z, für die i) $e^z = e$, ii) $e^z = e^i$, iii) $e^z = 3e^{i\pi}$, iv) $e^z = i$, v) $e^z = i - 1$, vi) $e^z = 1 - i\sqrt{3}$, vii) $e^z = -2 - 2i$, viii)$_{\bar{f}}$ $e^z = -1$, ix)$_{\bar{f}}$ $e^z = 0$ gilt.

h$_4$) Berechnen Sie alle komplexen Zahlen z, für die $\overline{e^{2z}} = \frac{1}{e}$ gilt.

3.1.4 Die Formel von Moivre + FSdA → 14.6.2 + 14.6.4

129. (U) a_w) Betrachten Sie die Rechnung $17 : 3 = 5$ Rest 2 und ber. Sie '2' abhängig von $17, 3$ und 5.

b$_w$) Dividieren Sie $x^2 : (x - 4)$ (mit Rest r);

c_e) Sei $p(x) : (x - x_0) = q(x)$ Rest r. Es gilt $r = p(x)$______________. Diese Gleichung gilt für _________ $x \in \mathbb{R}$, insbesondere für $x =$___. Damit ist $r = p($___).

d_r) $p(x) : (x - x_0)$ hat Rest 0 $\Leftrightarrow p(x)$ ist _________ $(x - x_0)$ ____________ $\Leftrightarrow p(x_0) =$ _.

e_e) Sei $p(x)$ vom Grad n und x_0 eine Nullstelle von $p(x)$, dann ist $q(x) = p(x) : (x - x_0)$ vom Grad _______; bei jeder Division dieser Form _______ $p(x)$ einen Grad. Diese Division geht (im Reellen) ____________ mal (Linearfaktorzerlegung).

f_r) (reeller Fundamentalsatz d. A.) Ein Polynom n-ten Grades hat h___________ _ Nullstellen.

130. (Ü) **a**$_w$) $f(x) = x^2 - 4x + 4$ hat ______ Nullstelle, sie z_______ aber d__________.

b$_r$) **Der Fundamentalsatz der Algebra** in der komplexen Form lautet (auswendig):

Ein Polynom n-ten Grades hat ____________ n (k___________) Nullstellen entsprechend ihrer V______________ o_____ g__________ (ohne Beweis).

c$_1$) Geben Sie die Vielfachheiten der Nullstellen von $p_1(x) = (x+1) \cdot (x-2)^2 \cdot (x+i)^3 \cdot (x-3)^0$ und von $p_2(x) = (x^2+1) \cdot (x^2+4)^2 \cdot (x^2-1) \cdot (x^2-4)^3$ an. **d**$_w$) Ber. Sie die Gleichung $z^4 = 1$.

e$_e$) Wieviele Nst von $z^4 - 1$ erwarten Sie? Mit welcher Technik können wir weitere Nst finden?

f$_e$) ⟦Für alle Lösungen der Gleichung $z^4 = 1$ schreiben wir $\bullet\!\sqrt[4]{1}$ (Schreibweise von Sd zur Zeit out).⟧ Statt '1' schreiben wir (nach Ag 51/128): $1 = e$—— $k \in \mathbb{Z}$ und berechnen $(e$——$)^{\frac{1}{4}}$. Wieviele Werte haben wir jetzt? Warum heißt die Aufgabe 'der Zauberlehrling'?

g$_e$) Setzen Sie für $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, ..$ ein und interpretieren Sie.

h$_e$) Erweitern Sie Ihr Ergebnis auf $z^n = r \cdot e^{i\varphi}$.

i$_r$) Die Formel von Moivre: Die Gleichung $z^n = r \cdot e^{i\varphi}$ hat genau ____ verschiedene Lösungen:
$z^n = r \cdot e^{i\varphi} \Leftrightarrow z =$ _____ $\cdot$ _________ $k =$ _ ... ____. **(Formel 105)**

j$_2$) (KA) Berechnen Sie: i) $z^2 = 9$, ii) $z^2 = -4$, iii) $z^2 = -16i$, iv) $z^3 = 8i$, v) $z^3 = 27i$, vi) $z^4 = -8 - 8i\sqrt{3}$, vii) $z^3 = -4\sqrt{2} - 4i\sqrt{2}$.

k$_r$) Alle Zahlen, die $z^n = z_0$ erfüllen, (n-te Einheitswurzeln) sind die Ecken eines r______________ ____-Ecks um den ______________.

131. (Ü) a_2) Lösen Sie i$_{\bar{f}}$) $z^2 + 1 = 0$, ii) $z^2 + 2z + 2 = 0$, iii) $z^2 - 4z + 8 = 0$, iv$_{\bar{f}}$) $z^2 - 6z + 13 = 0$, v) $z^2 - 2az + a^2 + b^2 = 0$ ($a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$) mit Hilfe der M________________. ↑ (KA)

b_r) Seien $b, c \in \mathbb{R}$, dann sind die Lösungen der Gleichung $z^2 - 2bz + b^2 + c = 0$ für c 0 (rein) reell und für c______ paarweise k__________komplex.

3.1.5 Die komplexe Mitternachtsformel

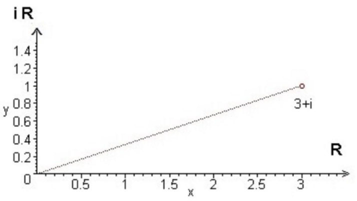
→ 14.6.5

132. ⓐ$_e$) Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^2-(i+1)z+i=0$ mit der M______________.

b$_e$) Berechnen Sie alle Lösungen von $z^2=-2i$. Verwenden Sie die Formel von __________.

c$_e$) Wandeln Sie das Ergebnis von b) in ___________________ um und setzen Sie dies in a) ein.

ⓓ$_3$) (KA$_t$) Ber. Sie: i) $z^2+(i-2)z-2i=0$, ii) $z^2+iz+2=0$, iii) $z^2+(7i-7)z-25i=0$;



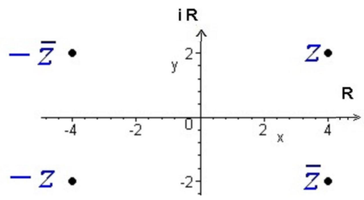


Abb. 17 Zahlenebene 10 DM Schein konjugiert komplexe Zahl

3.2 Ortskurven

3.2.1 Definition: Kurve

Sei $\mathbb{D}$ ein Intervall (offen, halboffen oder abgeschlossen); $f_1, f_2 : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ stetig und beide nicht konstant, dann nennen wir
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}.$$
eine **Kurve** in der Ebene $\mathbb{R}^2$. Statt x_1 schreiben wir oft x und statt $x_2 = y$. Eine Kurve hat einen **Doppelpunkt,** falls es zwei Werte $t_1 \neq t_2$ gibt mit $f_1(t_1) = f_1(t_2)$ und $f_2(t_1) = f_2(t_2)$.

3.2.2 Beispiel: Geradenstücke

Seien $f_1(t) = 2t-3$ und $f_2(t) = 4-2t$, dann ist $\binom{x}{y} = \binom{2t-3}{4-2t}$ eine Kurve – es gilt also $x = 2t-3$ und $y = 4-2t$ – der Parameter kann auch eliminiert werden: $t = \frac{x+3}{2}$ in $y = 4-2t$ eingesetzt: $y = 4-2\cdot\frac{x+3}{2}$, also $y = -x+1$. Es handelt sich um eine Gerade.

Sei $f_2(t) = a\cdot f_1(t)+b$, dann ist $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$ ein Geradenstück. Falls $f_1(t)$ invertierbar ist, liegt die Kurve in der Gerade $y = f_2(f_1^{-1}(x))$.

Beispiel: Sei $\mathbb{D} = (0;\infty)$, $f_1(t) = \sin(\frac{1}{t})+4$ und $f_2(t) = 3\cdot\sin(\frac{1}{t})$, dann liegt die Kurve in der Gerade $y = 3x-12$, denn $\sin(\frac{1}{t}) = x-4$, also $y = 3(x-4)$. $-1 \leq \sin(\frac{1}{t}) \leq 1$, damit gilt $3 \leq x \leq 5$ und $-3 \leq y \leq 3$. Interessanterweise hat die resultierende Kurve weder etwas mit dem Sinus noch etwas mit dem Bruch zu tun. Die Kurve besitzt (mindestens) einen Doppelpunkt, denn $\vec{x}(\frac{1}{\pi}) = \vec{x}(\frac{2}{\pi}) = \binom{4}{0}$.

3.2.3 Definition: Kurven und Geraden im Komplexen

Seien $\mathbb{D}$, f_1 und f_2 wie in Abschnitt 3.2.1 definiert und sei $z(t) = f_1(t) + j\cdot f_2(t)$, dann stellt $z(t)$ eine Kurve in $\mathbb{C}$ dar.

Seien $z_0 = a_0+ib_0, v = a_v+ib_v \in \mathbb{C}$, dann ist $z = z_0+t\cdot v$ eine Gerade in $\mathbb{C}$:

$$z = z_0+t\cdot v = a_0+ib_0+t\cdot(a_v+ib_v) = a_0+ta_v+i\cdot(b_0+tb_v)$$

Es gilt also $f_1(t) = a_0+ta_v$ und $f_2(t) = b_0+tb_v$.

b_1) Geben Sie eine explizite und eine rekursive Darstellung des Wählervotums an.

c_r) Die Halbwertszeit ist die Zeit, nach welcher sich z.B. ein radioaktiver Stoff auf die ________ seiner Ausgangsmasse reduziert hat.

d_1) Wie groß ist die Halbwertszeit (HWZ) der Wähleranzahl (Rechnung verlangt)? Wann hat die Partei keine Wähler mehr? Ähnlichkeiten mit real existierenden Parteien sind zufällig.

e_1) (KA) Berechnen Sie die HWZ folgender Zerfälle: i) $B(t) = 6 \cdot 0.25^t$, ii) $B(t) = 16 \cdot 0.0625^t$, iii) $B(t) = 2016 \cdot 0.7071^t$, iv) $B(t) = 3016 \cdot 0.7071^t$, v) $B(t) = 100 \cdot 0.7071^t$, vi) $B(t) = 0.7071^t$;

f_1) Sei $c > 0$ und $B(t) = c \cdot (\frac{1}{2})^t$; berechnen Sie die Halbwertszeit t_H des Wachstums.

g_r) Die Halbwertszeit ist u______________ vom Startwert, weil das __ w_____________.

145. a_e) Ein Zerfallsvorgang verhält sich nach dem Gesetz $B(t) = c \cdot q^t$ $(c > 0)$. Welche Eigenschaft muss q haben, damit der Bestand wirklich weniger wird? Geben Sie eine Formel für die HWZ an.

b$_1$) Ein Jod-Isotop zerfällt pro Stunde zu 30%. Es sind 100mg des Isotops vorhanden. Wieviel mg haben wir nach $1, 2, x$ Stunden. Schätzen und berechnen Sie dessen HWZ.

c_1) Strontium zerfällt jährlich um 2,4%. Bestimmen Sie die Halbwertszeit.
d_1) Die Aktivität eines radioaktiven Stoffes ist nach zwei Tagen auf 26,4 % der ursprünglichen Masse abgesunken. Berechnen Sie die Halbwertszeit.
e_2) Ein Element zerfällt mit einer Halbwertszeit von 2 Tagen. Wie lautet dessen Zerfallsgesetz, wenn am Anfang 100 mg des Stoffes vorhanden waren?
f_2) Ein Zerfall hat eine Halbwertszeit von 2, 3, 4, t_h Tagen. Wie lautet dessen Zerfallskonstante?
g_2) Das Element Radon zerfällt mit einer Halbwertszeit von 3,8 Tagen. Bestimmen Sie mit $m_0 = 50$ mg die Funktionsgleichung, die den Zerfall beschreibt. Nach welcher Zeit sind noch 10% der Anfangsmenge vorhanden?
h_2) Geben Sie die Funktionsgleichung an, die den Zerfall beschreibt. i) HWZ 1 Tag, $m_0 = 10mg$; ii) HWZ 6,75 Tage, $m_0 = 20mg$; iii) allgemeine HWZ t_h mit beliebigem m_0; ← (KA)
i_2) Yttrium^{90} hat eine Halbwertszeit von 64 Std. Zum Zeitpunkt $t = 128$ Std nach Beobachtungsbeginn ($t = 0$, in Std) stellen wir $6\mu g$ Yttrium fest. Wann waren $\sqrt[4]{165888}\mu g$ vorhanden?

j) **Minimalanforderung UE 9_4:** Es sind $10\mu g$ des radioaktiven Elementes Tc vorhanden. Nach 4 Tagen sind nur noch $6.3\mu g$ vorhanden. Ber. Sie das Zerfallsgesetz (ZG) und die HWZ von Tc. Wieviel % nimmt der Bestand täglich ab. Wie lautet das ZG eines Stoffes mit einer HWZ von 6 Tagen?

146. (U) **Die ^{14}C Methode:**$_e$ Die ^{14}C Methode ist ein Verfahren zur Bestimmung des Alters von organischen Materialien. In abgestorbenen Organismen nimmt der ^{14}C Gehalt exponentiell ab.
a$_2$) Von einem Knochen ist bekannt, dass er etwa 45840 Jahre alt ist. Seine ^{14}C Konzentration wird auf $\frac{1}{256}$ der heutigen ^{14}C Konzentration gemessen. Berechnen Sie die Halbwertszeit von ^{14}C .
b_2) In einem Gramm Kohlenstoff (C) aus frischem Holz werden 16 Zerfälle pro Min gemessen. Nimmt man nun 1g C eines Fossils so messen wir nur 5 Zerfälle/Minute. Wie alt ist das Holz?
c_2) Wie alt ist ein Fossil, bei welchem sich die Anzahl der Zerfälle von 20 auf 15 reduziert hat?

4.2 Wachstum (UE 10_7, gethemenfriedhoft)

Sd10: Seite 18-20

Basisformeln: F 4, F 11, F 16, F 19, F 23, F 24, Ag 137, Ag 143.

4.2.1 Die geometrische Summe (auch Kl. 11) (GFS)

→ 14.7.2

147. (Ü) **Das Summenzeichen:**$_e$ Um Summen abkürzend aufschreiben zu können definieren wir ein neues Zeichen: $a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8 = \sum_{i=} a_i$. Die Variable i heißt Summationsi_______; die Schrittweite ist immer __. Stellen Sie die Summen mit Summenzeichen dar:

a$_{1-2,T}$) i) 4+5+6+7, ii) 4+6+8+10, iii) 4+7+10+13, iv) 4+8+12+16, v) 4+9+14+19 vi) 4+3+2+1 vii) 4+2+0−2, viii) 4+1−2 − 5, ix) 4+0−4 − 8, x) 4−1 − 6 − 11.

b$_{2-3,T}$) i) 1+4+9+16, ii) 3+6+11+18, iii) 2+8+18+32, iv) $\frac{1}{2} + 2 + 4.5 + 8$, v) 4+16+36+64.

c$_{2-3,T}$) i) $4 + 5 + .. + n$, ii) $4 + 5 + .. + 2n$, iii) $4 + 6 + .. + 2n$, iv) $4 + 7 + .. + 3n + 1$, v) $4 + 9 + .. + 5n - 1$, vi) $4 + 3 + .. - n$, vii) $4 + 2 + .. - 2n$, viii) $4 + 2 + .. - 2n$,

$\mathbf{d}_1$) Schreiben Sie als Summe $\sum_{i=3}^{8} \frac{1}{i}$; $\sum_{i=2}^{6} (i-1)^{2i+1}$; $\sum_{i=0}^{4} \frac{x^i}{i!}$; $\sum_{i=0}^{3} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$;
e_2) Welche Gesetze stellen folgende Formeln dar? $\mathbf{f}_3$) Erklären Sie Formel (3) für $n = 2$ und $m = 3$.

(1)	$\sum_{i=1}^{n} (a \cdot a_i)$	$=$	$a \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$	__________gesetz
(2)	$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$	$=$	$(\sum_{i=1}^{n} a_i) + (\sum_{i=1}^{n} b_i)$	__________ und __________gesetz
(3)	$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \cdot b_j$	$=$	$(\sum_{i=1}^{n} a_i) \cdot (\sum_{j=1}^{m} b_j)$	Distributiv-, Assoziativ- und Kommutativgesetz

g'$_2$) Erläutern und verallgemeinern Sie: $(\sum_{i=1}^{5} a_i) + (\sum_{i=6}^{n} a_i) = \sum_{i=}\ a_i$ und $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}$.

148. (U) $_e$) Ber. Sie $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$. Verallgemeinern Sie!

149. (U) a) **Die 3. binomische Formel:**$_e$ Berechnen Sie $(a-b) \cdot (a+b)$, $(a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$ und $(a-b) \cdot (a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3)$ und verallgemeinern Sie Ihr Ergebnis auf $n+1$ Summanden. Faktorisieren Sie $b^7 - a^7$.

b) **Die geometrische Summe:**$_e$ Setzen Sie für $a = 1$ und für $b = q$ ein und dividieren Sie für __________ durch $(1-q)$. Wir erhatlten:$1 + q +$ _______________ $= \frac{1}{1}$ **(Formel 101)** .

c$_2$) Berechnen Sie mit Hilfe der gefundenen Formel i) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$, **ii)** $1+2+4+8+16+32+64$, **iii)** $1+3+9+27+81$, **iv)** $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$, **v)** $1 - \frac{2}{7} + \frac{4}{49} - \frac{8}{343}$, **vi)** $1 - 0.4 + 0.16 - 0.064 + 0.0256$, **vii)** $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}$,

d) (Thx Trs) Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt perfekt, wenn $\sigma(n) :=$ die Summe ihrer Teiler $\neq n$ gleich n ist.
i_1) Zeigen Sie, dass $6 = 2^1 \cdot (2^2 - 1)$ und $28 = 2\_ \cdot (2\_ - 1)$ perfekte Zahlen sind.
Ist die nächste Zahl dieser Folge $120 = 2\_ \cdot (2\_ - 1)$ perfekt?
ii_2) Sind $496 = 2\_ \cdot (2\_ - 1)$, $2016 = 2\_ \cdot (2\_ - 1)$, $8128 = 2\_ \cdot (2\_ - 1)$ perfekt?
iii_3) Führen Sie die folgende Rechnung für $\sigma(28)$ und $\sigma(8128)$ durch:

$$\begin{aligned} \sigma(496) &= 1+2+4+8+16 && + \ 1 \cdot 31 + 2 \cdot 31 + 4 \cdot 31 + 8 \cdot 31 \\ &= (2^5 - 1) && + \ (1+2+4+8) \cdot 31 \\ &= (2^5 - 1) && + \ (2^4 - 1) \cdot (2^5 - 1) = 2^4 \cdot (2^5 - 1) = 496; \end{aligned}$$

iv_4) Zeigen Sie, $z = 2^n \cdot (2^{n+1} - 1)$ ist perfekt, wenn $2^{n+1} - 1$ eine P_____zahl ist. Beachten Sie dabei, dass $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n =$_____ ist. Welches der '=' aus iii) gilt nur für P_____zahlen?

150. (U) **Die geometrische Reihe:**$_e$ a$_e$) Betrachten Sie die Folge q^n für $n \to \infty$. Wählen Sie dazu zuerst $q = \frac{1}{2}$, $q = 1$, $q = 2$; welche Grenzwerte erhalten Sie? Finden Sie alle q, für welche $q^n \to 0$ geht.

b$_3$) Lassen Sie n gegen unendlich gehen. Für welche q hat die Summe (mit ∞ vielen Gliedern) einen endlichen Wert (vergl. Ag 150)? Wie lautet dieser Wert?

Berechnen Sie c$_1$) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$, d$_1$) $\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + \ldots$, e$_1$) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots$.
$f_{1,3}$) Ein Jäger läuft mit konstanter Geschw. zu seinem 3 km entfernten Haus. Sein Hund rennt dem Jäger mit der doppelten Geschw. voraus. Am Haus angekommen dreht der Hund um und rennt zum Jäger zurück, dreht wieder um und rennt wieder nach Hause. Dieses Spiel geht solange bis der Hund und der Jäger gleichzeitig zu Hause ankommen. Wie weit ist der Hund gelaufen?
g_3) (Thx Trs) Erklären Sie, welche Formeln in der Abbildung 60/20 a,b gezeigt werden.
h$_4$) (GFS)(Thx Man Heg; siehe Ag 203/516 + 328/824): Sei $0 < a < 1$; **i)** Wie breit ist das Quadrat Q aus Abb 60/20c. **ii)** Warum gibt es 4 Rechtecke mit Fläche a^3? Erklären Sie, die Flächen aller Rechtecke und warum man bei den Spalten und Zeilen bei null zu zählen beginnt.
iii) Berechnen Sie die Fläche von Q auf zwei Arten und leiten Sie eine Summenformel her.
iv) Beweisen Sie mit dieser Formel den Erwartungswert der geometrischen Verteilung.

i$_5$) (Vor 104/269) Berechnen Sie $\lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2 + 2n}$.

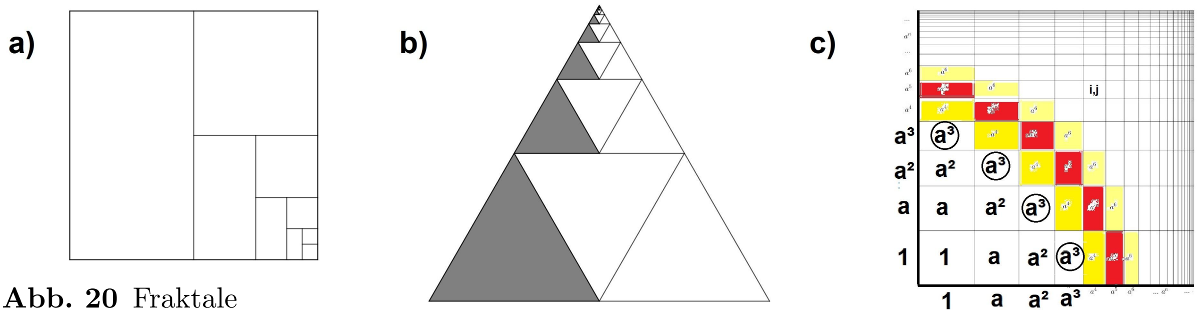


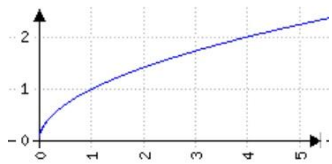
Abb. 20 Fraktale

151. (Ü) **Das Kuchenbeispiel:**$_e$ $_z$) K. N. hat ____ viele Kinder und einen Kuchen.

a$_1$) Wieviel bekommt jedes Kind?

b$_2$) Jetzt soll der Kuchen anders aufgeteilt werden: Nr.1 bekommt die Hälfte, Nr. 2 ein Viertel Nr. 3 ein Achtel usw. Wieviel bekommt Kind Nr. n?

c$_3$) Zeigen Sie, dass so der ganze Kuchen verteilt wird.



d$_e$) Vergl. Sie das, was jedes Kind bekommt mit dem, was ein Kind durchschnittlich bekommt.

4.2.2 Der Banachsche Fixpunktsatz (BFS)

→ 4.10.6 (GFS)

152. a$_r$) Ein **Fixpunkt** ist ein x- Wert x_0, der sich nach E_________ in eine Funktion f nicht ändert: es gilt also __________. Berechnen Sie die Fixpunkte von b$_1$) $f(x) = x^2$; c$_1$) $f(x) = x^3$; d$_1$) $f(x) = 3x - 4$; e$_1$) $f(x) = x^2 - 2$; f$_2$) $f(x) = \sqrt{x}$; g$_1$) $f(x) \equiv 7$; h$_4$) $f(x) = \sin(x)$;

153. a$_e$) Nehmen Sie Ihren W(G)TR und tippen Sie „9“ „Enter“ (oder '=') (Startwert). Jetzt tippen Sie „$\sqrt{\text{Ans}}$“ und oft „Enter“ (oder '='). Eine Folge entsteht. Gegen welchen Wert geht diese?

b$_e$) Betrachten Sie die Folge abhängig vom Startwert - in Aufgabe a) war dies 9. Hat die Folge immer den gleichen Grenzwert? Teilen Sie $\mathbb{R}$ in drei Teile auf.

c$_2$) Wie lautet das Bildungsgesetz $x_{n+1} = f(x_n)$ dieser rekursiven Folge?

d$_e$) Die L___________ der Gleichung __ = $\sqrt{}$ entspricht genau allen möglichen G_______________ der (rekursiven) Folge x_{n+1} =__________ (abhängig vom S___________________).

e$_r$) Verallgemeinert: Wir finden alle möglichen Grenzwerte der rekursiven Folge mit dem Bildungsgesetz $x_{n+1} = f(x_n)$, indem wir die Gleichung ___________ nach g _______________.

f$_5$) Wenn für die Funktion f gilt $|f(a) - f(b)| \leq q \cdot |a - b|$ für alle a, b (das ist so etwas ähnliches wie: $f'(x) < q$ - begründen Sie dies), also f eine Kontraktion ist, gilt sogar die Eindeutigkeit des Grenzwertes: Schätzen Sie die Differenz $x_2 - x_1$ durch $x_1 - x_0$ ($x_{n+1} - x_n$ durch $x_1 - x_0$) ab. Schätzen Sie dann $x_{n+k} - x_n$ durch $x_{n+1} - x_n$ ab. Was gilt für $k \to \infty$? Zeigen Sie, dass $x_{n+k} - x_n$ (für n gegen ∞) gegen 0 geht (unabhängig von k); x_n heißt dann Cauchyfolge. Die Existenz und Eindeutigkeit des Grenzwertes folgt aus den Sätzen über Cauchy-Folgen → 4.9.1.

154. Berechnen Sie mögliche Grenzwerte mit $x_0 = 0$ und a$_1$) $x_{n+1} = 0.5x_n + 1$, b$_1$) $x_{n+1} = 0.2x_n + 4$.
c$_2$) Wenden Sie jetzt den BFS auf das exponentielle Wachstum an und interpretieren Sie.
d$_3$) Berechnen Sie mit Hilfe des BFS die Grenzwerte für das Heronverfahren (Ag. 29/43)

(Ü) Ber. Sie mögliche Grenzwerte der folgenden rekursiven Folgen abhängig vom Startwert a_1.
e$_1$) $a_{n+1} = 0.6 \cdot a_n + 2$, f$_1$) $a_{n+1} = \frac{a_n^2+2}{3}$, g$_2$) $a_{n+1} = \frac{a_n^3}{4}$, h$_2$) $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$, i$_2$) $a_{n+1} = 0.4 \cdot a_n^2$,

4.2.3 Rekursive Darstellungen einfacher Wachstumsarten

→ 4.10 EM6: S.92-97

155. (U) Gegeben sind folgende Wertetabellen von Beständen $B(t)$. a$_1$) Wie geht der Bestand des nächsten Zeitpunktes $B(t+1)$ aus dem jetzigen Bestand $B(t)$ hervor?

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$B_1(t)$	0	3	6	9	12	15	18	21	24

$B_2(t)$	2	4	6	8	10	12	14	16	18
$B_3(t)$	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561
$B_4(t)$	3	6	12	24	48	96	192	384	768
$B_5(t)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{31}{32}$	$\frac{63}{64}$	$\frac{127}{128}$	$\frac{255}{256}$

b$_r$) Seien $k, q \in \mathbb{R}$, $B(0) = c$; eine Folge der Form $B(t+1) =$__________ (rekursiv) bzw. $B(t) =$__________ heißt **lineares Wachstum**; eine Folge der Form $B(t+1) =$__________ (rekursiv) bzw. $B(t) =$__________ heißt **exponentielles Wachstum**.
c$_1$) Welche der obigen Folgen sind lineare bzw. exponetielle Wachstümer?

4.2.4 Beschraenktes Wachstum

→ 4.11.5 (GFS)EM6: S.98-103

156. (U) **Das Stiftungsbeispiel:**$_e$ a) Eine Stiftung bekommt am Ende jeden Jahres 100 000 € an Spenden. Laut Satzung muss sie danach am siebten Januar 10% ihres Kapitals an Bedürftige auszahlen. Am 2.01. hat die Stiftung 2 000 000 €. Stellen Sie das Kapital zu Jahresanfang (= Bestand) der nächsten 5 Jahre in Form einer Wertetabelle dar. Geht die Stiftung pleite? Beantworten Sie die Fragen für ein Startkapital von 500 000 € und von 1 000 000 €.
b$_2$) Zeigen Sie die Richtigkeit Ihres Grenzwertes mit Hilfe des B_______________.

t	0	1	2	3	4	5
$B(t)$	2000000					
$B(t)$	500000					
$B(t)$	1000000					

157. (U) **Beschränktes Wachstum:**$_{e\ f}$ Sei $B(t+1) = q \cdot B(t) + c$ und sei $B(0) = b$.
a) Berechnen Sie $B(1)$ - welchen Wert müssen Sie dabei für t einsetzen?
b) Berechnen Sie analog $B(2)$ und $B(3)$. Geben Sie $B(4)$, $B(5)$ und $B(n)$ ohne weitere Rechnung an. Wie lautet die explizite Form für $B(t)$?
c) Für welche q hat $B(t)$ einen Grenzwert? Geben Sie diesen an. Betrachten Sie dazu auch die _______________ aus Ag 150. d) Verifizieren Sie den Grenzwert mit Hilfe des BFS.
e) Eine (rekursive) Folge mit dem Bildungsgesetz $B(t+1) = q \cdot B(t) + c$ heißt **beschränktes Wachstum** falls __________ ist. Ihr Grenzwert (Schranke) ist $S = g =$________.
f) Beim beschränkten Wachstum überlagern sich ein ____________________ und ein ____________________ Wachstum.

158. a$_1$) Ein beschränktes Wachstum entwickle sich nach dem Bildungsgesetz $B(t+1) = 0.3 \cdot B(t) + 70$, $B(0) = 10$. Berechnen Sie $B(2)$ und die Schranke S.
b$_2$) Bei einem Bienenvolk grassiert eine Seuche. Pro Woche sterben 20 % der Bienen. Das Volk zählt heute 1000 Individuen. Geben Sie das Bildungsgesetz (rekursiv + explizit) an. Warum kann dieses Szenario als beschränktes und als exponentielles Wachstum interpretiert werden?

159. (U) **Ratensparen:**$_{e,Z}$ Die Bank ⟦von Miss Biggi 'Scheine im Geldraum'⟧ bietet einen Ratensparvertrag an bei dem zu Anfang jeden Jahres 1000 € eingezahlt werden müssen. Zu Jahresende werden 5% Zinsen auf das Gesamtkapital gutgeschrieben. Wie hoch ist das Kapital zu Anfang des $n+1$-ten Jahres? a) Stellen Sie den Sachverhalt als rekursive Folge dar.
b) Beantworten Sie Teil a) mit einer jährlichen Rate von a Euro und mit p% Zinsen.
c) Was hat diese Folge mit beschränktem Wt. zu tun? Geben Sie eine explizite Form $B(t)$ an.

160. (U) Gegeben sei ein beschränktes Wachstum mit $B(0) = 0$ und $B(t+1) = 0.9 \cdot B(t) + 100$.
a$_2$) Berechnen Sie den Grenzwert von $B(t)$.
b$_e$) Vergleichen Sie das Bildungsgesetz mit $B(t+1) = B(t) + 0.1(1000 - B(t))$.
c$_e$) Eine weitere Darstellungsform des beschränkten Wachstums ist
$B(t+1) =$ ____ $+ k \cdot ($____ $-$ ____$)$ Welchen Vorteil hat die neue Darstellungsform?

d_2) Wandeln Sie (i) $B(t+1) = 0.1 \cdot B(t) + 90$, (ii) $B(t+1) = 0.4 \cdot B(t) + 300$ und (iii) $B(t+1) = 0.98 \cdot B(t) + 200$ in die neue Darstellungsform um.

161. Berechnen Sie eine rekursive (und eine explizite) Form der nachfolgenden beschränkten Wachstümer der Form $B(t+1) = q \cdot B(t) + c$ [bzw. $B(t+1) = B(t) + k \cdot (S - B(t))$]
   a_2) $B(0) = 2000$, $B(1) = 2600$, $B(2) = 3080$; b_2) $B(0) = 2000$, $B(1) = 1500$ und $S = 1000$;
   c_4) $B(0) = 200$, $B(2) = 352$ und $S = 1000$; d_2) $B(0) = 1000$, $B(1) = 370$ und $k = 0.3$.

4.2.5 Aenderungsraten

EM6: S.104-105

162. ⓐ$_e$) Hans sagt, dass er 10 € pro Woche Taschengeld bekommt. Jan strahlt: „Dann bekomme ich mehr, nämlich 20 € monatlich“. Nehmen Sie zu diesen Aussagen Stellung.
   ⓑ$_1$) Geben Sie die Bildungsgesetze für das Wachstum von Hans Geldbestand und das Wachstum von Jans Bestand an. ⓒ$_1$) Gleichen Sie die Schrittweiten an.
   ⓓ$_1$) Geben Sie die **Änderungsrate** von Hans Kapital zum Zeitschritt 1 an.

163. a_e) Berechnen Sie die Änderungsraten aller drei Wachstumsarten zum Zeitschritt 1. Notieren Sie dabei zuerst das r___________ Bildungsgesetz.

   b_e) Versuchen Sie die Wachstumsarten über deren Änderungsrate (in Worten mit Proportionalitätsfaktor) zu definieren.

   Regel: Beim linearen Wachstum ist die Änderungsrate =_____ also k_______________.

   Beim exponentiellen Wachstum ist die Änderungsrate =_____ also p_______________ zum B_______________.

   Beim beschränkten Wachstum ist die Änderungsrate =_______ also p_______________ zum S_______________.

   c_3) Wie sieht die Änderungsrate beim linearen und exponentiellen Wt zum Zeitschritt 2 bzw. n aus?

Cartoon 15

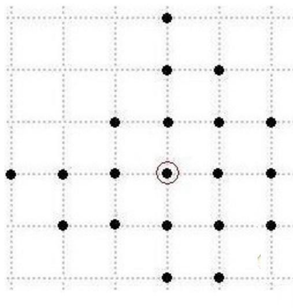


Abb. 21

Epidemie

4.2.6 Logistisches Wt. (GFS)

S.106-109

164. (U) ⓐ$_e$) Gegeben sei eine Population von 20 Personen (siehe Punkte Abb 21). Eine (eingekreiste) Person schleppt eine Krankheit ein. Es wird pro Zeitschritt pro infizierter Person immer eine benachbarte Person angesteckt. Zeigen Sie einen möglichen Verlauf der Epidemie auf (incl Wertetabelle).

Zeitschritt	1	2	3	4	5	6	7	8
Infizierte								

   ⓑ$_e$) Welche zwei Wachstumsformen überlagern sich hier? Skizzieren Sie einen (möglichen) Graphen.
   ⓒ$_r$) Beim logistischen Wachstum ist die Änderungsrate p_______________ zum Produkt aus B_______________ und S___________________.
   Regel: Logistisches Wachstum: $B(t+1) - B(t) =$ __________________________.
   ⓓ$_3$) Finden Sie mit Hilfe des _______ die möglichen Grenzwerte des logistischen Wachstums.
   ⓔ$_4$) Wir betrachten ein logistisches Wachstum der Form $B(t+1) = B(t) + k \cdot B(t) \cdot (100 - B(t))$ startend bei $B(0) = 1$ mit i) $k = 0.005$, ii) $k = 0.025$, iii) $k = 0.05$. Wie entwickelt sich das Wachstum? iv_6) Wie muss k gewählt werden, damit die das Wachstum genau so entwickelt?

h$_1$) $h(x) =$ i) $(x-2)^2+5$, $\boxed{\text{ii}}$) $(x+3)^2-2$, iii) $2(x-3)^2+6$, iv) $-(x+2)^2-4$;
i$_r$) Eine Parabel mit dem Funktionsterm $f(x) = a(x-d)^2+e$ hat den Scheitel $S(\quad|\quad)$.
Deshalb heißt diese Form auch S__________form der Parabel. **(Formel 16)** .
j$_{2,T}$) $f(x) =$ i) $(x-1)(x-3)$, ii) $(x+1)(x+3)$, iii) $(x-2)(x-6)$, iv) $(x+2)(x+6)$,
v) $x(x-4)$, vi) $(x+1)(x-3)$, vii) $(x+4)(x+8)$, viii) $(x-2)(x+2)$, ix) $(x-3)(x-7)$;

k$_2$) Geben Sie die Funktionsterme aller Normalparabeln an, die ihren Scheitel in $S(1|2)$ haben.
L$_2$) Geben Sie bei allen Funktionsterme aus Ag 89/216e die Scheitelform an.

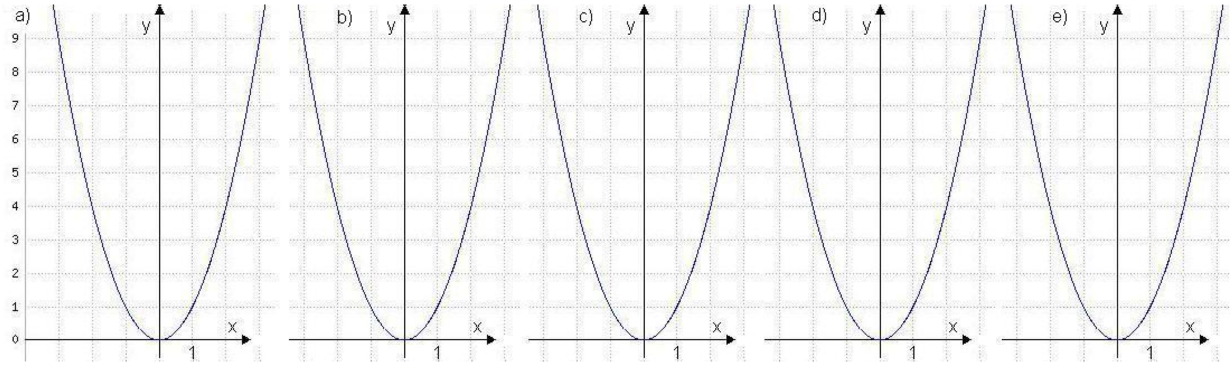


Abb. 34 Zeichnerisches Lösen quadratischer Gleichungen (Aufgabe 90/217)

217. (KA$_L$) Bestimmen Sie zeichnerisch die Schnittpunkte der Geraden $g(x)$ mit dem Graphen von $f(x) = x^2$ (Parabel siehe Abb. 34) a$_1$) $g(x) = x+2$, b'$_1$) $g(x) = -x+2$, c'$_1$) $g(x) = x+6$, $\boxed{\text{d}_1}$) $g(x) = -x+6$, e'$_1$) $g(x) = 2x+3$, f$_1$) $g(x) = -2x+3$, g'$_1$) $g(x) = x$, h'$_1$) $g(x) = -x$.

5.1.3 Extremwertaufgaben und funktionaler Zusammenhang (GFS) LS8: S.103-105

218. (KA$_L$) a$_1$) Der Querschnitt eines Autotunnels wird von der Parabel mit dem Funktionsterm $f(x) = -0.5x^2+4x+1$ (Tunnelbogen) und der x-Achse begrenzt ($x, f(x)$ in m). Berechnen Sie die größte Höhe des Tunnelbogens über der Fahrbahn.
b$_{1;Z}$) Die Leistung p in kW einer Turbine ⟦in Podsdam⟧ ist von der Drehzahl x in $\frac{U}{min}$ abhängig. Dabei gilt $p(x) = 400x - 0.8x^2$. Für welche Drehzahl ist die Leistung der Turbine am höchsten? Wie hoch ist diese dann? Geben Sie einen sinnvollen Definitionsbereich für die Drehzahl an.
c$_1$) Der Kraftstoffverbrauch $k(v)$ eines PKW hängt von seiner Geschwindigkeit v ab durch $k(v) = 0.002v^2 - 0.36v + 22.2$. v in $\frac{km}{h}$, $k(v)$ in $\frac{l}{100km}$. Wie hoch ist sein Minimal-Verbrauch?
d$_2$) Für welche ganze Zahl ist das Produkt aus Vorgänger und Nachfolger am kleinsten?
e$_2$) Die Zahl 10 (später 20, 30, 40) soll so in zwei Summanden zerlegt werden, dass deren Produkt maximal wird. $\boxed{\text{f}_2}$) Mit einem Zaun der Länge $60m$ soll ein möglichst großes Stück Land rechteckig eingezäunt werden. Wie lang sind die Seiten des Rechtecks?
g$_{3,Z}$) Walter ⟦Ulbricht⟧ will an seiner langen Mauer ⟦vor dem 9. November⟧ einen rechteckigen Bereich mit Draht abgrenzen. $20m$ Draht stehen zur Verfügung. Wie groß müssen die Rechteckseiten gewählt werden, damit eine möglichst große Fläche eingezäunt wird?
h$_2$) Ein durchhängendes Seil, das an seinen Enden P, Q auf gleicher Höhe befestigt ist, kann durch den Graphen der Funktion i) $f(x) = \frac{x^2}{4} + 7$ [ii) $f(x) = \frac{x^2}{16} + x + 5$] ($x, f(x)$ in m) modelliert werden. Ber. Sie dessen Durchhang, wenn P und Q i) $2m$ [ii) $8m$] voneinander entfernt sind.

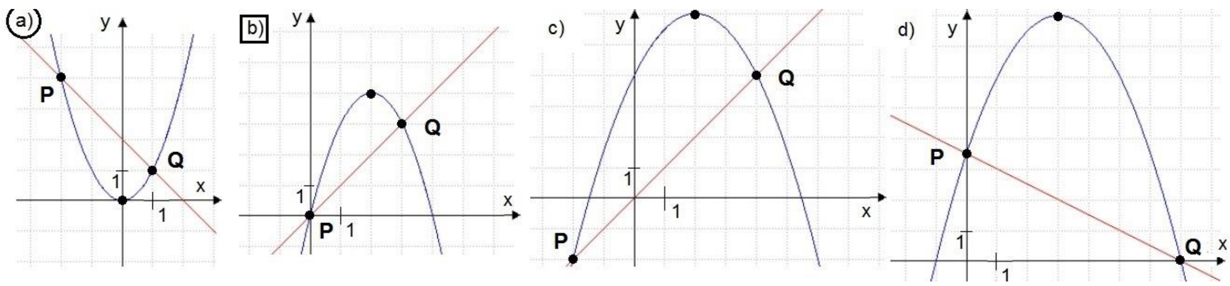


Abb. 35 Maximale Differenz der y-Werte

219. $_2$) Die Schaubilder in Abb 90/35 zeigen die Graphen einer Geraden $g(x)$ und einer Parabel $f(x)$. Lesen Sie die Funktionsterme und die Schnittpunkte $P(x_p; y_p)$ und $Q(x_q; y_q)$ aus den Schaubildern ab. Ber. Sie die maximale absolute Differenz $d(u)$ der Fktswerte für $x_p \leq u \leq x_q$.

220. **Einführung: Funktionaler Zusammenhang** (KA$_G$) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{-x}{2} + 3$ und die Punkte $A(0;0)$, $B(u;0)$, $C(u; f(u))$ und $D(0; f(u))$ im ersten Quadranten (Abb. 91/36).
a$_e$) Zeichnen Sie die Punkte A, B, C, D für $u = 1$ in das Achsenkreuz ein. Was bildet A, B, C, D und wo liegt der Punkt C? Berechnen Sie den Flächeninhalt $A(1)$ des Gebildes A, B, C, D.
b$_e$) Zeichnen Sie das Viereck A, B, C, D für $u = 2$ ($u = 3$ bzw. $u = 4$) und berechnen Sie wieder dessen Fläche $A(2)$ (bzw. $A(3), A(4)$). c$_e$) Berechnen Sie allgemein die Fläche $A(u)$.

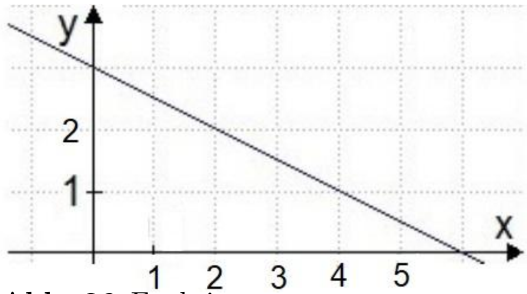
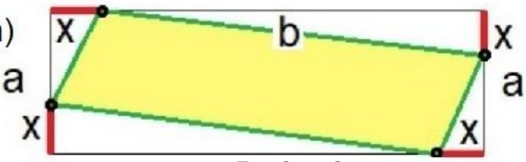


Abb. 36 Funktion

u	0	1	2	3	4	5	6
$A(u)$							

zu Teil h)



Rechteck

d$_e$) Für welches u wird $A(u)$ maximal? Wie groß ist die maximale Fläche?
e$_e$) Der **Definitionsbereich** sind alle Zahlen, die man (sinnvollerweise) für x __________ kann. Geben Sie den maximalen Definitionsbereich für u an.
f$_3$) Berechnen Sie die maximale Fläche, wenn Sie statt $f(x) = \frac{-x}{2} + 3$ eine der folgenden Funktionen nehmen. $\boxed{\text{i)}}$ $f(x) = 8 - 2x$, ii) $f(x) = 6 - 0.5x$, iii) $f(x) = 18 - 3x$, iv) $f(x) = b - ax$.
g$_e$) (Zusatz) Berechnen Sie den Umfang abhängig von u.

221. (Ü) Gegeben sei die Funktion $f(x)$ und die Punkte $A(0;0)$, $B(u;0)$, $C(u; f(u))$ und $D(0; f(u))$ $(u, f(u) \geq 0)$. Sei $f(x) = 4 - \frac{x^2}{2}$. Für welches u hat das Rechteck A, B, C, D maximalen Umfang?

222. a$_{4;Z}$) Im Garten von Abels Vater stehen 40 Apfelbäume. Jeder liefert einen Ertrag von 500 Äpfeln. Man schätzt, dass für jeden zusätzlichen gepflanzten Baum der Ertrag pro Baum um 10 Äpfel sinkt. Wie viele Bäume muss Abel zusätzlich pflanzen, um den Ertrag aller Bäume zu maximieren? Wie hoch ist der Maximalertrag?
b$_{4;Z}$) Der Eintritt in den Kino-Film 'Rambo demoliert die Schwarzenegger-Präsidenten-Bibliothek' beträgt 10 € und es werden 320 Zuschauer erwartet. Aus Erfahrung weiß man, dass bei einer Senkung des Eintrittspreises um 0.50 € die Zuschauerzahl um jeweils 20 Personen steigern wird. Wie muss der Eintrittspreis kalkuliert werden, damit möglichst hohe Einnahmen entstehen?
c$_4$) Von einer Kaffeesorte werden bei einem Preis von 20 € für $1kg$ im Monat $10000kg$ verkauft. Eine Marktforschung hat ergeben, dass eine Preissenkung von 0,02 € je kg jeweils zu einer Absatzsteigerung von $100kg$ im Monat führen würde. Bei welchem Verkaufspreis wäre der Gewinn maximal, wenn für $1kg$ Kaffee der Selbstkostenpreis 14 € beträgt?
d$_5$) Sei $a < b < 3a$. Bei einem Rechteck mit den Seitenlängen a und b wird wie in Abb. 91/36 auf jeder Seite die gleiche Länge x abgetragen. Es entsteht ein P______________. Für welches x (abh. von a und b) ist dessen Fläche extemal? Weisen Sie nach, dass für $a = 4$ und $b = 8$: $x = 3$ und die extremale Fläche 14 ist.

e$_4$) Hans hat ein Grundstück, das die Form eines (rechtwinkligen) Dreiecks mit $\gamma = 90°$ den Seiten (Katheten) a=6m und b=12m hat. Er möchte darauf ein Gartenhaus mit möglichst großer rechteckiger Grundfläche bauen. Wie groß soll Hans die Seiten wählen?
f$_5$) Einem gleichschenkligen Trapez ($a = 6cm$, $c = 2cm$, $h = 4cm$) soll das flächengrößte Rechteck eingeschrieben werden. Die eine Seite des Rechtecks soll in der Basis des Trapezes liegen.

g$_5$) Aus einer rechteckigen Scheibe mit den Seiten $a = 120cm$ und $b = 90cm$ ist an einer Ecke ein (rechtwinkliges) Dreieck so abgebrochen, dass a um $30cm$ und b um $20cm$ verkleinert wird.

Durch zwei Schnitte, die je parallel zu den bisherigen Seiten verlaufen, soll nun ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt hergestellt werden. Wie groß sind Länge und Breite des Rechtecks?

5.1.4 Quadratische Interpolation (LP) (GFS)

223. Es soll eine neue Autorennstrecke geplant werden. Die Strecke soll bis zum Punkt $P(-2;0)$ entlang einer Geraden ($y = -2x - 4$) verlaufen. Von P bis zum Punkt $Q(1;3)$ soll sich dann eine parabelförmige Kurve (Parabolika) der Form $y = x^2 + bx + c$ anschließen. Nach dem Punkt Q ist die Strecke entlang einer anderen Geraden ($y = 4x - 1$) geplant.

a$_e$) Berechnen Sie die Koeffizienten b und c der Parabel. Welche Technik verwenden Sie dabei?

b$_2$) Welche Problematik würde sich ergeben, wenn man die Strecke im Punkt Q mit der Geraden $y = x + 2$ weiterführen würde?
c$_4$) Beweisen Sie: Die beiden Anschlussgeraden sind T_______________ an die Parabel.
d$_4$) Was muss für die Koordinaten von $P(x_1; y_1)$ und $Q(x_2; y_2)$ gelten, damit man eine Parabel der Form $y = x^2 + bx + c$ durch diese Punkte finden kann?

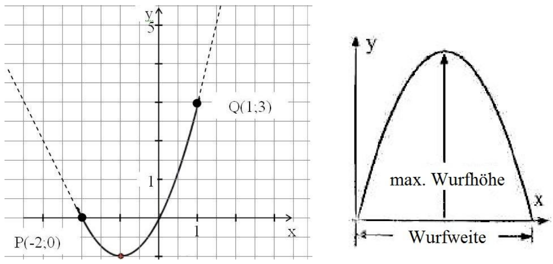


Abb. 37 Parabolika und Flugkurve

224. (KA$_L$) Eine Parabel der Form $f(x) = x^2 + px + q$ geht durch A und B. Bestimmen Sie p und q.

a$_1$) $A(0;2), B(1;6)$; b$_2$) $A(2;-3), B(4;1)$; c$_2$) $A(1;0), B(-1;-10)$; d$_2$) $A(-3;13), B(-1;3)$;

e$_2$) $P(-1;-1), Q(1;7)$; f$_2$) $P(2;3), Q(1;2)$; g$_2$) $P(-1;1), Q(2;-8)$; h$_2$) $P(1;-5), Q(2;-5)$;

225. Der Graph der Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ geht durch P, Q und R. Berechnen Sie a, b und c.

a$_3$) $P(0;-2)$, $Q(1;-3)$, $R(2;-2)$; b$_4$) $P(1;0)$, $Q(2;-1)$, $R(3;0)$; c$_{4-5}$) $P(-5;2)$, $Q(-2;-16)$, $R(1;2)$;

226. **Der schiefe Wurf:**$_e$ Die Flugkurve eines Balles lässt sich durch eine Parabel der Form $y = ax^2 + bx$ beschreiben (Abb. 37). Der Ball fliegt durch den Punkt $P(2;3)$ und ist bei $x = 4$ am höchsten. Wie hoch ist der Ball an seiner höchsten Stelle und wie weit ist er geflogen?

227. **Identitätssatz für quadratische Funktionen:**$_e$ (GFS)a) Zwei lineare Funktionen (Geraden) $f_1(x) = m_1 \cdot c_1$ und $f_2(x) = m_2 \cdot c_2$ sind identisch ($f_1 \equiv f_2$) $\Leftrightarrow$ $f_1(x) =$ _____ für _______ $x \in \mathbb{R}$. b) Zeigen Sie, das draus $m_1 =$ ___ und $c_1 =$ ___ folgt. c) Wann sind zwei quadratische Funktionen (Parabeln) $f_1(x) = a_1 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + c_1$ und $f_2(x) = a_2 \cdot x^2 + b_2 \cdot x + c_2$ identisch?

Bemerkung: Die Unterscheidung von Funktion (Wertetabelle oder Zuordnung), von Funktionsterm (hier x^2) und dem Schaubild K_f (bei $f(x) = x^2$ ist das eine Parabel) ist manchen Mathematikern ungeheuer wichtig - diesen ist auch Form wichtiger als Inhalt. Funktion, Term und Schaubild sind aber strukturgleich (isomorph) und damit nur eine Ausprägung des gleichen Sachverhaltes wie Superman und Clark Kent (wenn nicht kapiert, dann egal).

5.2 Die Umkehrfunktion (UE 9_6) LS$_9$: 54-64

Was macht man, wenn der y-Wert gegeben ist, aber der x-Wert gesucht ist?

5.2.1 Verkettung von Funktionen

228. Jan zahlt (am Anfang eines Jahres) zwei Raten von je x € und eine Rate von 500 € auf ein Sparbuch ein. Am Ende des Jahres bekommt er 2 % Zinsen.

a$_e$) Geben Sie die Fktn. $y = y(x)$ an, die sein Bankguthaben abhängig von der Rate x beschreibt.

Für 80% seines Bankguthabens _ möchte er sich ein neues Handy kaufen.

b$_e$) Geben Sie die Funktion $z = f(\_)$ an, die den Preis des Handys abhängig vom Bankguthaben _ beschreibt.

237. a$_e$) Wie lauten die Funktionsterme der Umkehrfunktionen von $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 3^x$ und $f_3(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$? b$_e$) Zeichnen Sie die Schaubilder von $\overline{f_1}(x) = f_1^{-1}(x)$, $\overline{f_2}(x) = f_2^{-1}(x)$ und $\overline{f_3}(x)$.

x	-1	0	0.25	$1/3$	0.5	1	2	3	4
$\overline{f_1}(x) = f_1^{-1}(x) =$ ____________									
$\overline{f_2}(x) = f_2^{-1}(x) =$ ____________									
$\overline{f_3}(x) = f_3^{-1}(x) =$ ____________									

c$_r$) Beim Bilden der Umkehrfunktion wird aus der waagrechten Asymptote $y = 0$ eine ________________ Asymptote ________ und umgekehrt.

d$_e$) Welche Gemeinsamkeiten haben alle Logarithmusfunktionen?

5.2.6 Was passiert, wenn man die Umkehrfunktion auf die Fkt anwendet? (GFS)

238. (U) a$_e$) Sei $f(x) = 2x - 2$. Berechnen Sie $f^{-1}(x) = \overline{f}(x)$.

b$_e$) Was passiert, wenn man $f^{-1}(x) = \overline{f}(x)$ auf $f(x)$ anwendet? Betrachten Sie dazu nebenstehende Wertetabelle

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2x - 2$						
$z = \overline{f}(y) = f^{-1}(y)$						

c$_2$) Wenn f umkehrbar ist, gilt $f^{-1}(f(x)) =$ __ und $f(f^{-1}(x)) =$ __ **(Formel 33)** .
d$_2$) Sei $f(x) = 10^x$, welche Formel ergibt sich für f und dessen Umkehrfunktion?
e$_4$) Sei $g(x) = x^2$, welche Formel ergibt sich hier und welches Problem tritt hier auf?
f$_2$) Verifizieren Sie Ihre gefundene Formel auch für $h_1(x) = -0.5x + 2$ und für $h_2(x) = 2x - 4$.
g$_e$) Wenden Sie die Formel $\overline{f_1}(f(x)) = f^{-1}(f(x)) =$ __ auf $f(x) = x^2$ an.

5.2.7 Potenzfunktionen (auch teilweise Kl. 8) (GFS)

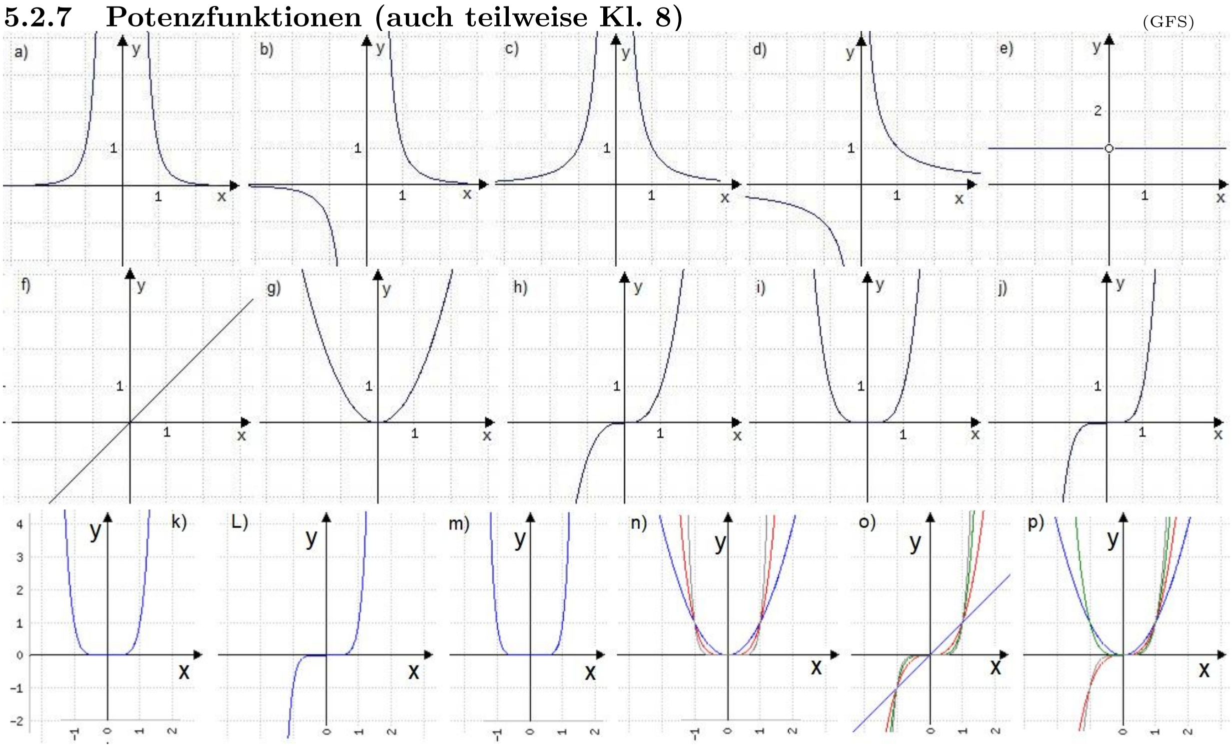


Abb. 39 Potenzfunktionen

239.)$_f$ Jeder Graph in Abbildung 39a-m gehört zu einer Funktion der Form $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$.
a$_e$) Finden Sie zu jeder Abbildung das zugehörige n.
b$_e$) Teilen Sie die Graphen in __ Gruppen ein.
c$_e$) Welche charakteristische Eigenschaften haben die __ großen Gruppen?
d$_e$) Welche Symmetrieachsen hat ein Parallelogramm? Bestimmen Sie die Symmetrien der K_{x^n}.
e$_4$) Die Logarithmusfunktion hat die ________rechte Asymptote ________, weil log(__) = __ ist.
f$_4$) Warum ist der Graph von Abbildung 39 e) pu______________ (siehe auch Ag 170/444)?

Potenz n	Verhalten für $x \to -\infty$ für $x \to \infty$	Gem. Punkte	Asymptoten	Symmetrie	Skizze

240. (GG_{10}) Sei $f(x) = x^n$; berechnen Sie n, wenn der Graph von f durch a$_1$) $P_a(3;9)$; **b**$_1$) $P_b(2;16)$; c$_2$) P_c(-2;-8); **d**$_2$) $P_d(-3;81)$, $\boxed{\text{e}_1}$) $P_e(4;128)$, f$_3$) P_f(-2; 64), **g**$_3$) P_h(-2;-512) **h**$_3$) $P_g(-3;243)$, geht.

241. (GG_{11}) (KA) Sei $f(x) = c \cdot x^n$; ber. Sie c und n, wenn der Graph von f durch P und Q geht:
(Ü) a$_1$) $P_a(1;2)$ und $Q_a(2;8)$; b$_1$) $P_b(1;0.5)$ und $Q_b(2;16)$; c$_2$) $P_c(2;1)$ und $Q_c(4;4)$;
$\boxed{\textbf{d}_2}$) $P_d(3;9)$ und $Q_d(6;72)$; e$_2$) $P_e(2;1)$ und $Q_e(4;16)$; f$_4$) $P_f(-1;-2)$ und $Q_f(2;16)$;
g$_4$) $P_g(-1;-2)$ und $Q_g(2;-8)$; h$_4$) $P_h(-2;4)$ und $Q_h(4;-32)$; i$_4$) $P_i(-3;-3)$ und $Q_i(6;-12)$;
j$_2$) $P_j(4;4)$ und $Q_j(9;6)$; ab hier ($\bar{f}$) k$_2$) $P_k(3;1.8)$ und $Q_k(5;5)$; l$_2$) $P_l(2;2)$ und $Q_l(4;1)$;
m$_3$) $P_m(2;2)$ und $Q_m(8;4)$; n$_2$) $P_n(3;1)$ und $Q_n(6;2)$; o$_2$) $P_o(2;2)$ und $Q_o(4;0.5)$;

p$_r$) Wegen der n____________ x-Werte (Teile f-i) können nicht alle entstehenden Gleichungen $a^x = b$ (vorerst) nicht mit Logarithmen gelöst werden. **Beispiel:** $(-2)^x = 16 \not\Leftrightarrow x = \frac{\log(16)}{\log(-2)}$ ↯.

Wenn $a < 0$ ist, dann darf $x = \frac{\log(\_\_\_)}{\log(\_\_\_)}$ als Lösung der Gleichung $a^x = b$ **ausprobiert** werden, dass heißt: Die P_________ ist obligatorisch!

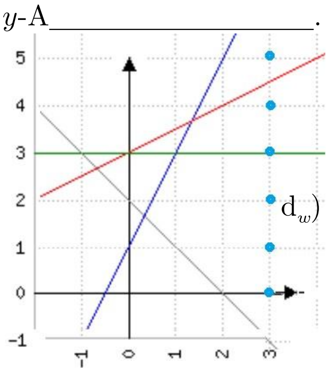
q$_3$) Bei seiner Geburt hatte Hans ein Gewicht von ca. 2941 Gramm und eine Körpergröße von 49 cm. Berechnen Sie das erwartete Gewicht von Jan (51 cm)?

5.3 Ganzrationale Funktionen (UE 10_1) Sd10: S.1-6

Basisformeln: F 9, F 10, F 11, F 14, F 15, F 16, F 19, F 31.

5.3.1 Einführung: Geraden (aus Kl. 7)

242. (Ü) a$_e$) Erstellen Sie je eine Wertetabelle von $y = 2x-1$, $y = 0.5x+1$, $y = -x+2$, $y = 0x+3$ und zeichnen Sie die Punktemenge in ein Koordinatensystem. Eine nicht s__________ Gerade kann durch $y =$__________ dargestellt werden. m heißt S__________, c y-A__________________.



b$_w$) Erstellen Sie eine Wertetabelle von $y = \frac{1}{3} \cdot x + 1$ und $y = -\frac{2}{3} \cdot x + 2$. Was fällt auf? Zeichnen Sie ein intelligentes Steigungsdreieck. Beim Steigungsdreieck von $y = \frac{z}{n} \cdot x + c$ gehe um _ nach r_____ und um _ nach o_____.

c$_w$) Vervollständigen Sie die Wertetabelle und berechnen Sie die Steigung der Geraden.

x	0	2	4	6	8	10
	1	5	9			

Seien $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ zwei Punkte mit $x_1 \neq$ __, dann berechnen wir die Steigung (e: *slope, gradient*) m der Verbindungsgeraden durch $m =$ ____________ (ZPF).

e$_w$) Eine Gerade mit Steigung m durch $P_1(x_1; y_1)$, ist von der Form $y =$ ____________ (PSF).

f$_1$) Berechnen Sie die Verbindungsgeraden aller Punktepaare:
i) $A(0;4)$, $B(3;5)$, $C(5;3)$, $D(1;5)$; ii) $A(-1;3)$, $B(2;6)$, $C(-1;-3)$, $D(3;-2)$.

g$_w$) Stellen Sie für die folgenden Szenarien lineare Funktionen der Form ________ auf.
i) Der Strompreis setzt sich aus einer Grundgebühr und dem Verbrauchsentgeld. Die im Mai verbrauchten 500 $\frac{kw}{h}$ kosteten 220 €, die im Juni verbrauchten 450 $\frac{kw}{h}$ kosteten 210 €.
ii) Bei einer Autofahrt (mit k___________ Geschwindigkeit) hat Jan nach 2 Stunden einen km Stand von 385 000 km, 2.5 Std später ist dieser 385 250 km.
Zusatzfrage: Wie schnell ist er und bei welchem km Stand ist er losgefahren?

iii) Hans fährt mit seinem Auto vollgetankt los. 1.5 Std später ist der Tankinhalt 60 Liter; 2 Std später sind es 48 Liter. **Zusatzfrage:** Wie groß ist der Tank und wann ist der Tank leer?

243. (U) Aus Klasse 7: $\mathbf{a}_1$) Tine und Alex wohnen 60 km voneinander entfernt. Beide fahren gleichzeitig mit ihren Fahrrädern los, um sich zu treffen (aufeinander zu). Dabei fährt Tine mit einer konstanten Geschwindigkeit von 12 $\frac{km}{h}$, Alex von 18 $\frac{km}{h}$. Nach welcher Zeit treffen sie sich? Wie weit sind sie dann von Tines Wohnort entfernt? **Tipp:** Wählen Sie einen Bezugspunkt (z.B. Tines Wohnung). Definieren Sie eine Funktion $f_1 : x$ (_____) $\to y$ (Abstand von ___________________)?

$\mathbf{b}_r$) Die Steigung der Geraden entspricht der (o________________) G______________________.
(KA$_l$) c$_1$) Jetzt fährt Alex 1.25 Stunden nach Tine los. Wann und wo treffen sie sich?
$\boxed{\mathbf{d}_{1,Z}}$) Joliet und Elwood wohnen 71 km voneinander entfernt. Elwood fährt um 11.45 Uhr mit seinem Mofa (konstante Geschwindigkeit 18 km/h) in Richtung Joliets Wohnort los. Joliet fährt ihm um 12.00 Uhr entgegen und zwar mit einer konstanten Geschw. von 20 km/h. Zu welcher Uhrzeit Zeit treffen sie sich? Wie weit sind sie dann von Joliets Wohnort entfernt?
$\mathbf{e}_1$) Ein Eilzug startet in Stuttgart um 12.00 Uhr und fährt in Richtung München mit einer konstanten Geschwindigkeit von 80 $\frac{km}{h}$. Dort kommt er planmäßig um 15.00 Uhr an. Der Intercity Pythagoras fährt in München um 12.30 Uhr ab und fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von 120 $\frac{km}{h}$ dem Eilzug entgegen. Wo und wann begegnen sich die Züge?
$\mathbf{f}_3$) Hans und Jan laufen die 720m lange Stadionrunde in entgegengesetzter Richtung. Hans braucht für eine Runde 4 Min, Jan 5 min. Welche Stecke läuft Jan zwischen zwei aufeinanderfolgenden Begegnungen mit Hans? (aus Mathe - Känguru Klasse 7, 2017)

5.3.2 Geradenscharen

LS11: S. 87-89

244. a$_r$) Eine Funktion kann als W___________ $x \longmapsto f(x)$ (Analysis), S___________ (e: *graph*) K_f (Geometrie) oder als T___________ $y = f(x)$ (Algebra) dargestellt werden. Zum Schaubild gehören P______, zur Funktion S______ (x-Werte). WTR: Abs. 955/16.3.2

b$_1$) Der Steigungswinkel einer Geraden ist definiert als der Schnittwinkel der Geraden mit der ____________. Berechnen Sie den Steigungswinkel der Geraden i) $y = x$; ii) $y = x + c$;

iii) $y = \frac{1}{2}x + 3$; Der Steigungswinkel ist u_______________ vom __________________; (↓ F 55).

$\mathbf{c}_r$) $y = mx+c$ hat Steigungswinkel $\alpha =$___________ (verwenden Sie hier das _____________dreieck);

Ber. Sie den Steigungswinkel von $\mathbf{d}_1$) $y = \sqrt{3} \cdot x$; $\mathbf{e}_1$) $y = -x$; $\boxed{\mathbf{f}_1}$) $y = \frac{-1}{\sqrt{3}} \cdot x$; $\mathbf{g}_2$) $x = 3$;

245. (U) $\mathbf{a}_{1,Z}$) Der ⟦weiße⟧ Leuchtturm ⟦von Markt Lorenz⟧ steht im Pkt $(0; 2)$ und sendet zwei Lichtstrahlen in entgegengesetzter Richtung aus (siehe Abb. 40). Auf welcher Geraden liegen die zwei Lichtstrahlen? Geraden dieser Art nennen wir Strahlgeraden. Bei Nebel sorgt Jayson dafür, dass sich der Leuchtturm dreht. Beschreiben Sie alle Geraden, die eine Strahlgerade darstellen können.
b$_2$) Jetzt stehe der Leuchtturm im Punkt (1; 2) [später (3;4)]. Weisen Sie nach, dass die Gerade $y = x + 1$ eine der Strahlgeraden ist. Wie lautet die allgemeine Form aller Strahlgeraden durch $(1; 2)$ [(3;4)]der Form $y = m \cdot x + c$? Drücken Sie dazu c abhängig von _ aus.

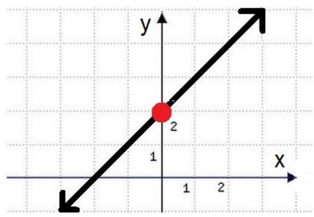


Abb. 40 Leuchtturm

246. (U) $\mathbf{a}_e$) Die Geraden $y = x - 1$ und $y = -2x + 5$ gehören zu einer Geradenschar, deren Geraden alle durch einen gemeinsamen Punkt gehen. Wie heißt der Punkt? Geben Sie eine Darstellung für die Geradenschar an.

b) (GG_{01}) Berechnen Sie den gemeinsamen Punkt der Geradenscharen i$_1$) $y = m(x - 3) + 2$;

ii$_1$) $y = m(x + 7) - 2$; $\mathbf{iii}_2$) $y = mx + 2m - 1$; $\boxed{\mathbf{iv}_2}$) $y = mx - 4m + 3$; v$_3$) $y = mx - 4m^2 + 3$;

$\mathbf{c}_a$) Auffinden gemeinsamer Punkte:
Gegeben sei eine Funktionenschar $f_m(x)$. m heißt Scharp__________________.
i) Setze für $m =$_ und für $m =$_ ein. Es sind auch andere Z___________________ für _ einsetzbar.

ii) Schneide $K_{f\_}(x)$ mit $K_{f\_}(x)$, dass heißt s_______ die resultierenden Terme aus i) g________.
iii) L_______ die Gleichung $f\_(x)$=_______ nach ___ a_______.
iv) Setze den erhaltenden ___ Wert in ____________ ein. Falls ___ w______________, dann handelt es sich um einen gemeinsamen Punkt, wenn n_______, d_______ n_______.

d$_2$) (KA$_t$) Mit der in c) beschriebenen Technik bestimme man die gemeinsamen Punkte der folgenden Parabelscharen i$_2$) $y = m(x-2)\cdot(x+4)+1$; $\boxed{\text{ii}_2}$) $y = mx^2 - 6mx - 4x + 8m + 1$;
iii$_3$) $y = m(x-1)\cdot(x-m)+3$; iv$_1$) $y = mx^2 + mx - 2m$ v$_3$) $y = mx^2 - m^2x - 5mx + 5m^2$;
vi$_3$) $y = mx^2 + x - m + 1$; vii$_3$) $y = mx^2 + mx - 2m + 2x$; viii$_3$) $y = mx^2 + 2x - 2m^2x + 1$;
ix$_{3,\bar{f}}$) $y = m(x^3 - x) + x^2 - 1$; x$_3$) $y = x^4 - 2mx^2 + 8m$; xi$_3$) $y = m(x^2 - 4x + 4 - 2mx + 4m)$.
e) Für welches m gehen die Parabeln aus Teil d durch $P(1;-1)$? **Wettbewerbsag:** 69/196

f$_1$) Welche Gemeinsamkeit haben parallele Geraden? Stellen Sie eine Parallelenschar dar.

5.3.3 Ganzrationale Funktionen (nur Kl. 10) LS10: S. 17-19

247. (U) a$_e$) Ein Polynom ist eine Summe von Potenzfunktionstermen. Die zugehörige Funktion heißt g_____________ Funktion (e: *polynomial f.*). Die Vorfaktoren a_i heißen K_____________________.

b$_1$) Beispiel: $f(x) = \frac{5}{3}x^2 + 4.2x - \sqrt{8}$ ist ganzrational mit $a_2 =$ _____, $a_1 =$ _____ und $a_0 =$ _____.

c$_1$) Der Term einer ganzrationalen Funktion heißt P________ und ist von der Form
$$f(x) \;=\; a_n \cdot x^n + a_{n-1}\cdot x^{n-1} + a_{n-2}\cdot x^{n-2} + \quad \ldots \quad + a_3\cdot x^3 + a_2\cdot x^2 + a_1\cdot x + a_0.$$
Dabei heißt der g______________ Exponent ____ mit ____ $\neq 0$ **Grad** (e: *degree*) der Funktion.

d$_1$) Welche der folgenden Funktionen ist eine ganzrationale Funktion? i) $f_1(x) = x^3 + 6x^2 + 2$;
ii) $f_2(x) = 2 - x^2$; iii) $f_3(x) = 3x + 2$; iv) $f_4(x) \equiv -2$; v) $f_5(x) = \sqrt{x}$; vi) $f_6(x) = \frac{2}{x} - x$;
vii) $f_7(x) \equiv 0$; viii) $f_8(x) = x^7 + 3x^6 + x^5 - 5x + 3$; xi) $f_9(x) = \sqrt{2}x^2 + \frac{2}{3}x - x^4$; x) $f_{10}(x) = \sqrt{x^2}$;

e$_r$) $f(x) \equiv 0$ bedeutet $f(x) =$ _ für ____ _______; $f(x) = 0$ bedeutet x ist eine ________ von f.

f$_1$) Geben Sie den Grad der ganzrationalen Funktionen aus c+e) an.

g$_r$) Bei einer ganzrationalen Funktion vom Grad n heißt der Funktionsterm P__________ vom Grad _ und das zugehörige Schaubild P__________ _-ter Ordnung.

5.3.4 Funktion und Intervalle LS10: S. 6-9

248. a$_e$) Betrachten Sie die Alterspyramide (Abb 98/41)- und ergänzen Sie die Tabellen.

Alter in Jahren	0	10	50	80
Anz. Männer				

Anz. Männer	300000	400000	600000	900000
Alter in Jahren				

Welche Probleme gibt es dabei?

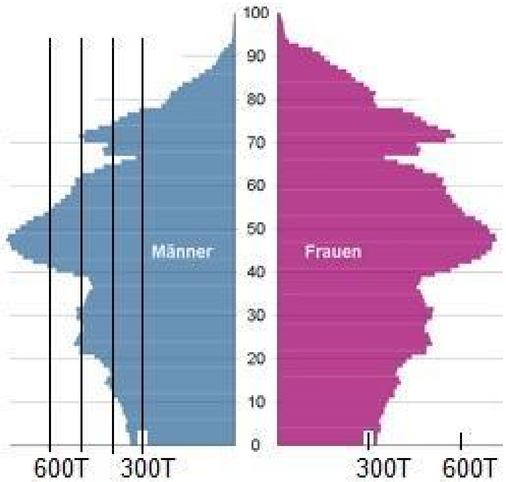
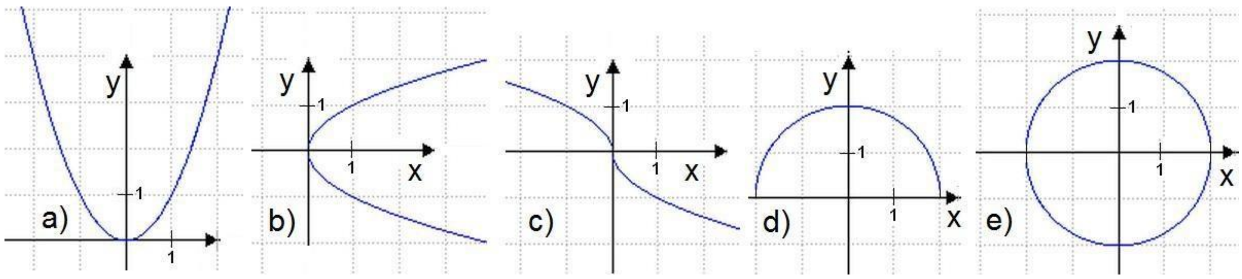


Abb. 41 Alterspyramide D 2011



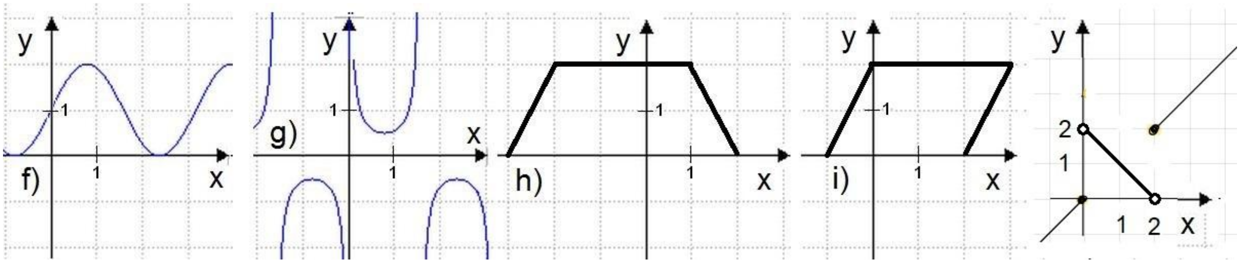


Abb. 42 Schaubilder von Funktionen?

b_r) Bei einer **Funktion** wird j_________ x im Definitionsbereich (e: *domain*) $\mathbb{D}$ g________ e_____ y im Wertebereich (e: *range*) $\mathbb{W}$ zugeordnet. Der Definitionsbereich $\mathbb{D}$ ist alles, was man für _ e______________ kann. Der Wertebereich $\mathbb{W}$ ist alles, was man für _ h______________ kann.

c$_1$) Welche der Graphen aus Abb. 42 sind Schaubilder einer Fkt? d$_2$) Kennen Sie deren Term?
e$_2$) Was ist der Unterschied zwischen der expliziten und einer impliziten Darstellung einer Funktion (Relation)?
f_r) Ein Kreis ist die Menge aller Punkte, die zu einem ______ _ den ______ ______ _ haben.

249. (FD 10) (U) a_r) Die Menge aller (reellen) Zahlen die zwischen zwei Zahlen a und b liegen notieren wir als $\{x \in \mathbb{R}|a \leq x \leq b\}$. Um dies abzukürzen schreiben wir auch $\{x \in \mathbb{R}|a \leq x \leq b\} = [a;b]$ sprich: a________________ 'Intervall' a, b. Sollen die Grenzen nicht dabei sein, so notieren wir $\{x \in \mathbb{R}|a < x < b\} = (a;b) =]a;b[$ sprich: o__________ 'Intervall' a, b.

b_1) Notieren Sie folgende Mengen in Intervallschreibweise: $\{x \in \mathbb{R}|1 < x \leq 2\}$, $\mathbb{R}^+$, $\{x \in \mathbb{R}|x \leq 3\}$, $\{x \in \mathbb{R}|\text{-}6 \leq x < 3\}$, $\{x \in \mathbb{R}|12 \leq x \leq 23\}$, $\{x \in \mathbb{R}|\text{-}32 < x \leq 23\}$, $\{x \in \mathbb{R}|4 < x < 5\}$, $\{x \in \mathbb{R}|x \geq 3\}$;

c_{2-3}) Berechnen Sie die maximale Definitionsmenge der folgenden Funktionen. i_1) $x^3 - 6x^2$, ii_1) $-x^6 + 12x^5 - 4$, iii$_1$) $\sqrt{x}$, iv$_1$) $\sqrt{x-5}$, v$_2$) $\sqrt{-x}$, vi$_2$) $\sqrt{4-x^2}$, vii$_1$) $\frac{1}{x}$, viii$_1$) $\frac{3}{x-5}$, ix$_1$) $\frac{x}{4-x^2}$, x$_2$) $\frac{x-1}{\sqrt{9-x^2}}$, xi$_2$) $\frac{2x+4}{\sqrt{x^2-x-6}}$, $\boxed{\text{xii}_2}$) $\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4x+3}}$, xiii$_2$) $\frac{4-x^2}{\sqrt{5x-x^2-6}}$, xiv$_3$) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{8+2x-x^2}}$, xv$_2$) $\sqrt{12-x-x^2}$; xvi$_2$) $\sqrt{x^2-6x+8}$.

d_{1-2}) Geben Sie von allen Funktionen aus Aufgabe 248c $\mathbb{D}$ und $\mathbb{W}$ an. ↑ (KA$_I$) (GG$_{03}$)

Cartoon 23

250. (U) (KA$_I$) Berechnen Sie den Wertebereich der folgenden (quadratischen) Funktionen:
a$_1$) $x^2 - 2x + 1$; b$_1$) $x^2 + 2x$; $\boxed{\text{c}_1}$) $3x^2 - 24x + 1$; **d**$_1$) $2x^2 - 2x$; e$_1$) $-x^2 + 4x$; f$_1$) $-0.5x^2 + 3x$; g$_1$) $-2x^2 + 2x + 2$; h$_1$) $-x^2 - 3x - 3$; i_1) $2x^2 + 3x$; j_1) $-2x^2 - 6x$;

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$x^2 - 2x + 1$							

k_1) $3x^2 - 3x$ L_1) $-5x^2 - 6x$;
Die Tabelle ist ein ____weis kein ___weis.

251. (U) **Zusatz:** a_1) Erstellen Sie eine Wertetabelle von $f(x) = |x|$ und zeichnen Sie das Schaubild der Funktion. Das Schaubild von $|x|$ besteht aus zwei Teilg____________; der G____________ $y =$____ für x____ und $y =$____ für x____. Stellen Sie $f(x)$ betragsfrei dar.

b_{2-3}) (GG_{04}) Stellen Sie folgende Fktn ohne Betragszeichen dar. $f_{1,f}(x) = 3|x|$, $f_{2,f}(x) = |x-1|$, $f_{3,f}(x) = |x+2| + 1$, $f_4(x) = |x-1| - 2$, $\boxed{f_5(x)} = |2x-6| - 2$, $f_6(x) = |-x+3| + 1$, $f_7(x) = |4 - x^2|$, $f_8(x) = x + |x|$, $f_9(x) = \sqrt{|x|}$, $f_{10}(x) = |\frac{x}{x-2}|$.

Die Betragsfktn hat (manchmal) ausgezeichnete Pkte, die K_____punkte. Wie findet man diese?

5.3.5 Verschieben von Graphen (e: *translation*) → 5.6.7

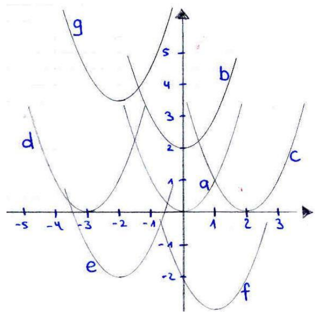


Abb. 43 Parabeln

252. (U) $\mathbf{a}_w$) Die Skizze in Abb. 43 zeigt neben dem Funktionsgraphen der Funktion $f(x) = x^2$ (a) noch weitere (verschobene) Normalparabeln. Geben Sie deren Funktionsterme an. **(LS10: S. 10-13)**
$\mathbf{b}_w$) Wie lautet die Scheitelform einer quadratischen Funktion?
$\mathbf{c}_r$) $f(x-2)$ sprich 'f v_____ $(x-2)$' bedeutet statt __ schreibe _______ **(Formel 43)** . $\mathbf{d}_1$) Bestimmen Sie $f(x-b)$ von $f_1(x) = \sqrt[3]{x}$, $f_2(x) = x^2 - 3x + 2$; $\mathbf{e}_1$) Verallgemeinern Sie Ihr Ergebnis aus Teil c), wenn der Graph einer Funktion f um b LE nach rechts und um c LE nach oben (um $(b;c)$) verschoben wird.
f_e) Wenn der Graph einer Funktion f um b nach rechts und um c nach oben verschoben wird, so ergibt sich der neue Funktionsterm $f_{neu}(x) =$ _____________ **(Formel 43)** .

253. a_1) Sei $f_1(x) = 2x$; verschieben Sie K_{f_1} um 1 Einheit nach rechts.
b_1) Sei $f_2(x) = \frac{1}{2}x + 1$; ; verschieben Sie K_{f_2} um 2 Einheiten nach rechts.
c_1) (KA_G) In dieser Aufgabe soll eine Verschiebung um $(c;d)$ bedeuten, dass K_f um c Einheiten nach rechts und um d Einheiten nach oben verschoben werden soll. Verschieben Sie
iii) $f_3(x) = 2x - 5$ um $(1;3)$; iv) $f_4(x) = -x + 2$ um $(-2;4)$; v) $f_5(x) = x^2$ um $(1;1)$; vi) $f_6(x) = x^2 + 2x$ um $(2;0)$; $\boxed{\text{vii}}$) $f_7(x) = -x^2 - 4x + 4$ um $(2;-1)$; viii) $f_8(x) = 2x - x^2$ um $(3;2)$;

5.3.6 Achsenspiegelungen (e: *reflections*)

254. (U) a_e) Betrachten Sie die Graphen aus Abb. 44 a-c. Welcher Graph ist das Original? Geben Sie die Terme der gespiegelten Graphen an und verallgemeinern Sie. Wenn der Graph einer Funktion f an der _-Achse gespiegelt wird, dann wird aus $f(x) \longrightarrow$ ____.
b_e) Betrachten Sie die Graphen aus Abbildung 44 d-f; Geben Sie die Terme der gespiegelten Funktionsgraphen an - verallgemeinern Sie und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Teil a).
Wenn der Graph einer Funktion f an der _-Achse gespiegelt wird, dann wird aus $f(x) \longrightarrow$ ____.
c_e) (GG_{05}) Was passiert, wenn Sie einen Funktionsgraphen zuerst an der x-Achse und dann an der y-Achse spiegeln? **(Formel 43)** . $\mathbf{d}_1$) Spiegeln Sie alle Graphen aus Ag 256 an der y-Achse.

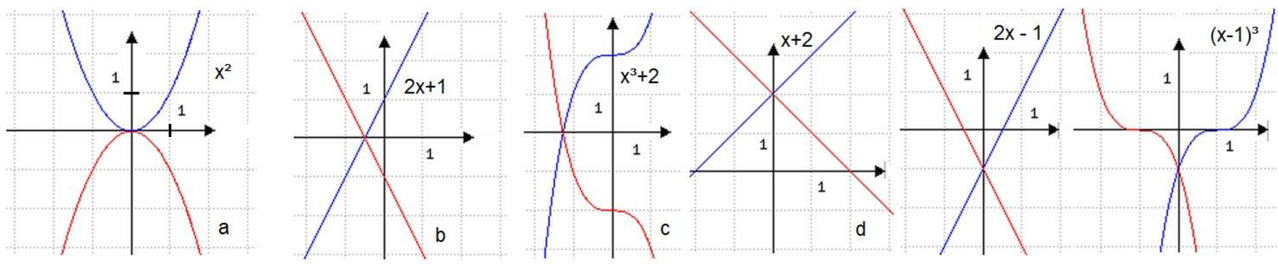


Abb. 44 Spiegelungen an der x- und y- Achse

5.3.7 Globalverlauf (e: *end behaviour*) ganzrationaler Funktionen LS10: S. 17-19

255. (Ü) a_1) $x^2 \xrightarrow{x\to\infty}$ ___, weil K_f (= der Graph von f) nach rechts ___________ verschwindet.
$x^2 \xrightarrow{x\to-\infty}$ ___, weil K_f nach ___________ ___________ verschwindet.
$x^3 \xrightarrow{x\to\infty}$ ___, weil K_f nach ___________ ___________ verschwindet.

$x^3 \xrightarrow{x\to-\infty}$ ___, weil K_f nach ____________ ____________ verschwindet.
Welche Funktion kommt von links unten und verschwindet nach rechts unten?
Welche Funktionsklasse fehlt noch?

b$_r$) Klassifizieren Sie Funktionen der Form $x \longmapsto a_n \cdot x^n$ $(a_n \neq 0, n > 1)$ nach ihrem Globalverlauf (__ Gruppen). Füllen Sie die folgende Tabelle aus:

Typ (Bsp) (Ag 255 a)	Grad n	$a_n \mid$ Verhalten	für $x \to -\infty$	für $x \to \infty$	Skizze

c$_e$) Wie finden Sie intuitiv das Verhalten einer Funktion f gegen unendlich (algebraisch) heraus?

256. (U) Betrachten Sie $f(x) = x^2 - 7x + 9$. Wie verhält sich f für $x \to -\infty$ bzw. $x \to \infty$? K_f ist eine n__________ o__________ g_______________ Normalp_______________ (Gruppe __). Dies erkennt man am Summanden __, der Rest (______9) ist o__________ B_______________.

In Abbildung 101/45 finden Sie die Graphen folgender Funktionen:

a$_1$) $x^2 - 2x - 1$, b$_1$) $4x^3 - 3x$, c$_1$) $0.5(x^4 - 4x^2)$, d$_1$) $0.25x^5 - x^3 + x$, e$_1$) $x^4 - 0.1x^7$, f$_1$) $1.5x^2 - 0.9x^4 + 0.1x^6$, g$_1$) $x^3 - 0.3x^4$, h$_1$) $x - x^2 + x^3$, i$_1$) $0.5(2x^3 - x^5 + 0.1x^7)$, $\boxed{\mathbf{j}_1}$) $x^8 - 0.5x^{10} + x + 1$. Klassifizieren Sie diese nach ihrem Globalverlauf.

k$_r$) Jede ganzrationale Funktion f wird von einem Summanden d___________ (e: *leading term*). Es ist der Summand mit dem h_____________ E_____________, der den G______ von f festlegt.

l$_r$) Eine ganzrationale Funktion mit ___geradem Grad hat m________________ eine Nullstelle.

257. $_1$) In welche Klasse gehören $f_1(x) = -x^4$; $f_2(x) = x^3 + x^2$; $f_3(x) = -x^4 + 4x^2$; $f_4(x) = x^4 - 30x^3 + 7x^2$; $f_5(x) = 2 - 2x - x^2$; $f_6(x) = 6 - 10x^5 - x^2$; $f_7(x) = 6x^7 - 4x^4$; $f_8(x) = 4x - 8x^3 + x^2$; $f_9(x) = 4x - 0.1x^9$ und $f_{10}(x) \equiv -2$ (und woran erkennt man dies)?

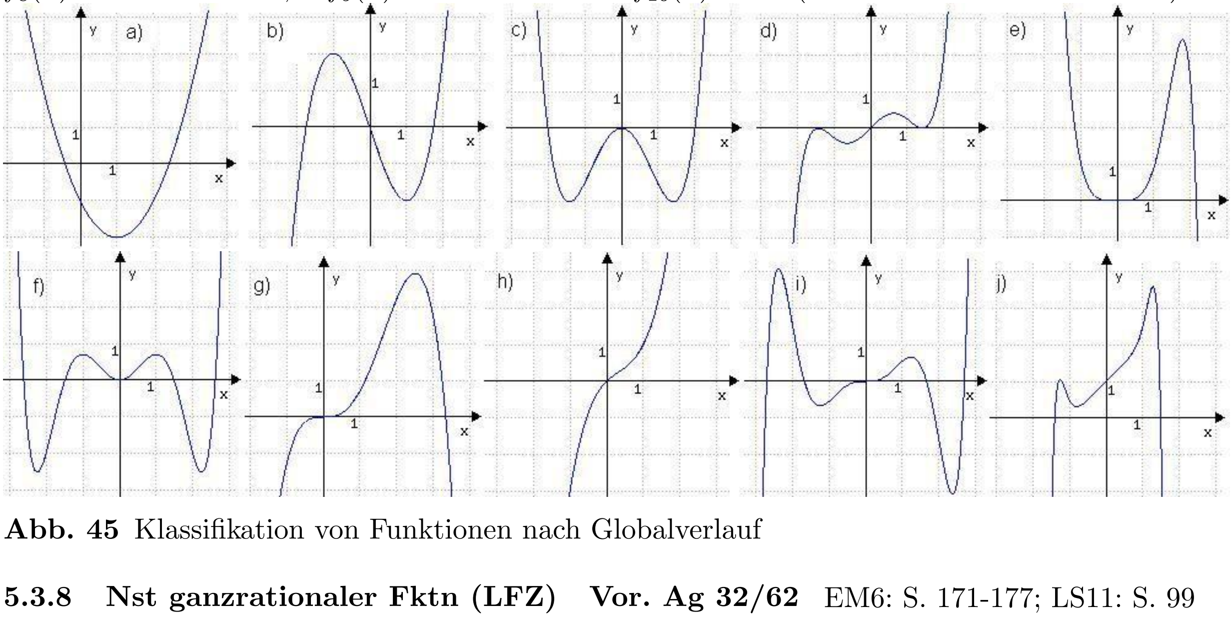


Abb. 45 Klassifikation von Funktionen nach Globalverlauf

5.3.8 Nst ganzrationaler Fktn (LFZ) Vor. Ag 32/62 EM6: S. 171-177; LS11: S. 99

258. (U)Faktorisieren Sie a$_1$) $x^2 + x$-12, b$_1$) x^2-4$x + 4$, c$_1$) $2x^2 + 2x$-12, d$_{1,\bar{f}}$) $3x^2 + 6x$, e$_1$) $4x^2$-12$x + 8$, f$_1$) $x^4 - 10x^2 + 9$, g$_2$) $x^4 - 7x^2 + 12$, h$_2$) $2x^4 - 52x^2 + 50$, i$_2$) $1 - 5x^2 + 4x^4$, $\boxed{\mathbf{j}_2}$) $2x^4 - 26x^2 + 72$, k$_2$) $-x^4 + 5x^2 - 4$, L$_2$) $x^5 - 20x^2 + 64$, m$_2$) $x^6 - 29x^4 + 100x^2$, n$_e$) $x^2 + 1$, o$_3$) $4x^6 - 4x^2$. ← (KA$_B$)
p$_e$) Es gilt $x^2 + px + q$ __ $(x - x_1) \cdot (x - x_2)$; nach dem S______ ______ ________________ ist $(x - x_1) \cdot (x - x_2) =$ __ $\Leftrightarrow x =$ __ oder $x =$ __. Damit sind x_1 und x_2 die _______ von $x^2 + px + q$.

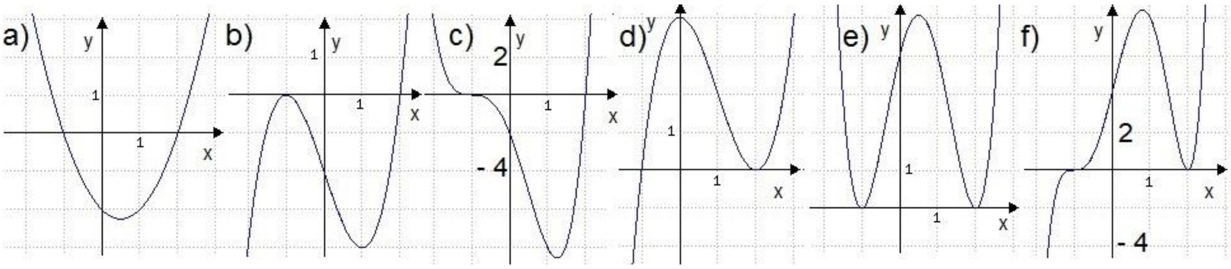


Abb. 46 Klassifikation von Nullstellen

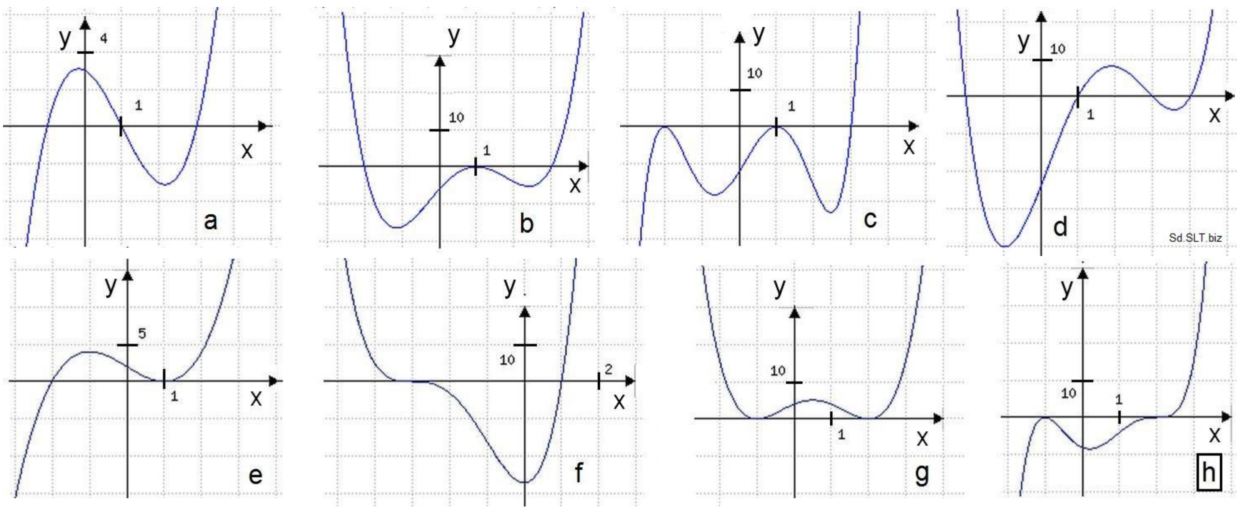
259. (U) **a_1)** (GG_{06}) Ordnen Sie die Funktionsterme den Funktionsgraphen aus Abb. 46 zu.
$f_1(x) = (x+1)\cdot(x-2)$; $f_2(x) = (x+1)^2\cdot(x-2)$; $f_3(x) = (x+1)^3\cdot(x-2)$;
$f_4(x) = (x+1)\cdot(x-2)^2$; $f_5(x) = (x+1)^2\cdot(x-2)^2$; $f_6(x) = (x+1)^3\cdot(x-2)^2$;
b_e) Klassifizieren Sie die Nullstellen. Alle Terme sind l____________zerlegt angegeben. Es gibt hier __ Gruppen von Nullstellen. **c_e)** Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Funktionsterm.

260. a_e) Betrachten Sie die Funktionen $f_1(x) = (x-1)\cdot(x-2)$, $f_{1.9}(x) = (x-1.9)\cdot(x-2)$, $f_{1.99}(x) = (x-1.99)\cdot(x-2)$ usw. Alle Nullstellen sind vom Typ __. Was passiert am Ende also für f____? **Regel:** Bei einer Nullstelle vom Typ __ sind zwei Nullstellen ver_________. Deshalb heißen diese Nullstellen d______. Nullstellen vom Typ 3 heißen d_____fach **(Formel 44)** .
Die Vielfachheit einer Nullstelle x_1 entspricht dem E___________ des L_____________ (____).
b_r) Füllen Sie folgende Tabelle für eine Funktion f mit der Nullstelle x_1 aus:

Typ	Faktor	Vielfachheit	Beschreibung
Typ 1			K_f ____________ die $x-$Achse
Typ 2			K_f ____________ die $x-$Achse
Typ 3			K_f ____________ und ____________ die $x-$Achse

c_e) Gibt es Nullstellen mit größerer Vielfachheit?

261. (KA_G) (Ü)Skizzieren Sie die folgenden Funktionsgraphen ohne GTR mit Hilfe der Klassifikation der Nullstellen und des Verhaltens gegen $\pm\infty$. **a_1)** $f_1(x) = x\cdot(x-4)$; $f_2(x) = x^2\cdot(x-4)$; $f_3(x) = x\cdot(x-4)^2$; $f_4(x) = (x-2)^2\cdot(x+2)^2$; **$b_2$)** $f_5(x) = (x-1)^3$; $f_6(x) = (x-2)^3\cdot(x+1)$; $f_7(x) = (x+1)\cdot(x+2)^2\cdot(x-1)^3$; $\boxed{f_8(x)} = (x+1)^2\cdot(x+2)^2\cdot(x-1)^3$;
c_2) $f_9(x) = -x\cdot(x-2)^2$; $f_{10}(x) = -0.3x^3\cdot(x-3)^2$; $f_{11}(x) = -0.1(x+2)^2(x-1)^3(x-3)$
d_2) $f_{12}(x) = -0.4x(x+3)^2$, $f_{13}(x) = -0.4(x+2)^2(-x+1)^2$, $\boxed{f_{14}(x)} = 1/8x^4(x^2-4)^2$,
$f_{15}(x) = -0.5((x-2)^2x)^3$, $\boxed{f_{16}(x)} = -0.00007(x+3)^2(x+1)^3(x-2)^4(x-5)^2$,
$f_{17}(x) = 0.3x^2(x+0.5)^2(x-1)^3(x-3)^5$, $f_{18}(x) = -0.05(x+1)^2(x-1)^3(x-3)^3(x-4)$.



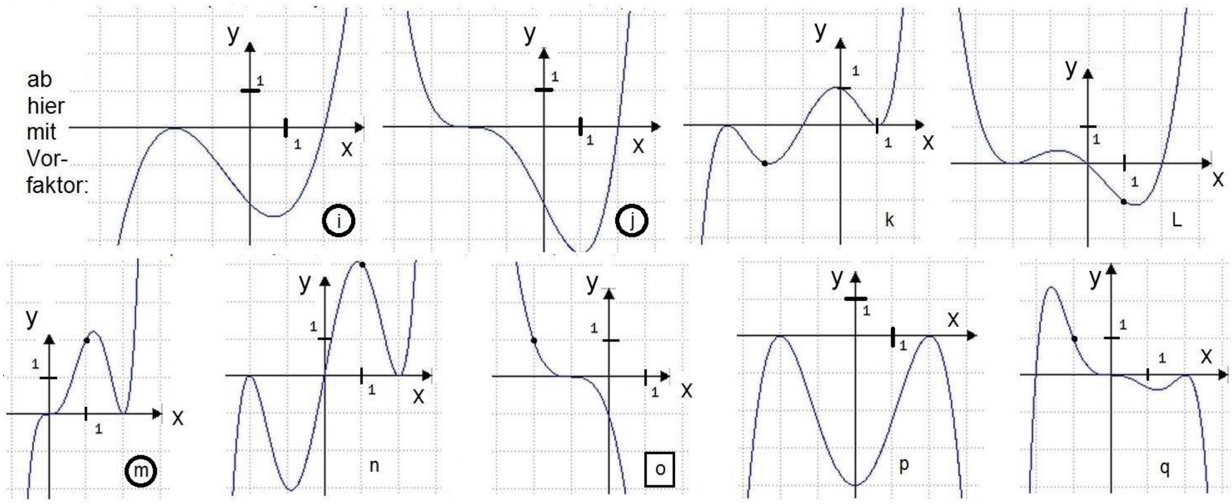


Abb. 47 Funktionen mit markanten Nullstellen

5.3.9 Ablesen von Funktionstermen S. 26-28

262. (Ü) Gegeben seien die Graphen aus Abb. 103/47.

a$_1$) Betrachten Sie deren Nullstellen und geben Sie deren Funktionsterm bei den Graphen a-h an.

b$_e$) Stimmt Ihre Methode auch bei den Graphen r und s aus Abbildung 48?

c$_e$) Die Funktionsterme (LFZ) der Graphen aus Abbildung 48r und s haben einen V__________, der die Graphen in ___ Richtung s_________. Den Vorfaktor bestimmen Sie durch e__________ und a__________ (Punktprobe).

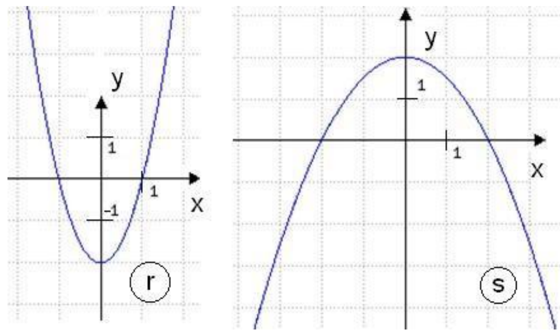


Abb. 48 *Parabeln*

d$_2$) (KA$_G$) Bestimmen Sie jetzt die Funktionsterme der Graphen i-q.

5.3.10 Polynomdivision (Zusatz) (GFS) LS10: S.29 + EM6: S. 180-181; LS11: S. 100

263. (Ü) Analog zum Divisionsalgorithmus der Grundschule wollen wir durch Polynome dividieren.

a$_e$) Teilen Sie 156 durch 13 (später 273:13; 2184:3) mit Hilfe des Divisionsalgorithmus aus Kl 3.

b$_e$) Versuchen Sie durch einen Divisionsalgorithmus (analog zum Algorithmus aus Aufgabenteil a) $x^2 + 5x + 6$ durch $x + 3$ zu dividieren. Vergleichen Sie 156 und $x^2 + 5x + 6$; was können Sie für x einsetzen und was muss dann herauskommen? Dividieren Sie auch $x^2 - x - 2$ durch $x + 1$.

Der Vergleich von Polynomdivision mit der Zahlendivision geht n_______ i_______.

c) (KA$_B$) Führen Sie folgende Polynomdivisionen durch: (Rg Wanted)

i$_1$) $(x^2 + 2x - 3) : (x - 1)$; $\boxed{\mathbf{ii}_1}$) $(x^2 + x - 6) : (x - 2)$; iii$_1$) $(x^2 - 6x + 8) : (x - 4)$;
iv$_1$) $(2x^2 + 10x + 12) : (x + 2)$; v$_1$) $(3x^2 - 5x + 2) : (x - 1)$; vi$_2$) $(2x^2 - 18) : (2x + 6)$;
vii'$_1$) $(x^3 - 2x^2 - x + 2) : (x + 1)$; viii$_1$) $(x^3 - 7x - 6) : (x - 3)$; ix$_2$) $(4x^3 - 12x^2 - x + 3) : (2x - 1)$.

d$_{3,\bar{f}}$) (≈ Matheolympiade 2020) Gesucht sind alle Zahlenpaare $(a; b)$ für die es drei aufeinanderfolgende Zahlen $x, y, z \in \mathbb{Z}$ gibt, mit $x \cdot y \cdot z = a$, $x + y + z = b$, $a = 5b$.

264. (Ü) a$_e$) Teilen Sie $(x^2 - x - 1) : (x + 1)$ und vergleichen Sie mit Aufgabe 103/263b). Teilen Sie auch $(x^2) : (x - 1)$, $(x^2) : (x - 2)$ und $(x^2 - 1) : (x - 3)$.

b$_2$) Verifizieren Sie folgende Divisionen: Welche Eigenschaft hat der Rest?

$x^3 : (x - 2) = x^2 + 2x + 4$	Rest 8;	$x^4 : (x - 2) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$	Rest 16;
$x^3 : (x - 3) = x^2 + 3x + 9$	Rest 27;	$(x^3 - 2x^2 + 7x - 4) : (x - 1) = x^2 - x + 6$	Rest 2;
$(x^3 - 2x) : (x - 3) = x^2 + 3x + 7$	Rest 21;	$(x^4 - 5x^2 + 3) : (x - 2) = x^3 + 2x^2 - x - 2$	Rest -1;
$(x^4 + 2x^3 - 2) : (x + 2) = x^3$	Rest -2;	$(\bar{f})$ $x^5 : (x + 1) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$	Rest -1;

c$_e$) **i)** Stellen Sie bei der Rechnung 7:3 = 2 Rest 1 den Rest abhängig von der Rechnung dar. **ii)** Wenden Sie Ihre Idee auf $x^2 : (x-2) = x+2$ Rest 4 an. **iii)** Für welches x gilt diese Gleichung?
($\bar{f}$) d$_r$) Sei $p(x) : (x - x_0) = q(x)$ Rest r. Berechnen Sie r abhängig von $p(x), x_0$ und $q(x)$.
e$_r$) Welche Bedingung muss $p(x_0)$ erfüllen, damit $p(x)$ durch $(x - x_0)$ teilbar ist? Vergl. 51/129

5.3.11 Linearfaktorzerlegung von Polynomen höheren Grades* EM6: S. 181 Ag 3

265. (Ü) Wir wollen das Polynom $p(x) = x^3-6x^2+11x-6$ in Linearfaktoren zerlegen. Dazu benötigen wir die N______ von $p(x)$. In der Schule wird keine Formel zur Berechnung von Nullstellen kubischer Polynome gelehrt. a$_1$) Verifizieren Sie, dass $x = 1$ eine Nullstelle von $p(x)$ ist.
b$_1$) Durch welchen Linearfaktor ist $p(x)$ teilbar?
c$_e$) **Berechnen** Sie alle anderen Nullstellen von $p(x)$ und zerlegen Sie $p(x)$ in Linearfaktoren.
d$_2$) Zeigen Sie, dass -1 eine Nst. von $p(x) = x^3-7x-6$ ist und zerlegen Sie $p(x)$ in Linearfaktoren.

e$_2$) Warum kann $p(x) = x^4 - 1$ nicht in Linearfaktoren zerlegt werden? Zerlegen Sie $p(x)$ in zwei Linearfaktoren und einen quadratischen Faktor.

f$_2$) Wie kann man mit Hilfe der Vieta-Wurzelsätze geschickt Nullstellen raten?

266. (Ü) (KA$_G$) Zerlegen Sie folgende Polynome in Linearfaktoren. Bei den ersten vier Polynomen ist eine Nullstelle 1, sonst müssen Sie eine Nullstelle raten. Nach den V__________-Wurzelsätzen sind gute Schätzungen für eine Nullstelle die T__________ des Absolutgliedes. (Rg Wanted)

a$_1$) $x^3 + 2x^2 - x - 2$	b$_1$) $x^3 + 4x^2 + x - 6$	$\boxed{\text{c}_1}$) $x^3 - x^2 - 4x + 4$	d'$_1$) $x^3 - 5x^2 + 7x - 3$
e$_2$) $2x^3 + 8x^2 + 2x - 12$	f$_2$) $-2x^3 - 2x^2 + 8x + 8$	g'$_2$) $4x^3 - 4x^2 - 4x + 4$	h'$_2$) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$
i'$_2$) $2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$	j$_2$) $3x^3 + 18x^2 + 9x - 30$	k$_2$) $x^3 + 6x^2 + 9x + 4$	L$_2$) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$
m'$_2$) $x^4 - 13x^2 + 36$	n'$_{2,\bar{f}}$) $3x^4 - 6x^2 - 9$	o'$_2$) $x^6 - 6x^4 + 8x^2$	p'$_{2,\bar{f}}$) $x^7 - 5x^5 + 4x^3$
q'$_{3;\bar{f}}$) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4$	r'$_3$) $2x^4 + 2x^3 - 14x^2 - 26x - 12$		s$_2$) $2x^3 - 2x^2 + 2x - 2$

t$_{\bar{f}}$) (Abi '06 bzw. '10) Die Funktion $f_{06}(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ (bzw. $f_{10}(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$) hat die Nullstelle $x_1 = 1$. Bestimmen Sie alle weiteren Nullstellen von f_i.

267. (Ü) **Regel: Fundamentalsatz der Algebra (reelle Form):** Sei $p(x)$ ein Polynom vom Grad n und x_0 eine Nullstelle von $p(x)$, dann ist $q(x) = p(x) : (x - x_0)$ vom Grad ________; bei jeder Division dieser Form v_______ $p(x)$ einen Grad. Diese Division geht h______________ __ mal. Damit hat ein reelles Polynom n-ten Grades h______________ __ Nullstellen **(Formel 45)** .

268. (Ü) **Identitätssatz für Polynome:**$_e$ a$_w$) Wie lautet der Identitätsatz für lineare Funktionen? Beweisen Sie! Wie lautet der Identitätsatz für quadratische Funktionen?
b'$_w$) Sei $p(x) = x^5-3x^3+2x^2+6x-1$ und $q(x) = x^5-2x^3+2x^2+5x-1$. Warum ist $p(x) \not\equiv q(x)$? Berechnen Sie grad$(p(x) - q(x))$. (goto 147/366)

Sei $p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_1 \cdot x + a_0$ und sei $q(x) = b_m \cdot x^m + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + ... + b_1 \cdot x + b_0$.
c$_e$) $p(x) \equiv q(x)$ bedeutet $p(x) = q(x)$ für ______. **d$_r$)** Sei $p(x) \equiv q(x)$, was gilt dann für die Koeffizienten a_i bzw. b_i? Beweisen Sie Ihre Vermutung mit Hilfe von $f(x) =$_____$-$_____.
e$_r$) Der Identitätssatz für Polynome erlaubt uns den K_____________v_____________.
f) Was gilt für a und b, wenn $g(x) \equiv h(x)$ sein soll? **i$_1$)** $g(x) = x^2$, $h(x) = ax^2 + bx$; **ii$_1$)** $g(x) = 4x^3 - 3x^2$, $h(x) = ax^2 + bx^3$; **iii$_2$)** $g(x) = 3x^2 + 4x$, $h(x) = (a + b)x^2 + (a + 2b)x$; **iv$_3$)** $g(x) = 2x^2 + 3x$, $h(x) = (a + b)x^2 + (a + 2b)x + a - b$;

269. **Partialbruchzerlegung:**$_e$ (Zusatz) a$_e$) Stellen Sie $\frac{1}{x(x+1)}$ in der Form $\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$ dar. Stellen Sie die folgenden Terme auch als Summe von Brüchen der Form $\frac{A}{x-x_0}$ dar. b$_3$) $\frac{x+2}{x(x+1)}$; c$_3$) $\frac{x+1}{x^2-x-6}$;
$\boxed{\text{d}_3}$) $\frac{x+13}{x^2-4x-5}$; e$_3$) $\frac{6x-13}{x^2-3.5x+1.5}$; f$_3$) $\frac{2x+6}{2x^2-3x+1}$; g$_4$) $\frac{30}{x^3-x}$; h$_4$) $\frac{x}{x^2-2x-8}$; i$_3$) $\frac{14x}{x^2-x-12}$;

270. ($\approx$ Abi 12) Eine der folgenden Abbn zeigt den Graphen G_f der Fkt f mit $f(x) = (x+1)^2(x-2)$.
a$_1$) Begründen Sie, dass die Abb. b) G_f zeigt. **b)** Von den anderen drei Abbildungen gehört

eine zur Fkt g mit $g(x) = f(x-a)$ und eine zur Funktion h mit $h(x) = b \cdot f(x)$. i_2) Ordnen Sie diesen beiden Funktionen die zugehörigen Abbildungen zu und begründen Sie Ihre Entscheidung. ii_2) Geben Sie die Werte für a und b an. **c_2)** Die bis jetzt nicht zugeordnete Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion k. Geben Sie ohne Rechnung einen Funktionsterm für k an.

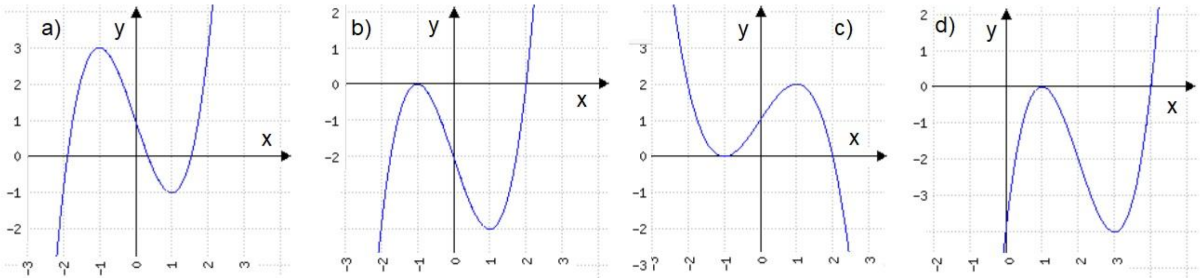
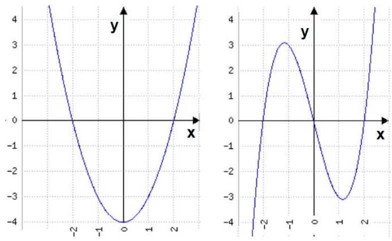


Abb. 49 Abitur 2012: $f(x) = (x+1)^2(x-2)$

5.3.12 Spezielle Symmetrie LS10: S. 20-22 + EM6: S. 168-170; LS11: S. 96-98 LS11: S. 98/6

271. a_e) Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - 4$ (Graph s.u.). Welche Symmetrie können Sie erkennen? b_e) Füllen Sie die folgende Wertetabelle aus. Welche Eigenschaft erkennen Sie?

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x^2-4									
x^3-4x									



c_e) Der Graph der Funktion $f(x) = x^2 - 4$ ist ____________symmetrisch zur _-Achse, und es gilt $f(-x)$ = _______. d_r) Genau die Graphen einer Funktion f mit der Eigenschaft $f(-x) =$ ____ sind achsensymmetrisch (as) zur _________ **(Formel 46)** .

e_b) Zeigen Sie: K_f mit $f(x) = x^2 - x^4$ ist achsensymmetrisch (as) zur y-Achse.

272. a_e) Welche Symmetrieachsen hat ein Parallelogramm? b_e) Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - 4x$ (Graph s.o.). Welche Symmetrie erkennen Sie? Vervollständigen Sie die obige Wertetabelle. c_r) Genau die Graphen einer Funktion f mit der Eigenschaft $f(-x) =$ ____ sind punktsymmetrisch (ps) zum _________ **(Formel 46)** .

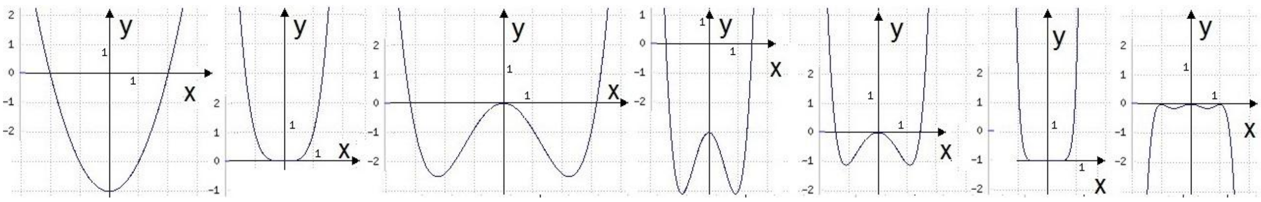


Abb. 50 Spezielle Symmetrie

273. (U) Betrachten Sie die Graphen der Fktn $f_1(x) = x^2 - 4$; $f_2(x) = x^4$; $f_3(x) = 0.1 \cdot x^4 - x^2$; $f_4(x) = 3x^4 - 5x^2 - 3$; $f_5(x) = \frac{x^6}{3} - \sqrt{2} \cdot x^2$; $f_6(x) = \frac{x^{10}}{\sqrt{5}} + \log(3) \cdot x^8$ und $f_7(x) = -x^6 + 2x^4 - x^2$.

a_1) Welche Symmetrien haben die Graphen dieser Funktionen (Abb 105/50)?

b_1) Formulieren Sie die Symmetriebedingung zur _-Achse. Zeigen Sie die As von $K_1(x)$ bis $K_7(x)$.

c_r) Graphen von Polynomen mit _________ Exponenten sind immer _________symmetrisch zur ____________ und es gilt $f(-x) =$ ____, weil bei $f(-x)$ das ____ Zeichen durch das Q____________ w____________. Diese Polynome heißen g___________ Polynome.

d_r) Graphen von Polynomen mit ungeraden Exponenten sind immer _______symmetrisch zum ____________ und es gilt $f(-x) =$ _____. Diese Polynome heißen u___________ **(Formel 46)** .

e_r) Bei Polynomen mit geraden und ungeraden Exponenten sagt man (bis zum Abitur), dass k______ Symmetrie e____________ ist.

274. ⓐ) (KA_G) Welche Fktnsgraphen sind as zur y-Achse bzw. ps zum Ursprung? i_1) $f_1(x) = 7x^2$;
ii_1) $f_2(x) = 4x^5 + 2x^3$; iii_1) $f_3(x) = 4x^3 + 2$; iv_1) $f_4(x) = x^7 + 2x$; v_1) $f_5(x) = x^4 + 2x + 4$;
$\boxed{\mathbf{vi}_1}$) $f_6(x) = \frac{x^6}{6} + \frac{x^2}{2} + 1$; vii_1) $f_7(x) = \frac{x^3+2x}{4}$; viii_1) $f_8(x) = \frac{1}{x}$; $\boxed{\mathbf{ix}_{1,\bar{f}}}$) $f_9(x) = \frac{5}{x^4}$;
x_4) $f_{10}(x) = \frac{x}{x^2+1}$; $\mathrm{xi}_{2,\bar{f}}$) $f_{11}(x) = \sqrt[3]{x}$; $\mathrm{xii}_{4,\bar{f}}$) $f_{12}(x) = |x|$; xiii_3) $f_{13}(x) = 2^{x+1} + \frac{2}{2^x}$;

ⓑ$_3$) Seien $u_i(x)$ $(i = 1, 2)$ ungerade Funktionen, $g_i(x)$ $(i = 1, 2)$ gerade Funktionen. ↑ (GG_{11})
Welche Eigenschaft haben die Funktionen $g_1(x) \cdot g_2(x)$, $g_1(x) \cdot u_1(x)$, $u_1(x) \cdot u_2(x)$?

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\frac{x}{x^2+1}$							

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$2^{x+1} + \frac{2}{2^x}$							

ⓒ$_3$) Sei $f_a(x) = a^2(x^3 + x^2 - x) + 4x^2 + a + 2$; für welche a ist K_{f_a} ps zu $(0|0)$ bzw. as zu $x = 0$?

d_2) (= Abi 2018) Für jedes $a > 0$ ist eine Funktion f_a mit $f_a(x) = -ax^4 + 4ax^2$ gegeben.
i) Begründen Sie, dass der Graph von f_a achsensymmetrisch zur $y-$Achse ist.
ii) Zeigen Sie, dass die Nullstellen der Funktion f_a unabhängig von a sind.

Algorithmus: Algebrafreie Technik nach Sd: Schreiben Sie $f(-x)$ also im Funktionsterm schreiben Sie statt x $(-x)$ (Klammern nicht vergessen). Schreiben Sie (je nach Symmetrieart, die sollten Sie vorher herausfinden) $= f(x)$ oder $= -(f(x))$ als Term; fertig - auf diese Weise ersparen Sie sich aufwendige Algebrarechnungen. Bsp: K_f mit $f(x) = \frac{4x}{3x^2+7}$ ist ps zum Urspung.

$f(x) = \frac{4x}{3x^2+7}$: $f(-x) = \frac{4(-x)}{3(-x)^2+7}$ (linke Seite) $= -\left(\frac{4x}{3x^2+7}\right) = -f(x)$ (rechte Seite);
$g(x) = \frac{x^2}{5x^4+7}$: $g(-x) = \frac{(-x)^2}{5(-x)^4+7} = \frac{x^2}{5x^4+7} = g(x)$ K_g ist as zur y-Achse.

275. (**Minimalanforderung** UE 10_1): a) Lesen Sie die Schaubildterme aus Abb. 106/51 ab (F 44)
b) Führen Sie eine Funktionsuntersuchung ($\cancel{\mathrm{M}}$ A D N $\cancel{\mathrm{E}}$ S $\cancel{\mathrm{S}}$) bei den Termen aus Teil a) durch:
A= (Asymptoten) hier: Verhalten gegen $\pm\infty$; **D**= Definitionsbereich, auch Wertebereich;
N= Nullstellen; **S**= Symmetrie (Parität); (F 46)

c) Faktorisieren Sie die folgenden Funktionsterme und skizzieren (F 44) Sie deren Graphen
i) $f_1(x) = x^2 - 4x + 3$, ii) $f_2(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, ⓘii) $f_3(x) = 0.5x^4 - 2.5x^2 + 2$ (ohne IW),
iv) $f_4(x) = 0.07x^5 - 0.7x^3 + 0.63x$, v) $f_5(x) = 8x^3 - 8x^5$, ⓥi) $f_6(x) = \frac{1}{4}x^7 - x^5 + x^3$;
ⓓ) Verschieben Sie alle Schaubilder aus Teil c) 1) um drei Einheiten (EH) nach rechts und um zwei EH nach oben; 2) um vier EH nach links und um fünf EH nach unten; und geben Sie die entstehenden Funktionsterme in unvereinfachter Form an (F 43).
ⓔ) Spiegeln Sie alle Schaubilder aus Teil c) 1) an der x-Achse; 2) an der y- Achse; und geben Sie die entstehenden Funktionsterme in vereinfachter Form an (F 43).
ⓕ) Lesen Sie die Symmetrie aus den Schaubildern aus Teil c) ab.

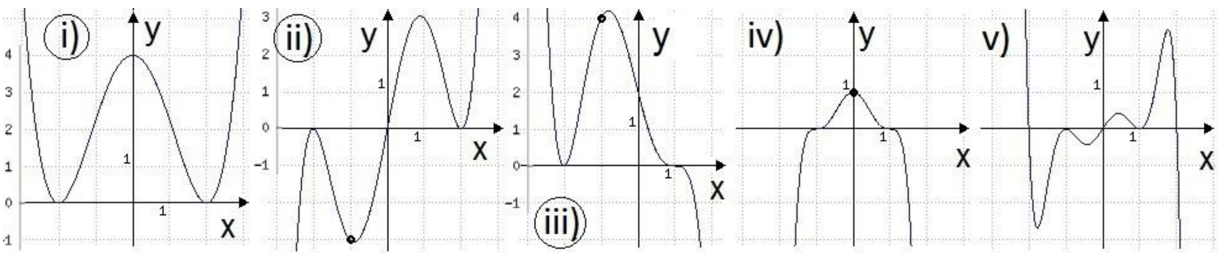


Abb. 51 Schaubildanalyse in Abbildung v) ist $f(0.5) = 0.405$

5.3.13 Achsensymmetrie (e: *axis of symmetry*) → 5.6.5 (Zusatz) (GFS) LS11: S. 98/6

276. (Ⓤ) a_e) Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 + 2x - 3$ (Graph siehe Abb. 52 b). Welche Symmetrie können Sie erkennen? Vergleichen Sie die Funktionswerte $f(-2)$ und $f(0)$, sowie $f(-3)$ und $f(1)$. Finden Sie weitere Paare dieser Art. Beschreiben Sie alle Paare mit dieser Eigenschaft. (GG_{07})

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2+2x-3									
t									

b$_e$) Der Graph der Funktion $f(x)$ ist ____________symmetrisch zu _______, weil $f(-1+t) =$ _______ gilt. Dabei ist t der A_________ zur S_____________________. ↓ **(Formel 102)**

c$_r$) Der Graph einer Funktion f ist achsensymmetrisch zur Achse $x = a \Leftrightarrow f(a$____$) =$ _______.

d$_b$) Zeigen Sie: K_f mit $f(x) = x^2 + 4x$ ist achsensymmetrisch (as) zu $x = -2$.

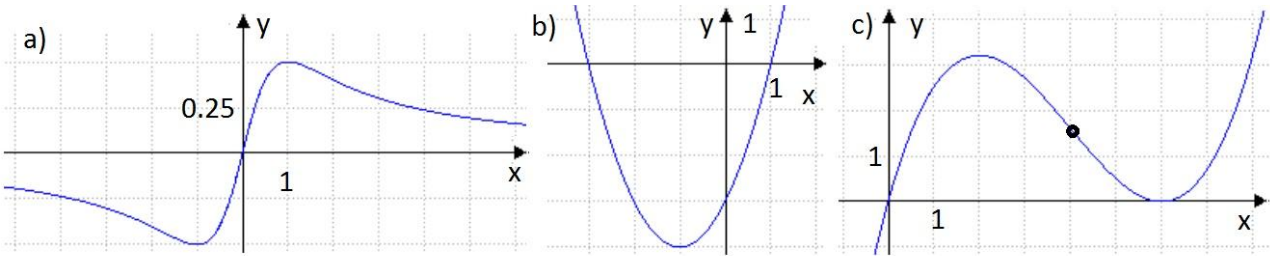


Abb. 52 a) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ b) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ c) $f(x) = 0.1 \cdot x \cdot (x-6)^2$

277. Zeigen Sie die Achsensymmetrie der Graphen der folgenden Fktn bezüglich der Achse $x = a$.

a$_1$) $f(x) = x^2 - 2x,\ a = 1$; b$_1$) $f(x) = x^2 + 6x - 2,\ a = -3$; c$_2$) $f(x) = 2x^2 - 12x + 3,\ a = 3$,
d$_2$) $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2},\quad a = 3$; e$_2$) $f(x) = \frac{1}{x^2-4x+5},\quad a = 2$; f$_2$) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x-1)^4+1},\quad a = 1$;
g$_3$) $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2},\quad a = -1$, ($\overline{\text{KA}}$) h$_4$) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1,\quad a = -1$; .

i$_4$) An welcher Stelle würden Sie eine Symmetrieachse einer Funktion f suchen? ↑ (GG$_{08}$)

j$_2$) Zeigen Sie, dass der Graph von $y = ax^2 + bx + c$ _____symmetrisch zur Achse ________ ist.

k$_2$) Suchen Sie bei den folgenden Funktionen die Symmetrieachse $x = a$ und weisen Sie dann die Symmetrie nach. i') $f(x) = 3x^2 - 12x$; ii') $f(x) = 4x - x^2$; iii') $f(x) = 6 - 2x + \frac{x^2}{2}$; iv) $f(x) = 4 - 2x + 0.5x^2$; v') $f(x) = \frac{1}{x^2-6x}$; vi') $f(x) = \frac{12}{3x^2-24x+1}$; vii') $f(x) = \frac{x^2-2x}{2x^2-4x+3}$; viii') $f(x) = \frac{3}{x^2-4x+1}$; ix) $(x-3)^4 + 5$; x') $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$;

5.3.14 Punktsymmetrie → 5.6.6 (Zusatz) (GFS) LS11: S. 98/7

278. (U) a$_e$) (GG$_{09}$) Gegeben ist die Funktion $f(x) = 0.1x(x-6)^2$ (Graph siehe Abbildung 52 c). Vervollständigen Sie die Wertetabelle - wo ist der Symmetriepunkt?

x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$0.1x \cdot (x-6)^2$											
t											

b$_e$) Bilden Sie die Summe aus $f(3)$ und $f(5)$; $f(2)$ und $f(6)$; $f(4-t)$ und $f(4+t)$. Welchen Zusammenhang sehen Sie zum Symmetriepunkt?

c$_r$) Sei f eine Funktion mit der Eigenschaft, dass $f($____$) + f($____$) =$ ____, dann ist K_f punktsymmetrisch (ps) zum Punkt $P(a|b)$. Das t muss w______________ **(Formel 102)** .

d$_b$) Zeigen Sie: K_f von $f(x) = \frac{x-4}{x-3}$ ist ps zu $P(3|1)$ ($f(x) = \frac{2x+3}{4-x}$ ist ps $P(4|-2)$).

e$_e$) **(Formel 65)** (1 PaG) Berechnen Sie die Mitte von $A(3|1)$ und $B(5|5)$.

Die Mitte zweier Punkte $P(x_p|y_p)$ und $Q(x_q|y_q)$ berechnen wir mit $M($____________$)$.

f$_e$) Berechnen Sie die Mitte M von $P(a-t|f(a-t))$ und $Q(a+t|f(a+t))$ für allgemeines f.

279. Zeigen Sie die Punktsymmetrie der Graphen der folgenden Fktn bezüglich des Punktes P.

(GG$_{10}$) a$_2$) $f(x) = (x-1)^3 + 2,\ P(1|2)$; b$_2$) $f(x) = \frac{1}{x-2},\ P(2|0)$; c$_2$) $f(x) = \frac{1}{x-3} + 2,\ P(3|2)$;
d$_2$) $f(x) = \frac{1+x}{1-x},\ P(1|-1)$; e$_2$) $f(x) = \frac{3+4x}{2x-2},\ P(1|2)$; f$_2$) $f(x) = \frac{5-6x}{2x+8},\ P(-4|-3)$;
g$_2$) $f(x) = \frac{2x-7}{6-4x}, P(1.5|?)$; h$_2$) $f(x) = \frac{3-2x}{6+4x}, P(\text{-}1.5|?)$; i$_2$) $f(x) = \frac{2+4x}{2-4x}, P(\frac{1}{2}|?)$;
j$_3$) $f(x) = \sqrt[3]{x+2} + 4, P(\text{-}2|4)$; k$_3$) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x, P(-2|-8)$;

L$_3$) Zeigen Sie die Punktsymmetrie von K_f mit $f(x) = 0.1x(x-6)^2$ zu $P(4|1.6)$ (siehe Ag 278).

m$_4$) Zeigen Sie, dass der Graph jeder Funktion der Form $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$ zum Punkt $P(\frac{-d}{c}|\frac{a}{c})$ punktsymmetrisch ist. P ist der Schnittpunkt ihrer A_______________.

n$_5$) Zeigen Sie, dass das Schaubild von $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$, $(a \neq 0)$ zum Punkt $W(\frac{-b}{3a}|f(\frac{-b}{3a}))$ punktsymmetrisch ist. W heißt Wendepunkt → 6.2.4.

5.4 Trigonometrische Funktionen (UE 10_4) + (UE 11_4)

Basisformeln: F 14, F 34, F 35, F 36, F 43, F 44, F 46, F 54. (KS$_{17}$:136-138)

Hier werden periodische Zusammenhänge modelliert

5.4.1 Die Additionstheoreme → 5.10.1 (auch Kl. 9 (GFS))

280. (Ü) Gegeben sei das Rechteck $ABCD$, sowie die kollinearen Punkte E, F, G (Abb. 108/53). Es gelte $\overline{AG} = 1$ und $\alpha = \sphericalangle BAF$ und $\beta = \sphericalangle FAG$.
a$_2$) Berechnen Sie die Winkel $\sphericalangle CFG$ und $\sphericalangle DGA$ abhängig von α und β.
b$_2$) Ber. Sie Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{AB}$ auf zwei Arten abhängig von α und β.
$\sin(\alpha \pm \beta) =$ ____________________ und $\cos(\alpha \pm \beta) =$ ____________________ **(Formel 100)** .
c$_2$) (FD 11) Berechnen Sie $\sin(90° - \alpha)$ $_f$ und $\cos(90° - \alpha)$;
d$_2$) Ber. Sie $\sin(\alpha + 360°)$ (bzw. $\cos(\alpha + 360°)$ und $\tan(\alpha + 360°)$). Was bedeutet Ihr Ergebnis?
e$_3$) Zeigen oder widerlegen Sie: $\sin(2 \cdot \alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$.

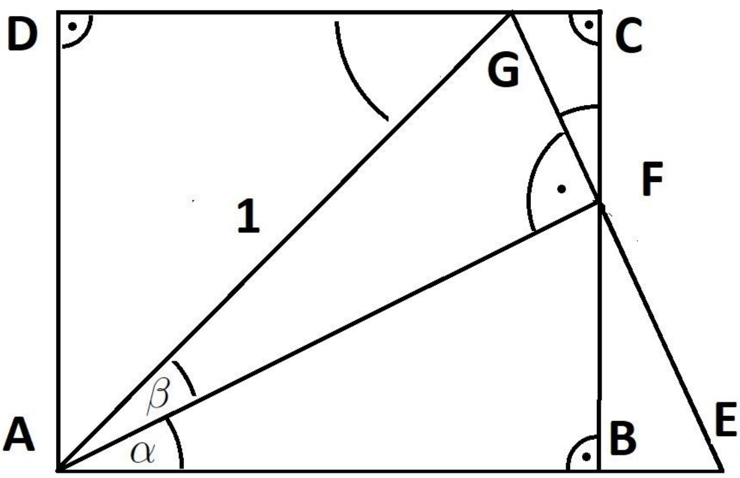
5.4.2 Das Bogenmaß und die Sinuskurve LS10: 166-169 + EM 6: 62-66 + KS$_{04}$ 159

281. (Ü) a$_e$) Wie berechnet man den Umfang eines Kreises mit Radius $r = 1$?
b$_r$) (FD 12) Wir definieren ein neues Winkelmaß, das Bogenmaß dabei entspricht 360° einem Bogenmaß von 2π, 180° einem Bogenmaß von ____ und 90° einem Bogenmaß von ____.
c$_e$) Rechnen Sie einen Winkel α (im Gradmaß) ins Bogenmaß um: $\frac{\alpha}{\quad} = \frac{x}{\quad}$ **(Formel 59)** .
d$_r$) Winkel im Gradmaß werden mit g______________ Buchstaben beschrieben, Winkel im Bogenmaß mit l______________ Buchstaben. In der Analysis werden Winkel im _______maß gemessen, in der Geometrie im _______maß.
e$_e$) Wie wechselt man beim WTR vom Bogenmaß aufs Gradmaß und umgekehrt.

α	0°	30°	45°	60°	90°
x					$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$					

f$_1$) Rechnen Sie $\alpha = 15°$, $\alpha = 75°$, und $x = \frac{\pi}{8}$, $x = \frac{3\pi}{8}$ in das jeweilig andere Maß um.

282. (Ü) **Die Tabelle:**$_e$ a$_e$) Füllen Sie die Tabelle analog zu Ag 241/618 aus **(Formel 35)** .
b$_2$) Berechnen Sie $\sin(\frac{2\pi}{3})$, $\sin(\frac{5\pi}{6})$, $\cos(\frac{\pi}{4})$ und $\cos(\frac{\pi}{3})$ exakt.
Zeigen Sie: c$_2$) $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$, d$_3$) $\sin(x + \frac{\pi}{4}) + \cos(x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cdot \cos(x)$.



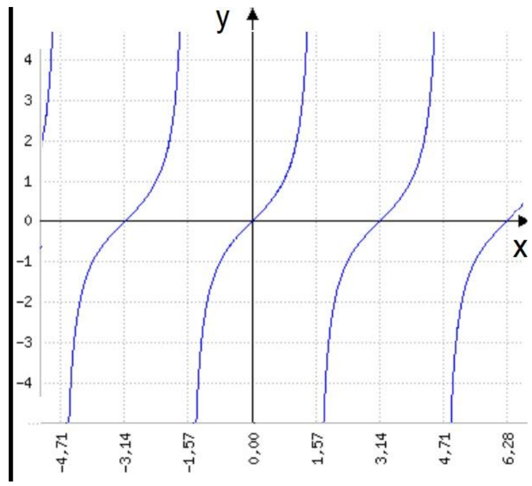
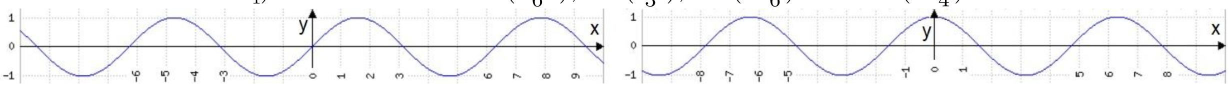


Abb. 53 Die Additionstheoreme   Graph von $f(x) = \tan(x)$

283. (GG) (Ü) a_e) Zeichnen Sie den Graphen von $f(x) = \sin(x)$ mit Hilfe der folgenden Wertetabelle

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{6\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{8\pi}{6}$	$\frac{9\pi}{6}$	$\frac{10\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{12\pi}{6}$
$\sin(x)$													
$\cos(x)$													

b_e) **Regel:** Das Schaubild einer Sinusfunktion sieht wie eine ___________ aus. Der Graph der Funktion $f(x) = \sin(x)$ w__________ sich immer wieder. Funktionen dieser Art nennt man p__________. Eine Welle hat die Breite ____. Berechnen Sie $\sin(\frac{\pi}{6})$ und $\sin(\frac{13\pi}{6})$; $\sin(\frac{\pi}{3})$ und $\sin(\frac{7\pi}{3})$; $\sin(\frac{\pi}{2})$ und $\sin(\frac{5\pi}{2})$; $\sin(\frac{2\pi}{3})$ und $\sin(\frac{8\pi}{3})$ und verallgemeinern Sie! $\sin(\_\_\_\_) = \sin(x)$, das heißt die Sinuskurve ist ____ periodisch. **c_e)** Zeichnen Sie auch den Graph der Funktion von $g(x) = \cos(x)$, d_2) Wie geht der Graph von $\cos(x)$ aus dem Graphen von $\sin(x)$ hervor? Beweisen Sie dies. e_1) Berechnen Sie $\sin(\frac{13\pi}{6})$, $\sin(\frac{7\pi}{3})$, $\sin(-\frac{\pi}{6})$ und $\sin(-\frac{\pi}{4})$ exakt.

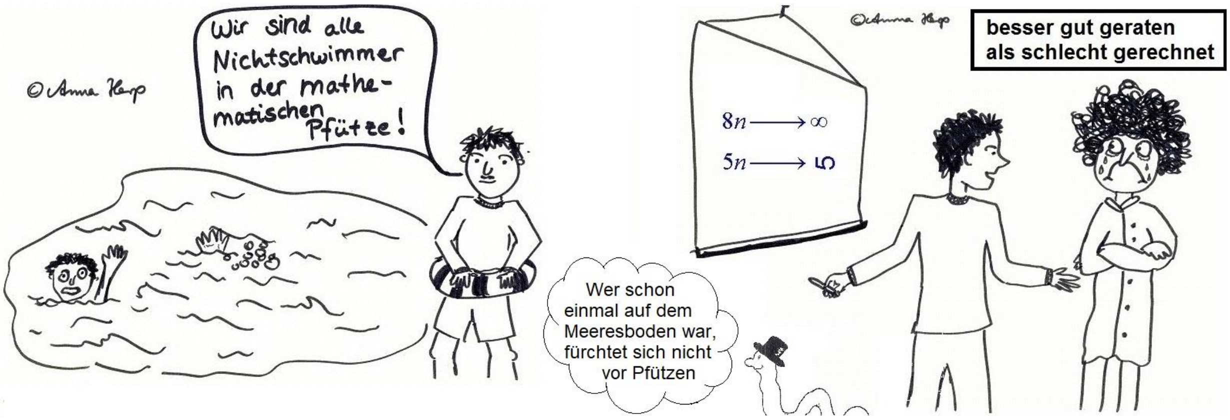


f_1) Lesen Sie aus den Schaubildern von $\sin(x)$ [später $\cos(x)$] alle Stellen ab, für welche $\sin(x) = 0$, $\sin(x) = 1$ oder $\sin(x) = -1$ gilt.

g_2) Zeigen Sie: Der Graph von $\cos(x)$ ist ___ periodisch; welche Periode hat $\tan(x)$?

h_4) (∗) Eine Fltn $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ heißt periodisch mit Periode $p > 0 \Leftrightarrow f(x) =$_______ für alle $x \in$ _.
Beweisen Sie: Sei f p periodisch und $n \in \mathbb{N}$, dann ist f auch ____ periodisch.

i_4) (∗) Das m___________ p dieser Art heißt die **Minimalperiode** (Definition nach Sd) der Funktion. Welche Minimalperiode haben $f_1(x) = \tan(4x)$, $f_2(x) = \cot(3x)$, $f_3(x) \equiv 7$?



5.4.3 Die Symmetrie trigonometrischer Funktionsgraphen EM6: S. 64-66

284. a) Welche spezielle Symmetrie erkennen Sie beim Graph von $\sin(x)$ (später $\cos(x)$)?
b_r) Der Graph von _______ ist achsensymmetrisch zu $x = 0 \Leftrightarrow$ _____$(-x)$ = ______.
c_r) Der Graph von ______ ist punktsymmetrisch zu $(0/0) \Leftrightarrow$ ______$(-x)$ = _______.

d_2) Beweisen Sie! Berechnen Sie dazu $f(-x)$ mit Hilfe der A__________. ↑ **(Formel 60)**

e_r) Wenn Sie die (spezielle) Symmetrie einer suchen, berechnen Sie einfach f(___).
Ist f(___)$=f(x)$, so ist der Graph von f, G_f __________symmetrisch (zur _____________);
ist f(___)$=-f(x)$, so ist G_f __________symmetrisch (zum _____________).
In jedem anderen Fall sagt man, dass _____________ Symmetrie erkennbar ist.

f) Finden Sie so die Symmetrie der Graphen der Fktn i_2) $x^3 - x$, ii_{2-3}) $\frac{x}{5+x^2}$ und iii_3) $|x|$.

285. (Ü) (∗) Das Schaubild einer Fkt f ist as zur Achse $x = a \Leftrightarrow$ ______________ für alle $t \in \mathbb{D}$ gilt.
a_2) Zeigen Sie, dass der Graph von $\cos(x)$ achsensymmetrisch (as) zur Achse $x = \pi$ ist.
b_3) Geben Sie alle Geraden an, bezüglich derer $K_{\cos(x)}$ as ist und zeigen Sie die Symmetrie.
c_2) Zeigen Sie, dass der Graph von $\sin(x)$ achsensymmetrisch zur Achse $x = \frac{\pi}{2}$ ist.
d_3) Geben Sie alle Geraden an, bezüglich derer $K_{\sin(x)}$ as ist und zeigen Sie die Symmetrie.
e_e) Was ist $(-1)^k$, $(k \in \mathbb{Z})$? Klären Sie den Zusammenhang zu $\cos(k\pi)$, $(k \in \mathbb{Z})$.

286. (Ⓤ) (∗) Der Graph einer Fktn f ist ps zu $P(a/b) \Leftrightarrow$ __________________ für alle $t \in \mathbb{D}$ gilt.
a$_2$) Zeigen Sie, dass der Graph von $\sin(x)$ punktsymmetrisch (ps) zum Punkt $P(\pi/0)$ ist.
b$_3$) Geben Sie alle Punkte an, bezüglich derer $K_{\sin(x)}$ ps ist und zeigen Sie die Symmetrie.
c$_2$) Zeigen Sie, dass der Graph von $\cos(x)$ punktsymmetrisch zum Punkt $P(\frac{\pi}{2};0)$ ist.
d$_3$) Geben Sie alle Punkte an, bezüglich derer $K_{\cos(x)}$ ps ist und zeigen Sie die Symmetrie.

5.4.4 Charakteristika trig. Fktn → 14.10.1

KS$_{09}$: 153; EM6: 69-80; KS$_{04}$: 173-174

287. Zeichnen Sie den Graph von $\sin(x)$ und $2 \cdot \sin(x)$ in ein Koordinatensystem. Erklären Sie die Wirkung des Vorfaktors 2. Geben Sie alle Vorfaktoren aus Abb 110/54 (welche davon ?) an.

288. (U) a$_e$) Ordnen Sie den Graphen aus Abbildung 110/54 die Terme $\sin(x)$, $\sin(2x)$, $\sin(4x)$ zu. Wie lautet der Term des letzten Schaubildes? **b$_e$)** Was bewirkt der Faktor b beim Graphen von $\sin(bx)$. Wie hängen die F__________ b und P__________ p zusammen?
c$_r$) $f(x) = a\sin(b(x-c)) + d$ ist eine trigonometrische Funktion (e: *trigonometric function*). Dabei heißt a _______________, b _______________, c _________________________ und d _______________. Für die Periode p gilt: $p =$__________ **(Formel 61)** . (GG)

289. (KA$_G$) Wie entstehen die Graphen der folgenden Fktn aus dem Graph von $\sin(x) = G_{\sin(x)}$? (GG) a) i) $2 \cdot \sin(x)$, ii) $a \cdot \sin(x)$; b) i) $\sin(2 \cdot x)$, ii) $\sin(b \cdot x)$; c) i) $a \cdot \sin(b(x-c)) + d$;
a$_r$) Sei a___: $G_{a\sin(x)}$ entsteht aus $G_{\sin(x)}$ durch S____________ mit dem Faktor __ in __-Richtung.
b$_r$) Sei b___: $G_{\sin(bx)}$ entsteht aus $G_{\sin(x)}$ durch S____________ mit dem Faktor __ in __-Richtung.
c$_r$) Seien $a, b \neq 0$: $G_{a\sin(b(x-c))+d}$ entsteht aus $G_{\sin(x)}$ durch S________ mit dem Faktor __ in __-Richtung und durch S________ mit dem Faktor __ in __-Richtung. Falls $a < 0$ wird an der ___-Achse ____________, falls $b < 0$ an der __-Achse. Der resultierende Graph wird (d________) um __ in x-Richtung und um __ in y-Richtung v_________. Erst _________, dann _________.
(T) **d$_1$)** i) $\sin(x-1)+2$, ii) $\sin(x-2)+1$, iii) $\sin(2(x-1))+1$, iv) $2 \cdot \sin(x-1)+1$;
e$_{1-2}$) i) $\sin(x-1)+1$, ii) $2 \cdot \sin(2x-2)+2$, iii) $3 \cdot \sin(3x-3)+3$, iv) $4 \cdot \sin(4x-4)+4$,
f$_2$) ⓘ) $2\sin(\frac{\pi}{2}x+\pi)+2$, ii) $3\sin(\frac{\pi}{3}x+\pi)+3$, iii) $4\sin(\frac{\pi}{4}x+\pi)+4$, iv) $6\sin(\frac{\pi}{6}x+\pi)+6$;
g$_2$) i) $(-3)\sin(2x+4)+5$, ii) $3 \cdot \sin(-2x+4)+5$, iii) $3 \cdot \sin(2x-4)+5$, iv) $3 \cdot \sin(2x+4)-5$, v) $(-3) \cdot \sin(-2x-4)+5$, vi) $(-3)\sin(-2x+4)-5$, vii) $(-3)\sin(2x-4)-5$, viii) $3\sin(-2x-4)-5$;
h$_{3-4}$) (Wiederholung): $\cos(x-\frac{\pi}{2}) =$ ___________, $\sin($___________$) = \cos(x)$ i) $\cos(x)$, ii) $\cos(x)+2$, iii) $2 \cdot \cos(x)$, iv) $\cos(x+2)$, v) $\cos(2 \cdot x)$, vi) $\cos(2x-2)$, vii) $2\cos(2x+2)$;
($\bar{T}$) $\boxed{ⓘ_2}$) $4\sin(2x-4)+3$; $\boxed{ⓙ_2}$) $4-8\sin(-\pi x+2\pi)$; k'$_{2,\bar{T}}$) $-4-2\sin(-4-8x)$;
ⓛ$_2$) $3-2\sin(8x+4)$; ⓜ$_2$) $-2(1+2\sin(\pi-\pi x))$; ⓝ$_2$) $5-2\sin(3x+9)$; ⓞ$_2$) $3\sin(8-4x)-5$;
ⓟ$_3$) (≈ Abi 2012) Sei $f(x) = 3\sin(x)$. Wie lautet der Term der Fktn K_g, die durch Spiegelung von K_f an der Geraden $y = 2$ entsteht?

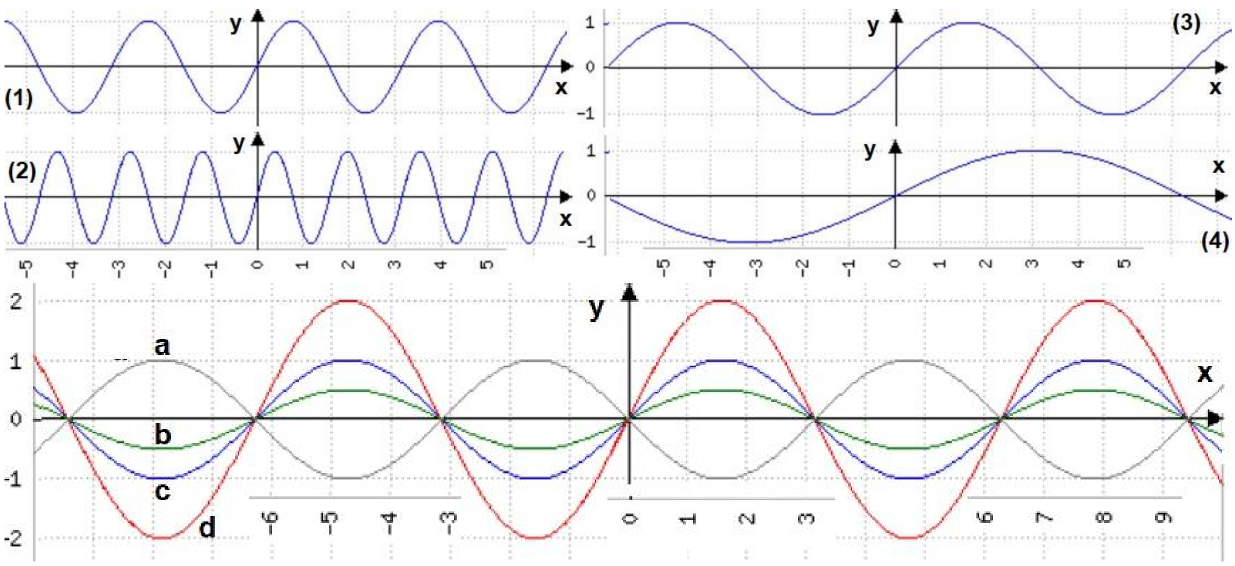
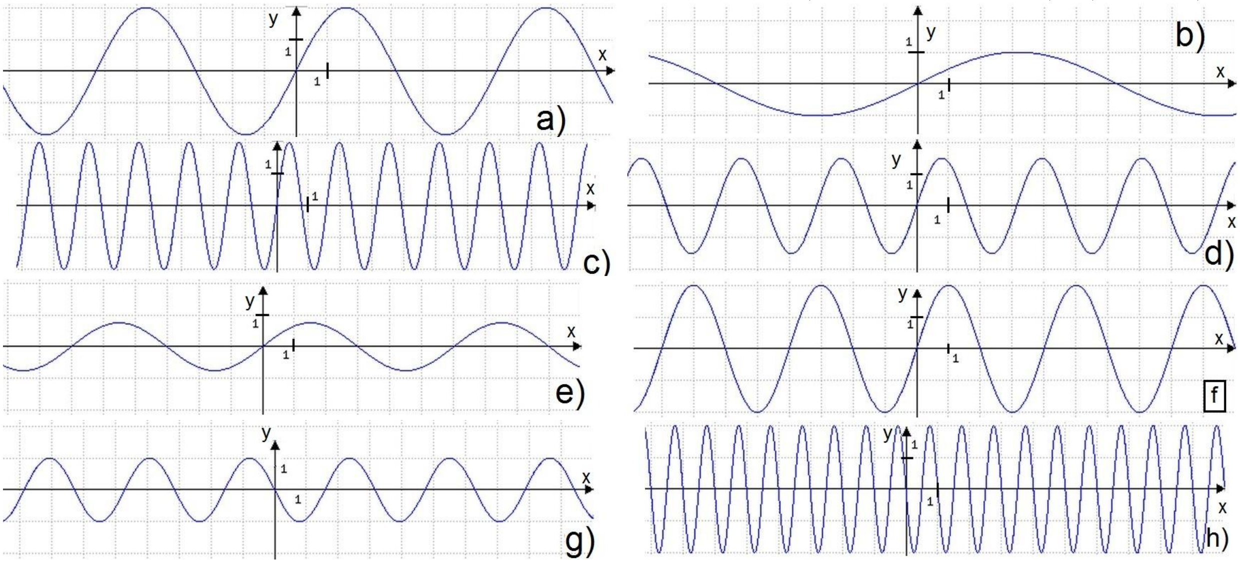


Abb. 54 Frequenz und Amplitude trigonometrischer Funktionen

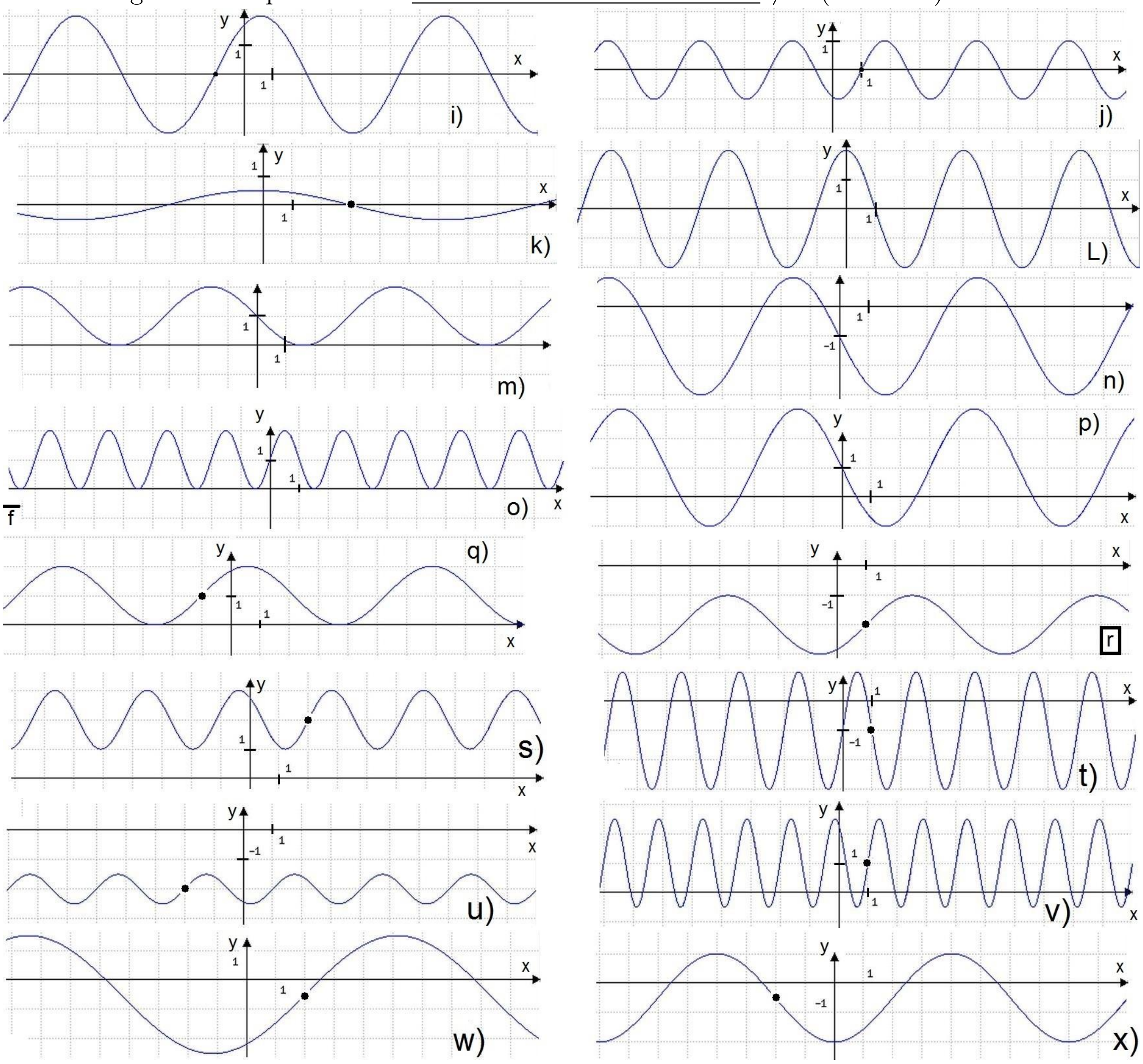
5.4.5 Ablesen trigonometrischer Funktionsterme

LS10: S. 173-179

290. (Ⓤ)(KA_G) Bestimmen Sie zu jedem Graphen (einer allgemeinen Sinusfkt) Amplitude und Periode und geben Sie damit den zugehörigen Funktionsterm an (alle Ag Niveau 1-2) (Abb. 55).



Bei den folgenden Graphen ist die ________________________ $\neq 0$ (Niveau 2):



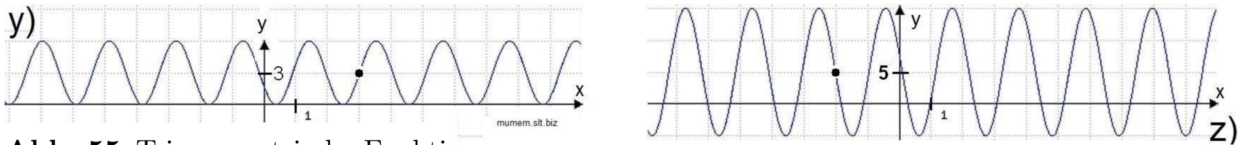


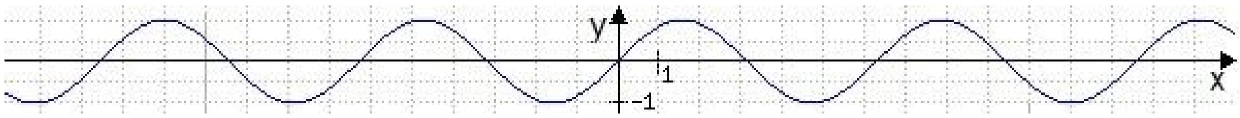
Abb. 55 Trigonometrische Funktionen

ii) Bestimmen Sie auch zu jedem Graphen einen Term der Form $f(x) = a \cdot \cos(b(x-c)) + d$.

5.4.6 Auflösen trig. Gleichungen → 14.10.2

EM6: 68; KS_{04}: 193-194

291. (U) a_e) Lösen Sie die Gleichung $\sin(x) = \frac{1}{2}$ zeichnerisch.



b_e) Klassifizieren Sie Ihre gefundenen Lösungen. Wieviele und welche Gruppen erhalten Sie?

c_e) Für welche reellen x gilt $\sin(x) = \frac{1}{2}$ (gesucht sind alle reellen Lösungen) **(Formel 36)** ?
$\sin(x) = \sin(\pi\_\_\_\_)$ später $\cos(x) = \cos(\quad \pi\_\_\_\_)$. d_1) Welche Lösungen liegen in $[0; 2\pi]$?

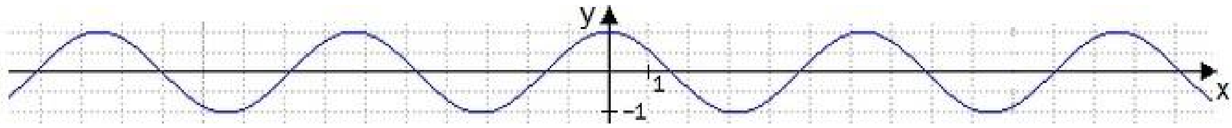
e_r) **Algorithmus** zur Lösung der Gleichung $\sin(x) = a$ für ____ a ____:

1) Die Gleichung nach x auflösen: $x_1 =$ _______.

2) x_1 eventuell in π Teile umrechnen $x = \frac{\alpha \cdot 2\pi}{360}$.

3) $x_2 =$ _________. **4)** $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x =$ ____________ oder $x =$ ____________, $k \in \mathbb{Z}\}$.

292. (Ü) a_e) Für welche reellen x gilt $\cos(x) = \frac{1}{2}$? b_1) Welche Lösungen liegen in $[0; 2\pi]$?



Berechnen Sie alle x, für die c_1) $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ d_1) $\cos(x) = 0$; e_2) $\cos(\pi x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
f_3) $\cos^2(x) = \cos(x)$; g_3) $\sin(x)\cos(x) = \sin(x)$; ist.

293. (KA_G) Lösen Sie nach x ($x \in \mathbb{R}$) auf (T): a_1) i) $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; ii) $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

b_1) i) $\sin(x) = -1$; $\boxed{\text{ii)}}$ $\sin(x) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$; iii) $\sin(x) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$; iv) $\sin(x) = \frac{-1}{2}$; v) $\sin(x) = 0$;

c_2) i) $\cos(x) = -1$; ii) $\cos(x) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$; iii) $\cos(x) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$; iv) $\cos(x) = \frac{-1}{2}$; v) $\cos(x) = 0$;

d_3) i) $\sin(\frac{x}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; ii) $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; iii) $\sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; iv) $\sin(4x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; v) $\sin(-2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
vi) $\cos(\frac{x}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; vii) $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; viii) $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; ix) $\cos(4x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; x) $\cos(-2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

e_{2-3}) Welche Lösungen aus Teil d) liegen in i) $[0; 2\pi]$, ii) $[0; 4\pi]$, iii) $[-\pi; \pi]$, iv) $[-2\pi; 2\pi]$?

f_3) i) $2\sin(x) = 1$; ii) $\sin(2x) = 1$; iii) $\sin(x+2) = 1$; iv) $\sin(x) + 2 = 1$; v) $\sin(x) = 2$;

g_3) i) $\sin(2x-4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; ii) $\sin(2x+4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; iii) $\sin(-2x+4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; iv) $\cos(2x-4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

h_3) i) $\sin^2(x) + 2 = 3\sin(x)$; ii) $\sin^2(x) + 2\sin(x) = 3$; iii) $2\sin^2(x) + 1 = 3\sin(x)$;

i_3) **i)** $x \cdot \sin(x) = x$; **ii)** $x \cdot \sin(x) = \sin(x)$; $\boxed{\textbf{iii)}}$ $x^2 \cdot \sin(x) = x \cdot \sin(x)$; **iv***) $x^2 \cdot \sin(x) = x \cdot \sin^2(x)$;

v) $x \cdot \sin(2x) = x$; **vi)** $x \cdot \sin(4x) = x$; **vii)** $x \cdot \sin(6x) = x$; **viii)** $x \cdot \sin(8x) = x$;

Vorübung: Lösen Sie die Gleichungen: i) $x^2 - x = 0$ ii) $x^3 - x = 0$, iii) $x^4 = 4 \cdot x^2$;

j_3) **i)** $\sin(x) \cdot \cos(x) = 0$; **ii)** $\sin(x)\cos(x) = 2\sin(x)$; **iii)** $\sin(x) = \cos(x)$; **iv)** $\sin(x) = 2\sin(x)\cos(x)$;

k_3) i) $\sin^2(x) = \sin(x)$; ii) $\sin^2(x) = 2\sin(x)$; iii) $2\sin^2(x) = \sin(x)$; iv) $2\sin^2(x) + \sin(x) = 0$;

L_3) i) $\sin^4(x) = \sin^2(x)$; ii) $2\sin^4(x) = \sin^2(x)$; iii) $4\sin^4(x) = \sin^2(x)$; iv) $4\cos^4(x) = \cos^2(x)$;

m_4) i) $4\sin(x) \cdot \cos^2(x) = \sin(x)$; ii) $2\cos^2(x) + 3\sin(x) = 3$ **n)** Welche Lösungen liegen in $[0; 2\pi]$?

294. (Ü) Wie findet man die Lösung im Intervall $[0; 2\pi]$, wenn eine Gleichung allgemein gelöst wurde? a$_e$) Dazu verwende man eine W____________ mit variablem _ und gerundeten Werten. Oft beginnt diese bei $k =$ _ und endet bei der Fr______. Jeder Wert zwischen 0 und ___ gehört zur Lösung. Die Anzahl der Lösungen im $[0; 2\pi]$ ist meist _ · _. b$_3$) Berechnen Sie So alle Lösungen von $\sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin(2x + 4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin(2x - 4) = -\frac{1}{2}$.

5.4.7 Praktische Aufgaben (KA$_G$)

LS10: S. 180-183 + KS$_{09}$ S. 156-157

295. (Ü) a$_e$) Nördlich des Polarkreises gibt es Tage, an welchen die Sonne nicht untergeht. An einem Sommertag in Tromsö (Norwegen) beobachten wir folgende Sonnenstände: Um 1.00 Uhr hatte die Sonne ihren tiefsten Stand (5° über dem Horizont) - um 13.00 stand sie am höchsten und es waren 55° über dem Horizont. Wie hoch stand die Sonne um 9.00 Uhr morgens? ↓**(Formel 62)**.

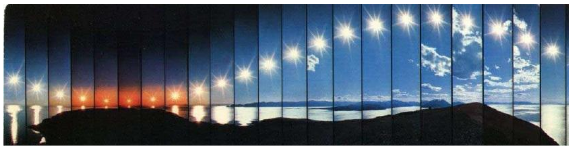


Abb. 56 *Sonnenstände aus www.jahreiss.eu*

b$_e$) Gegeben seien ein Minimum (Tiefpunkt) $T(x_t; y_t)$ und ein d______________ f______________ Maximum (Hochpunkt) $H(x_h; y_h)$ einer allgemeinen Sinuskurve. Berechnen Sie a, b, c, d und p.
$a =$ ________________, $p =$ ________________, $c =$ ________________, $d =$ ________________.

c$_{3;f}$) Berechnen Sie die Koeffizienten, falls i) $H(2; 7)$ und $T(4; 3)$ und $p > 3$ gilt; ii) $T_2(2; 3)$ und $H_2(14; 5)$ und wobei bekannt ist, dass zwischen T_2 und H_2 noch genau ein weiter Hochpunkt liegt.

d$_2$) An einem Sommertag wurden in Stuttgart um 14.00 Uhr 30°C gemessen. Dies war die höchste Temperatur des Tages. Am frühen Morgen betrug die tiefste Temperatur 16°C. Im Folgenden wird angenommen, die Funktion: $f(x) = a \cdot \sin(b(x - c)) + d$ beschreibe die Temperatur (in °C) an diesem Tag in Abhängigkeit von der Zeit x (in Stunden nach Mitternacht). Bestimmen Sie a, b, c, d. Wie warm war es in Stuttgart an diesem Tag um 10.00 Uhr?

e$_2$) Wir betrachten den Tidenhub (Ebbe und Flut) der Elbe in der Stadt Hamburg. Den höchsten Stand hatte die Elbe um 13.00 Uhr mit 4,5m, den tiefsten Stand 6 Stunden später mit 1,5m Höhe. Modellieren Sie den Wasserstand als Funktion der Form $f(x) = a \cdot \sin(b(x - c)) + d$. Wie hoch war der Wasserstand um 11.00 Uhr?

$\boxed{\textbf{f}_2}$) Die Wassertemperatur $w(t)$ (t in Stunden nach 0 Uhr, $w(t)$ in °C) eines Badesees kann in den Sommermonaten näherungsweise als (täglich) periodisch (Form: $f(x) = a \cdot \sin(b(x - c)) + d$) angesehen werden. Aus einem Messprotokoll entnehmen wir die Werte: $w(3) = 12$, $w(9) = 15$, $w(11) = 16.5$. Es ist bekannt, dass die Temperatur des Sees zwischen 12°C und 18°C schwankt. Wie warm ist es in dem See um 19.00 Uhr?

g$_2$) Die Pegelstände eines Hochwassers können näherungsweise durch eine trigonometrische Fktn beschrieben werden. Am 3.3. um 18.00 Uhr war der Pegelhöchststand mit $8m$, zu Mittag am 4.3. Tiefststand mit $4m$. Wie hoch war der Pegelstand am 4.3. um 0 Uhr, um 3 Uhr und um 6 Uhr?

h$_2$) Im Verlauf eines Schaltjahres (366 Tage) ändert sich aufgrund der geneigten Erdachse die astronomische Sonnenscheindauer. In unseren Breiten ist die Sonne am 22.6. (173 Tage nach Neujahr) mit ca. 16 Stunden am längsten und am 22.12. (356 Tage nach Neujahr) mit ca. 8 Stunden am kürzesten zu sehen (wenn gutes Wetter ist). Stellen Sie die Funktionsgleichung einer trigonometrischen Funktion auf, die die Tageslänge im Verlauf eines Jahres angibt.

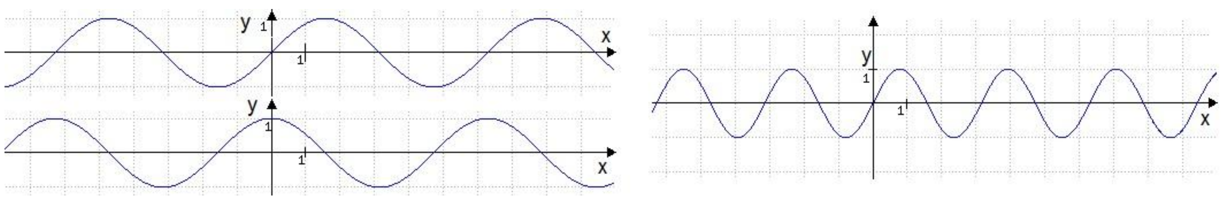


Abb. 57 Skizzieren der Ableitung trigonometrischer Funktionen

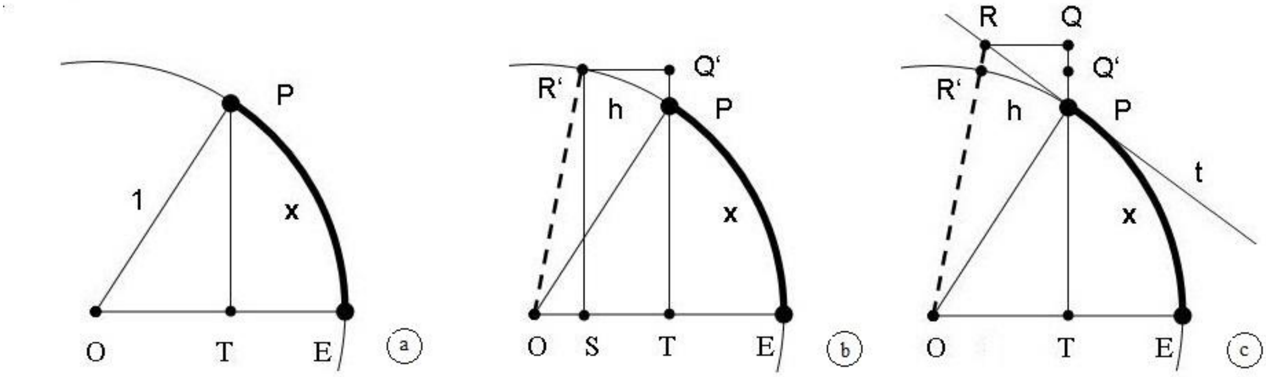


Abb. 58 Betrachtungen am Einheitskreis

5.4.8 Die Ableitung trig. Fktn. (LP) (GFS) EM6: 148-149; LS11: S.142-150+153

296. (Ü) (GG) a$_e$) Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion der trigonometrischen Fktn (Abb. 57 a+b) mit der Technik von Ag 142/348. Welche Ableitungsfunktion vermuten Sie? $(\sin(x))' =$ ________; $(\cos(x))' =$ ________. **(Formel 63, FD 14)**

b$_1$) Leiten Sie ab: i) $f(x) = 2\sin(x) + 5\cos(x) + 2x^2$, ii) $f(x) = 3\cos(x) - 1 - 2\sin(x)$.

Skizzieren Sie jetzt den Graphen der Ableitungsfunktion aus Abb. 57 c. Verallgemeinern Sie! $(\sin(2x))' =$ __________; $(\sin(ax))' =$ __________; $(\cos(ax))' =$ __________ (← F63 ↓).

(Nach UE 10_6): c$_r$) $(\sin(bx + c))' =$ ____________; $(\cos(bx + c))' =$ ____________.

Ber. Sie von den folgenden Fktn die Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte in $[0; 2\pi]$:

d$_2$) $f(x) = \sin(x)$-0.5; e$_2$) $f(x) = \cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}$; f$_3$) $f(x) = \sin(2x)$-$\frac{\sqrt{2}}{2}$; **g$_3$)** $f(x) = 2\cos(\frac{x}{2})$-1;
h$_4$) $f(x) = 2\sin(2x - 4) + 1$; i$_4$) $f(x) = -\sqrt{2}\cos(6 - 3x) + 1$; j$_4$) $f(x) = x - \sin(4 - 2x)$;

297. (Zusatz) a$_1$) Es gilt $(\sin(x))' = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin(\_\_\_\_) - \sin(\_)}{h} =$ ________. Dies wollen wir begründen.

b$_e$) Betrachten wir zunächst den Ausschnitt des Einheitskreises in Abbildung 58a, das heißt $\overline{OP} = \overline{OE} =$ _____. Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Winkel $\sphericalangle EOP$ (im Bogenmaß) und der Bogenlänge x? $\sphericalangle EOP =$ _____.

Bestimmen Sie die Längen abhängig von x: $\overline{OT} =$ __________, $\overline{PT} =$ __________.

c$_e$) Nun vergrößern wir den Bogen x um h (Abbildung 58b). Dabei soll h klein sein. Bestimmen Sie folgende Größen in Abhängigkeit von x und h (Winkel immer im Bogenmaß).
$\sphericalangle EOR' =$ _____, $\overline{R'S} = \overline{Q'T} =$ __________, $\overline{PQ'} =$ ____________________, $\overline{PR'} \approx$ ___.

d$_e$) Sei t die Tangente in P an den Einheitskreis (siehe Abbildung 58c). In welcher Beziehung steht die Strecke OP zur Tangente t? Zeigen Sie, ΔOTP ist ähnlich zum ΔPQR. Damit sind entsprechende Seitenverhältnisse gleich. Markieren Sie die einander entsprechenden Dreiecksseiten mit Farbe. Ergänzen Sie die fehlenden Punkte in der Verhältnisgleichung: $\frac{\overline{OT}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{P\_\_}}{\overline{P\_\_}}$

e$_e$) Begründen Sie, dass für ein kleines $h > 0$ $R' \approx R$ und $Q' \approx Q$ ist. Mit dieser Eigenschaft gilt $\overline{PQ} \approx \overline{PQ'} =$ ________________________, $\overline{PR} \approx \overline{PR'} \approx$ _____. Formulieren Sie die Verhältnisgleichung mit diesen Näherungswerten. Welche Beziehung folgt daraus für $h \to 0$?

5.4.9 Trigonometrische Funktionen im (schriftlichen) Abitur (KA$_G$)

298. (≈ PT ohne WTR aus MK) a$_3$) (2002 im Bogenmaß) Sortieren Sie $\sin(0), \sin(1), \sin(2), \sin(3)$.
b$_3$) (2007 im Gradmaß) Berechnen Sie $\cos(1°) + \cos(2°) + .. + \cos(358°) + \cos(359°)$.
c$_1$) (2008) Welchen Wert kann $f(x) = 5\sin(2x + 6) - 3$ maximal annehmen?

299. (Ü) (≈ Abi 2004) Die Geschwindigkeit eines Schwimmers schwankt periodisch um einen Wert. Messungen beim Training haben gezeigt, dass sich die Bewegung näherungsweise durch die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion v mit $v(t) = 0.4\sin(12t) + 1.5$ beschreiben lässt (Zeit t in s, Geschwindigkeit v in m/s). a_1) Bestimmen Sie die Periodendauer von v.
b_1) Zwischen welchen Werten schwankt die Geschwindigkeit des Schwimmers (BAg 110/288).
c_1) (Nach UE 10_6) Zu welchen Zeitpunkten nimmt die Geschwindigkeit am stärksten ab?
d_2) Welchen Weg legt der Schwimmer innerhalb von 50 Perioden zurück?
$\text{e}_{2,L}$) I*) Formulieren Sie eine Frage im Sachzusammenhang, die auf die Gleichung $\frac{1}{2}\int_x^{x+2} v(t)dt = 1.5$ führt.

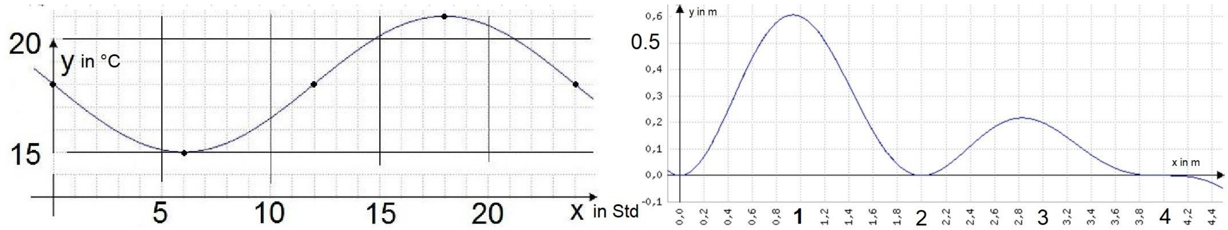


Abb. 59 a) Innentemperaturverlauf b) Minigolfbahn K_g aus Ag. 115/301 → S.1011

300. (Ü)(≈ Abi 2008) Der Temperaturverlauf außerhalb eines Hauses während eines Tages kann durch eine Funktion f mit $f(x) = 8\sin(\frac{\pi}{12}(x - 8.5)) + 21$ $(0 \le x \le 24)$ beschrieben werden (x in Stunden nach Mitternacht, $f(x)$ in $°C$).
a_1) (Erst nach UE 10_6) Zu welcher Uhrzeit ist die Temperatur minimal bzw. maximal?
b_1) Wie viele Stunden an diesem Tag beträgt die Temperatur höchstens $17°C$?
c_1) (Nach UE 10_6) Wie groß ist der maximale Temperaturanstieg? **d_2)** Bestimmen Sie einen Term der Fkt. g, der den Innenentemperaturverlauf (Abb. 59a) wiedergibt.
e_2) Beschreiben Sie, wie K_g aus dem Schaubild der Sinusfunktion mit $y = \sin x$ entsteht.
f_1) Bestimmen Sie die durchschnittliche Temperatur im Haus zwischen 0 und 24 Uhr.

301. (Ü)(≈ Abi 2010) Gegeben sind die Funktionen f und g durch $f(x) = 1 - \cos(\pi \cdot x)$ und $g(x) = 0.1 \cdot (4 - x) \cdot f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Ihre Schaubilder seien K_f und K_g (siehe Abb. 115/59b).

a_2) Geben Sie alle Nullstellen der Funktion f an. **b_2)** Beschreiben Sie, wie man K_f aus dem Schaubild der Kosinusfunktion erhalten kann. **c_2)** Stellen Sie f als Sinusfunktion dar.

K_g beschreibt im Bereich $0 \le x \le 4$ die Seitenansicht einer Minigolfbahn, die eine Doppelwelle als Hindernis enthält (Längenangaben in Meter). Gespielt wird von links nach rechts. Die Bahn befindet sich bei einer Sporthalle, in der am 22.03.2019 das Fussballspiel L-S 4:1 ausgegangen ist.

nach UE 10_6 : **d_1)** *Bestimmen* Sie den höchsten Punkt der Bahn. **e_2)** *Bestimmen* Sie, an welcher Stelle der Bahn die größte Steigung überwunden werden muss. Wie groß ist diese?
$\text{f}_{3,L}$) I*) Die Minigolfbahn ist 1.25 m breit. Nach einem schweren Regenguss steht das Wasser zwischen beiden Wellen 10 cm hoch. *Bestimmen* Sie, wieviele Liter Wasser sich dort gesammelt haben.
g_2) Das Hindernis der Minigolfbahn soll im gleichen Bereich neu gestaltet werden. Das neue Hindernis soll vier jeweils 40cm hohe Wellen erhalten. Am Anfang und Ende soll das Hindernis waagrecht und auf der gleichen Höhe wie bisher enden. *Bestimmen* Sie einen Term einer Funktion, die den neuen Bahnverlauf beschreibt.

302. (Ü) $\boxed{\text{(≈ Abi 2011)}}$ Ein Staubecken wird zur Zeit der Schneeschmelze gefüllt. Da die Schneeschmelze temperaturabhängig ist, kann die momentane Zuflussrate des Wassers durch die Funktion f mit $f(t) = 50 \cdot \sin(\frac{\pi}{12} \cdot t) + 60, \quad 0 \le t \le 24$ beschrieben werden (t in Stunden seit Beobachtungsbeginn, $f(t)$ in $\frac{m^3}{h}$; achten Sie auf die Einheit von _____).
a_1) In welchem Zeitraum ist die momentane Zuflussrate größer als 85 $\frac{m^3}{h}$?
b_1) (Nach UE 10_6) Zu welchem Zeitpunkt nimmt die momentane Zuflussrate am stärksten ab?
c_1) Sei $F_c(t) = -\frac{600}{\pi} \cdot \cos(\frac{\pi}{12} \cdot t) + 60t + c$; zeigen Sie, dass $F_c'(t) = f(t)$ für alle $c \in \mathbb{R}$ ist.

$F_c(t)$ ist eine Wassermenge mit der Einheit ____, $f(t)$ ist die m_______________ Zuflussr______.
d_2) Berechnen Sie c so, dass das Staubecken zu Beobachtungsbeginn 5000 m^3 Wasser enthält.

e$_1$) Wieviel Wasser enthält es nach 24 Stunden?
f$_{2,L}$) (GTR) Nach welcher Zeit sind $6991m^3$ Wasser im Becken?

303. (Ü) (BD = Abi 2011, ab UE 10_6) Für jedes $a > 0$ ist eine Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = a\sin(ax)+a$, $x \in \mathbb{R}$; f_a hat das Schaubild K_a und die Periode p_a; Formeln: 35, 36, 58, 59, 63, 69.

a$_{2,L}$) Bestimmen Sie die Koordinaten des Hochpunkts H_a von K_a für $0 \le x < p_a$ (BAg 145/359).

b$_{3,L}$) Ermitteln Sie eine Gleichung der Kurve, auf der alle Punkte H_a liegen (BAg 156/401).

c$_{4,L}$) Geben Sie in Abhängigkeit von a die Koordinaten des Wendepunkts W_a von K_a an, der den kleinsten positiven x-Wert hat (BAg 148/370), Formel 71.

d$_3$) Nach UE 11_3: Die Tangente in $W_a(\frac{\pi}{a}; a)$ an K_a schließt mit den Koordinatenachsen eine Fläche ein. Zeigen Sie, dass der Inhalt dieser Fläche unabhängig von a ist (BAg 141/343).

304. (Ü) Nach der UE 10_6 zu bearbeiten: (= Abi 2014) **a**$_{2,L}$) Für jedes $a > 0$ ist eine Funktion f gegeben durch $f(x) = a\cos(x)+a^2$ für $-\pi < x < \pi$. Der Graph von f besitzt einen Extrempunkt. Bestimmen Sie dessen Koordinaten. **b**$_{4,L}$) Durch welche Punkte der $y-$Achse verläuft kein Graph G_a?

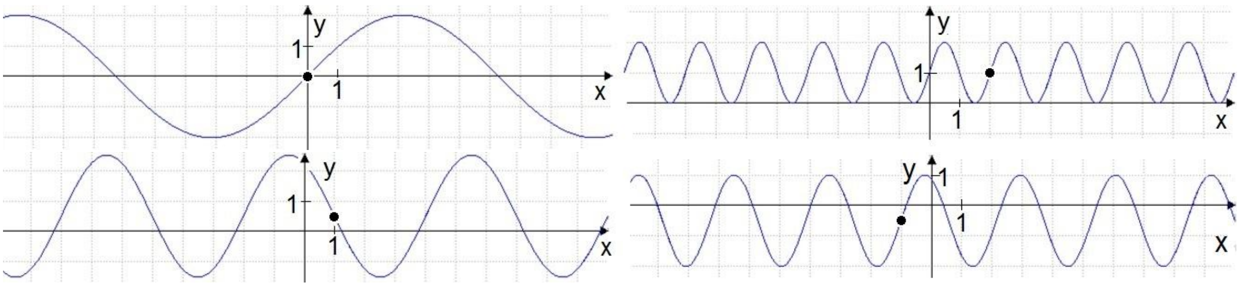


Abb. 60 Trigonometrische Funktionen (F 61)

305. (**Minimalanforderung** UE 10_4): a$_f$) Eine trigonometrische Funktion der Form $f(x) = a \cdot \sin(b(x-c)) + d$ hat in T einen ihrer tiefsten Punkte und in H einen direkt folgenden höchsten Punkt. Berechnen Sie a, b, c, d. **i)**$_f$ $T(-\frac{\pi}{2}/-2)$, $H(\frac{\pi}{2}/2)$; **ii)** $T(1/-3)$, $H(4/7)$; **iii)** $H(4;6)$, $T(8;2)$ (hier folgt T direkt auf H). (F 62)
b) Lösen Sie die trigonometrische Gleichung im Intervall $[0, 2\pi]$: **i)** $\sin(x) = 0$; **ii)** $\cos(x) = 0$; **iii)**$_f$ $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; **iv)**$_f$ $\cos(x) = -\frac{1}{2}$; **v)**$_f$ $\sin(x) \cdot \cos(x) = 0$; **vi)** $\sin^2(x) - \sin(x) = 0$; (F 36)
c) Bestimmen Sie zu jedem Graphen (einer allgemeinen Sinusfunktion $f(x) = a\sin(b(x-c))+d$) aus Abb. 60 Amplitude und Periode und geben Sie damit den zugehörigen Funktionsterm an.

d) Welche (speziellen) Symmetrien haben die Schaubilder von $\sin(x)$ und $\cos(x)$?
Welche algebraischen Eigenschaften folgen daraus? (F 60)

5.5 Gebrochenrationale Funktionen (UE 11_4) (nur LK)

Vor.: Ag 33/68, Abs. 94/5.2.4, **Basisformeln:** F 11, F 19, F 23, F 43, F 44, F 46, F 56, F 57.

5.5.1 Polstellen → 14.9.2 + 14.9.4 KS$_{17}$: 123-125 + KS$_{09}$: 135-136 ohne Ag2

306. (Ü)a$_e$) Zeichnen Sie den Graph von $f(x) = \frac{1}{x}$ für $-2 \le x \le 2$. Was fällt Ihnen auf? Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen in der Nähe von $x = 0$. An einer Polstelle hat $f(x)$ den Funktionswert ___.

x	-2	-1	-0.1	-0.01	0	0.01	0.1	1	2
$f(x) = 1/x$									

b$_r$) i) Eine Fkt $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ wobei $p(x)$ und $q(x)$ g______________ Funktionen sind, heißt **gebrochenrationale** Funktion (e: *rational f.*) Ihr induzierter Defintionsbereich ist $\{x \in \mathbb{R}|$_______$\}$.
ii) Wenn $q(x_0)$ ___ und $p(x_0)$ ___, dann hat $f(x)$ bei $x = x_0$ eine Polstelle.
iii) Gilt die Umkehrung f hat bei $x = x_0$ eine Polstelle $\Rightarrow q(x_0) = 0$ und $p(x_0) \neq 0$ auch?

c$_e$) Ordnen Sie jedem der Funktionsterme $f_1(x) = \frac{1}{x^2}$, $f_2(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}$, $f_3(x) = \frac{1}{x}$, $f_4(x) = \frac{-1}{x\cdot(x-2)}$ und $f_5(x) = \frac{1}{(x+2)\cdot x^2\cdot(x-2)}$ ein Schaubild aus Abb. 61 zu.

5.15 Der Zwischenwertsatz

5.15.1 Satz: Der Zwischenwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit f stetig, $f(a) = c$ und $f(b) = d$, dann gilt im Falle $c \le d$ ($c > d$ analog):
Zu jedem $\eta \in [c, d]$ existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \eta$ ($\forall \eta \in [c, d]\ \exists \xi \in [a, b] : f(\xi) = \eta$),
siehe Abb. 76 d). Beweis: Aufgabe 152/386 im Abschnitt 6.2.6.

5.15.2 Satz: Der Beweis der Methode von Knapp

Die Methode nach Knapp (2.4.9) oder Ag 34/70 kann mit dem Zwischenwertsatz bewiesen werden. Wenn wir alle Unstetigkeitsstellen, Definitionslücken und Nullstellen markieren, so kann die Funktion zwischen diesen das Vorzeichen nicht wechseln. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir wollen die Ungleichung $f(x) > 0$ lösen ($f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) > 0$). Seien $x_1, x_2, x_3, ...$ alle Unstetigkeitsstellen, Definitionslücken und Nullstellen von f in $[a, b]$ mit $x_1 < x_2 < x_3..$ (aufsteigend angeordnet). In jedem Intervall (x_i, x_{i+1}) ist f also stetig.

Wir beweisen das Verfahren indirekt: Annahme: $f(x)$ wechselt zwischen x_i und x_{i+1} das Vorzeichen, das heißt $\exists\ c \le d$ mit $f(c) < 0 < f(d)$ oder $f(c) > 0 > f(d)$, dann hat f nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle zwischen x_i und x_{i+1} (Widerspruch) oder f ist nicht stetig auf (x_i, x_{i+1}) (ebenfalls Widerspruch).

6 Differenzialrechnung

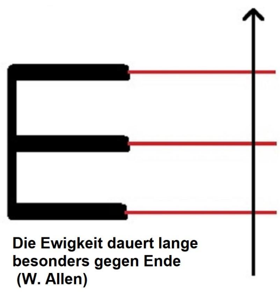
6.1 Einfuehrung in die Differenzialrechnung (UE 10_3) Sd10: S.7-10

Basisformeln: F 9, F 10, F 14, F 11, F 15, F 16, F 19, F 23, F 24, F 28, F 43, F 44.

Wie wird aus der Durchschnittsgeschwindigkeit die Momentangeschwindigkeit?

6.1.1 Rechnen mit unendlich (auch Kl. 9) (Ü) → 2.6.7

323. **Die modifizierte Weihnachtsgeschichte:**$_e$ Die heilige Familie kommt auf der Suche nach einer Unterkunft auch zu Hilberts Hotel. Dieses hat zwar unendlich viele Zimmer ist aber (genau wie die anderen Hotels in Bethlehem) komplett ausgebucht. Da hat Hilbert den rettenden Einfall: Er bittet einfach jeden Gast in das jeweils nächste Zimmer zu wechseln. Welches Zimmer wird so frei und wer hat am Ende kein Zimmer mehr? Interpretieren Sie diese Geschichte algebraisch.



Cartoon 29

Abb. 77 Geschwindigkeitsmessung

324. (Ü) a$_e$) ∞ ist keine reelle Zahl und gilt bei Äquivalenzumformungen auch nicht als Ergebnis. Trotzdem kann man manche Verknüpfungen und Operationen auf ∞ erweitern: **(Formel 53)**

Sei $a \in \mathbb{R}$, dann gilt: $a + \infty =$ $a - \infty =$ $a \cdot \infty =$

$\frac{a}{\infty} =$ $\infty + \infty =$ $\infty \cdot \infty =$

b$_e$) Schon in der Grundschule fragten wir uns, was $\frac{1}{0}$ ist. Dazu betrachten wir folgende Wertetabelle:

x	1	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	....	0
$\frac{1}{x}$								

Vorsicht „$\frac{1}{0}$“ bleibt undefiniert, denn „$\frac{1}{0}$“ kann auch den Wert _______ annehmen. Klären Sie die Definiertheit der folgenden Ausdrücke: „$\frac{0}{0}$“, „$\frac{\infty}{\infty}$“, „$\infty - \infty$“, „1^∞“, „0^0 “, „∞^0 “.

6.1.2 Limites (Ü) LS11 S. 104

325. a_e) Linda (17 Jahre) hat sich besonders hübsch gemacht um mit David auszugehen. (Es klingelt) Da ist er schon - Linda möchte gehen doch da stellt sich ihr Vater (100 kg) in ihren Weg: „Du darfst heute nicht mit David ausgehen“. Stellen Sie sich vor Sie sind Linda. Wie reagieren Sie?

b_e) Gegen welchen Wert strebt $\frac{2n+1}{n}$ für $n \to \infty$? Erstellen Sie dazu folgende Wertetabelle:

n	1	10	100	1000	10000	....	∞
$\frac{2n+1}{n}$							

Weisen Sie Ihren Wert algebraisch nach.

326. (GG_{01}) **Limites:**$_e$ (KA_B) Weil „unendlich“ nicht in Terme eingesetzt werden darf, aber gewisse Terme $f(n)$ für n gegen unendlich einen reellen Wert (den Grenzwert) besitzen, umgehen Mathematiker das Verbot, indem man $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$ schreibt. Berechnen Sie folgende Limites für $n \to \infty$. Zum Auffinden des Limes kann (vorerst) eine Wertetabelle verwendet werden. ↓ (KA_I)

a_1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{n}$, b_1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n}$, c_1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-n}{n}$, d_1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-3n}{n+2}$,

$\boxed{e_1}$) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n-1}$, f_1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n^2}$, g_2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+2n-7}{n^2-2n+5}$, $\boxed{h_2}$) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-n^2}{n^2-2n+5}$,

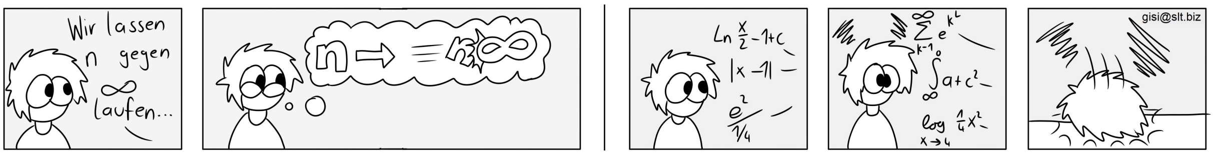
i_2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+4+n^2}{2n+3n^2+2}$, j_2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^3}{2n^3+1}$, k_2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+2n^3-7}{n^2-4n^3+5}$, L_2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4+2n^2-7}{5-2n^4+n^2}$,

m_2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{2n^4+2}$, n_2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^4+2n^3+1}{2n^4+n^2+4n}$, $\boxed{o_2}$) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7n^4+2n^3-6n^2+3n-10}{4n^4-3n^3+6n^2-40n+100}$,

($\bar{f}$) p_2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^3-2n^2-6n^4+2n-1}{3n^3-3n^2+4n-4n^4+33}$, q_2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+3}{4n^2+2n+1}$, r_2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-3n^2+5n}{1+2n^2+n^3}$,

$\boxed{s'_4}$) Transferag: Ber. Sie abhängig von a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-2n^3+3n^2}{4n^3+1+a\cdot n^4}$.

327. (Ü) Ber. Sie a_1) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{2h+h^2}{h}$, b_2) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{3h+4h^2}{h-h^2}$, c_2) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{2h^2+3h^3}{h^3-h^2}$, d_1) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{(1+h)^2-1}{h}$.



6.1.3 Was misst eine Radarfalle? (Ü) LS10 S. 36-43 + LS11 S. 118-120+125

328. (Ü) **Geschwindigkeiten:**$_e$ Herr Schmid fährt um 6.30 Uhr in Malmsheim bei einem Kilometerstand von 285 350 km los. Um 7.00 Uhr kommt er in Marbach an. Sein Kilometerstand ist jetzt bei 285 390 km. Die Kilometerstände sollen durch die Funktion $y = f(x)$ (y in Kilometern und x in Stunden nach 6.00 Uhr) beschrieben werden. **a_e)** Durch welche Punkte geht der Graph von f?
b_e) Wie schnell ist Herr Schmid gefahren (Rechnung abhängig von f verlangt)?
c_e) Bei der Fahrt benutzt er die A81. Die zulässige Höchstgeschw. ist durchgehend 120 km/h. Warum kann es sein, dass Herr Schmid bei einer Geschwindigkeitsmessung geblitzt wird?
d_e) Verallgemeinern Sie die Geschwindigkeitsrechnung bei der Weg/Zeitfunktion f auf die Zeitpunkte x_1 und x_2. $\bar{v}$ = ______________ **(Formel 54)** .
e_r) Die m_______ Geschwindigkeit entspricht der Se_________________ der Weg-Zeit Fkt.
f_2) (GG_{02}) (KA_G) Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit von $f(x)$ im Intervall $[x_1; x_2]$:
i) $f(x) = 2x+1; [2;3]$, ii) $f(x) = 3x-2; [1;3]$, iii) $f(x) = x^2; [0;2]$, $\boxed{\text{iv)}}$ $f(x) = x^2+x; [1;5]$,
v) $f(x) = x^2; [-2;3]$, vi) $f(x) = x - x^2; [-1;1]$, vii) $f(x) = -2x^2+2x-3; [-1;4]$.
($\bar{f}$) g_r) Die Differenz $f(x+a) - f(x)$ heißt Ä______________ von f zum Zeitschritt __.
h_e) Erklären Sie die mittlere Änderungsrate (e: *average rate of change*) zum Zeitschritt a.

329. (Ü) a_e) Wie funktioniert eine Radarfalle (Abb. 137/77)?
b_e) Welche Geschwindigkeit misst eine Radarfalle eigentlich?
c_e) Wie könnte die Radarfalle die exakte momentane (e: *instantaneous*) Geschwindigkeit messen?
d_e) Formulieren Sie die mittlere Geschwindigkeit aus Aufgabe 328 d) für die Punkte $x_1 = x_0$ $x_2 = x_0 + h$. Was gilt für die Momentangeschwindigkeit **(Formel 54)** ?
e_w) ($\bar{f}$) Geben Sie $f(x+h)$ für folgende Fktnsterme an: $2x-1$; x^2; x^2-6x; $2+3x-x^3$;

6.1.4 (Beschleunigte) Bewegungen LS10: S. 44-47 + EM6 S.124; LS11 S. 123+124

330. a_1) Berechnen Sie die Momentangeschwindigkeit $v(x)$ der Weg/Zeitfunktionen (KA_B)
$_f$) $f_1(x) = 3x-7$, $\boxed{f_2(x)} = 5x-2$, $f_3(x) = 0.3x + 2.5$ und $f_4(x) = mx + c$ zum Zeitpunkt x.
(b)$_e$) Ein Fallschirmspringer springt aus einem Flugzeug. Seine Bewegung lässt sich anfangs mit der Funktion $f(x) = 0.3 \cdot x^2$ beschreiben (x in Sekunden, $f(x)$ in Metern). Berechnen Sie seine Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt $x = x_0$; $x = 0$; $x = 1$; $x = 2$. c_r) Statt der Momentangeschwindigkeit $v(x_0)$ (zum Zeitpunkt x_0) einer Weg-Zeit Funktion $f(x)$ schreiben wir künftig $v(x) = f'(x)$ (A__________funktion) (e: *derived function*).
d_r) Wenn eine Wegzeitfunktion von der Form $y = mx + c$ ist, dann ist die Momentangeschwindigkeit = ___. Es handelt sich also um eine Bewegung mit _______________ Geschwindigkeit.

331. (Ü) (KA_l) Eine Bewegung wird durch die folgenden Funktionen beschrieben. Berechnen Sie die Momentangeschwindigkeit $v(x) = f'(x)$ zum Zeitpunkt x: a_2) x^2; b_2) $10x^2$; c_2) x^2+x; d_b) x^2-3x+4 **e_2)** $3x^2-4x$, $\boxed{\mathbf{f}_2}$) $2x^2+3x+1$, g_2) $5x-2x^2+3$, h_2) x^2-3x,

h_a) **Algorithmus**: Berechnung eines Differenzialquotienten $f'(x_0) = \lim$________. (FD 13)

0) Verwenden Sie immer die „h“ (e: *derivation from first principles*) und nie die „x_0“ Methode (die x_0 Methode erzeugt eine vermeidbare Polynomdivision)
1) Formulieren Sie den Differentialquotienten setzen Sie aber noch nicht _____ ein.
2) Formen Sie den Zähler um, bis _____ verschwindet.
3) Klammern Sie _____ aus (das sollte jetzt gehen) und K____________________ Sie _____.
4) Setzen Sie jetzt für __________ ein.

j_2) $4-x-0.5x^2$, k_2) $4x-2+3x^2$, $\boxed{\mathbf{L}_2}$) $6-2x^2+3x$, m_2) $3x^2-5x+7$, n_2) $1-2x^2+4x$, o_2) $4-2x^2-6x$, ($\overline{KA}$) (GG_{03}) p_e) $\frac{1}{x}$, q_3) $\frac{1}{x+1}$, r_3) $\frac{1}{2x-2}$, s_e) $\sqrt{x}$, t_3) $\sqrt{x+1}$;

6.1.5 Die Potenzregel (e: *power rule*) → 14.11.2 (GFS)LS10: 51-52

332. (Ü) a_w) Formulieren Sie mit Hilfe der binomischen Formel 4.6.2 die folgenden Terme $(x+h)^2$, $(x+h)^3$, $(x+h)^4$, $(x+h)^5$ als Summe.
b_e) Ber. Sie die Ableitungsfunktionen von $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x^3$, $f_4(x) = x^4$ und $f_5(x) = x^5$.
c_e) Welche Ableitungsregel vermuten Sie für $f_n(x) = x^n$ **(Formel 56, FD 14)**? Beweisen Sie! $(x^n)' =$ _____ (für $n \in$ ___). d_e) Ist diese Regel auf $f_1(x) = \frac{1}{x}$ und $f_0(x) = \sqrt{x}$ übertragbar?

333. (KA_B) Ber. Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen: $a_{b,1}$) i) $f(x) = x^3$, ii) $f(x) = x^2$ iii) $f(x) = x$, iv) $f(x) = 1$, v) $f(x) = x^{-1}$, vi) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, b) $f(x) = \sqrt{x}$, c_1) $f(x) = \frac{1}{x^3}$ d_1) $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^4$ e_1) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ f_1) $f(x) = x\sqrt{x}$ g_1) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$ h_1) $f(x) = (\sqrt[5]{x})^3$ i_2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{x}}$ j_2) $f(x) = x^{k-1}$ $\boxed{\mathbf{k}_2}$) $f(x) = x^{-m+6}$ L_2) $f(x) = \frac{1}{x^{k+3}}$

6.1.6 Die Summen und Faktorregel → 14.12.1 LS10: 54-56

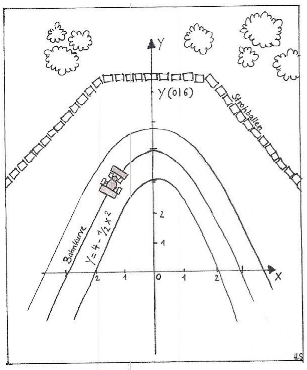
334. a_e) Sei $f(x) = x^3$ und $g(x) = x^2$. Was könnte $(f+g)(x)$ also die S______ zweier Funktionen sein?
(Ü) b_e) Bestimmen Sie die Ableitungsfunktionen von $f(x)$ und $g(x)$ sowie von $h(x) = x^3 + x^2$. Vergleichen Sie die Ergebnisse. Die Ableitung der S_______ ist die S_______ der A___________.
c_e) Welche allgemeine Formel vermuten Sie für die Ableitung der Summe zweier Funktionen $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ **(Formel 57, FD 15)**? Beweisen Sie diese Regel.

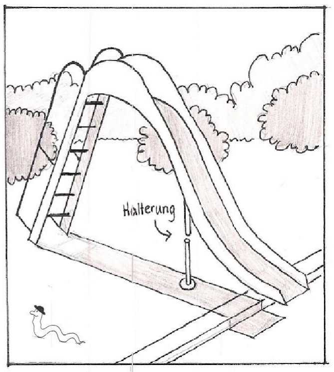
d$_1$) (KA$_B$) Leiten Sie ab: **i)** $x^4 + x^5$, **ii)** $x^7 + x^{-2} + x$ **iii)** $\frac{1}{x} + \sqrt{x} + 1$; $\boxed{\text{iv)}}$ $x^3 + \frac{1}{x^3} + \sqrt[3]{x}$;
e$_e$) (Zusatz) Gilt (allgemein) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$?

335. (Ü) a$_e$) Ber. Sie die Ableitungsfunktionen von $f(x) = x^2$ und $g(x) = 7x^2$. Vergleichen Sie!
b$_e$) Welche Formel vermuten Sie für die Ableitung des Produktes aus einem konstanten Faktor $a \in \mathbb{R}$ mit einer Funktion f: $(a \cdot f)(x) := a \cdot f(x)$? $(a \cdot f)'(x) :=$ ___. Beweisen Sie diese Regel.

336. (Ü)(KA$_Z$) Leiten Sie die folgenden Funktionen ab: a$_{b,1}$) $f_a(x) = x^3{+}2x^2$; b$_1$) $f_b(x) = x^4 + 2x^3{+}4$;
c$_1$) $f_c(x) = 7x^7{+}4x^4{+}x{+}10$; d$_1$) $f_d(x) = (x{+}3)^2$; $\boxed{\textbf{e}_1}$) $f_e(x) = (2x{+}5)^2$;
f$_2$) $f_f(x) = \frac{1}{x}{+}\sqrt{x}$; g$_2$) $f_g(x) = \frac{x+1}{x^3}$; $\boxed{\textbf{h}_2}$) $f_h(x) = \frac{x^2+3x-2}{x}$; i$_2$) $f_i(x) = \frac{(2x-3)^2}{x^2}$;
j$_2$) $f_j(x) = \frac{(2x-1)^2}{2x^2}$; **k$_2$)** $f_k(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x}}$; **L$_4$)** $f_l(x) = \frac{1}{3x} + \sqrt{3x}$; m$_2$) $f_m(x) = \frac{\sqrt{x}+3}{x}$;
n$_3$) $f_i(x) = x \cdot (\sqrt{x} + \frac{1}{x})^2$; $(\bar{f})$ $\boxed{\textbf{o}_3}$) $f_o(x) = \frac{(2x+3)^2}{\sqrt{2x}}$; p$_4$) $f_p(x) = x^3 + 4x + 3 + \frac{x^2-1}{2x} + \sqrt{3x}$.

337. (a)$_e$) Formulieren Sie das Weg-Zeit-Gesetz aus der Physik. Wie geht das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz aus dem Weg-Zeit-Gesetz hervor?
b$_1$) Welche Momentangeschwindigkeit hat eine konstante Weg/Zeitfunktion $f(x) \equiv$ _?
c$_r$) Wenn eine Wegzeitfunktion von der Form $f(x) \equiv c$ ist, dann ist die Momentangeschwindigkeit $=$ ___. Es handelt sich also um k_______________ B_______________.





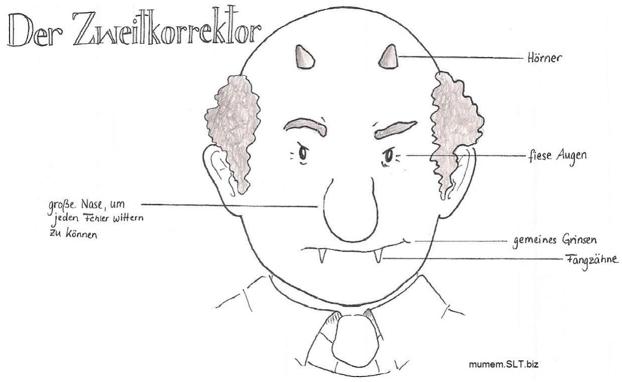


Abb. 78 Rennstrecke Rutschbahn

6.1.7 Die Tangentenfunktion

LS10: 57-60 + KS$_{17}$: 33-34 + EM6: 159 + LS11: 128-129

338. (U) Gegeben sei eine Funktion f. Betrachten Sie Abb. 140/79a.
a$_1$) (GG) Die Punkte P und Q liegen auf dem G____ von f, es gilt also $P(x_1;$ __) und $Q(x_2;$ __).

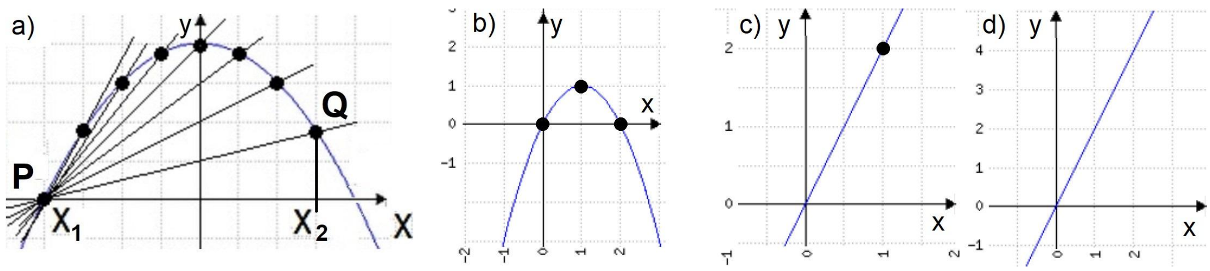


Abb. 79 Von der Sekante zur Tangente | Tangentensteigung | Steigungswinkel | Normalensteigung

b$_w$) Berechnen Sie die Steigung der Sekante (e: *secant line*) durch P und Q.
c$_e$) Interpretieren Sie Abb. 79a. Was passiert mit P und Q, was mit der Steigung. Leiten Sie aus der Sekantensteigung die T_______steigung her.
d$_r$) (GG) Die (erste) Ableitung (e: *derivative*) entspricht der M_____________________________ und der T______________________: $f'(x_0) = v(x_0) = m(x_0)$.
(e)$_1$) Berechnen Sie die Steigung der Tangente (e: *tangent line*) von $f(x) = 2x - x^2$ an den Stellen 0;1 und 2.Zeichnen Sie die Tangenten in Abb. 140/79b ein.
f$_w$) Eine Gerade $y = mx + c$ hat den Steigungswinkel α=__________ (Abb. 140/79c).
g$_w$) Eine Funktion $f(x)$ hat an der Stelle x_0 den Steigungswinkel α=__________. **(Formel 55)**

339. (U) Ein Rennwagen fährt entlang des Schaubildes Kurve der Fkt $f(x) = 4 - \frac{x^2}{2}$ (Abb. 140/78). Im Punkt $P(-3|-0,5)$ ist es spiegelglatt und der Rennwagen kommt von der Straße ab.
a_2) (GG_{04}) Wie nennt man die ‚Kurve', welcher der Rennwagen jetzt folgt?
b_1) Berechnen Sie die ________steigung von $f(x)$ im Punkt P.
c_e) Eine Tangente ist nichts weiter, als eine ___________. Von dieser Tangente sind der Punkt $P(\_\_;\_\_)$ und die __________ = ______ bekannt. Damit kann die Tangente mit der P____: $y =$ ________________ berechnet werden.
d$_e$) Berechnen Sie die Gleichung der Tangente in den Punkten P, P_1(-2|2), P_2(-1|?) und $P_3(u|?)$.
e_e) Allgemein geht eine Tangente an den Graph einer Fkt f durch den Punkt $B(u;$___) und hat dort die Steigung ____. Die Gleichung der Tangente ist: $y =$ _______________. **(Formel 58)** . Welche Bedeutung hat B? **f_1)** (KA_B) Berechnen Sie die allgemeine Tangentengleichung $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x^3$, $f_3(x) = x^4$, $f_4(x) = x^2 + 3x$, $\boxed{f_5(x)} = x^2 - 4x + 3$, $f_6(x) = 3x^2 - x + 12$.

340. (Ü)(KA_B) Ber. Sie die Tangentengleichung an $f(x)$ im Punkt B und im Punkt $(u|f(u))$.
$a_{b,1}$) $f(x) = -x^2$, $B(1|-1)$; b_1) $f(x) = x^3$, $B(1|1)$; c_1) $f(x) = x^2 + x$, $B(1|2)$;
$\boxed{\mathbf{d}_1}$) $f(x) = 2 - x^2$, $B(-1|1)$; e_2) $f(x) = x^2 - x + 2$, $B(1|?)$; f_2) $f(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - 4$, B(-2|?);
g_2) $f(x) = \frac{x^3}{3} - x + 1$, $B(3|?)$, h_2) $f(x) = x^3 - 2x^2$, $B(2|0)$; i_2) $f(x) = 3x - x^4$, $B(0|?)$;

341. (Ü) (KA_G) An welchen Stellen hat K_f die Steigung m? a_1) $f(x) = x^2$, $m = 2$; b_2) $f(x) = x^3$, $m = 12$;
c_2) $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$, $m = 8$; d_2) $f(x) = \sqrt{x}$, $m = 2$; e_2) $f(x) = x^4 - 4.5x^2 + 3$, $m = 0$;
f'$_2$) $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{5x^3}{3}$, $m = -4$; $\boxed{\mathbf{g'}_2}$) $f(x) = \frac{x^2-4}{2x}$, $m = 1$; h'$_2$) $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + 2x$, $m = 2$;

342. (Ü) a_e) Bei der Rutschbahn aus Abb. 140/78 soll die gebrochene Halterung durch eine neue Halterung ersetzt werden. Es wird behauptet, dass die Halterung den falschen Winkel zur Rutschfläche hatte. Welchen Winkel würden Sie vorschlagen? Welche Kraft wird so abgeleitet?

b_r) Eine Gerade heißt N__________ (e: *normal line*) einer Funktion f im Punkt $B(u; f(u))$, wenn sie durch _ geht und _______________ (e: *perpendicular*) zur Tangente in B ist.

c_e) In Abb. 140/79 ist die Gerade g : ________ abgebildet. Zeichnen Sie orthogonale Geraden zu g ein. Welche Gemeinsamkeit haben diese?

d_e) Wann sind zwei Geraden $y = mx + c$ und $y = \tilde{m}x + \tilde{c}$ orthogonal? Beweisen Sie!

e_1) Ber. Sie die Normale der Fktn f im Punkt B: i) $f(x) = 3x$, $B(2|6)$; ii) $f(x) = x^2$, $B(2|?)$;

f_r) Die Normale einer Funktion f im Punkt $B(u|f(u))$ ist $y =$ _______________. **(Formel 58)** .

$g_{b,1}$) Berechnen Sie die Normale von $f(x) = x^3$ in den Punkten $P_1(1|1)$, $P_2(2|?)$ und $P_3(u|?)$.

343. (Ü) (KA_Z) Ber. Sie die Gleichungen der Tangente t und der Normalen n und den Steigungswinkel im Berührpunkt B (BAg 140/336). a_1) $f(x) = x$, $B(0|0)$; b_1) $f(x) = 2x$, $B(1|2)$;
c_1) $f(x) = x^2 - 6x$, $B(0|0)$; d_1) $f(x) = 2x - x^2$, $B(1|?)$; e_1) $f(x) = x^3 - 2x^2$, $B(3|?)$;
$\boxed{\mathbf{f}_1}$) $f(x) = 2 + x^2 - x^3$, $B(-1|?)$; $\boxed{\mathbf{g}_1}$) $f(x) = \frac{2}{x}$, $B(2|?)$; h_2) $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$, $B(1|?)$;
i_2) $f(x) = \sqrt{x} + 2$, $B(4|?)$; j_2) $f(x) = \frac{x+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$, $B(1|?)$; k_3) $f(x) = \sqrt{x}$, $B(0|?)$;
L'$_2$) $f(x) = \frac{x^2-4}{2x}$, $B(2|?)$; m'$_2$) $f(x) = \frac{x^3-4x^2+2}{4x^2}$, $B(1|?)$; n'$_2$) $f(x) = \frac{x^3-4\sqrt{x}+2}{5x^2}$, $B(1|?)$;

6.1.8 Tangente durch externe Punkte + Kl. 11 (GFS)LS11: S.129 Ag 15 + S.135 Ag 8

344. (Ü) (GG_{05}) a$_3$) Die Mittellinie der Rennstrecke wird durch $f(x) = 4 - \frac{x^2}{2}$ beschrieben (Abb. 140/78). Bei spiegelglatter Fahrbahn rutscht ein Fahrzeug und landet im Punkt i) $P_1(0|6)$ bzw. ii) $P_2(1|5.5)$, iii) $P_3(2|4)$ in den Strohballen. Wo hat das Fahrzeug die Straße verlassen?

b$_r$) Die Tangente an f im _________punkt $B(u|f(u))$ berechnen wir durch $y =$ ________________.

Faustregel: Wenn bei einer Aufgabe ein Punkt $P(x_0; y_0)$ auf der Kurve gegeben ist, dann sollte ___________ eingesetzt werden; wenn ein externer Punkt $P(x_0|y_0)$ gegeben ist, dann muss

____________ eingesetzt werden. Es muss dann nach __ aufgelöst werden, um den ________________ zu erhalten. Im Zweifelsfall setzen Sie ____________ ein **(Formel 58)** .

c_4) ($\bar{f}$) Jetzt wird die Mittellinie durch $f(x) = x^3$ beschrieben. Bei spiegelglatter Fahrbahn rutscht ein Fahrzeug von der Fahrbahn (tangential) ab. Im Punkt (4|64) trifft der Rennwagen wieder auf die Fahrbahn und bleibt dort liegen. Wo hat das Fahrzeug die Straße verlassen?

345. (Ü)(GG$_{06}$) (KA$_G$) Gegeben sei die Fkt $f(x)$. Durch den Punkt P werden Tangenten an K_f gelegt. Ber. Sie die Koordinaten der Berührpunkte der Tangenten. **a**$_{b,3}$**)** $f(x) = x^2$, P(0|-1), **b**$_3$**)** $f(x) = x^2 - 2$, P(-1|-5), $\boxed{\mathbf{c}_3}$) $f(x) = x^2 - 2x + 2$, P(2|-2), **d**$_3$**)** $f(x) = -x^2 - 2x + 3$, P(1|1), **e**$_3$**)** $f(x) = x^2 - 2x$, $P(-1|2)$, **f**$_3$**)** $f(x) = x^2 - x$, $P(1| - 9)$, **g**$_3$**)** $f(x) = 3x - x^2$, $P(-3|7)$ ($\bar{f}$).

6.1.9 Berührungen + Kl.11 (LS11: S.134 Ag4)

346. (FD 20) (Ü) a$_e$) (GG$_{07}$) Bestimmen Sie die Schnittpunkte von $f(x) = x^2$ und $g(x) = -x^2 + 4x - 2$ rechnerisch und zeichnerisch. Welche besondere Form des Schnittes liegt vor (Abb. 80)? Begründen Sie algebraisch und an Hand der Zeichnung.
b$_e$) **Zeigen Sie:** f und g stimmen an der Stelle x =__ sowohl in den ________________ alsauch in den _____________steigungen überein. ⇒ f(___) = g(___) und _(___) = _(___).

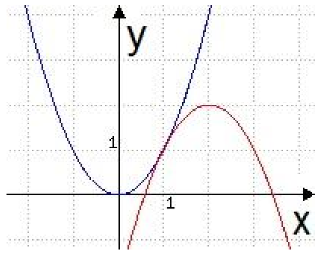
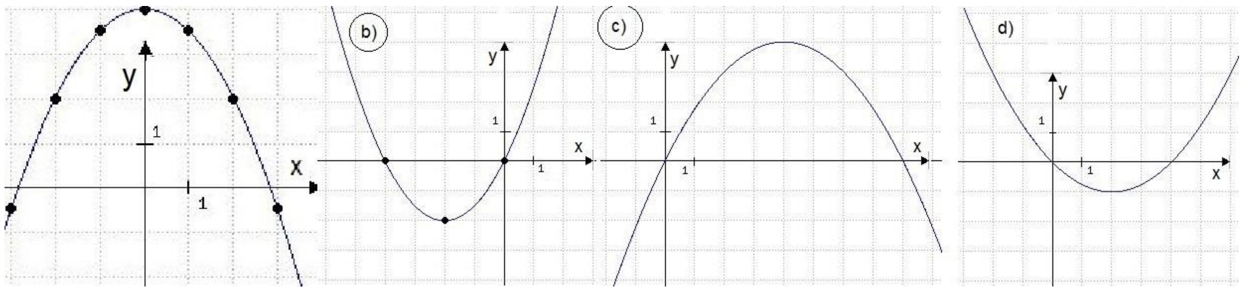


Abb. 80 Parabeln

c_2) Liegt eine Berührung für $x_0 = 3$ vor? i) $f(x) = x^2, g(x) = 6x-9$; ii) $f(x) = x^2, g(x) = 6x$; iii) $f(x) = x^2, g(x) = 12 - x$; iv) $f(x) = x^3, g(x) = -x^2 + 33x - 63$;

347. (Ü) Berechnen Sie, in welchen Punkten sich die Graphen von f und g berühren. a$_{b,2}$) $f(x) = x^2$ und $g(x) = -(x + 2)^2 + 2$,
b_2) $f(x) = x^2 + 3x + 1$ und $g(x) = -1 - x^2 - x$, $\boxed{\mathbf{c}_2}$) $f(x) = \frac{x^2}{2} + x - 2$ und $g(x) = x^2 - x$,
d_2) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ und $g(x) = 2x^2 - 5x + 4$, (GG$_{08}$)
e_2)$_{\bar{f}}$ $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 4x$ und $g(x) = \frac{8}{x}$, f_2) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ und $g(x) = x^2 + x + 1$,
g_2) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ und $g(x) = x^2 - x - 1$? ↖ (KA$_G$) ↓

Bestimmen Sie a so, dass sich K_{f_a} und K_g berühren. h_2) $f_a(x) = \frac{x^2}{2} - a$ und $g(x)$ =-x^2+3x.
i_2) $f(x) = x^2 + 2x + a$ und $g(x) = -x^2 - 6x$, j_3) $f(x) = x^2 + 2ax + 2$ und $g(x) = -x^2$,
k$_r$**)** Wenn ein Berührpunkt gesucht ist, löse (in der Regel) zuerst _____=_____ nach __ auf.



6.1.10 Skizzieren von Ableitungsfunktionen → 14.11.4

EM6: 139-147+160

348. (U) a$_e$) Wenn von einer Fkt nur das Schaubild, aber nicht die Ableitungsfunktion bekannt ist, kann diese punktweise konstruiert und damit skizziert werden. Betrachten Sie Abb. 143/81 a) und zeichnen Sie in den markierten Punkten die entsprechenden Tangenten an die Kurve. Schreiben Sie dann neben jeden Punkt die geschätzte ______________ der gezeichneten Tangenten.

b$_e$) Zeichnen Sie über jedem Punkt $P(x_0|y_0)$ den Punkt (x_0|____). Dieser Punkt gehört zur Ableitungsfunktion. (GG) (GG) (GG) ↓ (KA$_I$)
c_2) Zeichnen Sie so die Ableitungsfunktionen der Funktionsgraphen von Abb. 143/81 b) bis m).

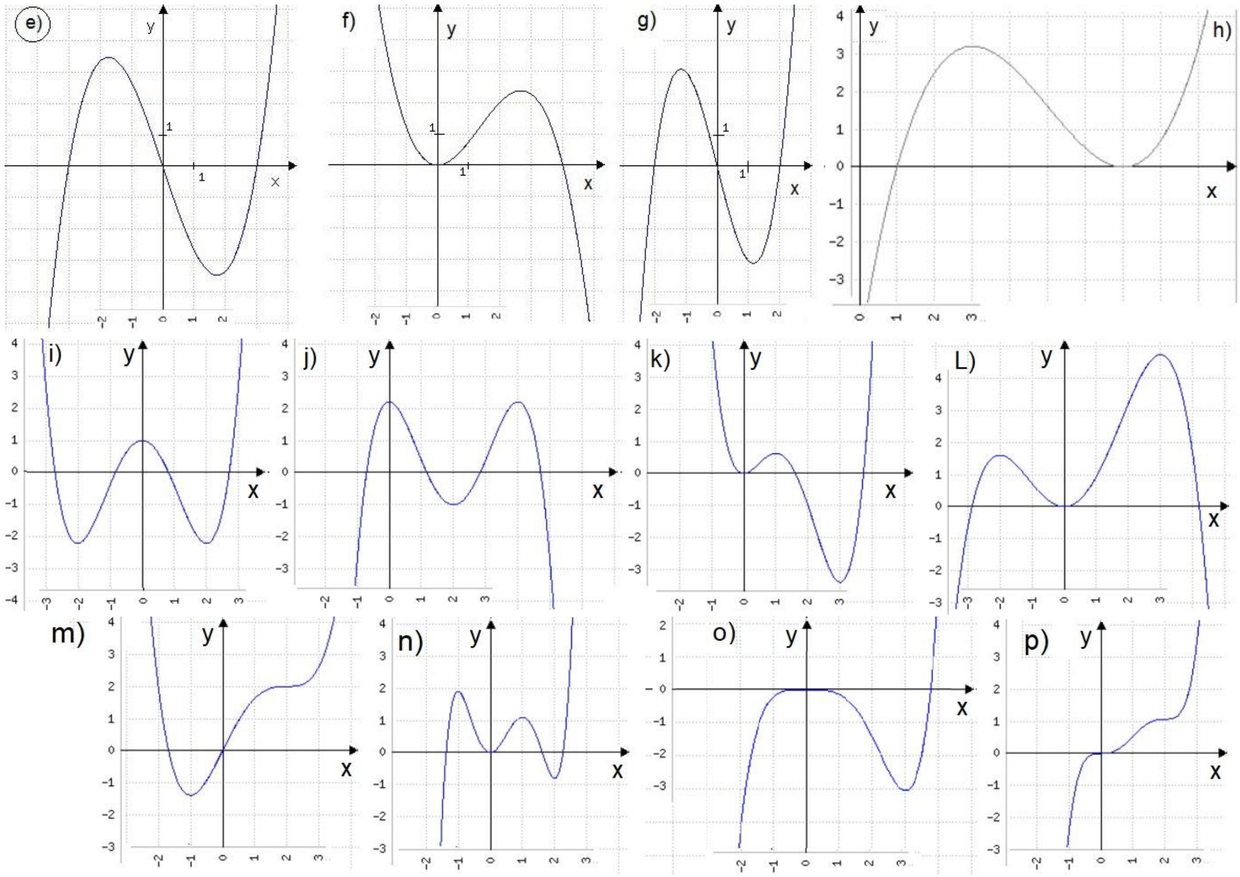


Abb. 81 Zeichnung der Ableitung

349. (U) a_e) Zeichnen Sie die Ableitungsfkt der Fkt aus Abb. 82. Charakterisieren Sie problematische Pkte. Wann ist eine Fkt differenzierbar (e: *differentiable*)? b_4) Wie lauten deren Funktionsterme?

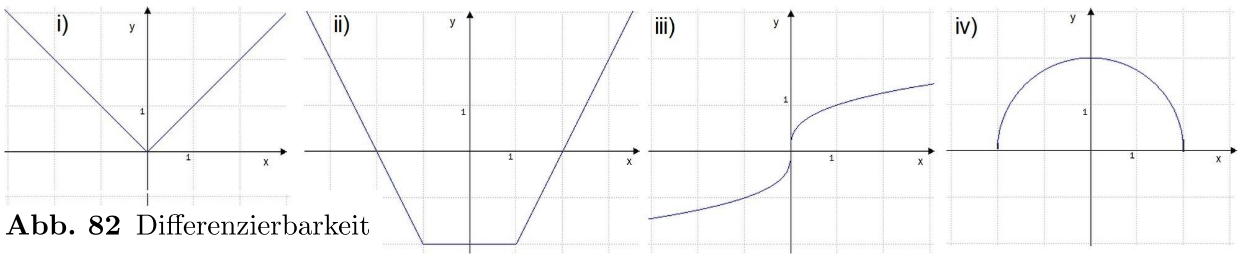


Abb. 82 Differenzierbarkeit

6.1.11 Aufgaben zu Tangenten und Normalen aus dem Abitur (KA_G)

350. (Ü) Der Graph der Funktion $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$ ($x \in [-2; 2]$) stellt eine Bergkuppe dar, auf dessen höchstem Punkt $S(0|1)$ ein Baum steht. Für $x > 2$ sei der Erdboden die $x-$Achse. Am Fuße des Berges im Punkt $P(2|0)$ sitzt eine Hase. Sein Auge befindet sich genau im Punkt $A_1(2|0.25)$ [$A_2(2|0.0625), A_3(4|0.0625)$]. Wie groß muss der Baum mindestens sein, damit ihn der Hase sieht?

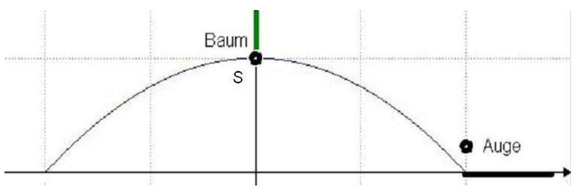


Abb. 83 Sieht der Hase den Baum?

351. (Ü)(BD ≈ Abi 2012) Abb. 144/84 a zeigt den Verlauf einer Umgehungsstraße zur Entlastung der [geradlinigen] Ortsdurchfahrt von $A(-3|2)$ nach $B(3|-1)$ einer (kreisförmigen) Gemeinde. Die Umgehungsstraße verläuft durch die Punkte $A(-3|2)$ und $B(3|-1)$ und wird beschrieben durch die Funktion $f(x)$ mit $f(x) = -0.1x^3 - 0.3x^2 + 0.4x + 3.2$; 1 LE = 1 km.

(GG) $\mathbf{a}_2$) Zeigen Sie, dass die Umgehungsstraße im Punkt A ohne Knick in die Ortsdurchfahrt einmündet (BAg 141/343) (Basisformeln: 56, 58). $\mathbf{b}_2$) In welchem Punkt der Umgehungsstraße fährt ein Fahrzeug [echt] parallel zur Ortsdurchfahrt AB (BAg 141/341)? $\mathbf{c'}_2$) In welchem Winkel treffen die Ortsdurchfahrt und die Umgehungsstraße im Punkt B aufeinander? $\mathbf{d}_3$) Im Punkt $P(1|3.6)$ befindet sich eine Windkraftanlage. Ein Fahrzeug fährt von B aus auf der Umgehungsstraße. Von welcher Stelle der Umgehungsstraße aus sieht der Fahrer die Windkraftanlage genau in Fahrtrichtung vor sich (BAg 142/345)?

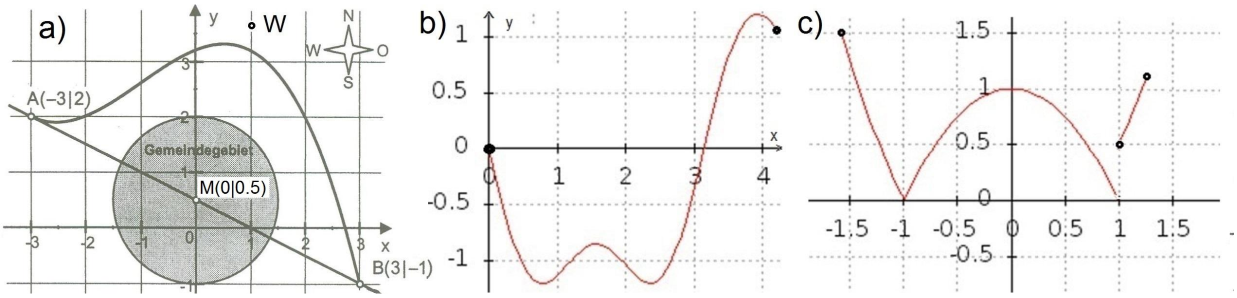


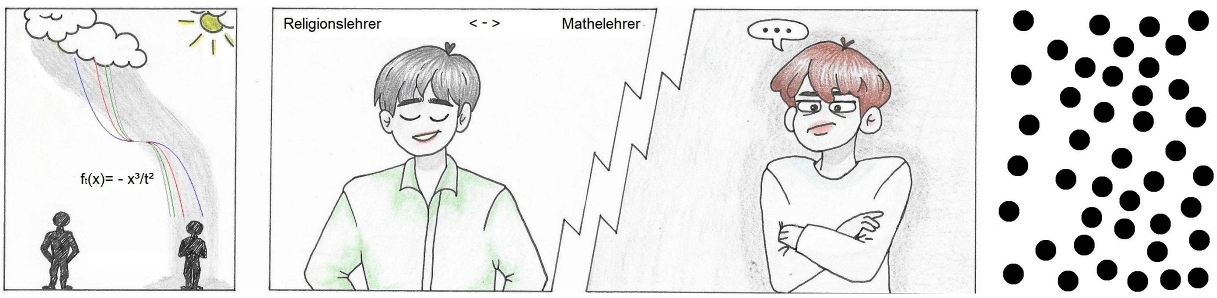
Abb. 84 a) Umgehungsstraße b) Funktion mit Extremata c) Unstetige Funktion

352. (BD ähnlich Abi 2013; siehe Ag 169/439) Der Querschnitt eines Bergstollens wird beschrieben durch die x-Achse und den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 4.5 - \frac{x^2}{2}$, 1 LE entspricht $1m$. a$_2$) Wie hoch und wie breit ist der Stollen? Welchen Winkel schließen die Wände an den Fußpunkten mit der Horizontalen ein?

b$_4$) (GG$_{09}$) Im Stollen soll in $3m$ Höhe eine Lampe (mittig) aufgehängt werden. Aus Sicherheitsgründen muss die Lampe mindestens 1.45 m von den Wänden entfernt sein. Überprüfen Sie, ob dieser Abstand eingehalten werden kann (BAg 141/343).
c$_4$) Berechnen Sie den Abstand von $Q(0|1)$ von der Stollenwand.

353. (Ü) ($\approx$ Abi 2016) a$_1$) (GG$_{10}$) Sei K ein Kreis, B ein Punkt auf K und t die Tangente durch B an K. Sei n die Orthogonale zu t durch B: Welcher Pkt des Kreisinneren liegt dann sicher auf n?
b$_{1,\overline{f}}$) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}$. Welche Symmetrie hat K_f?
c$_{4,f}$) Es gibt einen Kreis, der K_f in dessen Schnittpunkten mit der x-Achse berührt. Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts des Kreises.
d$_3$) (aus IQB Fundus) Sei $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$: $f(x) = b - \frac{a^2}{x^2}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ und sei $g(x) = x^2$. Untersuchen Sie, welche Beziehung zwischen a und b bestehen muss, damit damit K_f K_g berührt.
e$_3$) Sei $f_a(x) = -ax^2 + 2ax + 1$ $(a \neq 0)$; untersuchen Sie, welche Beziehung zwischen a_1 und a_2 $(a_1 \neq a_2)$ bestehen muss, damit sich K_{a_1} und K_{a_2} senkrecht schneiden.
f$_2$) (= Abi 2012) Gegeben seien $f(x) = \frac{2}{x}$ und $g(x) = 2x - 3$. Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte von K_f und K_g. Untersuchen Sie, ob sich die beiden Graphen senkrecht schneiden.

g$_2$) (= Abi 2004) Gegeben ist $f(x) = \frac{2}{x} + 2$ für $x \neq 0$. Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente t an K_f an der Stelle $x = 1$. Bestimmen Sie den Schnittpunkt S von K_t mit der $x-$Achse.



Cartoon 30 Der Relilehrer geht bei Regen hinaus und bleibt trocken Zeichnung von hahn@slt.biz

354. (Ü) **Minimalanforderungen UE** 10_3 **Differenzialrechnung**:
a)* (nicht JRA, Abi) Sei $f_1(x) = -x^2 + 2x - 3$. Ber. Sie $f_1'(x)$ mit Hilfe der h Methode. (F 54)
b) Sei $f_2(x) = x^3+3x^2+3x+1$. Berechnen Sie die Tangenten in den Punkten P_1(-1|?) und P_2(1|?).

c$_{LK}$) Sei $f_3(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x$. Welche Tangenten von f gehen durch $P(3|6)$? (b-e: F 56, F 57, F 58)
d) In welchem Punkt ist die Tangente von $f_3(x)$ parallel zur Geraden $y = -2x + 4$?
e) Weisen Sie nach, dass sich die Schaubilder von $f(x)$ =-$x^2 + 2x$ und $g(x) = x^2$-6$x + 8$ berühren.

6.2 Extremwertprobleme (UE 10_6)

Sd10: S. 13,14

Basisformeln: F 5, F 16, F 19, F 29, F 44, F 46, F 56, F 57, F 58.

6.2.1 Extremwerte → 14.14.2

LS10: 104-106 + KS$_{17}$: 26 + EM6: 184 + LS11: 161-162

355. (U) Lesen Sie alle globalen und lokalen Maxima und Minima der Funktionsgraphen aus Abb. 84b ab. Klassifizieren Sie die Extrempunkte (e: *extreme points*) nach **a**$_e$) Minimum/Maximum; **b**$_e$) global/lokal (Jedes ________ Extremum ist auch ________) **c**$_e$) Rand / _______ Extrema. **d**$_e$) Welche Eigenschaft haben die inneren Extrema aus Teil c) (Tipp: T____________) (e: *stationary point*)? **e**$_4$) Klassifizieren Sie die Extrema aus Abb. 84c.

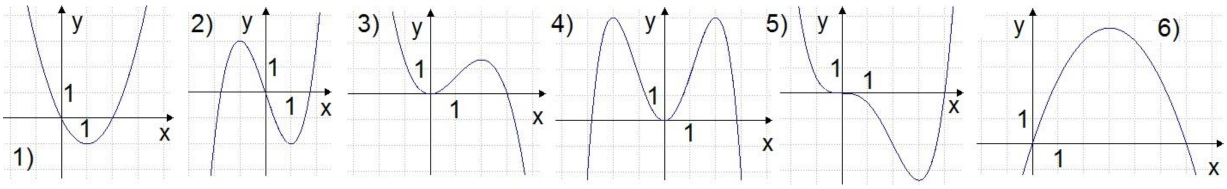
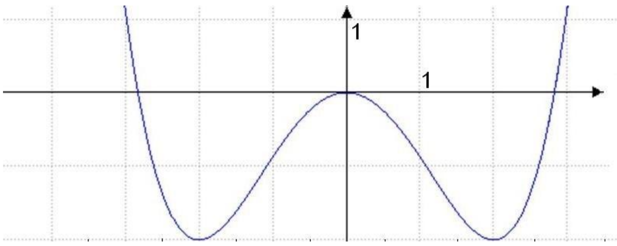


Abb. 85 Die Graphen der Funktionen von Aufgabe 145/356 (a-f)

356. (KA$_B$) Berechnen Sie die lokalen Extrempunkte von a$_1$) $f(x) = x^2 - 2x$, b$_1$) $f(x) = 2x - 0.5x^2$, c$_1$) $f(x) = x^3 - 3x$, $\boxed{\text{d}_1}$) $f(x) = x^2 - \frac{x^3}{3}$, e$_2$) $f(x) = 2x^2 - \frac{x^4}{4}$, f$_2$) $f(x) = \frac{x^4}{8} - 0.5x^3$.
g) Welches Schaubild aus Abbildung 85 gehört zu welcher Funktion (a bis f)?
h$_2$) $f(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x$, i$_2$) $f(x) = \frac{x^4}{4} + 3x^2 + 2x$, j$_2$) $f(x) = \frac{x^5}{5} - 3x^3$, k$_2$) $f(x) = \frac{x^6}{6} - x^4$.



z_i (später)							
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)							
f'(x)							

Abb. 86 Klassifikation von $f(x) = \frac{x^4}{8} - x^2$

c$_1$) (KA$_B$) Klass. Sie alle Fktn aus Ag 356.

6.2.2 Klassifikation von Extremwerten (GFS)

LS11: S. 163-168

357. (U) a$_1$) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{x^4}{8} - x^2$. Füllen Sie die Tabelle aus Abbildung 86 aus.
b$_e$) Wie können Sie die Extremwerte mit Hilfe von $f'(x)$ klassifizieren ← **(Formel 69)** ↓?
c$_r$) f ist bei x_0 (lokal) maximal ⇔ $f'(x)$ wechselt bei x_0 das V____________ von _ nach _.
f ist bei x_0 (lokal) minimal ⇔ $f'(x)$ wechselt bei x_0 das V____________ von _ nach _.

358. a$_e$) Berechnen Sie die (inneren) Extremstellen der Funktion $f(x) = x^3$. Was fällt Ihnen auf?
b$_r$) (GG$_{01}$) Ein **Terrassenpunkt** (e: *saddle point*) $W(x_0; f(x_0))$ ist ein Punkt des Schaubildes mit w________________ T____________, der weder H___________- noch T__________-Punkt ist, also insbesondere bei x_0 keinen V________________ der (ersten) A________________ hat.

359. (KA$_B$) (GG$_{02}$) Gegeben seien folgende Funktionen. Ber. Sie die (lokalen) Extrempunkte der Funktion f mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}$. Klassifizieren Sie die Extremwerte mit Hilfe einer Wertetabelle von _____.
a$_1$) $x^2 - 12x$, b$_1$) $4x - x^2$, c$_1$) $x^3 - 12x$, d$_1$) $27x - x^3$, e$_{b,2}$) $x^4 - 4x^3$,
$\boxed{\text{f}_1}$) $x^4 - 8x^2 + 8$, g$_1$) $0.75x^4 - x^3 - 9x^2 + 10$, h$_2$) $\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} - 2x$, i$_2$) $\frac{x^5}{5} - \frac{10x^3}{3} + 9x$,
j$_2$) $0.6x^5 - 3x^4 + 4x^3$, k$_1$) $0.6x^5 - 5x^3 + 12x$, L) $\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - 2x^3$; m) $\frac{x^4}{2} - 4x^3 + 9x^2$;
$\boxed{\text{n}_2}$) $0.6x^5 - 4x^3$, o$_3$) $-\frac{x^7}{7} + \frac{34x^5}{5} - 75x^3$ p$_2$) $x^6 - 24x^4$, q$_3$) $5.6 \cdot x^5 - x^7$;
r) $\frac{x^8}{8} - \frac{x^7}{7} - x^6$; Ab hier gilt $\mathbb{D} = [0; 2\pi]$ (erst nach Abs. 108/5.4)
s$_2$) $f_l(x) = \sin(x)$, t$_2$) $f_m(x) = \cos(x)$, u$_2$) $f_n(x) = \sin(\frac{x}{2})$, v$_3$) $f_o(x) = \sin(2x)$.

6.2.3 Randwerte + global / lokal LS11: S. 169-172

360. (Ü) Gegeben sind die Funktionen $f_1(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{x^2}{2} - 3x$ mit $\mathbb{D}_1 = [-4; 3]$ $\llbracket$und später (d) $f_2(x) = -0.025 \cdot x^4 - 0.1 \cdot x^3 + 0.2 \cdot x^2 + 1.2 \cdot x$ mit $\mathbb{D}_2 = [-4; 3]\rrbracket$. **a**$_1$**)** Zeichnen Sie alle Extrema in Abb. 87 ein. **b**$_1$**)** Bei ganzrationalen Fktn f______ auf ein Maximum immer ein M_________ und umgekehrt. Folgende Tabellen zeigen alle möglichen Extrema. Die Rechnung ist HA.
c$_1$**)** Klassifizieren Sie Minimum (m), Maximum (M), global (g), lokal (l), Rand (R), innen (i).

x	-4	-3	-2	-1	0	1	3
$f_1(x)$	4	-2.25	0	1.75	1	-2.25	33.75
	-15	0	3	0	-3	0	48

x	-4	-3		-2	0	2	3
$f_2(x)$	-1.6	-1.125		-1.2	0	2	0.675
	1.2	0		0	1.2	0	-3

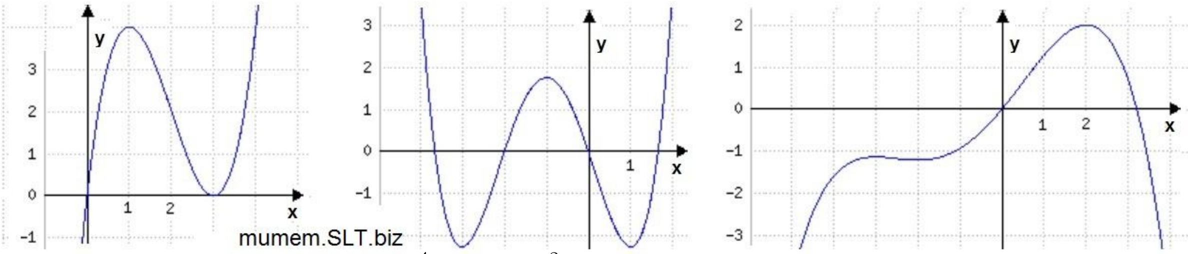


Abb. 87 $x(x-3)^2$ $\frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{x^2}{2} - 3x$ $-0.025 \cdot x^4 - 0.1 \cdot x^3 + 0.2 \cdot x^2 + 1.2 \cdot x$

e) Sei $f(x) = x \cdot (x-3)^2$ mit dem Definitionsbereich $\mathbb{D} = [-1; 4]$. Berechnen Sie alle globalen und lokalen Extrema.

f) Übersicht: Extremataberechnung $f : [a; b] \to \mathbb{R}$: **i)** Berechne alle Stellen mit $f'(x) = 0$;
ii) Klassifiziere diese Stellen mit Hilfe eines Vorzeichenwechsels von $f'(x)$;
iii) Streiche alle Terrassenstellen und nimm dann die Ränder dazu;
iv) Berechne die Funktionswerte aller resultierenden Stellen: Der größte dieser Funktionswerte ist das globale Maximum; der kleinste das globale Minimum.
v) Sollte (mindestens) eine Extremstelle den (theoretischen) Wert $-\infty$ haben, so gibt es kein globales Minimum der Funktion. Analoges gilt für ∞ und globales Maximum.

361. (Ü) (KA$_Z$) Gegeben seien folgende Funktionen f mit den Definitionsbereichen $\mathbb{D}$. Berechnen Sie die lokalen und globalen Extrempunkte der Funktionen f. Klassifizieren Sie die Extremwerte.

a$_{1,\bar{f}}$**)** $f_a(x) = 4 - x^2, \mathbb{D}_a = [-1; 2]$; $\boxed{\text{b}_2}$**)** $f_b(x) = x^3 - 3x, \mathbb{D}_b = [-2; 3]$;
c$_2$**)** $f_c(x) = x^3 - 3x, \mathbb{D}_c = [0; 4]$; **d**$_2$**)** $f_d(x) = x^4 - 8x^2, \mathbb{D}_d = [-1; 2]$;
e$_2$**)** $f_e(x) = \frac{x^4}{4} - x^3,\ \mathbb{D}_e = [-1; 4]$; **f**$_2$**)** $f_f(x) = x^3 - 1.5x^2 - 18x,\ \mathbb{D}_f = [-1; 4]$;
g$_2$**)** $f_g(x) = x^3 - 1.5x^2 - 18x,\ \mathbb{D}_g = \mathbb{R}$; **h'**$_2$**)** $f_h(x) = 0.75x^4 - x^3 - 3x^2,\ \mathbb{D}_h = [-3; 3]$.

362. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ sei die Funktion $f_t(x) = \frac{x^3}{3} + tx^2$ gegeben.
Untersuchen Sie a$_1$) $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_{-1}, f_{-2}$ und b$_3$) $f_t(x)$ für beliebiges t auf Extremstellen.

6.2.4 mehrfache Ableitungen und Wendepunkte (e: *inflexion points*) LS: S. 24-29

363. (U) a$_w$) Notieren Sie das Weg-Zeit-Gesetz und das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz.

b$_e$) Wie können Sie aus der Weg- Zeit- Funktion die Geschwindigkeits- Zeit- Funktion und aus der Geschwindigkeits- Zeit- Funktion die Beschleunigungs- Zeit- Funktion erzeugen?

c$_e$) Mit welchen Geräten im Auto misst man s, v und a?

d$_e$) Wir betrachten das (mathematische) Pendel aus Abb. 88. Zeichnen Sie ein (quantitatives) s-t Diagramm. Wo sind s, v und a maximal?

364. Gegeben sei die Wegzeitfunktion f mit $\mathbb{D} = [a; b]$ (x in Std, y in km).

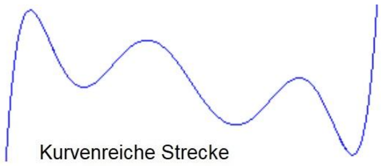
i) Wie weit ist der Spaziergänger maximal vom Startort entfernt?

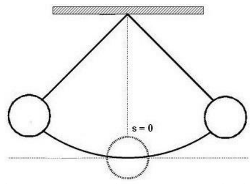
ii) Wie schnell ist der Spaziergänger maximal (minimal)?

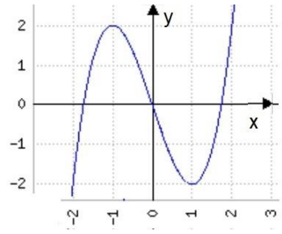
a$_1$**)** $f(x) = 4x - x^2$; $\mathbb{D} = [0; 4]$;

$\boxed{\mathbf{b}_1}$) $f(x) = x^3 - 3x$; $\mathbb{D} = [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$; **c**$_1$**)** $f(x) = 0.125x^4 - 3x^2$; $\mathbb{D} = [-\sqrt{24}; \sqrt{24}]$;

365. (U) a$_{e,L}$) Sie befahren folgende kurvenreiche Strecke mit ihrem Auto. Geben Sie die Bereiche an, in welchen Sie nach rechts bzw. nach links lenken. Wo fahren Sie kurz geradeaus? (GG)







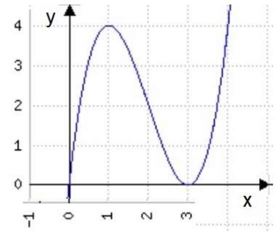
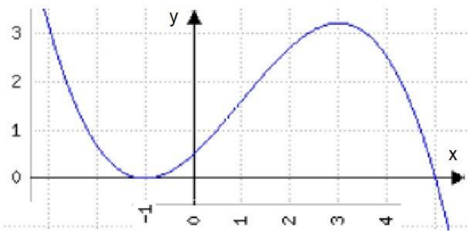


Abb. 88 mathematisches Pendel

b$_e$**)** Was können Sie über die Lenkrichtung bei Hoch- bzw. Tiefpunkten aussagen?

c$_e$) Sei $f(x) = -0.1(x+1)^2 \cdot (x-5)$ mit Graph G_f (Abb. 147/89). Färben Sie dort die Links- und Rechtskurvenbereiche. Füllen Sie die die Wertetabellen von $f'(x)$ und $f''(x)$ aus.



x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	3.2	0.7	0	0.5	1.6	2.7	3.2	2.5	0
f'(x)									
f''(x)									
R/L									

Abb. 89 Klass. von $f(x) = -0.1(x-1)^2 \cdot (x-5)$ mit Wertetabelle von $f(x), f'(x)$ und $f''(x)$

d$_r$) Welchen Zusammenhang sehen Sie zur Kurvenkrümmung und der zweiten Ableitung (e: *second derivative*)? **e**$_r$) $f''(x_0) > 0 \Rightarrow P(x_0; f(x_0))$ liegt in einer _____skurve; $f''(x_0) < 0 \Rightarrow P(x_0; f(x_0))$ liegt in einer _____skurve.

f$_r$**)** Sei $P(x_0; f(x_0))$ ein Punkt mit waagrechter Tangente also $f'($_____ und sei **i)** $f''(x_0) > 0$, dann ist P ein _____punkt oder **ii)** $f''(x_0) > 0$, dann ist P ein _____punkt **(Formel 71)** .

$_{1-2,T}$) Berechnen Sie die Extremstellen der folgenden Funktionen (und von den Funktionen der Aufgaben Ag 145/359 und Ag 146/361) und klassifizieren Sie diese.

g'$_1$**)** i) $f_1(x) = x(x-3)^2$, $\boxed{\text{ii)}}$ $f_2(x) = x(x-6)^2$, iii) $f_3(x) = x(x-9)^2$, iv) $f_4(x) = x(x-12)^2$, v) $f_5(x) = x(x+3)^2$, vi) $f_6(x) = -x(x+3)^2$, vii) $f_7(x) = x^2(x-3)$, viii) $f_8(x) = x(x^2-3)$,

h'$_2$) i) $f_2(x) = 3x^4 - 8x^3$, ii) $f_3(x) = 4x^5 - 10x^4$, iii)$_f$ $f_4(x) = 5x^6 - 12x^5$, iv) $f_5(x) = 6x^7 - 14x^6$.

366. (U) Aus Kl. 8, Ag 28/39 und Kl. 10 Ag 153/389: Wir betrachten folgende Dialoge:

Dialog 1: A : Ist die Straße nass? B : Ich sehe nur, dass es regnet.
Dialog 2: A : Regnet es? B : Ich sehe nur, dass die Straße nass ist.

a$_w$) Was kann A sich (im Bezug auf seine Frage) erschließen? ($\rightarrow$ 380/1)

b$_w$) Klären Sie im Bezug auf den Satz „Wenn es regnet, ist die Straße nass“, die Begriffe „hinreichend“ und „notwendig“ und übertragen Sie die Begriffe auf Extremwerte und deren Berechnung mit Hilfe der ersten und deren Klassifikation mit Hilfe der zweiten Ableitung.

c$_r$) ________________________ $\Rightarrow K_f$ hat einen Extrempunkt $E(x_0; f(x_0)) \Rightarrow$ __________________.

d$_1$) Ber. Sie bei $f(x) = x^2 \cdot (2 - x^2)$ die Extremstellen und klassifizieren Sie diese auf zwei Arten.

e$_2$) Ber. Sie alle Extremstellen von $f(x) = 0.8x^5 - 2x^4$. **f**$_1$**)** Klassifizieren Sie alle Extremstellen aus Ag 145/359 mit Hilfe von $f''(x)$. An welchen Stellen ist keine Klassifikation mit f'' möglich?

367. Ist die Bedingung B für die Bedingung A hinreichend, notwendig oder weder noch?

a$_2$) A: Ein Viereck ist eine Raute — B: Ein Viereck hat 4 gleichlange Seiten
b$_2$) A: Ein Viereck ist ein Quadrat — B: Ein Viereck hat 4 gleichlange Seiten
c$_2$) A: Ein Viereck ist ein Parallelogramm — B: Ein Viereck hat 4 gleichlange Seiten
d$_2$) A: Ein Viereck ist ein Parallelogramm — B: Ein Viereck ist ein Trapez
e$_2$) A: Ein Viereck ist eine Raute — B: Ein Viereck ist ein Rechteck

368. (U) a$_r$) Ein Punkt $(x_0, f(x_0))$, bei welchem eine Linkskurve in eine Rechtskurve (oder umgekehrt) übergeht, heißt _______punkt. Hier gilt ____=_ (falls f zwei mal differenzierbar ist).

b$_e$) i) Zeichnen Sie in die 'kurvenreiche Strecke' (Abb. 147/88) alle Wendepunkte ein.

ii') Zeichnen Sie in die die 'kurvenreiche Strecke' (147/88) die Punkte mit extremaler Steigung ein. Geben Sie auch an, es ein Punkt minimaler oder maximaler Steigung ist.

iii') Ein ______punkt ist ein Punkt mit extremaler Steigung. Hier gilt _____=_. Logisch, denn wenn die Steigung f__ extremal ist, muss deren Ableitung ___ =0 sein.

c$_{1,T}$) Berechnen Sie die Wendepunkte der Funktionen (ohne Verifikation):

i) $f_1(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$, ii) $f_2(x) = 2x^3 + 6x^2 + 4x + 2$, iii) $f_3(x) = 3x^3 + 9x^2 + 6x + 3$,
iv) $f_4(x) = \frac{x^4}{16} - \frac{x^3}{4}$, v) $f_5(x) = \frac{x^4}{16} - 2 \cdot \frac{x^3}{4}$, vi) $f_6(x) = \frac{x^4}{4} - 3 \cdot \frac{x^3}{4}$, vii) $f_7(x) = \frac{x^4}{4} - x^3$; $(\bar{T})$
viii) $f_8(x) = x^2$, ix) $f_9(x) = x^3$, x) $f_{10}(x) = -x^3$, xi) $f_{11}(x) = mx + b$.

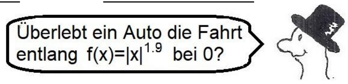
d$_{b,1}$) Sei $f(x) = x^3 + 9x^2 + 24x$; berechnen Sie die Wendepunkte und Extrempunkte von K_f;

Berechnen Sie alle Wendepunkte und Extrempunkte der Funktionen e$_1$) $f_a(x) = x(x-3)^2$ und f$_1$) $f_b(x) = x^3 - 6x^2$. g$_e$) Erklären Sie den Unterschied zwischen einem Wendepunkt maximaler (Typ ___) und minimaler S__________ (Typ __).
h$_3$) Zusatz: Wo liegt (bei diesen Funktionen) der Wendepunkt im Vergleich zu den Extremwerten? Für welche Funktionen ist diese Aussage verallgemeinerbar (mit Beweis$_5$)?

369. a$_r$) Der Graph einer differenzierbaren Funktion f heißt ______gekrümmt (e: *concave up*) $\Leftrightarrow f'$ ist smw. Sei (f zwei mal stetig differenzierbar und) __________, dann liegt $P(x_0; f(x_0))$ in einer Rechtskurve. Das V__________ von _____ entscheidet also über die Kurvenkrümmungsrichtung.

b$_r$) Damit gilt für Wendepunkte $W(x_1; f(x_1))$: _____ wechselt bei ____ das V__________.

c$_r$) Ein solches Kriterium kennen wir bereits von den E__________.
Tatsächlich sind Wendestellen E_______________ von _____.



d$_r$) Wir übertragen das Extremwertkriterium der zweiten Ableitung auf Wendepunkte:

Sei f drei mal stetig differenzierbar und f__________ und (f__________ oder f__________ also f__________) $\Rightarrow K_f$ hat den Wendepunkt $W(x_1; f(x_1))$ **(Formel 71)** . (GG)

e$_{b,1}$) Sei $f(x) = \frac{x^4}{4} - 6x^2$; berechnen Sie die Wendepunkte von K_f. $\leftarrow$ (KA$_B$) $\downarrow$
f$_2$) Berechnen Sie alle Wendepunkte der Funktionen: i) $x^3 - 4.5x^2$, ii) $0.25x^4 - 0.5x^3 - 9x^2$, iii) $0.25x^4 + x^3 - 12x^2$, iv) $0.1x^6 - 1.25x^4 + 6x^2$, v) $x^4 + x$, vi) $0.3x^5 - x^4$, vii) $0.3x^6 - x^5$.

g$_{1-2,T}$) Ber. Sie alle Wendepunkte der folgenden Fktn (Graph G_f). Wo ist G_f eine Rechtskurve?
i) $\frac{x^4}{2} + x^3 - 6x^2$, ii) $\frac{x^4}{2} - 3x^2$, iii) $\frac{x^4}{2} - x^3$, iv) $\frac{x^4}{2} - 2x^3 + 3x^2$, v) $\frac{x^4}{2} - 3x^3 + 6x^2$,

370. (U) (KA$_Z$) Geben Sie die Wendepunkte und Wendetangenten von K_f an. Wo ist K_f eine Rechtskurve?
a$_1$) $f_a(x) = x^3 + 3x^2$, b$_1$) $f_b(x) = x^4 - 6x^2$, c$_1$) $f_c(x) = \frac{x^4}{2} - 4x^3 + 9x^2$, d$_2$) $f_d(x) = \frac{x^5}{10} - 3x^3$.

e$_2$) Berechnen Sie alle Wendestellen der Funktion $f(x) = x^3 \cdot (\frac{4}{3} - \frac{x^2}{5})$ und der Funktion $g(x) = x^4 \cdot (6 - x^2)$. Berechnen Sie auch alle Extremstellen.

f$_{2,T}$) Berechnen Sie die Wendetangenten der folgenden Funktionen

i) $-x^3 - 3x^2$; ii) $-x^3$; iii) $-x^3 + 3x^2$; iv) $-x^3 + 6x^2$; v) $-x^3 + 9x^2$; vi) $-x^3 + 12x^2$; vii) $x^3 + 3x^2$, viii) $-x^3 - 3x^2$, ix) $-2x^3 - 6x^2$, x) $-\frac{x^3}{8} + \frac{3x^2}{4}$, xi) $-\frac{x^3}{4} + \frac{3x^2}{2}$,
g_e) Erklären Sie die NEW Regel; siehe Aufgabe 154/393e).

371. a) (=Abi 2013) Gibt es eine ganzrationale Funktion vierten Grades, deren Graph drei Wendepunkte besitzt? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) (≈ Abi 2016) Der Graph einer Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - x$ besitzt einen Wendepunkt. Zeigen Sie, dass $y = x - \frac{4}{3}$ seine Wendetangente ist.

c) (≈ Abi 2009) Der Graph einer Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 3x^2 - x - 3$ besitzt einen Wendepunkt. Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente in diesem Wendepunkt.

6.2.5 Extremwertaufgaben (+ Kl.11 nur LK) LS10: 119-121 + KS$_{17}$: 29-32 + LS11: 183-189

Bearbeiten Sie zuerst Ag 91/220 und Ag 222 (Klasse 8).

372. Gegeben sei die Funktion $f(x)$ und die Punkte $A(0|0)$, $B(u|0)$, $C(u|f(u))$ und $D(0|f(u))$ $(u, f(u) \geq 0)$. Wo liegt C? Sei $A(u)$ die Fläche des Rechtecks A, B, C, D. Für welches u wird $A(u)$ maximal (eine Randwertuntersuchung wird erwartet)? (U): $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x$
a_1) $f_a(x) = 8 - 2x$, $\boxed{b_1}$) $f_b(x) = 6 - 0.5x$, c_2) $f_c(x) = 6x - x^2$, d_2) $f_d(x) = x^2(4 - x)$.
e_r) Der Graph von $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ ist die Menge aller P______ der Form (______) für _____ $u \in \mathbb{D}$.

373. **Regel$_r$:** (U) Um Extremwert-Probleme zu lösen, sollten Sie folgende Schritte abarbeiten (ausw.):

a) Stellen Sie die Zielfunktion $z(u)$ **mit Definitionsbereich** $[a; b]$ (evtl. mit Nebenbedingung) auf. Dies darf mit Hilfe einer Zeichnung passieren. Die Zielfunktion ist das, was in der Aufgabe m______________________ oder m______________________ werden soll.

Schätzung von Sd: Wer keine Zielfunktion findet kann $z(u) =$____________ versuchen.

b) Setzen Sie (wenn nötig) die N________________ in die Z________________ ein.

L__________ Sie dazu die Nebenbedingung nach einer V_______________ a_____.

c) Berechnen Sie die Stellen mit ______=___; es kann mehrere Stellen dieser Art geben.

d) Klassifizieren Sie diese Extremwerte mit Hilfe eines Vorzeichenwechsels von ___ ___ nach ___ ⇒ Maximum; ___ nach ___ ⇒ Minimum oder mit Hilfe des Vorzeichens von ___.

e) Kandidaten für das globale Extremum sind alle l_________ E_________ und die R______werte a und b. Die globalen Extrema werden mit Hilfe einer Wertetabelle von ________ ermittelt.

374. (U) a_2) Gegeben sei die Funktion $f(x) = 9 - x^2$. Die Punkte $A(-u|0)$, $B(u|0)$, $C(u|f(u))$, und $D(-u|f(-u))$, $0 \leq u \leq 3$ bilden ein Rechteck. Dabei liegen C und D auf dem _____________ von f. (GG) Für welches u wird der Flächeninhalt (Umfang) des Rechtecks ABCD maximal? Wie groß ist der maximale Flächeninhalt (Umfang)?
b_2) Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = \frac{-3}{2} \cdot x(x-3)$. An welcher Stelle x_0 zwischen den beiden Schnittpunkten der Funktionsgraphen ist die Differenz der Funktionswerte $g(x_0) - f(x_0)$ maximal? c_3) Gegeben sei die Funktion $f(x) = 9 - x^2$ und die Punkte $A(-3|0)$, $B(u|0)$, und $C(u|f(u))$ $(u, f(u) \geq 0)$. Sei $A(u)$ die Fläche des Dreiecks A, B, C. Für welches u wird $A(u)$ maximal? Erstellen Sie eine Wertetabelle für die Grundseite abhängig von u.

375. (GG$_{04}$) $\boxed{a_3}$) Hans hat ein Grundstück, das die Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten 4m und 8m hat. Er möchte darauf ein Gartenhaus mit möglichst großer rechteckiger Grundfläche bauen. Wie groß soll Hans die Seiten wählen?
b) Zwischen zwei sich rechtwinklig kreuzenden Straßen liegt ein dreieckiges Grundstück mit $80m$ bzw. $60m$ Straßenfront. Auf ihm soll ein rechteckiger, möglichst großer Bauplatz abgesteckt werden. Welche Abmessungen sind dem Bauplatz zu geben, wenn **i$_3$)** zwei Seiten des Bauplatzes an den Straßen anliegen? **ii$_5$)** die Rückfront des Bauplatzes mit der hinteren Begrenzung des Grundstücks (Hypotenuse) zusammenfällt?

376. (Ü) a_3) (GG) Eine Zündholzschachtel soll $5cm$ lang sein. Bei welcher Breite und Höhe braucht man zur Herstellung am wenigsten Material (ohne überlappende Flächen)? Die Schachtel sei i) ein Quader mit Volumen $V = 45cm^3$ und ii) eine echte Schachtel mit $V = 60cm^3$.

b_3) Welche Maße besitzt ein Quader mit quadratischer Grundfläche und der Oberfläche 24 m^2, wenn das Volumen maximal sein soll?
($\overline{RP}$) **c_3)** Ein Gewölbegang hat einen Querschnitt von der Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis. Der Umfang des Querschnitts ist durch $U = 10m$ fest vorgegeben. Wie muss das Gewölbe gestaltet werden, damit die Querschnittsfläche möglichst groß wird?

d_3) Ein rechteckiges Fenster mit aufgesetztem Rundbogen soll bei möglichst großer Fläche eine Umrahmung von nur $6m$ haben. Wie groß ist die Fläche?

377. (Ü) (GG_{05}) a_2) Welches Rechteck mit dem Umfang 12cm hat den maximalen Flächeninhalt?
b_3) Es soll eine Dose mit einem Liter Fassungsvermögen hergestellt werden. Dabei werden Grund- und Deckkreis aus dem umschriebenen Quadrat ausgeschnitten. Wie groß sind die Ausmaße zu wählen, wenn dabei möglichst wenig Blech verwendet werden soll und der Abfall beim Ausstanzen der Grund- und Deckfläche zum verbrauchten Material zählt.
c_3) Beschreiben Sie einem Kreiskegel mit dem Radius 3 (R) und der Höhe 6 (H) einen Zylinder mit maximalem Volumen ein. **$d_{2,Z}$)** Im Sommer leuchten die drei Punkte $A(4;4)$, $D(x;0)$, $W(0;x)$, $x \in (0;4)$. Für welches x ist die Fläche dieses Dreiecks $\Delta A, D, W$ maximal?

378. **(GFS)** a_1) Gegeben sei die Menge $M = \{0, 1, 2, 7, 19, 70, 115\}$; welche Zahl aus M hat die größte Wurzel? Sei $f(x) \geq 0$, dann ist $\sqrt{f(x)}$ maximal genau dann, wenn der _________ maximal ist. Berechnen Sie mit Hilfe dieses Ergebnisses die folgenden Aufgaben.
b_3) Welches Rechteck mit dem Umfang 40 cm hat die kürzeste Diagonale?
c) Gegeben ist die Funktion $f(x)$ und der Punkt Q. Ermitteln Sie den Punkt P auf dem Graphen von f, der von Q minimale Entfernung hat: i_3) $f(x) = 2 - 0.5x$, $Q(3;3)$;
ii_3) $f(x) = 2x + 3$, $Q(5;6)$; iii_4) $f(x) = x^2$, $Q(3;0)$; iv_4) $f(x) = \frac{1}{x}$, $Q(3;2)$;

6.2.6 Der Monotoniesatz + Stetigkeit (Kl. 11) (GFS) LS10: 100-103 + $KS10_17$: 23-25

379. (Ü) a_r) Der Graph einer streng monoton wachsenden Funktion geht i________ a__________.
b_e) Eine Funktion f heißt **streng monoton wachsend (smw)** $\Leftrightarrow (x_1 < x_2) \Rightarrow (f(\_\_\_)$ ________).
c_1) Welche der Funktionen aus Abbildung 150/90 a) - e) sind streng monoton?
d_e) i) Welchen Zusammenhang vermuten Sie zwischen strenger Monotonie und erster Ableitung?
ii) $f'(x)$ ___ $\Rightarrow f(x)$ ist smw. iii) Funktionen mit _______stellen sind nicht monoton.
e_1) Definieren Sie Analoges für 'streng monoton fallend' (smf) (e: *strictly decreasing*).

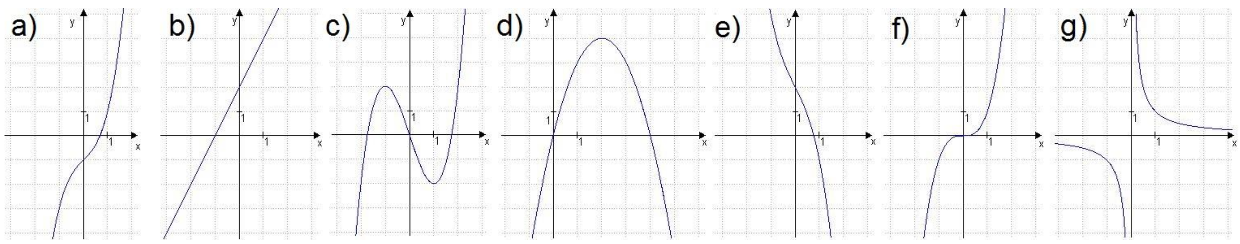


Abb. 90 Funktionen, die auf strenge Monotonie untersucht werden sollen

380. (KA_G) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Monotonie. a_1) $-3x + 3$; b_2) x^2;
c_2) $x^3 + x + 5$; d_2) $-x^5 - 2x^3 - 3x$; e_2) $x^3 - 3x$; f_2) $x^3 + 2x^2$;
$\boxed{g_2}$) $\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x$; h_2) $\frac{-x^3}{3} + 2x^2 - 5x$; i_2) $\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x$; j_2) $\frac{x^7}{7} + x^4 + 4.5x$;

$k_{2,T}$) i) $f_1(x) = x^3 - 12x$, ii) $f_2(x) = x^3 - 3x$, iii) $f_3(x) = x^3 + 3x$, iv) $f_4(x) = x^3 + 12x$,
f v) $f_5(x) = -x^3 - 12x$, vi) $f_6(x) = -x^3 - 3x$, vii) $f_7(x) = -x^3 + 3x$, viii) $f_8(x) = -x^3 + 12x$,

$L_{2,T}$) i) $f_1(x) = 0.1x^4 - 0.8x^2$, ii) $f_1(x) = 0.1x^4 + 0.8x^2$, iii) $f_3(x) = x^4$, iv) $f_1(x) = 0.1x^4 - 0.4x$;

m_4) Zeigen Sie: Ganzrationale Funktionen _______ Grades haben mindestens ein _______ sind also _______ monoton.

381. **a**$_e$**)** i) Eine Funktion f heißt **monoton wachsend (mw)** (e: *increasing*) $\Leftrightarrow$ $(x_1 < x_2) \Rightarrow$ (_____________). ii) Ist $f(x) = x^3$ streng monoton wachsend? Begründen Sie (siehe Abs. 172/6.3.14). iii) Im Abitur gab es (bisher) nur _______ Monotonie!

b$_4$**) Satz von Neumayer:**$_e$ Sei $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ mw. Zeigen Sie: f ist nicht smw $\Rightarrow$ es gibt ein Intervall $(c; d) \subset [a; b]$ in welchem $f(x)$ konstant ist.

c$_e$) Beurteilen Sie folgende drei Sätze: Sei $f : (a; b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann gilt

$$\begin{array}{rlcl} \text{(i)} & f'(x) > 0 \text{ für alle } x \in (a;b) & \Rightarrow & f \text{ ist auf } (a;b) \text{ streng monoton wachsend} \\ \text{(ii)} & f'(x) > 0 \text{ für alle } x \in (a;b) & \Leftarrow & f \text{ ist auf } (a;b) \text{ streng monoton wachsend} \\ \text{(iii)} & f'(x) > 0 \text{ für alle } x \in (a;b) & \Leftrightarrow & f \text{ ist auf } (a;b) \text{ streng monoton wachsend} \end{array}$$

d$_r$) **Hauptsatz der (strengen) Monotonie nach Sd (Formel 72)** :
Innere _________pkte zerstören die strenge Monotonie, _________pkte hingegen nicht.

e$_1$) Ist die Funktion aus Abbildung 90 g) streng monoton und wie beurteilen Sie ihr Ergebnis in Bezug auf den Monotoniesatz?

f$_2$) Geben Sie die Funktionsterme aller Graphen aus Abb. 90 an (a+c dürfen geschätzt werden).

Vorr. 93/231 g$_{e,\overline{f}}$) Eine Funktion f heißt u____________ (injektiv) $\Leftrightarrow x_1 \neq x_2 \Rightarrow$ ____________.
h$_e$) Zeigen Sie den Zusammenhang zwischen Injektivität und strenger Monotonie.

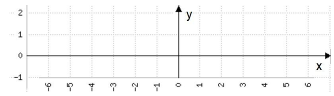
i$_e$) Eine Kurve K_f heißt Linkskurve $\Leftrightarrow$ $f'(x)$ ist streng monoton _________. Wenn $f''(x)$___ ist, so ist K_f eine Linkskurve. $f(x) = x^4$ ist an der Stelle $x =$_ eine Linkskurve.

382. (Ü) (Aus einer KA) Gegeben sei die Fkt f mit $f(x) = (x + 1) \cdot (x - 2)^2$ im Intervall $\mathbb{D} = (0; 2)$.
a$_2$) Zeigen Sie, dass in diesem Bereich f streng monoton fallend ist.
b$_2$) An welcher Stelle fällt die Funktion am stärksten.
c$_2$) An welcher Stelle steigt **i)** $f(x) = 12x^2 - x^3$; **ii)** $g(x) = \frac{6x^3 - x^4}{12}$ am stärksten?

383. (Ü) **Stetigkeit:**$_e$ $\to$ 5.12 (GFS) Eine Fkt f heißt stetig (e: *continous*) (im schulischen Sinn) genau dann, wenn der Graph von f ohne abzusetzen zeichenbar ist (siehe dazu auch Abs. 5.13).

a$_e$**) Die Signumfunktion:**$_e$ (siehe auch 5.11.3) sign(x) stellt das Vorzeichen einer Zahl dar. Vervollständigen Sie folgende Wertetabelle und zeichnen Sie den Graphen. **b**$_e$**)** Ist sign(x) stetig?

x	-6	-2	-1	$-1/2$	0	$1/2$	1	2	6
sign(x)		-1							



c$_e$**)** Berechnen Sie sign(0.1), sign(0.01), sign(0.001). Was ist $\lim\limits_{x \to 0; x > 0} \text{sign}(x)$ und $\lim\limits_{x \to 0; x < 0} \text{sign}(x)$?

d$_e$**)** Berechnen Sie $\lim\limits_{x \to 3; x > 3} x^2$, $\lim\limits_{x \to 3; x < 3} x^2$, und 3^2. Fassen Sie die Erg. von c) und d) zusammen.

e$_r$) f ist stetig bei x_0 $\Leftrightarrow$ linksseitiger Limes = _______________ Limes = _______________ (Stetigkeit ist eine lokale Eigenschaft). **f**$_3$**)** Zeigen Sie (graphisch): f diffbar $\Rightarrow$ f stetig.

384. (Ü) **a**$_e$**)** Aus welchen Fktn besteht $|x|$? Geben Sie $|x|$ als **abschnittsweise definierte** Fktn an.
b$_e$) Eine zusammengesetzte Fkt f besteht aus den Teilfktn $f_1(x)$, $f_2(x)$ (manchmal $f_3(x)$ oder mehr). i) Was könnte eine Nahtstelle sein? ii) Geben Sie bei den folgenden Fktn die Nahtstellen sowie die $f_i(x)$ an. iii) Ist $g(x)$ stetig? iv) Zeigen Sie die Differenzierbarkeit von $g(x)$ und $h(x)$.

(GG) (f) $g(x) = \begin{cases} -3x - 1 & \text{für } x < -1 \\ x^2 - x & \text{für } x \geq -1 \end{cases}$ $\qquad h(x) = \begin{cases} 0.25 \cdot x^3 & \text{für } x \leq 2 \\ 3x - 4 & \text{für } x > 2 \end{cases}$

c$_r$) Seien $f_1(x)$ und $f_2(x)$ differenzierbar (bzw. stetig) und ↑ (LS10: 122-123)
sei $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{für } x \leq x_0 \\ f_2(x) & \text{für } x > x_0 \end{cases}$, dann ist f stetig bei $x_0 \Leftrightarrow$ ________________

und f ist differenzierbar bei $x_0 \Leftrightarrow f$ ist ________________ bei x_0 und ________________.

(KA_B) (GG_{06}) Für welche t ist $f(x)$ stetig? Ist f für diese t auch differenzierbar?

d$_{b,2}$) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \le 1 \\ 2x+t & \text{für } x > 1 \end{cases}$ **e**$_2$) $f(x) = \begin{cases} x+t & \text{für } x \le 1 \\ \frac{1}{x} & \text{für } x > 1 \end{cases}$

$\boxed{\text{f}_2}$) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \le 2 \\ -x^2+8x+t & \text{für } x > 2 \end{cases}$ g$_2$) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } 0 \le x \le 4 \\ \frac{x+t}{4} & \text{für } x > 4 \end{cases}$

($\bar{f}$) Für welche a, b ist $f(x)$ differenzierbar?

h$_2$) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \le 2 \\ a \cdot x + b & \text{für } x > 2 \end{cases}$ **i'**$_2$) $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 & \text{für } x \le 2 \\ (x-a)^2 + b & \text{für } x > 2 \end{cases}$

j$_3$) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \le a \\ b \cdot x + a & \text{für } x > a \end{cases}$

6.2.7 Der Beweis des Monotoniesatzes; 2. Teil der UE 10_6

385. (Ü)**Vorber. Weiherstraß:**$_e$ (GFS) Gegeben sei die Fkt $f(x) = x^2 - 2$ und sei $a_1 = 0$, $b_1 = 2$.
a$_e$) Berechnen Sie $f(a_1)$ und $f(b_1)$. Was können Sie über f im Intervall $[a_1; b_1]$ sagen? (Abb. 91a)
b$_1$) Berechnen Sie $f(\frac{a_1+b_1}{2})$; In welchem Teilintervall liegt die Nullstelle?
c$_1$**)** Definieren Sie das Intervall $[a_2; b_2]$ so, dass die Nullstelle in diesem Intervall ist.
Die linke Grenze hat einen _____________ Funktionswert, die rechte Grenze einen _____________.
d$_e$) Welchen Wert müssen Sie als nächstes berechnen? Und wie definieren Sie das Intervall $[a_3; b_3]$.
e$_1$) Mit welcher Funktion können Sie $\sqrt{3}$ approximieren?
f$_2$) ($\bar{f}$) Sei $f(x) = x^2 - 3$, $a_1 = 1$ und $b_1 = 2$. Ber. Sie die die Folgenglieder a_i und b_i (i=2,3,4).

386. (Ü) (GFS) **Zwischenwertsatz:**$_e$ a$_r$) Sei $f\ [a_1; b_1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a_1) < 0$ und $f(b_1) > 0$, dann hat f im Intervall _______ (m____________) eine ___________ ($\rightarrow$ 5.15).
Weierstraßsches Halbierungsverfahren:$_e$ b$_e$) Geben Sie analog zu Aufgabe 385 ein Verfahren an, mit dessen Hilfe Sie die Nullstelle finden können ($\rightarrow$ 4.9.5).
c$_e$) Es entstehen zwei Folgen a_n und b_n, mit $f(a_n)$ _ 0 und $f(b_n)$ _ _.
Wenn a_n gegen x_0 geht, dann geht b_n gegen ___.
d$_e$) Losgelöst von Teil c) betrachten wir die Folge $\frac{1}{n}$. $\frac{1}{n}$ ist _ 0, für alle n. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} =$ _.
Aus $c_n > 0$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ _ 0.
e$_e$) Was können Sie über $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$ und über $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$ aussagen? Berechnen Sie damit $f(x_0)$.
f$_2$) ($\approx$ Abi '17) Zeigen Sie: Jede ganzrationale Funktion 4. Grades hat (mind.eine) Extremstelle.

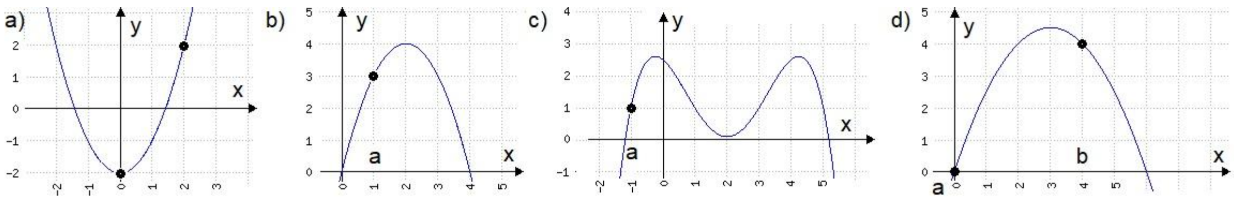


Abb. 91 Weierstraß Satz von Rolle Satz von Rolle Fall C Mittelwertsatz

387. (U) **Der Satz von Rolle:**$_e$ $\rightarrow$ 14.14.1: (GFS $_5$) Sei f auf $[a; b]$ stetig und auf $(a; b)$ differenzierbar (d.h. f' ist stetig) und $f(a) = f(b)$. Was hat f sicher? Vervollständigen Sie Abb. 152/91b. Beweisen Sie Ihre Vermutung für $f'(a) < 0$ und $f'(b) > 0$. Ist damit der Satz bewiesen?

Hilfssatz (HS) (thx $\neg$ Dr. Hahn): Sei f wie oben definiert und $f'(a) > 0$, dann gibt es ein $c > a$ mit $f(c) > f(a)$. c kann kleiner b gewählt werden.
Den Beweis führen wir indirekt: Annahme: Für alle $c > a$ gilt $f(c) \le f(a)$,
dann ist $f'(a) = \lim_{c\to a} \frac{f(c)-f(a)}{c-a} = \lim_{c\to a} \frac{\text{Wert} \le 0}{\text{Wert} > 0} \le 0$ (Widerspruch zu $f'(a) > 0$).

Beweis: Fall A: Sei $f'(a) < 0$ und $f'(b) > 0$, dann gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in (a; b)$ mit $f'(\xi) = 0$; **Fall B:** $f'(a) > 0$ und $f'(b) < 0$ analog. (Fall C: Abb. 152/91c)

Fall C: Sei $f'(a) > 0$ und $f'(b) > 0$: Sei $a_1 = a, b_1 = b$; nach HS gibt es $a_1 < c_1$ und $d_1 < b_1$ mit $f(a_1) < f(c_1)$ und $f(d_1) < f(b_1)$ [analog zeigt man **Fall D:** $f'(a) < 0$ und $f'(b) < 0$].
Betrachten wir nun $g(x) := f(x) - f(a)$ im Intervall $[c_1; d_1]$. Es gilt $g(c_1) := f(c_1) - f(a) > 0$ und $g(d_1) := f(d_1) - f(a) < 0$, Nach dem Zwischenwertsatz hat $g(x)$ im Intervall $[c_1; d_1]$ eine Nullstelle x_1. Es gilt $0 = g(x_1) = f(x_1) - f(a)$, also $f(a) = f(x_1)$.
Fall C_1: $f'(x_1) < 0$, verwende dann den Fall B; **Fall C_2:** $f'(x_1) = 0$ ($\xi = x_1$);
Fall C_3: $f'(x_1) > 0$; Falls $x_1 - a_1 \leq \frac{b_1 - a_1}{2}$, so definiere $a_2 = a_1$ und $b_2 = x_1$ sonst definiere $b_2 = b_1$ und $a_2 = x_1$. Damit ist $b_2 - a_2 \leq \frac{b_1 - a_1}{2}$. Führe den Fall C mit dem Intervall $[a_2; b_2]$ nocheinmal durch. Wenn man ständig (aus Versehen oder absichtlich) Stellen x_k mit $f'(x_k) > 0$ findet, so entstehen 3 (eigentlich 5) Folgen, mit $a_i < c_i < b_i$, wobei $b_k - a_k \leq \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}}$ (weil wir das kleinere der Restintervalle gewählt haben). Damit gilt, dass die Folgen a_k, b_k, c_k den gleichen Grenzwert haben, dieser heiße z. Es gilt für alle k: $f(c_k) > f(a_k) = f(b_k)$, damit ist $f'(z) = \lim_{k\to\infty} \frac{f(c_k) - f(a_k)}{c_k - a_k} \geq 0$ (sowohl $f(c_k) - f(a_k)$ als auch $c_k - a_k$ sind größer 0) und $f'(z) = \lim_{k\to\infty} \frac{f(b_k) - f(c_k)}{b_k - c_k} \leq 0$ ($f(b_k) - f(c_k) < 0$, weil $f(b_k) = f(a) < f(c_k)$ und $b_k - c_k > 0$).
Damit ist $f'(z) \geq 0$ und $f'(z) \leq 0$ also $f'(z) = 0$ (also das $\xi = z$ mit $f'(\xi) = f'(z) = 0$ gefunden).

388. (Ü) a_e) **Der Mittelwertsatz:**$_e$ → 14.14.3: (GFS) Verallgemeinern Sie den Satz von Rolle, indem Sie $f(a) = f(b)$ nicht mehr als Vorbedingung verwenden. Gibt es jetzt sicher eine Extremstelle oder etwas anderes? Vervollständigen Sie Abb. 152/91d.

Zum Beweis verwenden Sie die Funktion $g(x) = f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) + f(a)\right)$.

Was bedeutet dabei $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x - a) + f(a)$? Warum ist bei $g(x)$ der Satz von Rolle anwendbar und wie können Sie jetzt mit dessen Hilfe den Mittelwertsatz beweisen?
b_2) Sei $f(x) = x^2$ und $[a; b] = [1; 5]$; Finden Sie ein postuliertes ξ aus dem MWS.

389. (U) **Der Beweis:**$_e$ **a_1**) Negieren Sie den Satz: Wenn es regnet, dann ist die Straße nass ($R \Rightarrow N$). (→ Ag 28/39) **b_2**) Negieren Sie den Monotoniesatz: $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ smw.
c_2) Formulieren Sie die Def. von smw; was bedeutet es für eine Fkt, wenn Sie nicht smw ist?
d_e) Wenden Sie auf eine Funktion, die nicht smw ist, den ____________satz an.

6.2.8 Vollständige Funktionsuntersuchung (+ Kl. 11, $\overline{DHBW}$) LS: S. 145-146

390. (Ü) **a_r**) Eine Asymptote (e: *asymptote*) ist eine N_____________. Bei s_____rechten Asymptoten _= x_0 ist der Funktionswert __ oder $f(\_) =$ ___. ______rechte Asymptoten _= y_0 sind die ________werte für $x \to$ ___. Diese Asymptoten können vom Funktionsgraphen __________ werden, müssen es aber nicht. Bildlich gespochen geht der Graph bei Asymptoten ___ weit nach oben, unten, rechts oder links. **b_1**) Benennen Sie die Asymptoten der Fktsgraphen aus Abb. 155/94b-d.
c_r) Was antworten Sie, wenn Sie nach einer Asymptote gefragt werden und keine Ahnung haben?

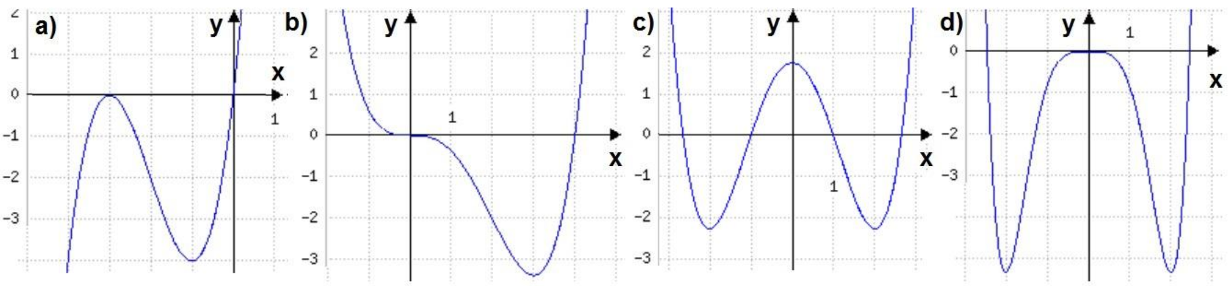


Abb. 92 Funktionsgraphen der Funktionen aus Ag 153/391

391. $_r$) Zu einer vollständigen Funktionsuntersuchung gehören: (EM6: S. 182-193; LS11: 177-179)
1) **M**onotonie / Monotoniebereiche (F 10/72); auch Umkehrbarkeit
2) **A**symptoten (auch Globalverhalten also Betrachtung von f für $x \to \pm\infty$);
3) **D**efinitionsbereich (bei ganzrationalen Fktn ist dies $\mathbb{R}$) auch Wertebereich;

4) **N**ullstellen (F 8/44);
5) **E**xtrempunkte (und später auch Wendepunkte) (F 10/69);
6) **S**ymmetrie (im Abitur nur spezielle Symmetrie = as zu $x = 0$ und ps zu $(0/0)$) (F 8/46);
7) **S**tetigkeit (das war früher so − heute ist 'Stetigkeit' auf meinem Themenfriedhof)
Merkregel: „madness“. (KA_G) Führen Sie diese Untersuchung an folgenden Funktionen durch:
a$_{b,2}$) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$; b$_2$) $g(x) = \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{2}$; c$_2$) $h(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + \frac{7}{4}$; $\boxed{\text{d}_2}$) $i(x) = \frac{x^6}{6} - x^4$.

392. (BD) Für jedes $t > 0$ sei die Funktion $f_t(x) = x^3 - tx$ gegeben. Führen Sie eine vollständige Funktionsuntersuchung (madness) für a$_2$) $t = 3$, b$_3$) für $t > 0$ durch.

M: (BAg 150/380), A: (BAg 101/257), D: (BAg 99/249),
N: (BAg 33/64), F 19, E: (BAg 145/359), F 69, S: (BAg 106/274), F 46;

c$_4$) Berechnen Sie die Ortskurve der Extrema (BAg 156/402).

6.2.9 Schließen von der Ableitung auf die Fkt + Kl. 11, $\overline{DHBW}$ EM6: S.182-188

393. (Ü) (KA_Z) (+ GFS) Aufgaben dieser Art finden Sie auch in den Abituren 2004, 2006, 2007 und 2015 (Ag 5). In Abb. 154/93 sind die Schaubilder der **Ableitungsfunktionen** $f_i'(x)$ gegeben.
a$_1$) An welchen Stellen hat $f_i(x)$ eine waagrechte Tangente? Klassifizieren Sie alle diese Stellen.
b$_1$) Ist $f_i(0) < f_i(1)$? **c$_1$)** In welchen Bereichen B_i ist $f_i(x)$ streng monoton wachsend?
d$_2$) Geben Sie alle Nullstellen von $f_i(x)$ an. **e$_1$)** Skizzieren Sie eine der Originalfunktionen $f_i(x)$.
f$_1$) Schätzen Sie die Wendestellen der Funktionen $f_i(x)$. Erklären Sie die 'NEW' Regel.
g$_2$) (I*) Es sei $f_i(-1) = 0$. Schätzen Sie $f_i(1)$. **h$_1$)** Geben Sie einen Term für $f_i'(x)$ an (außer $f_9'(x)$).

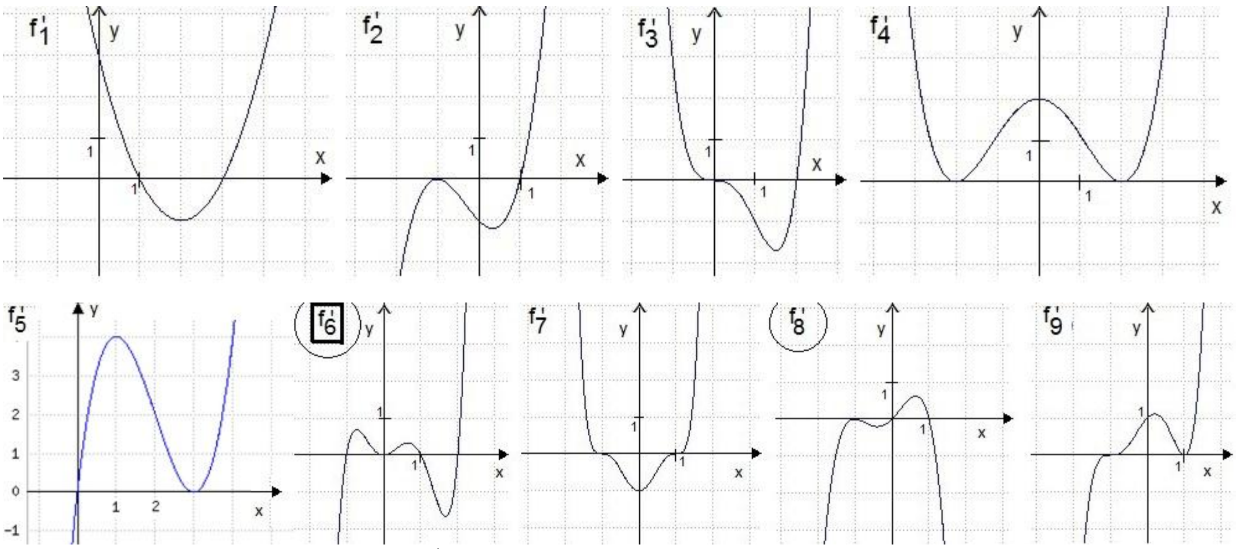


Abb. 93 Ableitungsfunktionen $f_i'(x)$, $i = 1, .., 9$;

394. (U) **Das Newtonverfahren → 4.10.4:$_e$** (GFS) (KS_{17}: 143-146) (GG) Gesucht ist eine Nullstelle (Nst) einer Funktion f. Stellen Sie sich vor, Sie könnten die Nst von $f(x) = x^2 - 2$ nicht berechnen. Durch eine Wertetabelle stellen wir fest, dass eine Nst zwischen _ und _ ist.
a$_1$) Berechnen Sie die Tangente von f bei $x_0 = 2$ (Startwert) und die Nullstelle x_1 der Tangente. $x_1 =$____ liegt (viel) n______ an der Nullstelle von f als $x_0 = 2$.
b$_2$) Ber. Sie die Tangente von f bei $x_1 = 1.5$ und wieder deren Nst und wieder deren Tangente usw. (insgesamt noch zwei Mal). Es entsteht eine r________ F_____, die gegen ___ geht.
c$_2$) Wiederholen Sie das Verfahren mit dem Startwert $x_0 = -4$ bis zum Näherungswert x_3.
d$_e$) Erklären Sie, wie für allgemeines f die neue Approximation x_{n+1} aus dem x_n berechnet wird.
e$_3$) Beweisen Sie die Formel mit dem B__________ F__________ S_____.
f$_3$) Sei wieder $f(x) = x^2 - 2$. Für $x_0 = 2$ gilt $x_n \to$_____ und für Für $x_0 = -4$ gilt $x_n \to$_____. Geben Sie für alle Startwerte den zugehörigen Grenzwert an.

g_2) Approximieren Sie eine Nullstelle g der Funktionen f_i mit dem Newtonverfahren (Startwert $x_0 = 1$) auf drei Nachkommastellen genau. i) $f(x) = x^2 - x - 4$; ii) $f(x) = x^3 - x - 1$; iii) $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$, $\boxed{\text{iv)}}$ $f(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 2$, $x_0 = 0.25$, v) $f(x) = x^3 - 2x + 2$, $x_0 = 0$; ↑ (KA_G) **(ab Kl. 11)**: ($x_0 = 1$): vi) $f(x) = x + e^x$; vii) $f(x) = (x-1) \cdot e^x - \frac{1}{2}$. viii) Approximieren Sie π mit Hilfe von $\sin(x)$; ix) Approximieren Sie e mit Hilfe von $e^x - x^e$;

6.2.10 Steckbriefaufgaben (Interpolation 2) (auch Kl. 11) LS11: S. 190-192

395. (Ü) (KA_G) Siehe auch Ag 92/223 (Einführung), Weiterführung Ag 277/765. Berechnen Sie die Koeffizienten der ganzrationalen Funktionen mit den folgenden Eigenschaften:

a_1) Eine, nach oben offene, Normalparabel geht durch $P(-2|6)$ und $Q(1|-6)$.
b_1) Eine, nach unten offene, Normalparabel geht durch $P(-2|-7)$ und $Q(-1|-2)$.
c_1) $f(x)$ ist ein Polynom zweiten Grades. K_f geht durch die Punkte $O(0|0)$, $P(1|-2)$ und $Q(2|0)$.
d_1) Eine, nach oben offene, Normalparabel geht durch $P(2|0)$ und hat einen Scheitel in $S(3|?)$.
$\boxed{\mathbf{e_1}}$) Eine, nach unten offene, Normalparabel geht durch $P(-2|-16)$ und hat ihren Scheitel an der Stelle $x_s = 2$.
f_2) $f(x)$ ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades, welche ihr Minimum im Ursprung und ihr Maximum im Punkt $P(4;4)$ annimmt. (Ab hier $\bar{f}$)
g_2) $f(x)$ ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades, deren Graph punktsymmetrisch zum Ursprung, deren Graph eine Nullstelle bei $x = 2$ hat und durch den Punkt $P(4|24)$ geht.
$h_{2,\bar{f}}$) f ist eine ganzrationale Funktion vierten Grades, deren Graph durch den Ursprung und durch $P(4|-24)$ geht, achsensymmetrisch zur $y-Achse$ ist und bei $x = 2$ eine Nullstelle hat.

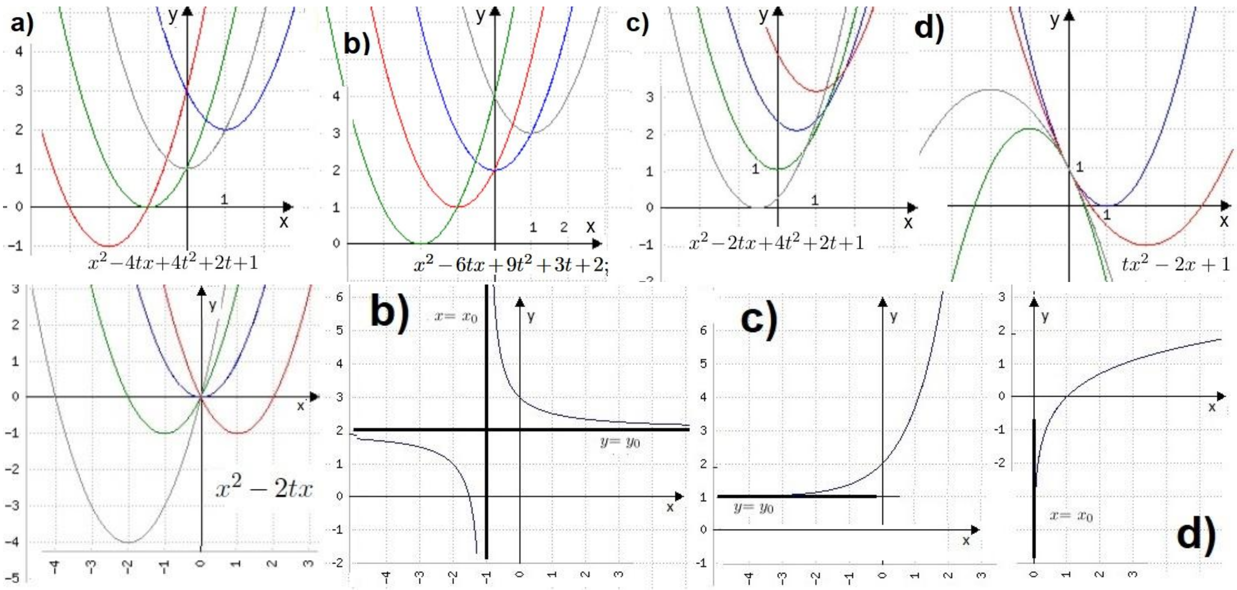


Abb. 94 Ortskurven Asymptoten: (gebrochenrational) (Exponentialfunktion) (Logarithmus)

i'$_2$) f ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades, deren Graph durch die Punkte $P_1(0|-4)$ und durch $P(-4|28)$ geht. In beiden Punkten hat K_f eine waagrechte Tangente.
j'$_2$) f ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades, deren Graph durch $P(1|2)$ und $Q(0|4)$ geht. An der Stelle 0 hat K_f die Steigung -0.5 und an der Stelle 3 die Steigung 1.
k'$_1$) f ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades, deren Graph die Nullstellen $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ und $x_3 = 4$ hat. An der Stelle x_1 hat K_f die Steigung 2.
L$_3$) f ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades, deren Graph die Nullstellen x_2 = -2 und $x_3 = 2$ hat. An der Stelle $x = 2$ hat K_f die Steigung 2. und an der Stelle $x = 0$ die Steigung -1.
m'$_{3,\bar{f}}$) f ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades, deren Graph durch $P(3|0)$ und $Q(0|0.75)$ geht. An den Stellen -1 und 3 hat K_f die Steigung 2.
n$_2$) ($\approx$ Abi '15) f hat Grad 3, K_f hat im Ursprung einen Hochpunkt und an der Stelle $x = 2$ die Tangente mit der Gleichung $y = 4x - 12$.

o$_2$) (≈ Abi '06) f hat Grad 3 und K_f berührt die $x-$Achse im Ursprung. Der Punkt $H(1|1)$ ist der Hochpunkt des Schaubilds.

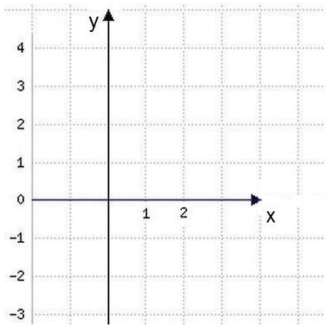
396. **Lagrange Interpolation:**$_e$ (GFS) Gegeben seien die Punkte $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$ und $P_3(x_3; y_3)$.
a$_1$) Geben Sie eine Gerade $p_1(x)$ an, mit $p_1(x_1) = 1$ und $p_1(x_2) = 0$ und geben eine Gerade p_2 an, mit $p_2(x_1) = 0$ und $p_2(x_2) = 1$. **b$_2$)** Durch welche Punkte geht $f(x) = y_1 \cdot p_1(x) + y_2 \cdot p_2(x)$?
c$_2$) Geben Sie ein Polynom zweiten Grades p_1 an, mit $p_1(x_1) = 1$, $p_1(x_2) = 0$, und $p_1(x_3) = 0$.
d$_2$) Welche Bedingungen haben p_2 und p_3? Geben Sie $p_2(x)$ und $p_3(x)$ an.
e$_2$) Geben Sie den Term von $f(x)$ an, der durch P_1, P_2 und P_3 geht. (Erklärvideos online)

6.2.11 Ortskurven (GFS)(auch Kl. 11; nur LK) LS Seite 150

397. (Ü) (KA$_B$) Leiten Sie die folgenden Funktionen nach x ab, $k, t \in \mathbb{R}$ gelten dabei als k___________.
a$_1$) $f(x) = 20x^2$, $f(x) = tx^2$; $f(x) = tx^3$, $f(x) = tx^4$, $f(x) = tx^{20}$, $f(x) = tx^k$;
b$_2$) $f(x) = tx^2 + 4x + 3t$, $f(x) = t^2x^3 + x^2 + 3t^2$, $f(x) = tx^3 + t^2x^2 + t^3x + t^4$,
c$_2$) $f(x) = tx^4 + 2x^2 + t^3 + t^2x$, $f(x) = (x - t)^2 + t$, $f(x) = x^3 - (2x - t)^2$, $f(x) = tx^{2t-1}$.

398. (Ü) Zu jedem $t \in \mathbb{R}$ seien folgende Beziehungen gegeben: $x(t) = 1 + t$ und $y(t) = 2t$. a$_e$) Vervollständigen Sie die folgende Wertetabelle.

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
$x(t)$							
$y(t)$							



b$_1$) Zeichnen Sie die Punkte $(x(t)/y(t))$ in das Koordinatensystem. Welche Punktmenge wird durch $(x(t)/y(t))$ beschrieben?
c$_1$) Wie lautet die explizite Form der Geraden (mit Beweis)?

399. (Ü) (KA$_B$) (GG) Eliminieren Sie bei folgenden Kurven den Parameter.
a$_1$) $x(t) = 2t$ $\quad y(t) = t$ $\quad$ b$_1$) $x(t) = 2t - 1$ $\quad y(t) = 4t + 2$ $\quad$ i$_4$) $\vec{x} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$.
c$_1$) $x(t) = t^3 - 1$ $\quad y(t) = 2t^3 + 1$ $\quad$ d$_1$) $x(t) = 3t + 2$ $\quad y(t) = t^2$
e$_1$) $x(t) = 0.5t - 1$ $\quad y(t) = \frac{t^2}{2} - 1$ $\quad$ $\boxed{\text{f}_1}$) $x(t) = \frac{t}{3} + 2$ $\quad y(t) = t^3 - t$
g$_3$) $x(t) = \frac{1}{t}$ $\quad y(t) = \frac{2}{t}$ $(t \neq 0)$ $\quad$ h$_4$) $x(t) = t^3$ $\quad y(t) = t^2$ (Neilsche Parabel)

400. (U) Zeichnen und berechnen Sie die Ortskurve der Scheitel von $f_t(x)$ für $t \in \mathbb{R}$: (Abb. 94)
a$_2$) $f_t(x) = x^2 - 4tx + 4t^2 + 2t + 1$; b$_2$) $f_t(x) = x^2 - 6tx + 9t^2 + 3t + 2$; **c$_2$)** $f_t(x) = x^2 - 2tx + 4t^2 + 2t + 1$;
d$_2$) $f_t(x) = tx^2 - 2x + 1$; $\boxed{\text{e}_2}$) $f_t(x) = x^2 - 2tx$; **f$_2$)** $f_t(x) = x^2 - 4tx$; **g$_2$)** $f_t(x) = 2x^2 - 12tx$;
h$_2$) $f_t(x) = -x^2 + tx$; **i$_2$)** $f_t(x) = tx^2 - 2x + 5$; j$_2$) $f_t(x) = tx^2 + x + 2$; k$_2$) $f_t(x) = \frac{x^2}{t} - 2x$;
h$_2$) Bestimmen Sie in der Abbildung die t Werte der abgebildeten Kurven (Teile a-e).

401. Die Menge aller Pkte einer Schar, die eine bestimmte Eigenschaft erfüllen nennt man Ortskurve. (Ü) **Algorithmus:** In der Regel werden Ortskurven von Extremata (Kl. 11: selten von Wendepunkten) gesucht. $_r$) **Grundaufgabe:** Berechnen Sie die Ortskurve der Extrempunkte von $f_t(x)$.

1) Setzen Sie $f_t\ (x)$ ____ und lösen Sie nach ____ auf (Algebra!) Sei $x = g(t)$:

2) Berechnen Sie den _-Wert des E__________ ($y = f(g(t))$ und klassifizieren Sie gegebenenfalls.

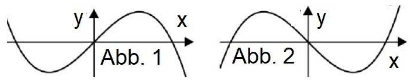
3) Der x- Wert des Extrempunktes sei $x = g(t)$; er ist also eine F________ von _. L_______ Sie $x = g(t)$ nach _ auf und s______ Sie dies in $y = f(g(t))$ ein (E____________ des P______________).

Bemerkung: Tatsächlich kann der Schritt 2 weggelassen werden; dann muss nur $t =$ _______ für _ in $f_t(x)$ eingesetzt werden. Das _ bleibt dann unberührt.

402. (KA$_G$) Berechnen Sie die Kurve, auf der die Hochpunkte der folgenden Fktnscharen $f_t(x)$ liegen: (GG) a$_2$) $f_t(x) = 3tx^2 - x^3$ $(t > 0)$; b$_2$) $f_t(x) = -x \cdot (x + 6t)^2$; c$_2$) $f_t(x) = x^2 \cdot (x - t)^2$;
Berechnen Sie die Ortskurve der Extrema. $\boxed{\text{d}_3}$ $f_d(x) = x^3 - 3t^2x$, e$_3$) $f_e(x) = x^3 - 3tx$,
f$_3$) $f_f(x) = x^3 - 3tx^2$, g$_3$) $f_g(x) = tx^3 - 3x$, h$_4$) $f_h(x) = \frac{x+t}{x^2}$; i$_4$) $f_i(x) = 2\sqrt{x} - tx$, $(t > 0)$;

403. (GG)$_L$ Ber. Sie die Ortskurve der Wendepunkte: a$_2$) $f_t(x) = x^3 - 3tx^2$; $\boxed{\text{b}_2}$) $f_t(x) = 6x^2 - tx^3$; c$_2$) $f_t(x) = \frac{t^2x^4}{16} + \frac{tx^3}{2}$, $(t > 0)$; d$_2$) $f_t(x) = \frac{x-t}{x^2}$, $(t \neq 0)$; e$_4$) $f_t(x) = \frac{x^3}{t} + 3tx^2$, $(t \neq 0)$;

404. **Scharen im Abitur:**$_e$ a$_2$) Sei $t > 0$ und $f_t(x) := 2t^4x^2 - \frac{x^4}{4}$; für welches t hat $f_t(x)$ ein Maximum an der Stelle 8?
b$_r$) Die Rechnung im Teil a) sollte so aussehen: $2t^2 = 8 \Rightarrow t =$___ $\Rightarrow$ (wegen) $t = 2$.
c$_3$) ($\approx$ Abi 2014) Gegeben ist für jedes $t > 0$ eine Funktion f gegeben durch $f_t(x) = \frac{x^3}{3} - t^2x$. Bestimmen Sie t so, dass die beiden Extrempunkte des Graphen von f_t den Abstand $\sqrt{1332}$ voneinander haben.
d$_3$) ($\approx$ Abi 2019) Gegeben sei für jedes $t > 0$ eine Funktion $f_t(x) = x^4 - 2tx^2 + 8t$ mit Graph K_t.
i) Für welche t hat K_t einen Tiefpkt mit möglichst hohem y-Wert.
ii) Berechnen Sie alle Punkte durch welche alle K_t verlaufen.



e$_3$) $\approx$ Abi BY 2018 Für $a \neq 0$ ist $f_a(x) = \frac{1}{a} \cdot x^3 - x$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben. i) Welche Abb. $\uparrow$ stellt einen Graphen von f_a dar? ii) Für welches a hat K_{f_a} an der Stelle $x = 3$ einen Extrempunkt?
f$_3$) i) Führen Sie eine vollst. Fktsuntersuchung von $f(x) = 3x - \frac{x^3}{3}$ (Graph: Abb. 1) durch.
ii) Zeigen Sie, dass $g(x) = -x - \frac{16}{3}$ eine Tangente an K_f an der Stelle -2 ist. iii) Geben Sie die Anzahl der Lösungen der Gleichung $f(x) = m \cdot x - \frac{16}{3}$, in Abhängigkeit von m ($m \in \mathbb{R}$) an.

405. **Ganzrationale Funktionen im Abitur** a$_2$) ($\approx$ PT 06, 5 VP) Abb. 157/95a zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f (das Schaubild von f sei G_f). Geben Sie für jeden der folgenden Sätze an, ob er richtig, falsch oder nicht entscheidbar ist. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort. **i)** G_f hat bei $x = -2$ einen Tiefpunkt. **ii)** G_f hat für $-3 \leq x \leq 6$ genau zwei Wendepunkte. **iii)** G_f verläuft im Schnittpunkt mit der $y-$Achse steiler als die erste Winkelhalbierende. **iv)** $f(0) > f(5)$.

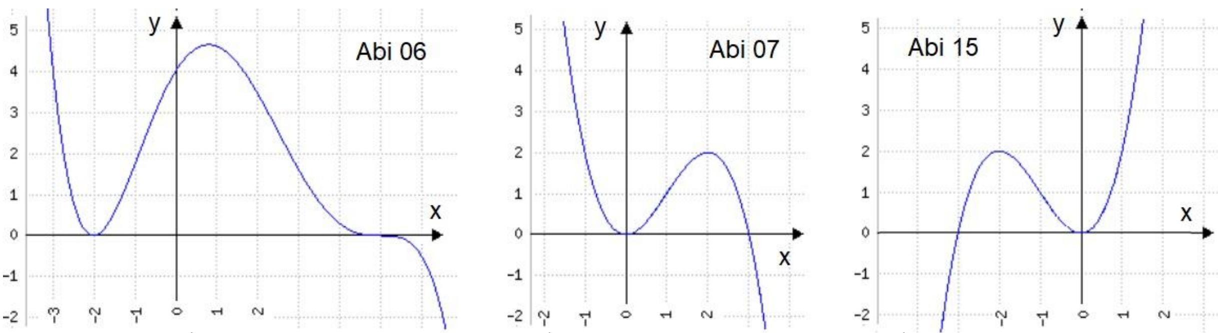


Abb. 95 a) $f'(x)$ Abi 2006 b) $f'(x)$ Abi 2007 c) $f'(x)$ Abi 2015

b$_2$) **($\approx$ Abi 2007, 5 VP)** Abb. 157/95b zeigt die Ableitung f' der Fkt f. Welche Aussagen über f ergeben sich daraus im Hinblick auf **i)** Monotonie, **ii)** Extremstellen, **iii)** Wendestellen? Begründen Sie Ihre Aussagen. **iv)** Es gilt $f(0) = 0$. Skizzieren Sie den Graph von f.

c$_{2-3}$) **($\approx$ Abi 2015, 5 VP)** Abb. 157/95c zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f' einer ganzrationalen Fkt f (der Graph von f sei G_f). Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind: Begründen Sie jeweils Ihre Antwort. **i)** G_f hat bei $x = -3$ einen Tiefpunkt, **ii)** $f(-2) < f(-1)$, **iii)** $f''(-2) + f'(-2) < 1$, **iv)** Der Grad der Fkt ist mindestens vier.

d$_{1-2}$) **($\approx$ Abi 2008, 4 VP)** Für eine ganzrationale Fkt f zweiten Grades gilt: $T(-1|-4)$ ist der Tiefpunkt und $Q(2|5)$ ein weiterer Punkt ihres Graphen. Ermitteln Sie eine Fktgleichung von f.

e$_1$) **($\approx$ Abi 2016, 3 VP)** Der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{-x^3}{6} + x^2 - x$ besitzt einen Wendepunkt. Zeigen Sie, dass $y = x - \frac{4}{3}$ eine Gleichung der Tangente in diesem Wendepunkt ist.

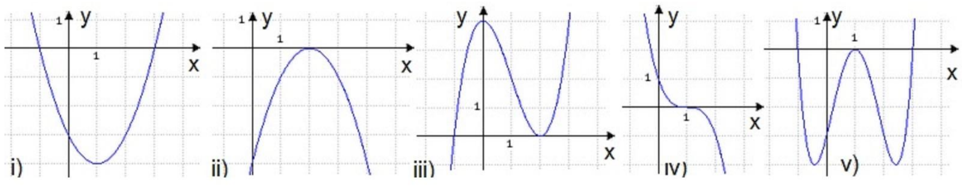
f) ($\approx$ Abi 2017, 2.5 VP) Sind folgende Aussagen wahr? Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.
i$_2$) Jede Funktion, deren Ableitung eine Nullstelle hat, besitzt eine Extremstelle.
ii$_3$) Jede ganzrationale Funktion vierten Grades hat eine Extremstelle.

g) (≈ WT Abi 2008, 11 VP) Ein Tal in den Bergen wird nach Westen von einer steilen Felswand, nach Osten von einem flachen Höhenzug begrenzt. Der Querschnitt des Geländes wird beschrieben durch das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -0.1 \cdot (x+3)^2 \cdot (x-3)$ im Bereich $-4 \leq x \leq 2$ dabei weist die positive $x-$Achse nach Osten (1 LE entspricht 100 m).
i) Berechnen Sie die Stelle, an der die östliche Talseite am steilsten ist, und **ii)** dann die Stelle, an der die westliche Talseite gleich steil ist. **iii)** Quer zum Tal befindet sich in West-Ost-Richtung eine Staumauer. Vom tiefsten Punkt des Tals aus gemessen ist sie 270 m hoch. Berechnen Sie die Breite der Staumauer an ihrer Oberkante. **iv)** In der Talsohle befindet sich ein Dorf, das bereits nachmittags im Schatten liegt. Nach dem Vorbild des italienischen Ortes Viganella soll auf dem höchsten Punkt des Höhenzugs östlich des Dorfes ein Gerüst mit einem drehbaren Spiegel zur Reflexion von Sonnenlicht aufgestellt werden. Auch hier wird der Querschnitt des Geländes durch das Schaubild der Funktion f beschrieben. Bestimmen Sie die Mindesthöhe dieses Gerüsts, bei der das Sonnenlicht den tiefsten Punkt des Geländequerschnitts erreichen kann. **v)** Wie hoch müsste das Gerüst werden, damit der gesamte Geländequerschnitt zwischen Dorf und Gerüst beleuchtet werden kann?

h) (≈ Abi 2016, 9 VP) Der Graph der Funktion f mit $f(x) = -0.05x^3 + 0.6x + 4.4$ beschreibt modellhaft für $-4 \leq x \leq 4$ das Profil eines Geländequerschnitts. Die positive $x-$Achse weist nach Osten, $f(x)$ gibt die Höhe über dem Meeresspiegel an (1 Längeneinheit entspricht 10 m).
i$_1$) Auf welcher Höhe liegt der höchste Punkt des Profils?
ii$_{2-3}$) In dem Tal westlich dieses Punktes befindet sich ein See, der im Geländequerschnitt an seiner tiefsten Stelle 8 m tief ist. Bestimmen Sie die Breite des Sees im Geländequerschnitt.
iii$_{2-3}$) Ab einer Hangneigung von 30° besteht die von Erdrutschen. Besteht an der steilsten Stelle des Profils Erdrutschgefahr? iv$_3$) Der weitere Verlauf des Profils nach Osten hin kann durch eine Parabel zweiter Ordnung modelliert werden, die sich ohne Knick an den Graphen von f im Punkt $(4; 3.6)$ anschließt. Ihr Scheitel liegt bei $x = 7$ und beschreibt den tiefsten Punkt eines benachbarten Tals. Auf welcher Höhe befindet sich dieser Punkt?

i) (≈ Abi 2015, 5 VP) Der Laderaum eines Lastkahns ist 50 m lang. Sein Querschnitt ist auf der gesamten Länge gleich und wird modellhaft beschrieben durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{x^4}{125}$; $-5 \leq x \leq 5$; (x und $f(x)$ in Meter). i$_1$) Wie tief ist der Laderaum in der Mitte? ii$_{1-2}$) Wie breit ist er in 3m Höhe? iii$_2$) In welchem Bereich hat der Boden des Laderaums eine Neigung unter 5%? iv$_2$) Zur Wartung steht der Lastkahn an Land auf einer ebenen Plattform. Dort wird er stabilisiert durch gerade Stützen, die orthogonal zur Außenwand des Laderaums abgebracht sind. Betrachtet werden zwei gegenüberliegende Stützen, deren Befestigungspunkte im Modell durch die Pkte $P_1(-4|f(-4))$ und $P_2(4|f(4))$ beschrieben werden. In welchem Abstand voneinander enden diese Stützen auf der Plattform? v$_2$) I*) Ber. Sie das Volumen des Lastkahns.

406. **Minimalanforderungen UE** 10_6 **Extremwerte**: Sei $f(x) = 0.6x^5 - 4x^3$.
a) Berechnen Sie alle globalen und lokalen Extrempunkte von f im Intervall [-3;2.5]. (F 69)
b) Führen eine vollständige Funktionsuntersuchung (madness) bei f durch.
c$_{LK}$) Berechnen Sie die Ortskurve der Extrema der Kurvenschar $f_t(x) = x^2 - 4tx + 2$ bzw. $g_t(x) = -x^2 - 6tx - 9t^2$.
d) Berechnen Sie die Koeffizienten des Polynoms dritten Grades welches durch $P(1; -1)$ geht, sowie im Ursprung einen Extrempunkt und eine weitere Extremstelle bei $x = 2$ hat.



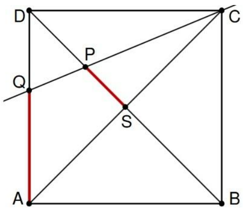


Abb. 96 Ableitungsfunktionen zu Ag 159/407 →

e) Betrachten Sie die Schaubilder der **Ableitungsfunktionen** $f'(x)$ aus Abb. 158/96. An welchen Stellen hat $f(x)$ eine Extremstelle (mit Klassifikation), Wendestelle, Nullstelle?

In welchen Bereichen ist $f(x)$ streng monoton wachsend?
(zu UE 10_1) Geben Sie einen möglichen Funktionsterm für $f'(x)$ an.
f) Berechnen Sie die Wendetangenten von $f(x) = \frac{x^4}{2} - 6x^3$.

407. (Ü) **Algebraisierung:**$_e$ a$_1$) Sei $ABCD$ ein Quadrat (mit Seitenlänge 1 bzw a) und M_{BC} die Mitte von B und C. In welchem Verhältnis teilt die Diagonale DB die Strecke AM_{BC}?
b'$_3$) Sei B ein beliebiger Punkt eines Kreises K mit Mittelpunkt M und Radius r; und sei t die Tangente an K in B. Zeigen Sie, dass die senkrechte Gerade zu t durch B durch __ geht.
c'$_3$) Zeigen Sie: Im Dreieck teilt der Schwerpunkt die Schwerline im Verhältnis _____
d$_4$) (LaWe '19) Gegeben ist das Quadrat $ABCD$ (Abb. 158/96) mit Diagonalenschnittpunkt S. Eine Gerade durch C, die nicht durch D verläuft, schneidet die Diagonale BD im Punkt P und die Seite AD im Punkt Q so, dass die Strecken DP und DQ gleiche Länge haben. Zeigen Sie: Die Strecke AQ ist doppelt so lang wie die Strecke SP. (siehe auch 69/196; $P(\frac{a}{a+1}; \frac{a^2}{a+1}); a = 1 + \sqrt{2}$)

6.2.12 Ist der Mathe LK das Richtige für mich?

In erster Linie ist Ihr Klassenarbeitsschnitt Klasse 10 eine Entscheidungshilfe. Sie müssen damit rechnen, dass Ihre Note im LK um eine Note schlechter sein kann als dieser Schnitt. Der Unterricht im LK ist ähnlich zu meinem Unterricht in der Mittelstufe. Die Arbeiten werden aber mehr Transferaufgaben enthalten. Die Abschnitte 149/6.2.5 (Extremwertaufgaben) und 156/6.2.11 (Ortskurven) zeigen Ihnen Inhalte des Mathe LKs. Sollten Sie mit diesen Abschnitten Schwierigkeiten haben, so rate ich Ihnen von der Wahl eines Mathe LKs ab. Beachten Sie bitte auch, dass ein mündliches Abitur (Abs 378/14.1.2 + 984/16.8) als leichter und besser bewertet einzustufen ist als ein schriftliches Abitur. Der Beweis des Monotoniesatzes (Abs. 150/6.2.6) ist ein Ausblick auf das Mathe Studium. Sie sollten auch Ihren Studienwunsch nicht außer Acht lassen. Bei einem angestrebten MINT Studium empfehle ich einen M LK (optimal mit Ph + Info); bei einem gesellschaftwiss. Studium D (optimal mit G). Für Studieninfos pflege ich eine Liste ehemaliger Schüler, die Ihnen gerne über ihr Studienfach Auskunft geben. Oberstes Gebot ist aber: Lieber das Abitur schaffen und das Studium nicht als umgekehrt.
Für Mathefreaks: Die LK-Kombination: Mathe, Physik oder Chemie, Info oder NWT, zusammen mit D (Abi-mündlich) + Seminarkurs Statistik ist möglich!
Vorsicht: Die LK Kombination Mathe, Physik hatte 2021 am FSG die einzigen Abi-Durchfaller.

6.3 Exponentialfunktionen und Ableitungsregeln (UE 11_2)

Basisformeln: F 11, F 16, F 19, F 23, F 24, F 54, F 56, F 57, F 69.

Die Modellierung vom exponentiellem oder beschränktem Wachstum

6.3.1 Die Ableitung der Exponentialfkt (GFS)→ 14.11.3 KS$_{17}$: 42-44 + KS$_{09}$: 67-68

408. (U) (GG) Wir wollen Exponentialfunktionen der Form $f(x) = a^x (a > 0; a \neq 1)$ ableiten.
a$_2$) Warum dürfen Sie dabei die Potenzregel nicht anwenden?
b$_e$) Versuchen Sie $f(x) = 2^x$ mit Hilfe des D_______________abzuleiten.
c$_e$) Klammern Sie beim entstandenen Quotienten sinnvoll aus und treffen Sie eine Aussage.
d$_2$) Berechnen Sie auf die gleiche Weise die Ableitung von 3^x und 4^x.

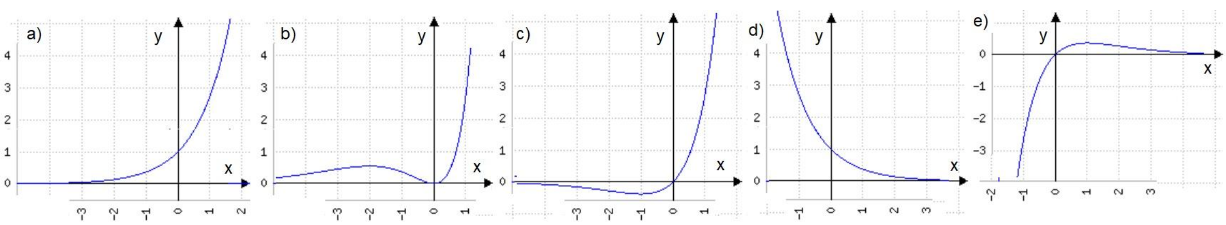


Abb. 97 Schaubilder von e-Funktionen

409. (U) a_e) In Ag 159/408 haben wir gezeigt, dass $(a^x)' =$ _______ ist, wobei $k(a)$ konstant also unabhängig von x ist. Es ist wünschenswert das a zu finden, für welches $k(a) =$ __ also $(a^x)' =$ __ gilt (dieses $'a'$ nennen wir $'e'$ nach Leonhard Euler). Weil $k(2) \approx$__ und $k(3) \approx$__ gilt, ist __ $< e <$ __. Welche Bedingung muss e erfüllen? Was hat diese Gleichung mit dem Bänkerschockbeispiel (Ag 63/167 oder Abs 4.8.5) zu tun? b_r) $(e^x)' =$ _____ **(Formel 73, FD 14)**.

410. (U) Ordnen Sie jedem Funktionsgraphen den passenden Funktionsterm zu und begründen Sie Ihre Entscheidung: $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^{-x}$, $f_3(x) = x \cdot e^x$, $f_4(x) = x \cdot e^{-x}$, $f_5(x) = x^2 \cdot e^x$.

6.3.2 Natürliche Logarithmen + Halbwertszeiten (GFS) KS_{17}: 45-49 + KS_{09}: 69-71

411. (U) a_e) Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf: $10^x = 5$, $7^x = 5$, $e^x = 5$.

b_e) Sei a ____, dann gilt $e^x = a \Leftrightarrow$ _______ **(Formel 74)** und e^x 0 **(Formel 75, FD 18)**.
c_e) Betrachten Sie die Wertetabelle von $\ln(x)$. Woher kennen Sie diese Werte?
d_1) Formulieren Sie (die) 3 Logarithmengesetze für natürliche Logarithmen. ↓ (KS_{17} :120-122)
Berechnen und begründen Sie die Werte von $'\ln(-1)'$, $'\ln(0)'$, $'\ln(1)'$, $'\ln(e)'$ und $'\ln(\infty)'$.

(KA_G) (T) Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf:
e_T) i_1) $e^x = 3$, ii_1) $e^x = e$, iii_1) $e^x = 2$, iv_1) $e^x = 1$, v_1) $e^x = 0$, vi_1) $e^x = -1$,
vii_1) $e^x + 4 = e$, $viii_1$) $4e^x = e$, ix_1) $\frac{e^x}{4} = e$, x_1) $e^{x+4} = e$, xi_1) $e^{4x} = e$, xii_1) $(e^x)^4 = e$;

$f_{T,2-4}$) i) $e^{-2x} = e^2$, ii) $(e^{-x})^2 = e^2$, iii) $e^{2x} = e^{-2}$, iv) $e^{2x} = -e^2$, v) $((-e)^x)^2 = e^2$;

$g_{T,2-4}$) i) $e^{x+3} = e^{4x}$, ii) $e^{(x+3)^2} = e^{(4x)^2}$, iii) $e^{(x+3)^3} = e^{(4x)^3}$, iv) $e^{\sqrt{x+3}} = e^{\sqrt{4x}}$;

Vorübung i) $x^4 + 2 = 3x^2$, ii) $x^6 + 2 = 3x^3$, iii) Sei $a > 0$, $(a^b)^c$=? iv) $(e^x)^2$ =?

$h_{T,2}$) i) $e^{2x} + 2 = 3e^x$, ii) $e^{2x} + 2e^x = 3$, iii) $2e^{2x} + 1 = 3e^x$, iv) $2e^{2x} + 3e^x + 1 = 0$;

$i_{T,2}$) **i**) $e^{2x} - e^x - 6 = 0$, ii) $e^{3x} - e^{2x} - 6e^x = 0$, iii) $e^{3x} + e^{2x} - 6e^x = 0$;

$j_{T,2}$) **i**) $e^{2x} - 6e^x + 8 = 0$, ii) $e^{-2x} - 6e^{-x} + 8 = 0$, $\boxed{\textbf{iii}_2}$) $e^{3x} - 3e^{2x} + 2e^x = 0$
iv) $e^{-3x} - 3e^{-2x} + 2e^{-x} = 0$, **v**) $1 - e^{-x} - 2e^{-2x} = 0$, vi) $1 - e^x - 2e^{2x} = 0$;

$k_{T,2}$) i) $e^x + e^{-x} = 2$, ii) $e^x + 2e^{-x} = 1$, iii) $e^x - 2e^{-x} = 1$, iv) $2e^x = e^{-x} + 1$;

$L_{T,2}$) i) $e^{2x} - 5 \cdot e^x + 4 = 0$, ii) $e^{4x} - 5 \cdot e^{2x} + 4 = 0$, iii) $e^{6x} - 5 \cdot e^{3x} + 4 = 0$;

$m_{T,2-3}$) i) $e^{2x} - 6 \cdot e^x + 5 = 0$, ii) $e^x - 6 \cdot e^{0.5x} + 5 = 0$, iii) $e^{0.5x} - 6 \cdot e^{0.25x} + 5 = 0$;

$n_{T,2}$) $\boxed{\text{i}_2}$) $(2x^2 - 8) \cdot (e^{2x} - 9) = 0$, **ii)** $(3x^2 - 3^3) \cdot (e^{3x} - 3^3) = 0$, **iii)** $(4x^2 - 4^3) \cdot (e^{4x} - 3^4) = 0$;

$o_{T,2-3}$) i) $x \cdot e^x = x$, ii) $\cos(x) \cdot e^x = \cos(x)$, iii) $\ln(x) \cdot e^x = \ln(x)$, iv) $e^x \cdot e^x = e^x$;

p_{2-3}) i) $x^2 \cdot e^x - 4x \cdot e^x = 0$, ii) $x \cdot e^{-x} + \frac{5}{e^x} = 0$, iii) $10 \cdot e^{-0.5x} - 5x \cdot e^{-0.5x} = 0$;

$q_{T,1-2}$) i) $e^{2x-4} = 1$ ii) $e^{2x+4} = 1$ iii) $e^{-2x+4} = 1$ iv) $e^{-2x-4} = 1$ v) $2e^{-x} - 4 = 1$

$r_{T,3}$) i) $e^{x+1} - e^x = 1$, ii) $e^{x+2} - e^{x+1} = e$, **i**ii) $e^{x+3} - e^{x+2} = e^2$, iv) $e^{x-1} - e^{x-2} = e^{-2}$,

s_{3-4}) i) $(e^x - \frac{1}{e}) \cdot (e^{3x} - e^{2x}) = 0$, ii) $e^{2x} - (1 + e)e^x + e = 0$, iii) $e^{2x} - e^{1+x} - e^{2+x} + e^3 = 0$;

$t_{T,4}$) Sei $a \in \mathbb{R}$; für welche a sind die Gleichungen lösbar? Wie lautet dann die Lösungsmenge?
i) $a^x = 1$, ii) $a^x = 0$, iii) $a^x = a$, iv) $x^a = 1$, v) $x^a = 0$, vi) $x^a = a$,

412. (U) a_1) Sei $k > 0$; schreiben Sie k als Potenz: $k = e$— (F 26).

Stellen Sie die folgenden Funktionsgleichungen immer in der Form $y = c \cdot e^{kx}$ ($c > 0$, k_0) dar.
b_1) Eine Zelle teilt sich ein Mal pro Tag. Wieviele Zellen gibt es nach x Tagen?
c_1) Strontium zerfällt jährlich um 2,4%. Es sind 100 mg Strontium vorhanden.
d_1) Ein Jod-Isotop zerfällt pro Stunde zu 30%. Es sind 200mg des Isotops vorhanden.
e_2) Ein anderes Isotop zerfällt alle zwei Stunden zu 15%. Es sind 50mg des Isotops vorhanden.
f_1) Bei einem anderen Stoff ist nach einem Tagen noch 36 % der ursprünglichen Masse vorhanden.

g_2) Berechnen Sie alle Halbwertszeiten der Zerfälle aus den Aufgaben c-f, sowie von $y = c \cdot e^{kx}$.
h_r) Die Halbwertszeit x_H eines Zerfalls $y = c \cdot e^{kx}$ ist u__________ vom Startwert _:
$x_H =$ ______. $y = c \cdot e^{\ln(0.25)\cdot x}$ hat HWZ $x_H =$ _________ = ____ Zeiteinheiten.

413. (U) **Asymptote der e-Funktion:**$_e$ Gegen welchen Wert streben $e^x; e^{-x}$ für $x \to \pm\infty$? Erklären Sie Ihre Vermutung. $f(x) = e^x$ hat die _____rechte Asymptote _____ **(Formel 75)** .

(KA_G) Bestimmen Sie die Asymptoten von a$_1$) $f(x) = 1 + e^x$, b$_1$) $f(x) = 2 - e^{-x}$, c$_1$) $f(x) = xe^x$, d$_1$) $f(x) = 3e^{2x-1}$, $\boxed{\text{e}_1}$) $f(x) = x^2e^{-2x+1}$, f$_2$) $f(x) = (4 - x^2)e^{1-x}$, g$_2$) $f(x) = x + e^x$, h$_2$) $f(x) = 3x + 5 - 2e^{-2x}$, ($\overline{\text{KA}}$) i$_3$) $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, j$_3$) $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, k$_4$) $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$, L$_4$) $f(x) = \frac{3e^{-x}}{1+3e^{-x}}$, m$_4$) $f(x) = \frac{2e^x}{e^x - 1}$.

Strebt x gegen $+\infty$ oder gegen $-\infty$, wenn $f(x)$ gegen die Asymptote strebt?

m_r) Die e- Funktion d________ alle Polynome: $\lim\limits_{x\to\infty} x^{100} \cdot e^{-x} =$ _ und $x^{100} - e^x \xrightarrow{x\to\infty}$ ____.

n_e) Folgende Idee liefert oft die (waagrechte) Asymptote bei e-Funktionen: Setze für e^x, bzw. $e^{-x} =$ _ und berechne den entstehenden Term. **Bsp:** $x^2 \cdot e^{2x-1} + 4 \to x^2 \cdot 0 + 4$ hat wA $y = 4$.

o_e) Sei $f(x) = e^x$ und seien $a, b \in \mathbb{R}$. Strecken Sie K_f mit dem Faktor a in x und mit dem Faktor b in y-Richtung. Die so gestreckte Funktion heiße $g(x)$. Unter gewissen Bedingungen kann K_g aus K_f auch durch eine Verschiebung entstehen. Geben Sie diese Bedingungen an.

6.3.3 Die Kettenregel (e: *chain rule*) → 14.12.2 (GFS) KS$_{17}$: 14-19 + KS$_{09}$: S. 59-61

414. (U) a_e) Klären Sie die Begriffe innere Fkt (g) und äußere Fkt an den verketteten Funktionen:

$f_1(x) = \sin(4x + 5)$, $f_2(x) = \cos(3x - 2)$, nur LK: $f_3(x) = \sin(x^2)$ und $f_4(x) = (x^2 - 6x + 3)^5$.

b_r) Die innere Funktion ist immer das, was z_________ berechnet wird.

415. (U) a$_e$) Gegeben seien die folgenden Fktn (vergleiche Ag 414) und deren Ableitungen. Analysieren Sie gewisse Zusammenhänge. Versuchen Sie eine (allgemeine) Ableitungsregel herzuleiten.

$$(\sin(4x + 5))' = 4 \cdot \cos(4x + 5)), \qquad (\cos(3x - 2))' = 3 \cdot (-\sin(3x - 2)),$$

$$\text{nur LK: } \left(\sin(x^2)\right)' = 2x \cdot \cos(x^2), \qquad \left((x^2 - 6x + 3)^5\right)' = (2x - 6) \cdot 5(x^2 - 6x + 3)^4.$$

b_1) Verifizieren Sie Ihre Regel bei den folgenden Funktionen und deren Ableitungen.

$$\textbf{(FD 15)} \quad \left(\sqrt{3x+5}\right)' = 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x+5}}, \text{nur LK: } \left(\frac{1}{x^4 - x^2}\right)' = (4x^3 - 2x) \cdot \frac{-1}{(x^4 - x^2)^2}.$$

c_r) i) Seien f, g differenzierbar, dann ist $(f(g(x)))' =$ ______________ **(Formel 76)** .
ii) Welche Ableitung ist anders? iii) Die Kettenregel der Physiker: $\frac{df}{dx} =$ _________.

416. (KA_B) Leiten Sie folgende Funktionen nach x ab: **a**$_{b,1}$) $f(x) = \sin(2x+1)$, **b**$_1$) $f(x) = \cos(1-3x)$, c$_1$) $f(x) = e^{4x-5}$, $\boxed{\textbf{d}_1}$) $f(x) = e^{4-2x}$, **e**$_1$) $f(x) = e^{ax+b}$ **(Formel 73)** $(e^{ax+b})' =$ ________, **e**$_1$) $f(x) = (x - 7)^3$, f$_1$) $f(x) = (3x - 2)^7$, **g**$_1$) $f(x) = \sqrt{4x + 6}$, h$_2$) $f(x) = \sqrt[3]{3x + 4}$, **i**$_2$) $f(x) = \frac{1}{3x-4}$, **j**$_2$) $f(x) = \frac{1}{(3-4x)^2}$, k$_2$) $f(x) = (3x + 1)^4 - (7x - 2)^{-3}$,
nur LK: $\boxed{\textbf{L}_2}$) $f(x) = (2x^2 + 7x)^4$, **m**$_2$) $f(x) = e^{\sin(x)}$, **n**$_2$) $f(x) = \cos(\sqrt{x})$, o$_2$) $f(x) = \sqrt[4]{\sin(x)}$, p$_2$) $f(x) = 3e^{x^2+2x-1}$, **q**$_2$) $f(x) = 4\cos(x^2)$, **r**$_2$) $f(x) = 12\sin(e^x + x)$, **s**$_2$) $f(x) = 101e^{\cos(x)}$, t$_2$) $f(x) = \frac{6}{3x^2+2x+7}$, u$_2$) $f(x) = (2x + \frac{2}{x})^3$; **v**$_2$) $f(x) = e^{2x-x^2}$; **w**$_2$) $f(x) = e^{5-x^3}$; **x**$_2$) $f(x) = \left(e^{4-4x+x^2}\right)^2$; **y**$_2$) $f(x) = e^{2x-4} \cdot e^{x^2-4}$; ↓ ($KA_G$) auch GK

z$_2$) (Thx Trs) Ein Mordopfer wurde im Freien bei einer konstanten Temperatur von 5°C gefunden. Man misst bei seiner Ankunft am Tatort eine Leichentemperatur von 23°C. Eine Stunde später (immer noch am Tatort) ist die Temperatur auf 18.5°C zurückgegangen. **i)** Begründen Sie kurz, weshalb der Abkühlungsvorgang der Leiche näherungsweise mithilfe einer Funktion der Form $f(t) = a + c \cdot e^{kt}$ beschrieben werden kann, wobei t die seit dem Mord vergangene Zeit in Stunden misst. **ii)** Bestimmen Sie die Werte von a, c und k. **iii)** Die Leiche wurde um 14 Uhr gefunden. Bestimmen Sie, wann der Mord verübt wurde. **iv)** Zeigen Sie, dass f das Newtonsche Abkühlungsgesetz $f'(t) = k \cdot (f(t) - a)$ erfüllt. **v)** Zeigen Sie, dass $f(t)$ streng monoton fällt.

417. (U) $_{4,f}$) Beweisen Sie die Kettenregel mit mit Hilfe von $\frac{df}{dx}$ und der „x_0“ - Methode der Ableitung

$$f'(x_0) \;=\; \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \;=\; \frac{df}{dx} \;=\; \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Warum benötigen Sie dabei die Differenzierbarkeit (+ Stetigkeit) der inneren Funktion?

6.3.4 Mehrfache Verkettung (LK) (GFS)

Cartoon 31

418. (U) a_e) Wir wollen $f(x) = \sin(\sqrt{x^2 - 3x})$ ableiten. Welche Regel müssen Sie anwenden? Teilen Sie $f(x)$ sinnvoll auf.
b_e) Berechnen Sie die Ableitung von $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$. Welche Regel vermuten Sie für die mehrfache Verkettung $(f(g(h(x))))'$?
c_3) Berechnen Sie die erste Ableitung von
i) $f(x) = \sin(\cos(x^2))$, $\boxed{\text{ii}}$) $f(x) = e^{\sin(2x+1)}$, iii) $f(x) = \sin(\sqrt{3x + 4})$, **iv)** $f(x) = \cos^2(1 - 2x)$,
v) $f(x) = \sqrt{e^{4x-6}}$, vi) $f(x) = (e^{x^2} + \sin(x^2))^3$; vii) $f(x) = \left(\frac{1}{2x+1} - e^{2x+1} + \cos(2x + 1)\right)^{-3}$.

6.3.5 Die Produktregel (e: *product rule*) → 14.12.4 (GFS) KS_{17}: 20-22 + KS_{09}: 62-63

419. (U) a_e) Gegeben seien die folgenden Funktionen und deren Ableitungen. Analysieren Sie gewisse Zusammenhänge. Versuchen Sie eine (allgemeine) Ableitungsregel herzuleiten.

$$\left(x^2 \cdot \sin(x)\right)' \;=\; 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x),$$

$$\left((x^2 - 6x + 3) \cdot \sqrt{x}\right)' \;=\; (2x - 6) \cdot \sqrt{x} + (x^2 - 6x + 3) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

b_e) Verifizieren Sie Ihre Regel bei den folgenden Funktionen und deren Ableitungen:

$$\left(x^4 \cdot \cos(x)\right)' \;=\; 4x^3 \cdot \cos(x) - x^4 \cdot \sin(x) \qquad (\sin(x) \cdot \cos(x))' \;=\; \cos^2(x) - \sin^2(x).$$

c_r) Seien u, v differenzierbar, dann gilt $(u(x) \cdot v(x))' =$ ________________ **(Formel 77, FD 15)**.

420. ($\text{KA}_{BA,Z}$) Differenzieren Sie: $\text{a}_{T,1}$) i) $f(x) = x \cdot e^x$, ii) $f(x) = (x+1) \cdot e^x$, iii) $f(x) = (x+2) \cdot e^x$;
$\text{b}_{T,1}$) i) $f(x) = (3 - x^2) \cdot e^x$, ii) $f(x) = (3 - x^2) \cdot \sin(x)$, iii) $f(x) = (3 - x^2) \cdot \sqrt{x}$;
$\text{c}_{T,1}$) i) $f(x) = (e^x - 1) \cdot (e^x + 1)$, ii) $f(x) = (e^x - 2) \cdot (e^x + 2)$, iii) $f(x) = (e^x - 3) \cdot (e^x + 3)$;
$\text{d}_{T,1-2}$) i) $f(x) = x \cdot e^{-x}$, ii) $f(x) = (x - 1) \cdot e^{-x}$, iii) $f(x) = (x - 2) \cdot e^{-x}$, iv) $f(x) = (x - 3) \cdot e^{-x}$;
$\text{e}_{T,1-2}$) i) $f(x) = (2x - 4) \cdot e^{4x+2}$, ii) $f(x) = (3x - 4) \cdot e^{4x+2}$, iii) $f(x) = (4x - 4) \cdot e^{4x+2}$;
$\text{f}_{T,1-2}$) i) $f(x) = (6x - 3) \cdot e^{1-2x}$, ii) $f(x) = (6x - 3) \cdot e^{1-3x}$, $\boxed{\text{iii)}}$ $f(x) = (6x - 3) \cdot e^{1-4x}$;
$\text{g}_{T,2}$) i) $f(x) = x \cdot e^{ax+b}$, ii) $f(x) = (ax + 1) \cdot e^{ax+b}$, iii) $f(x) = (ax + 2) \cdot e^{ax+b}$,
$\text{h}_{T,1-2}$) i) $f(x) = x \cdot e^{2x}$, ii) $f(x) = x \cdot \sin(2x)$, iii) $f(x) = x \cdot \cos(2x)$, iv) $f(x) = x \cdot \sqrt{2x}$;
nur LK: $\textbf{i}_{T,2}$) i) $f(x) = e^x \cdot \sin(x)$, $\boxed{\text{ii)}}$ $f(x) = e^{x^2} \cdot \sin(x^2)$, iii) $f(x) = e^{x^3} \cdot \sin(x^3)$;
$\text{j}_{T,2}$) i) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$, ii) $f(x) = \sin(x^2) \cdot \cos(x^2)$, iii) $f(x) = \sin(x^3) \cdot \cos(x^3)$;
$\text{k}_{T,2-3}$) i) $f(x) = e^x \cdot \frac{1}{x}$, ii) $f(x) = e^x \cdot \frac{1}{x+1}$, iii) $f(x) = e^x \cdot \frac{1}{x+2}$, iv) $f(x) = e^x \cdot \frac{1}{x+3}$;
$\text{L}_{T,2-3}$) i) $f(x) = \sin(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)}$, ii) $f(x) = \cos(x) \cdot \frac{1}{\sin(x)}$, iii) $f(x) = \frac{1}{\sin(x)} \cdot \frac{1}{\cos(x)}$;

m$_3$) i) $f(x) = e^{2x+x^2} \cdot \cos(x^2 - 2x + 3)$ ii) $f(x) = (x^2 + 3x)^2 \cdot e^{2x+1}$;
iii) $f(x) = \sqrt{2x+1} \cdot \cos(x^2 + 5)$, iv)$_{\bar{f}}$ $f(x) = (e^{2x} - 1)^2 \cdot (4x - 1)^3$, v) $f(x) = e^{\sin(x)} \cdot \sin(e^x)$.

421. (KA$_Z$)(U) Führen Sie eine vollständige Funktionsuntersuchung (madness) analog zu Ag 153/391 durch:
a$_2$) $f(x) = (x+1) \cdot e^x$, $\boxed{\text{b}_2)}$ $g(x) = x \cdot e^{-x}$, c$_2$) $h(x) = x^2 \cdot e^{0.5x}$, d$_4$) $f(x) = (e^{-x} - 1) \cdot (e^x - e^2)$;

(≈ Abi 2017) e$_3$) Zeigen Sie, dass $f(x)$ für $x > x_0$ streng monoton fallend ist und nur positive Werte annimmt. i) $f(x) = x \cdot e^{-0.5x}$, $x_0 = 2$; ii) $f(x) = (x - 1) \cdot e^{-0.25x}$, $x_0 = 5$;

422. (U) a$_{3,L}$) Leiten Sie $f(x) = x \cdot e^x \cdot \sin(x)$ ab und verallgemeinern Sie Ihr Ergebnis auf die Ableitung von $u(x) \cdot v(x) \cdot w(x)$. Differenzieren Sie: b$_{3,L}$) $f(x) = x \cdot \cos(x) \cdot \sin(x)$, $\boxed{\text{c}_{3,L})}$ $f(x) = e^x \cdot \sqrt{x} \cdot \cos(x)$.

6.3.6 Implizites Differenzieren (nur LK) (GFS) → 14.13

423. (U) a$_e$) Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel die Ableitungen (nach x) von $(\sin(x))^2$, $(x^2 - 3x)^2$, $(\cos(x))^2$, $(\sqrt{x}\ + 1)^2$, $(e^x)^2$, $(y(x))^2$.
b$_e$) Berechnen Sie auch die Ableitungen von $(y(x))^3$, $\frac{1}{y(x)}$, $\sqrt{y(x)}$, $\sin(y(x))$, $e^{y(x)}$ und $f(y(x))$.

424. a$_e$) Stellen Sie sich vor, Sie würden die Ableitung von $\sqrt{x}$ nicht kennen. Wir versuchen diese Ableitung herzuleiten, indem Sie bei $y = \sqrt{x}$ die W_________ eliminieren. Leiten Sie die resultierende Gleichung nach x ab (siehe Aufgabe 423). Lösen Sie die Gleichung nach ____ auf und setzen Sie jetzt für y=_________ ein. **↓(Formel 73, FD 14)**

(U) b$_4$) (KS$_{17}$ 56-57) Berechnen Sie analog zu a) die Ableitung von $y = \ln(x)$; $(\ln(x))' =$ ____.

c$_2$) (KA$_Y$) Differenzieren Sie: i) $\ln(3x)$, ii) $\ln(2x+1)$, $\boxed{\text{iii})}$ $\ln(5+4x)$, iv) $\ln(x^2+4x)$, v) $\ln(7x)$, vi) $\ln(e^x - 3x)$, vii) $\frac{1}{\ln(x)}$, viii) $e^{\ln(x)+1}$, ix) $\ln(\frac{x+1}{x-1})$, x) $e^x \cdot \ln(x)$, xi) $\ln(-x)$.

d$_3$) Stellen Sie $y = \frac{1}{x}$ implizit als Produkt dar und berechnen Sie die Ableitung von $y = \frac{1}{x}$ mit der Produktregel ohne die Potenzregel zu verwenden.

e$_3$) Mit Hilfe der Ableitung der Exponentialfunktion und der Kettenregel können wir (endlich) die Potenzregel der Ableitung __________ beweisen, indem wir x^r in der Form $e^?$ also als 'Exponentialfunktion' darstellen. Differenzieren Sie $e^?$ und verifizieren Sie die Potenzregel.

f$_{3-4}$) Berechnen Sie analog zu a) die Ableitung von i) $y = \sqrt[3]{x}$, ii) $y = \sqrt[n]{x}$, iii) $y = \ln(\sqrt{x})$,

g$_4$) Differenzieren Sie $(u(x) + v(x))^2$ implizit und ausmultipliziert und beweisen Sie so die Produktregel der Ableitung.

425. Geben Sie die Tangente der impliziten Relation $f(x, y) = 0$ im Punkt P an.
a$_3$) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 25$, $P(3; 4)$; b$_4$) $f(x, y) = y^3 + 3x^2 - 13y$, $P(2; 1)$;
c'$_3$) Berechnen Sie die Punkte mit waagrechter Tangente der Kurve $(3x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

426. (Nur LK) ≈ Abi 2019 Die Fläche, die eine Bakterienkultur belegt wird durch die Funktion $f(t) = 20 \cdot e^{0.1t-0.005t^2}$, ($t$ in Std nach Beobachtungsbeginn, $f(t)$ in cm^2) beschrieben.
a) Ber. Sie i) die größte Fläche und ii) wann die Kultur wieder die Ausgangsfläche einnimmt.
b) Formulieren Sie zu der Gleichung $f(t + 5) - f(t) = 9.1$ eine Frage im Sachzusammenhang.
c) i) Zeigen Sie, dass für $h(t) = f(t + 10)$ die Eigenschaft $h(-t) = h(t)$ für alle t gilt.
ii) Welche geometrische Eigenschaft des Graphen von f wird damit beschrieben? d$_3$) $H(x_0|0)$ ist ein Hochpkt von K_f mit $f''(x_0) < 0$. Zeigen Sie, dass H ein Tiefpkt von $g(x) = -x^2 \cdot f(x)$ ist.
(aus IQB-Fundus) e$_3$) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $f(x) = (x - x_0)^2 \cdot g(x)$.
Zeigen Sie, dass der Graph von f im Punkt $P(x_0|f(x_0))$ die x-Achse als Tangente besitzt.
f$_3$) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f'(5) = 0$ und $f''(5) = 2$. Was besitzt $g(x) = e^{-f(x)}$ an der Stelle $x = 5$?
g$_4$) Die Funktion g ist auf $\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Es gilt $g(4) = 2$, $g'(4) = 0,5$ und $g''(x) < 0$ im Intervall $[0; 6]$. Untersuchen Sie, ob g im Intervall $[0; 6]$ eine Nullstelle besitzt.
h$_3$) ≈ Abi 21: Sei $g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei mal diffbar. Sei $f(x) = e^{g(x)} - 2$. Zeigen Sie: Wenn x_0 eine

Wendestelle von g und von f ist, dann hat der Graph von g bei x_0 eine waagrechte Tangente.
i_2) (Abi 11, Ag 4) Gegeben sind die Fktn $f(x) = e^x$ und $g(x) = -e^{-x} - 1$. i) Beschreiben Sie, wie K_g aus K_f entsteht. ii) Zeigen Sie, dass sich K_g und K_f im Punkt $P(0|1)$ berühren.

j_{2-3}) ($\approx$ Abi 22, BY, A3) Der Graph G_f der in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion f ist in Abb 164/98 abgebildet und besitzt nur an der Stelle $x = 3$ eine waagrechte Tangente. Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion g mit $g(x) = f(f(x))$. **i)** Geben Sie mithilfe Abb 98 die Funktionswerte $f(6)$ und $g(6)$ an. **ii)** Berechnen Sie $g'(x)$ (abhängig von f).
iii) Ermitteln Sie mithilfe von Abb 98 alle Stellen, an denen der Graph von g eine waagrechte Tangente besitzt.

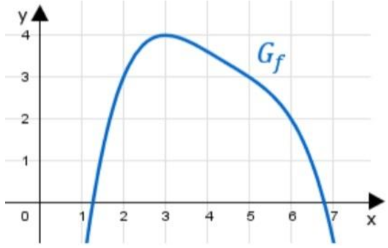


Abb. 98 Graph von f

6.3.7 Die Quotientenregel → 14.12.5 (nur LK) (GFS)

LS: S. 64-65

427. (Ü) **Die Quotientenregel:**$_e$ Sei $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$. Interpretieren Sie diesen Quotienten als Produkt und differenzieren Sie diesen mit der P________regel. Verwenden Sie dazu die in Aufgabe 423 gefundene Formel für $(\frac{1}{v(x)})'$ **(Formel 78)** : $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' =$ ___________.

428. (KA_G) Differenzieren Sie die Fktn $f(x) =$ a$_2$) $\frac{1}{x+1}$, b$_2$) $\frac{5}{x-4}$, c$_2$) $\frac{x+1}{x-1}$, d$_3$) $\frac{1}{(x+1)^2}$,
e$_3$) $\frac{x+1}{(x-1)^2}$, f$_3$) $\frac{x-3}{(x-2)^2}$, g$_3$) $\frac{2x-2}{(x+2)^2}$, h$_3$) $\frac{x^3+2x^2}{3(x-1)}$, i$_3$) $\frac{tx^2+t}{(x+1)^2}$ j$_2$)' $\frac{(x-2)^2}{x\cdot(x-4)}$
k$_2$)' $\frac{6x^2}{1+x^2}$ L$_2$) $\frac{2}{e^{2x}+3}$, m$_2$) $\frac{e^x}{e^{2x}-2}$, n$_2$) $\frac{e^{2x+1}}{e^{2x}-4}$, o$_2$) $\frac{1-e^{-3x-3}}{e^{2x}+1}$, p$_2$) $\frac{e^{-2x-2}-2}{e^{2x+2}+2}$,
q$_2$) $\frac{\sin(x)}{x-4}$, r$_2$) $\frac{x}{e^x}$, s$_2$) $\frac{e^x}{x-4}$, t$_2$) $\frac{1-x}{\ln(x)}$, u$_2$) $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, v$_3$) $1 + \tan^2(x)$,

w$_4$) Sei $f(x) = 2x^2 \cdot \sqrt{1-2x} + \frac{-3e^{-x}}{\ln(x^2+10)}$; berechnen Sie den Definitionsbereich von $f'(x)$.

z$_2$) $\frac{x-4}{(x+4)^2}$, $\frac{x-4}{(x+4)^3}$, $(\bar{f})$ $\frac{x-4}{(x+4)^4}$, $(\bar{f})$ $\frac{x-4}{(x+4)^5}$,

429. Gesucht ist die Ortskurve für $t > 0$ a$_3$) der Wendepunkte von $f_t(x) = \frac{-2x}{t} \cdot e^{tx}$;
b$_3$) der Hochpunkte von $f_t(x) = e^{tx} \cdot (x-1)^2$; c$_3$) der Tiefpunkte von $f_t(x) = \frac{2x}{t} \cdot e^{tx}$, $t \neq 0$.
d$_3$) der Extrempunkte von $f_t(x) = \frac{x}{x^2-t}$, $t \neq 0$; e$_3$) der Hochpunkte von $f_t(x) = \frac{8x}{x^2+t^2}$;
f$_3$) der Tiefpunkte von $f_t(x) = \frac{4+t^3x^3}{x^2}$; g$_3$) der Wendepunkte von $f_t(x) = \frac{8}{x^2+t^2}$;

430. Führen Sie eine vollständige Funktionsuntersuchung (madness) analog zu Ag 153/391 durch:
a) i$_2$) $\ln(4-x)$; ii$_2$) $\ln(2x+5)$; iii'$_2$) $-\ln(5-4x)$; iv$_3$) $\ln(x^2+\frac{3}{4})$;
v$_3$) $(x-1)\ln(x)$; vi'$_3$) $x^2(\ln(x) - 1.5)$; vii'$_3$) $x\ln((x+1)^2)$;
viii'$_3$) $\ln(x^2+2x+1)$; ix'$_3$) $\ln(\frac{x^2-4x+3}{3})$; x'$_3$) $\ln(8+2x-x^2) - \ln(8)$;
b) i'$_2$) $\sqrt{4-x} - 1$; ii'$_2$) $\sqrt{2x+5} - 1$; iii$_2$) $-\sqrt{5-4x} + 3$; iv'$_4$) $\sqrt{1+x^2}$;
v$_4$) $\sqrt{x^2+2x+1} - 2$; vi$_4$) $\sqrt{\frac{x^2-4x+3}{3}} - 1$; vii$_4$) $\sqrt{\frac{8+2x-x^2}{8}} - 1$; **c)** i$_4$) $\frac{1}{\ln(x)}$; ii$_4$) $\frac{1}{\sqrt{x}}$
d$_2$) Wie entstehen die Graphen der Teile a i, a ii und a iii aus dem Graph von $\ln(x)$, bzw die Graphen der Teile b i, b ii und b iii aus dem Graph von $\sqrt{x}$?

431. (Vor. Ag 95/238) **Umkehrbarkeit:** a$_e$) Berechnen Sie die Umkehrfunktion von $f(x) = x^2$.
b$_e$) $f(x) = x^2$ ist n__________ u_______________. Es gilt (ua) $f(-3) = f($__$)$.
c$_r$) i) Eine Funktion f heißt umkehrbar (in_____, eineindeutig) $\Leftrightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1)$________.
ii) $f(x) = x^2$ hat ein inneres E_______________ und ist damit nicht s________ ________.
iii) f (x)___ (auf $[a;b]$) $\Rightarrow f(x)$ ist streng monoton $\Rightarrow f(x)$ ist u________.
Zeigen Sie, dass die Funktionen f umkehrbar sind und berechnen Sie die UKF $f^{-1}(x) = \overline{f}(x)$.
d$_{2,T}$) $f(x) =$ i) e^x; ii) e^{2x+1}; iii) e^{3x-6}; iv) e^{-x}; v) e^{-2x+1}; vi) e^{-3x-6}; allgemein e^{ax+b}.
e$_{2,T}$) $f(x) =$ i) $\ln(x)$; ii) $\ln(2x+1)$; iii) $\ln(3x-6)$; iv) $\ln(-x)$; v) $\ln(-2x+1)$; vi) $\ln(-3x-6)$.

$\mathrm{f}_{2;T}$) $f(x) =$ i) $\sqrt{x}$; ii) $\sqrt{2x+1}$; iii) $\sqrt{3x-6}$; iv) $\sqrt{-x}$; v) $\sqrt{-2x+1}$; vi) $\sqrt{-3x-6}$.

g$_1$) $f(x) = (e^{x-3})^2$; h$_3$) Zeigen Sie: f ist streng monoton $\Rightarrow$ f ist umkehrbar.

(aus ZPG) i) Best. Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktionen und untersuchen Sie diese auf Umkehrbarkeit: i$_1$) $\frac{x^3}{3} + 2x$, ii$_1$) xe^x, iii$_2$) $\sqrt{3-x}$, iv$_2$) $\ln(1+x^2)$, v$_4$) $x - \frac{2}{x}$;

j$_{2-3}$) Geben Sie alle (zusammenhängenden) Definitionsbereiche so an, dass die Funktionen umkehrbar sind: i) $f(x) = x^2 + 4x$, ii) $f(x) = e^{-x^2}$, iii) $f(x) = \ln(3-2x)$, iv) $f(x) = x - \frac{2}{x}$.

k$_3$) Sind die Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie ihre Entscheidung. K_f ist der Graph von f. **i)** Ist K_f achsensymmetrisch zur y-Achse, so ist die f nicht umkehrbar. **ii)** Ist K_f punktsymmetrisch zum Ursprung, so ist f umkehrbar. **iii)** Besitzt f Extremstellen, so ist f nicht umkehrbar. **iv)** Besitzt f keine Extremstellen, so ist f umkehrbar. **v)** Die Ableitung von $\bar{f} = f^{-1}(x)$ ist die Umkehrfunktion von $f'(x)$. **vi)** K_f und $K_{f^{-1}}$ schneiden sich auf der 1.Winkelhalbierenden. **vii)** Die Umkehrfunktion einer Umkehrfunktion ist die ursprüngliche Funktion. **viii)** Haben K_f und $K_{f^{-1}}$ gemeinsame Punkte, so haben diese die Form $A(a|a)$ mit $f'(a) \cdot (f^{-1})'(a) = -1$. **ix)** Gilt $f(x) = f^{-1}(x)$ so gilt im Schnittpunkt ($K_f \cap K_{f^{-1}}$) $A(a|a)$: $f'(a) = \pm 1$.

l$_3$) **i)** Gegeben ist $f(x) = \sqrt{9-x^2}$; $x \in [0;3]$, ber. Sie f^{-1} und interpretieren Sie! **ii)** Ber. Sie für $f(x) = e^{2x-3}$ die UKF $f^{-1}(x)$, incl. $\mathbb{D}$ und $\mathbb{W}$, berechnen Sie auch $f(f^{-1}(x))$ und $f^{-1}(f(x))$.

m$_4$) Zeigen Sie, dass $f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ invertierbar ist und berechnen Sie $\bar{f}(x) = f^{-1}(x)$.

n$_2$) Berechnen Sie den maximalen Definitionsbereich $\mathbb{D}$ und die Nullstelle von $f(x) = \ln(e^2 - x)$. Berechnen Sie auch die Tangente an f in $(0|f(0))$.

o$_{2-3}$) Gegeben ist die Fkt $f(x) = \sqrt{6-3x}$ mit maximalem Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$. i) Bestimmen Sie $\mathbb{D}_f$ und die Wertemenge $\mathbb{W}_f$ von f. ii) Erläutern Sie, wie K_f aus dem Graph von $\sqrt{x}$ entsteht. iii) Weisen Sie nach, dass f umkehrbar ist und bestimmen Sie einen Term von $\bar{f}(x)(= f^{-1}(x))$ incl. $\mathbb{D}_{\bar{f}}$ und $\mathbb{W}_{\bar{f}}$.

p$_{2-3}$) ($\approx$ BY Abi '19) Gegeben ist die Fkt $f(x) = 2 - \ln(x-1)$ mit maximalem Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$. i) Führen Sie eine vollständige Funktionsuntersuchung (madness; Ag 153/391) durch.
ii) Beschreiben Sie, wie der Graph von f genannt G_f schrittweise aus dem Graphen der auf $\mathbb{R}^+$ definierten Funktion $\ln(x)$ hervorgeht. Erklären Sie damit das Monotonieverhalten von G_f.
iii) Zeigen Sie, dass $F(x) = 3x - (x-1) \cdot \ln(x-1)$ mit Definitionsbereich $\mathbb{D}_F =]1;\infty[$ eine Stammfunktion von f ist. Best. Sie die Stammfunktion von f, die bei $x = 2$ eine Nullstelle hat.

q$_{2-3}$) ($\approx$ BY Abi '19) Gegeben ist die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion f mit $f(x) = 2 \cdot \left((\ln(x))^2 - 1\right)$.
i) Zeigen Sie, dass $x = e^{-1}$ und $x = e$ die einzigen Nullstellen von f sind und berechnen Sie den Tiefpunkt und die Wendetangente von G_f. ii) Begründen Sie, dass $f'(x) \xrightarrow{x \to 0} -\infty$ geht.
r$_e$) Gibt es nicht monotone Funkionen, die umkehrbar sind? Siehe auch Abb 95/39 + 99/42.
s$_r$) $f'(x) > 0$ ohne L______ $\Rightarrow$ f ist s______ $\Rightarrow$ f ist u______.

432. (Stand alone) **GFS** a$_4$) Lösen Sie $\sin^2(y) +$ _____=1 nach $\cos(y)$ auf. Mit $y = \arcsin(x)$ berechnen Sie $\cos(\arcsin(x))$. Woher kennen Sie diese Formel? Zeigen Sie $(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x)$.
b$_3$) Differenzieren Sie: i) $y = \sin^{-1}(x)$, ii) $y = \cos^{-1}(x)$, iii) $y = \tan^{-1}(x)$.
c$_4$) (Aus Prof. Adameks Mathevorkurs) ($\overline{\text{RP}}$) Eine Studentin geht hinter einem Schotten her, der einen Rock trägt. In welcher Entfernung muss sie hinter dem Schotten hergehen damit sie dessen Beine unter einem möglichst großen Blickwinkel sehen kann? Die Höhe des Rocksaumes über der Erde sei 60cm und die Augenhöhe der Studentin sei 1.78 m.

6.3.8 Wie kann ich mich auf das Abitur vorbereiten?

Rechnen Sie sehr sehr viele Abitur und IQB Aufgaben (zB aus Kap. 16). Dazu brauchen Sie Zeit. Deshalb sollten Sie mit der Abiturvorbereitung spätestens zu den Faschingsferien anfangen (am Anfang, nicht am Ende). Optimalerweise bilden Sie Lerngruppen 3-5 Personen; diese können zB anhand der Sitzordnung gebildet werden. Schauen Sie sich dabei nicht nur die Lösungen/Filme (abifilm.slt.biz) an, sondern rechnen Sie unbedingt die Aufgaben selber; versuchen Sie auch, ein ganzes Abitur am Stück zu rechnen. Wiederholen Sie auch die Basiscs/Formelsammlung.

Cartoon 32

6.3.9 Extremwertaufgaben im (schriftlichen) Abitur mit dem GTR/Graph $\overline{DHBW}$

Vielen Dank an Herrn Makowsky + Herrn Tressel für die intensive Beratung zum Thema Abitur. Im (Analysis-) Wahlteil des Abiturs sind die a) Teile in der Regel ähnlich. In diesem Abschnitt sollen Musteraufgaben und Lösungsvorschläge betrachtet werden.

Was im Abitur gefragt wird und was vom Schüler erwartet wird stimmen nicht immer überein. Folgende Struktur sollte eine Lösung im Wahlteil immer haben (auch wenn es nicht dasteht):

1) Formulierung eines mathematischen Ansatzes.
2) Notieren des GTR Ergebnisses / Ablesen des gesuchten Punktes aus dem Schaubild.
3) Formulieren eines Antwortsatzes mit physikalischer Einheit.

Eine Zeichnung (auch Skizze) sollte folgende Accessoires haben:

1) Achsen werden mit dem Namen, der Einheit und mindestens einer Zahl beschriftet und enden mit einer Pfeilspitze in Richtung $+\infty$.
2) Das Schaubild endet am vorgegebenen Definitionsbereich.
3) Berechnete Punkte (und eventuell auch andere Zwischenpunkte) werden eingezeichnet.

Beispielaufgabe: Bei einem Produktionsvorgang wird die Temperatur eines Werkstückes beschrieben durch die Funktion
$f(t) = 0.01t^3 - 0.6t^2 + 9t + 10$,
$t \in [0; 35]$, t in Minuten, $f(t)$ in Grad Celsius.
a$_1$) Skizzieren Sie den Temperaturverlauf.
b$_1$) Welche maximale Temperatur nimmt das Werkstück in diesem Zeitraum an?
c$_1$) Wie groß ist der maximale Temperaturabfall?
d$_1$) Damit das Werkstück bearbeitbar bleibt, darf seine Temperatur nicht unter $10°C$ fallen. Kann dies garantiert werden?

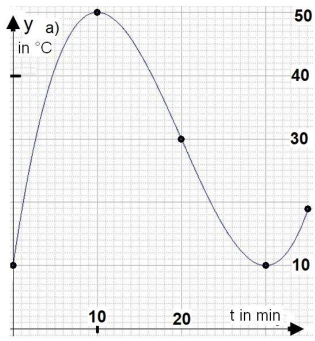


Abb. 99 Temperatur

Lösungsvorschlag:

	mathematischer Ansatz	GTR Ergebnis	Antwortsatz
b)	$f'(t) = 0$	$\Rightarrow H(10; 50)$.	Die Maximaltemperatur ist $50°C$.
c)	$f''(t) = 0$	$\Rightarrow W(20; 30)$;	$f'(20) = -3$. Der Maximaltemperaturabfall ist 3 $\frac{°C}{min}$.
d)	$f'(t) = 0$	$\Rightarrow T(30; 10)$.	Die Temperatur wird nicht unterschritten.

Bemerkung: Beachten Sie hierbei, dass der mathematische Ansatz nicht unbedingt etwas mit der GTR - Rechnung zu tun haben muss. Die hinreichende Bedingung wird genau dann erwartet, wenn kein Schaubild (oder GTR) dazu gegeben wird. Bei gegebenem Schaubild ist die Betrachtung der Randwerte ist nur dann relevant, wenn diese definitiv extremal (also alleine ein globales Extremum) sind. Ein Verweis zB 'Der Graph zeigt einen Hochpunkt' ist wünschenswert.

Die Anwortsätze können deshalb ergänzt werden:

b) Das Maximum wird im Hochpunkt angenommen, deshalb ist die Maximaltemperatur $50°C$;

c) Der maximale Temperaturabfall wird im Wendepunkt angenommen, deshalb ist dieser $|f'(20)| = |-3|$ also 3 $\frac{°C}{min}$;

d) Das Minimum wird im Tiefpunkt angenommen, deshalb ist die Minimaltemperatur $10°C$; $10°C$ wird also nicht unterschritten.

6.3.10 *e*- Funktionen im Abitur (KA$_G$) $\overline{DHBW}$

Ihr Notendurchschnitt aus den Halbjahren $11_1, 11_2$ und 12_1 bildet die sogenannte Anmeldenote, die eine Prognose für Ihr Abschneiden im Abitur ist. Deshalb wird jede Arbeit, die ich mit Ihnen schreibe, etwa Abiturniveau haben. . Den Pflichtteil (ohne WTR) schreiben Sie auf Blätter. Nach deren Abgabe schreiben Sie den Wahlteil mit WTR + Merkhilfe ins Heft. Zur Vorbereitung auf eine Klausur in den Klassen 11 und 12 sollten Sie **dringend** alte Abituraufgaben rechnen. Diese finden Sie z.B. auf www.mathe-aufgaben.com. In Klasse 11 können Sie von einer nicht gelösten Aufgabe oft nicht erkennen, ob dies am 'nicht verstanden' oder am 'nicht behandelten' Stoff lag. Deshalb gibt es oft am Ende einer Unterrichteinheit eine Sammlung von Aufgaben, die Sie bis hier her beherrschen sollten; gleiches finden Sie in der Abiturvorbereitung vor den einzelnen Abituren. Diese Ag werden im Unterricht nur auf Anfrage besprochen und sind als Klausurvorbereitung **unerlässlich**. Wenn Sie nicht ableiten können, dann schaffen Sie etwa 0 NP! I*) bedeutet, dass bei dieser Ag Integralrechnung aus Abs 7.1 notwendig ist. Bei den Operatoren 'bestimmen' und 'angeben' darf ein Wert aus einer gegebenen Abbildung abgelesen werden; bei 'berechnen' nicht. Eine Playlist der Themen der ersten LK-KA finden Sie unter http://KALK1.slt.biz

433. ((Ü) ≈ Abi 2013) Ein zunächst leerer Wassertank einer Gärtnerei wird von Regenwasser gespeist. Nach Beginn eines Regens wird die momentane Zuflussrate des Wassers durch die Funktion f mit $f(t) = 10000 \cdot (e^{-0.5t} - e^{-t})$ ($t \geq 0$ in Std. seit Regenbeginn, $f(t)$ in Liter pro Std.) beschrieben.

Bem.: Der Begriff Zufluss kann (leider) die Einheit Liter (dann ist der Zufluss ein V______) oder die Einheit $\frac{\text{Liter}}{h}$ (dann ist der Zufluss die A________ eines Volumens) haben. Deshalb sollten Sie immer die Einheiten genau betrachten. Einheit $\frac{VE}{ZE}$ ist V', Einheit $\frac{VE}{ZE^2}$ ist V''. Bei dieser Aufgabe ist der Zufluss ein Volumen und die momentane Zuflussrate (Einheit $\frac{VE}{ZE}$) ist V'.

a$_1$) Bestimmen Sie die maximale momentane Zuflussrate.
b$_1$) Zu welchem Zeitpunkt nimmt die momentane Zuflussrate am stärksten ab?
c$_1$) In welchem Zeitraum ist diese Zuflussrate größer als 2000 Liter pro Stunde?
d$_{2,L}$) Zeigen Sie, dass der Inhalt des Tanks durch $F(t) = 10000 \cdot (1 - 2e^{-0.5t} + e^{-t})$ beschrieben wird.
($\bar{f}$) e$_{1,L}$) I*) Bestimmen Sie die mittlere Zuflussrate in den ersten 10 Stunden.
f$_{1,L}$) Wieviel l des Regens werden langfristig in den Tank geflossen sein?
g$_{1,L}$) Skizzieren Sie den Tankinhalt innerhalb der ersten 10 Stunden nach Regenbeginn in einem geeigneten Ausschnitt eines Koordinatensystems.

434. (≈ Abi 2016) In einem Skigebiet beträgt die Schneehöhe um 10.00 Uhr an einer Messstelle 140 cm. Abb. 168/100 a) zeigt den Graphen einer Funktion f mit $f(t) = 16 \cdot e^{-0.5t} - 14e^{-t} - 2$, die für $0 \leq t \leq 12$ die momentane Änderungsrate dieser Schneehöhe (mÄS) zum Zeitpunkt t beschreibt (t in Stunden nach 10.00 Uhr, $f(t)$ in Zentimeter pro Stunde).
a$_2$) Berechnen Sie die maximale mÄS der Schneehöhe.
b$_1$) Geben Sie etwa den Zeitraum an, in dem die mÄS größer als 2 cm pro Stunde ist.
c$_2$) Berechnen Sie den Zeitpunkt, an welchem die **Schneehöhe** maximal ist.
d$_2$) Berechnen Sie die Stellen, an welchen die mÄS am stärksten zu bzw. abnimmt. Bestimmen Sie, wie groß ist die maximale Abnahme der Änderungsrate etwa ist.
e$_2$) I*) Bestimmen Sie die Schneehöhe um 12.00 Uhr.
f$_{4,L}$) Um 12.00 Uhr werden nun Schneekanonen in Betrieb genommen. Sie liefern konstant so viel Schnee, dass sich die mÄS an der Messstelle um 1 cm pro Stunde erhöht. Geben Sie an, um wie viele Stunden sich durch diese Maßnahme der Zeitraum, in dem die Schneehöhe zunimmt,

verlängert. I*) Wie hoch ist jetzt die maximale Schneehöhe?
g$_{3,L}$) I*) Geben Sie einen integralfreien Funktionsterm $F(t)$ an, der die Schneehöhe zum Zeitpunkt t $(0 \leq t \leq 2)$ beschreibt.
h$_{2,L}$) Formulieren Sie zu der Gleichung $F(t+2) - F(t) = 4$ eine Frage im Sachzusammenhang.

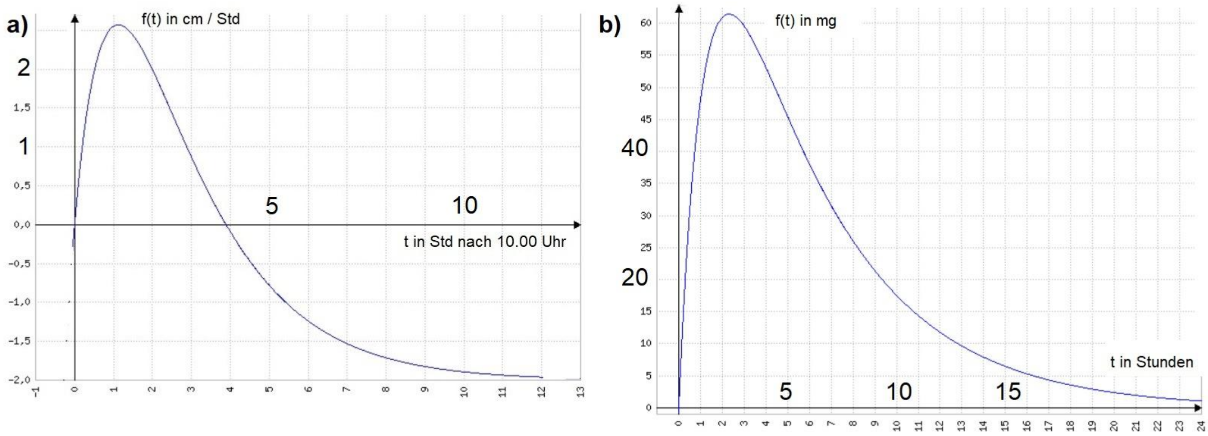


Abb. 100 mÄS (Schnee) zu Ag 167/434 Wirkstoffmenge zu Ag 168/435 → S.1012

435. (Ⓤ)(≈ Abi 2012) Ein Medikament kann mithilfe einer Spritze oder durch Tropfinfusion verabreicht werden. Abb. 168/100 b) zeigt den Graphen einer Funktion f mit $f(t) = 130(e^{-0.2t} - e^{-0.8t})$, die für $0 \leq t \leq 24$ die Wirkstoffmenge im Blut des Patienten beschreibt, wenn das Medikament mithilfe einer Spritze verabreicht wird (t in std. nach der Injektion, $f(t)$ in mg).
a$_1$) Das Medikament wirkt nur dann, wenn mindestens 35 mg des Wirkstoffs im Blut vorhanden sind. Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem das Medikament wirkt.
Berechnen Sie: b$_1$) Wann die Wirkstoffmenge maximal ist. Wie hoch ist sie dann?
und c$_1$) Zu welchen Zeitpunkten die Wirkstoffmenge im Blut am stärksten zu bzw. abnimmt.
d$_{2,L}$) I*) Bestimmen Sie die mittlere Wirkstoffmenge im Blut während der ersten 5 Stunden.
e$_2$) Formulieren Sie zu der Gleichung $f'(t) = 2$ eine Frage im Sachzusammenhang.
f$_1$) Geben Sie die Asymptoten von f an und erläutern Sie deren Bedeutung im Sachzusammenhang.

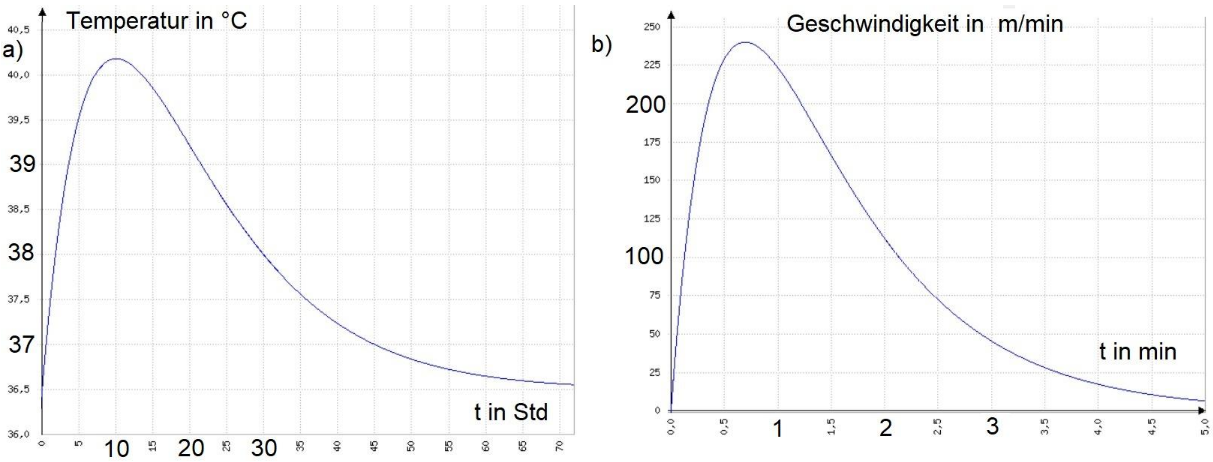


Abb. 101 Fieberkurve zu Ag 169/436 Motorboot zu Ag 169/437 → S.1012

Wenn das Medikament stattdessen durch Tropfinfusion zugeführt wird, lässt sich die Wirkstoffmenge beschreiben durch die Fktn g mit $g(t) = 80(1 - e^{-0.05t})$ (t in min seit Infusionsbeginn, $g(t)$ in mg). g$_1$) Welche Wirkstoffmenge wird sich langfristig im Blut befinden?
h$_2$) Zeigen Sie, dass die Wirkstoffmenge im Blut ständig zunimmt.
i$_2$) Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt die momentane Änderungsrate der Wirkstoffmenge $1\frac{mg}{Min}$ beträgt. **j**$_2$) I*) Ber. Sie die mittlere Wirkstoffmenge während der ersten vier Stunden.
k$_3$) Formulieren Sie eine Frage im Sachzusammenhang, die auf die Gleichung $g(t+15) = g(t) + 30$ führt.

436. (≈ Abi 2009) (Ü)Abb. 168/101 a) zeigt den Graphen der Funktion $f(t) = 36.5 + t \cdot e^{-0.1t}$, die für $t \geq 0$, modellhaft den Verlauf einer Fieberkurve eines Erkrankten beschreibt. Dabei ist t die Zeit in Stunden nach Ausbruch der Krankheit und $f(t)$ die Körpertemperatur in $°C$.
a_1) Berechnen Sie die maximale Temperatur. Zeigen Sie das der Temperaturverlauf danach smf ist.
b_1) Bestimmen Sie den maximalen Temperaturabfall?
c_1) Bestimmen Sie, wann die Körpertemperatur unter $37°C$ sinkt.
d_1) Bestimmen Sie, wie sich die Temperatur langfristig entwickelt.
e_2) Formulieren Sie eine Frage im Sachzusammenhang, die auf die Gleichung $f'(t) = -0.1$ führt.
f_1) I*) Zeigen Sie, dass $F(t) = 36.5t - 10t \cdot e^{-0.1t} - 100 \cdot e^{-0.1t}$ eine Stammfunktion von f ist.
Nur LK: Bestimmen Sie die mittlere Körpertemperatur in den ersten 48 Stunden.

437. (Ü)(≈ Abi 2010) Ein Motorboot fährt geradlinig mit der Geschwindigkeit $v(t) = 960 \cdot e^{-t} - 960 \cdot e^{-2t}$, (Abb. 101 b) $t \geq 0$, t in min, $v(t)$ in $\frac{m}{min}$.
a_2) Bestimmen Sie die höchste Geschwindigkeit des Motorbootes.
b_2) Bestimmen Sie, die maximale Abnahme der Geschwindigkeit des Motorbootes.
c_2) Bestimmen Sie, wie lange das Motorboot schneller als $180\frac{m}{min}$ fährt.
$d_{1,L}$) I*) Bestimmen Sie die mittlere Geschwindigkeit des Bootes in den ersten fünf Minuten.
$e_{2,L}$) I*) Bestimmen Sie, wie weit das Motorboot in diesem Modell fährt.

438. (Ü)(= Abi 2008) Ein Behälter hat ein Fassungsvermögen von 1200 Liter. Die enthaltene Flüssigkeitsmenge zum Zeitpunkt t wird beschrieben durch die Funktion f mit $f(t) = 1000 - 800e^{-0.01t}$, $t \geq 0$ (t in Minuten, $f(t)$ in Liter). **a_2)** Zu welchem Zeitpunkt ist der Behälter zur Hälfte gefüllt?
b_2) Zeigen Sie, dass die Flüssigkeitsmenge im Behälter stets zunimmt.
c_2) Aus Sicherheitsgründen darf die Flüssigkeitsmenge höchstens 85% des Fassungsvermögens betragen. Wird diese Vorschrift zu jeder Zeit eingehalten? Begründen Sie Ihre Antwort.

$d_{2,L}$) I*) Bestimmen Sie die mittlere Flüssigkeitsmenge während der ersten Stunde.

439. (≈ Abi 2013; → Ag 352) Der Querschnitt eines Bergstollens wird beschrieben durch die x-Achse und den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{x^4}{24} - x^2 + 5.625$, $x \in [-4; 4]$; 1 LE entspricht $1m$.

a_1) An welchen Stellen verlaufen die Wände des Stollens am steilsten? Welchen Winkel schließen die Wände an diesen Stellen mit der Horizontalen ein?

b_3) (GTR) Im Stollen soll in $3.92m$ Höhe eine Lampe aufgehängt werden. Aus Sicherheitsgründen muss die Lampe mindestens 1.3 m von den Wänden entfernt sein. Überprüfen Sie, ob dieser Abstand eingehalten werden kann.

Cartoon 33

440. (Schätzung von Sd) Die Konzentration des Wirkstoffes einer Tablette im Blut wird beschrieben durch die Funktion g mit $g(t) = 9 \cdot (e^{-t} - e^{-2t})$, $t \geq 0$ (t in Stunden nach der Einnahme einer Tablette, $g(t)$ in $\frac{mg}{l}$). Ein Patient nimmt eine Tablette ein (bei jedem Teil ist eine Rg verlangt).
a_2) Nach Herstellerangaben wirkt die Tablette ab einer Konzentration von $2\frac{mg}{l}$. Zwischen welchen Zeitpunkten wirkt das Medikament? **b_2)** Wie hoch ist die maximale Konzentration?

c_2) Wie hoch ist die maximale Abnahme der Konzentration?
d_1) Wie entwickelt sich die Konzentration langfristig?

$e_{2,L}$) I*) Bestimmen Sie die mittlere Wirkstoffkonzentration während der ersten Stunde.

441. **Minimalanforderungen UE** 11_2: Führen Sie eine vollständige Funktionsuntersuchung (madness) von $f(x)$ durch: a) $f(x) = 6 - e^{0.4x}$; b) $f(x) = (x+1) \cdot e^{2x-4}$; c) $f(x) = x^2 \cdot e^{-0.5x}$;

d) Lösen Sie ohne TR: i) $e^{2x} - 6e^x + 5 = 0$, ii) $e^x = 1 + 2e^{-x}$, iii) $x \cdot e^{2x-4} - x = 0$;

e_{LK}) Für $t \in \mathbb{R}$ ist die Schar $f_t(x) = e^x \cdot (t - x)$ geben. Ber. Sie die Ortskurve ihrer Hochpunkte.

f) Ein Polynom dritten Grades hat im Ursprung einen Hochpunkt und in $W(2; -3.2)$ einen Wendepunkt. Berechnen Sie dessen Funktionsgleichung.

6.3.11 Die Regel von de l'Hospital (UE $M{+}_2$) (GFS)

442. (U) a_e) Es gilt $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(5x)}{\sin(2x)} \neq$ ____. Warum kann dieser Limes nicht konventionell berechnet werden? **b_1)** Berechnen Sie heuristisch die Grenzwerte für folgende Terme für x gegen 0:
i) $\frac{\sin(x)}{x}$, ii) $\frac{\sin(2x)}{x}$, iii) $\frac{\sin(3x)}{x}$, iv) $\frac{\sin(nx)}{x}$ $n \in \mathbb{N}$?

c_e) Durch welche Operation könnte das '$n\cdot$' zustande kommen?
d_2) Ein Ausdruck der Form '$\frac{0}{0}$' wird auch bei der Ber. des D____________________ betrachtet.
e$_2$) Sei f differenzierbar und $f(0) = 0$; berechnen Sie $f'(0)$ mit Hilfe des Ergebnisses aus Teil d).

f_e) Sei $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Der Term $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ kann (vorerst) nicht (allgemein) berechnet werden. Betrachten Sie $\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ (!), mit Hilfe des Differenzialquotienten. Setzen Sie nicht für $h = 0$ ein, sondern setzen für $x_0 + h = x$ ein. Vereinfachen Sie; welche erstaunliche Formel entsteht?

g_e) Die Regel von de l'Hospital: Sei $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, f, g differenzierbar. Wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$______ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ (oder $|g(x)| \to$ ____), dann gilt $\lim\limits_{x \to x_0}$ ____________ $= \lim\limits_{x \to x_0}$ ____________ (auswendig).

443. (Ü) Ber. Sie die folgenden Limites: a_1) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$; b_1) $\lim\limits_{x \to 0.5} \dfrac{6x^2 - 5x + 1}{8x^2 - 2x - 1}$; c_1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{e^x - e^{-x}}$;

(KA) d_2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(a^x)}{e^x - 1}$; e_1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x - 2}{3x + 8}$; f_2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x)}{e^{-x} - \ln(x + e)}$; g_2) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x(1 - e^{x-3})}{x - 3e^{x-3}}$;

h_2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2(x)}{x^2}$; Die Regel von de l'Hospital darf auch ________________ angewendet werden.

i_2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin(2x)}{e^x + e^{-x} - 2}$; j_3) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{\ln(x-1)} - \dfrac{1}{x-2}$; k_3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x}}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x}$; L_2) $\lim\limits_{x \to 0} x \ln(x)$; m_2) $\lim\limits_{x \to 0} x^x$;

n_2) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 5x + 6}$; o_2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(4x)}{\ln(2x)}$; p_2) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x - 8}{2x + 6}$; q_2) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x + 2e^x}{6 + e^x}$;

444. (U) Diese Aufgabe soll zeigen, dass $0^0 \neq 1$ ist. a_3) Diskutieren Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$.
b_4) Finden Sie mit Hilfe von $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$ einen Grenzwert der Form 0^0, der nicht 1 ist.

6.3.12 Satz + Beispiel: Die Regel von de l'Hospital - HS Teil

Schon in der Grundschule beschäftigte uns die Frage: Was ist $\frac{0}{0}$?

Seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$ $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbare (siehe Abschnitt 14.11.1) Funktionen mit $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \lim\limits_{x \to b} g(x) = 0$ oder $g(x) \to \pm\infty$ für $x \to b$, dann gilt: $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to b} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.
Dies hat nichts mit der Quotientenregel der Differenzialrechnung zu tun (Satz 14.12.5). Wenn die

Voraussetzung ($\frac{0}{0}$, $\frac{?}{\infty}$) nicht erfüllt ist, kann der Limes auf diese Weise nicht berechnet werden. Bitte beachten Sie, dass $b = \infty$ zugelassen ist. Der Satz gilt analog für a.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} =^H \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1} =^H \lim_{x\to -1}\frac{2x}{1} = -2$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{a^x} = 0 \text{ für } a > 1, n \in \mathbb{N}$$

Beweis mit vollständiger Induktion : $n = 1$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{a^x} =^H \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\ln(a)\cdot a^x} = 0 \text{ (siehe auch 14.12.3)}$$

Cartoon 34

Induktionsschritt: Es gelte $\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{a^x} = 0$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n+1}}{a^x} =^H \lim_{x\to\infty}\frac{(n+1)x^n}{\ln a\cdot a^x} = \frac{n+1}{\ln a}\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{\cdot a^x} = \frac{n+1}{\ln a}\cdot 0 = 0$$

Weitere Beispiele

1. $\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{b^x} = \lim_{x\to\infty}(\frac{a}{b})^x = \begin{cases} 1 & \text{falls } a = b \\ 0 & \text{falls } |a| < |b| \\ \text{divergent} & \text{falls } |a| > |b| \text{ oder } a = -b \end{cases}$

2. $\lim_{x\to 0} x^x$ $= \lim_{x\to 0} e^{x\cdot\ln x}$ Potenzgesetz
$= e^{\lim_{x\to 0} x\cdot\ln x}$ e^x ist stetig
$= e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}$ wir brauchen einen Bruch
$=^H e^{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}$ de l'Hospital
$= e^{\lim_{x\to 0} -x}$ gekürzt
$= e^0 = 1$

3. $\lim_{x\to\infty} x\cdot\ln(1+\frac{a}{x})$ $= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{a}{x})}{\frac{1}{x}}$
$=^H \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{a}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{a}{x}}}{\frac{-1}{x^2}}$
$= \lim_{x\to\infty}\frac{a}{1+\frac{a}{x}}$
$= a$

Cartoon 35

4. $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^x = e^{\lim_{x\to\infty} x\cdot\ln(1+\frac{a}{x})} = e^a$

HA 17 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^n} = 0$.

6.3.13 Beispiel: Umformungstipps zur Regel von de l'Hospital

Die Regel von de l'Hospital gilt nur bei Quotienten. Häufig kann ein undefinierter Grenzwert leicht in einen Quotienten verwandelt werden:

Funktion	$\lim_{x\to b} f(x)$	Umformung
$f(x) = u(x)\cdot v(x)$	$0\cdot\infty$	$\frac{u(x)}{\frac{1}{v(x)}}$
$f(x) = u(x) - v(x)$	$\infty - \infty$	$\frac{\frac{1}{v(x)}-\frac{1}{u(x)}}{\frac{1}{u(x)\cdot v(x)}}$
$f(x) = u(x)^{v(x)}$	$0^0, 0^\infty, 1^\infty$	$e^{\ln(u(x))\cdot v(x)} = e^{\frac{\ln(u(x))}{1/v(x)}}$

6.3.14 Satz: Strenge Monotonie

Der Monotoniesatz: Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$, dann ist f streng monoton wachsend. f ist streng monoton fallend, wenn $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a,b)$.

Beweis (für streng monoton wachsend): f streng monoton wachsend $\Leftrightarrow$ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Wir beweisen den Satz indirekt:

Annahme: $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$ aber es existieren $x_1 < x_2 \in (a,b)$ mit $f(x_1) \geq f(x_2)$, dann ist $m := \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq 0$ und nach dem Mittelwertsatz 14.14.3 gibt es eine Zwischenstelle $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = m \leq 0$. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Beispiele: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^3 + x$, dann gilt $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ für alle x. Damit ist f streng monoton wachsend.

Sei $f(x) = \frac{1}{x}$, dann gilt zwar $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ aber nicht streng monoton fallend. Steht dies im Widerspruch zu Satz 6.3.14? Nein. $f(x)$ ist nicht auf einem (offenen) zusammenhängen Intervall (a,b) definiert. Schränken wir den Definitionsbereich auf ein zusammenhängendes Intervall ein, dann ist $f(x)$ dort streng monoton fallend.

Die Umkehrung von Satz 6.3.14 gilt nicht: $f(x) = x^3$ ist streng monoton wachsend, aber $f'(0) = 0$ (damit zerstören Terrassenpunkte die strenge Monotonie nicht). Zum Beweis verwenden wir die Definition der strengen Monotonie ($x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$):

Sei	$x_1 < x_2 < 0$	oder $0 < x_1 < x_2$ dann kann Satz 6.3.14 herangezogen werden.
Sei	$0 = x_1 < x_2$,	dann gilt $f(x_2) > 0 = f(x_1)$,
falls	$x_1 < x_2 = 0$	ist, dann gilt $f(x_1) = x_1 \cdot (x_1)^2 < 0 = f(x_2)$ und
falls	$x_1 < 0 < x_2$	ist, gilt $f(x_1) = x_1 \cdot (x_1)^2 < 0 < x_2 \cdot (x_2)^2 = f(x_2)$ (weil $x^2 > 0$) für alle $x \neq 0$.

Interpretation von Sd: (Innere) Extrempunkte zerstören die strenge Monotonie, Terrassenpunkte hingegen nicht.

Schwächen wir in Satz 6.3.14 die Voraussetzung auf $f'(x) \geq 0$ ab, so muß auf das 'streng' verzichtet werden: Sei $f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$, dann gilt: $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$.

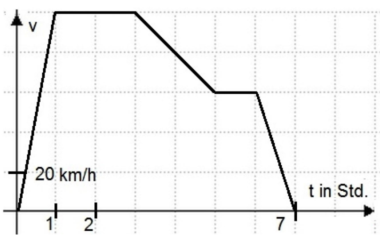
Nach Neumeyer gilt aber f differenzierbar auf $\emptyset \neq (a;b)$ und f ist monoton aber nicht streng monoton, dann gibt es ein Intervall $\emptyset \neq [x_1, x_2] \subset (a;b)$ auf welchem $f(x)$ konstant ist.

Beweis: Sei f monoton aber nicht streng monoton, dann gibt es $x_1 < x_2$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Behauptung: f ist im Intervall $[x_1, x_2]$ konstant. Beweis durch Widerspruch: Sei $x_3 \in (x_1, x_2)$ mit $f(x_3) \neq f(x_1) = f(x_2)$ oBdA $f(x_3) > f(x_1)$, dann gilt $x_1 < x_3$ mit $f(x_1) < f(x_3)$ und $x_3 < x_2$ mit $f(x_3) > f(x_2)$ (Widerspruch zur Monotonie).

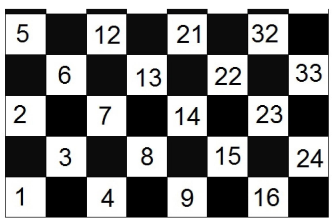
Linkskurven: Eine Kurve ist eine Linkskurve, wenn man beim Durchfahren nach links lenken muss. Damit scheint 'Linkskurve' eine lokale Eigenschaft zu sein. Tatsächlich ist Linkskurve aber keine lokale Eigenschaft, denn das Hinterrad ($d > 0$) ist ebenfalls relevant. Bei Fahrzeugen ohne Hinterrad braucht man nämlich nicht lenken; man hätte also gar keine Kurven. K_f ist eine Linkskurve $\Leftrightarrow$ f' ist smw. Damit ist x^4 (auch bei $x = 0$) eine Linkskurve (Thx Wg).

7 Integralrechnung

Abb. 102



Geschw. - Zeit Diagramm



Kachelformel

7.1 Einführung in die Integralrechnung (UE 11_3)

Wie kann man aus der Momentangeschwindigkeit, die zurückgelegte Strecke rechnen?

7.1.1 v-t Diagramme

KS$_{17}$ 74-77 + KS$_{09}$ 89,90

445. (U) $_{Z}$) Nico ⟦Berg, der entweder eine Rose oder ein Pferd hat,⟧ fährt seinen $F1$-Flitzer nach dem Geschwindigkeits-Zeit Diagramm aus Abb 172/102. **a**$_e$) Beschreiben Sie die Bewegung (5 Teile). **b**$_e$) Wie weit ist Nico in den 7 Std gefahren? **c**$_e$) Was hat die Strecke mit dem Schaubild zu tun? **d**$_{4,LK}$) Geben Sie die (zusammengesetzten) Funktionsterme für $v(t)$ und $s(t)$ $(0 \le t \le 7)$ an.

7.1.2 Summenformeln (nur LK) → 14.7.1 Vor. 58/147 (GFS)

446. **Die Kachelformel:**$_{e\ LK}$ In einem Badezimmer (Abb. 172/102) ist jede zweite Kachel blau. Die Kacheln werden entlang der Diagonalen numeriert. Welche Nummern haben die Kacheln am Boden? Verallgemeinern Sie und formulieren Sie ein Gesetz. $\sum_{k=1}^{n}$ ______ = ___.

447. (U) **Die Formel von Gauß:**$_{e\ LK}$ a$_e$) Der kleine Karl saß in der Grundschule und langweilte sich sehr. Da hatte sein Lehrer eine Idee: 'Addiere alle Zahlen von 1 bis 100 auf' befahl er (um diesen für eine Weile ruhig zu stellen). '5050', antwortete Karl sofort. Wie hatte Karl dies so schnell rechnen können? Notieren Sie von der Summe mindestens die ersten drei und die letzten drei Summanden. b$_{2-3}$) Verallgemeinern Sie! c$_r$) **(Formel 8)** : $\sum_{k=1}^{n}$ ____ = ________.

448. (Ü)Ber. Sie a$_2$) $1+2+3+...+n-1$; b$_2$) $2+4+6+...+2n$; $\boxed{\text{c}_2}$) $2+5+8+...+3n-1$; d$_2$) $6+10+14+18+...+4n+2$, e$_2$) $6+1-4-9-14-...-5n+11$; f$_{3,\overline{f}}$) Verallgemeinern Sie für $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ auf $a+b\ +\ a+2b\ +\ a+3b\ +..+\ a+nb$.

7.1.3 Dreiecksflächen (nur LK) → 7.2.1 (GFS)

KS$_{17}$ 78 + KS$_{09}$ 91

449. (Ü) a$_{e,LK}$) Wie berechnen Sie die Fläche eines Polygons? - wie die Fläche eines allgemeinen Gebildes? b$_{e,LK}$) (GG) Wir wollen nun den Inhalt von Flächen unter Funktionsgraphen berechnen. Eine einfache Kurve ist z.B. $f(x) = x$. Wir wollen die Fläche A des Dreiecks, das die Funktion $f(x) = x$, die $x-$Achse und die Gerade $x = 1$ einschließt, durch eine Zerlegung in Rechtecke (siehe Bild) in drei (eigentlich vier - deshalb heißt die Fläche R_4) Rechtecke zerlegen und damit approximieren. Berechnen Sie R_4, dann R_8 und verallgemeinern Sie auf R_n.
c$_{e,LK}$) Interpretieren Sie den Term von R_n und berechnen Sie die Fläche des Dreiecks exakt.
d'$_{3,LK}$) Berechnen Sie die Fläche, die die y-Achse, sowie die Geraden $x = 0$, $x = 2$ und $f(x) = 0.5x + 1$ mit Hilfe einer Rechteckszerlegung R_n.

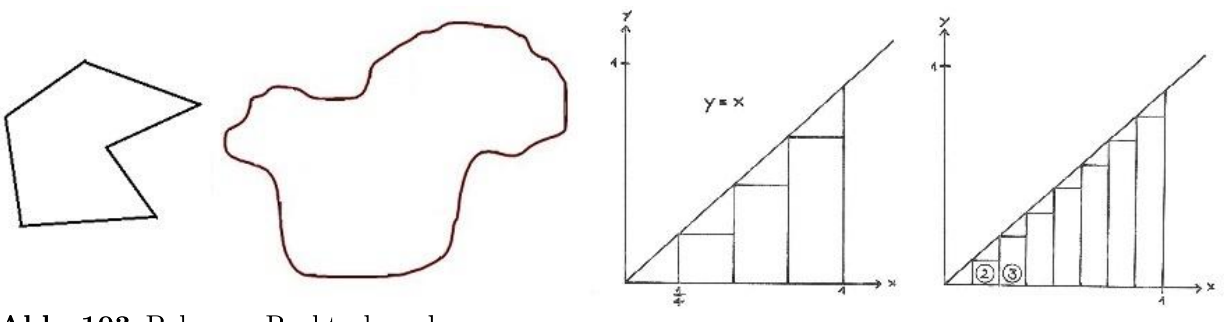
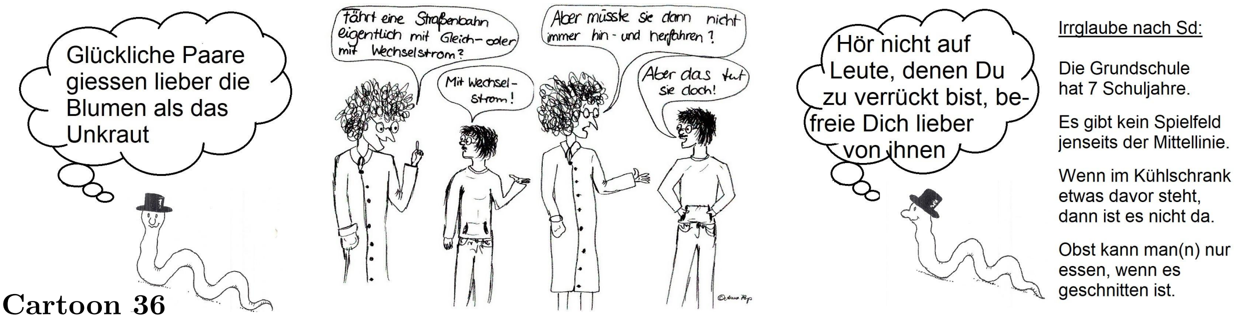


Abb. 103 Polygon, Rechteckszerlegung

450. Berechnen Sie analog zu Ag 173/449 die Flächen zwischen K_f, der x- Achse und den Geraden $x = a$ und $x = b$: a$_{3,LK}$) $f(x) = 2x,\ a = 0,\ b = 1$; (GG) b$_{3,LK}$) $f(x) = 2x+1,\ a = 0,\ b = 2$; c$_{4,LK}$) $f(x) = x^2,\ a = 0,\ b = 1$; es gilt $1+4+9+16+...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; (GG)

451. (Ü) Verallgemeinert ber. wir den Inhalt der Fläche A zwischen dem Graph K_f einer (beliebigen, stetigen) Funktion f und den Geraden $x = a,\ x = b$ und $y = 0$. Dazu zerlegen wir (analog zu Ag 449) ein Intervall $[a; b]$ in n Teilstücke. a$_{e,L}$) Wie breit ist ein Teilstück? b$_{e,L}$) Sei $x_0 = a$

und $x_n = b$; das erste Teilstück ist $[x_0; x_1]$, das zweite $[x_1; x_2]$ usw. Geben Sie $x_1, x_2, ...x_i$ an.
$c_{e,L}$) Sei A_1 die Fläche des Rechtecks $(x_0|0); (x_1|0); (x_1|f(x_0)); (x_0|f(x_0))$;
A_2 die Fläche des Rechtecks $(x_1|0); (x_2|0); (x_2|f(x_1)); (x_1|f(x_1))$; usw. Geben Sie die Flächen A_i an. $R(n) = A_1 + A_2 + .. + A_n$ heißt **Riemannsumme** (nicht Untersumme).
$d_{4,LK}$) Definieren Sie R_n, Untersumme U_n und Obersumme O_n mit $U_n \leq A \leq O_n$ analog zu R_n.



Cartoon 36

7.1.4 Flächeninhaltsfunktionen

452. (Ⓤ) $J_a(x)$:$_e$ Den Inhalt der Fläche, die der Graph einer Funktion f ($f(x) > 0$) mit der x-Achse und den Geraden $x = a$ und $x = x_0$ einschließt heißt Flächeninhaltsfunktion $J_a(x_0)$ der Funktion f (bei festem a und variablem x_0). Berechnen Sie $J_a(x_0)$ von $f(x) = x$ (bzw. $y = mx + c$).

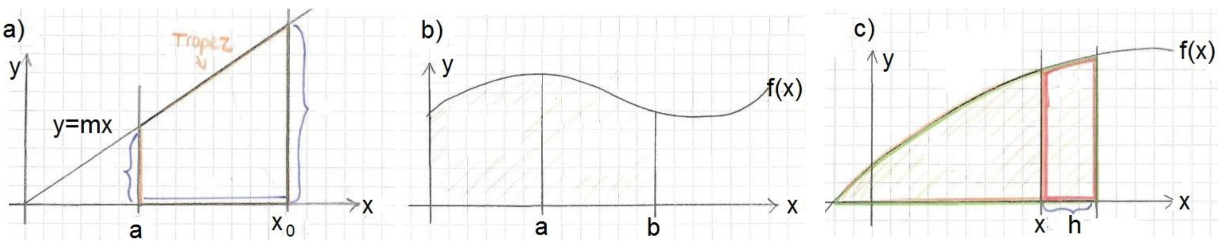


Abb. 104 Flächenfunktionen $J_a(x_0)$ und $J_a(b)$ Der Beweis des Hauptsatzes

453. (Ⓤ) Geben Sie $J_a(x)$ für die folgenden Funktionen an. a_1) $f(x) \equiv 2$, b_2) $f(x) = 4x - 2$, $\boxed{c_2}$) ($\bar{f}$) $f(x) = 3x + 1$, $d_{4,L}$) $f(x) = |x|$ (falls $f(x), f(a), x, a > 0$).

7.1.5 Der (echte) Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung → 7.3.1 (GFS)

454. a) **Tautologie:**$_{e\ L}$ Bei einer Tautologie z.B. $\sin^2(x) + \cos^2(x) =$ _ bei welcher links ein x vorkommt, rechts aber nicht, kann für x _____ eingesetzt werden, ohne dass sich rechts etwas ändert.
(U) Betrachten Sie die folgenden Funktionen $f(x)$, sowie deren Flächeninhaltsfunktionen $J_0(x)$.

$f(x) =$	x	mx	x^2	x^3	$mx + c$	$-\sin(x)$
$J_a(x) =$	$\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2}$	$\frac{mx^2}{2} - \frac{ma^2}{2}$	$\frac{x^3}{3} - \frac{a^3}{3}$	$\frac{x^4}{4} - \frac{a^4}{4}$	$\frac{m \cdot x^2}{2} + cx - (\frac{m \cdot a^2}{2} + ca)$	$\cos(x) - \cos(a)$
$J_0(x) =$						

ⓑ$_e$) (GK) $J_a(x)$ ist von der Form $F(x)$ _____. Finden Sie einen Zusammenhang zwischen den Flächeninhaltsfunktionen $J_0(x)$ und deren begrenzenden Funktionen $f(x)$.
$c_{e,LK}$) Zum Beweis Ihrer Vermutung zeichnen Sie $J_0(x)$ sowie $J_0(x + h)$ in Abb. 174/104c ein.
$d_{e,LK}$) Schätzen Sie die Differenz $J_0(x + h) - J_0(x)$ mit Hilfe eines R__________ und formen Sie die resultierende Gleichung geschickt um (e: *Fundamental Theorem of Calculus*). e_e) Bei der Gleichung $\frac{J_0(x+h) - J_0(x)}{} \approx$ darf man für ___ alles einsetzen, insbesondere darf __→__ gehen. Wenn aus der begrenzenden Funktion $f(x)$ die Flächeninhaltsfunktion ___ berechnet werden soll, muss man das A_______ u_______. **f**$_r$) $(J_0(x))$ = ___ **(Formel 79, FD 16)**.

7.1.6 Der 'nicht' Hauptsatz der Diff.- und Integralrg

KS_{17} 82-85 + KS_{09} 97,98

455. (U) **Flächenber.:**$_e$ Wie können Sie aus $J_0(x)$ allgemein $J_a(b)$ also den Inhalt der Fläche (e: *area*) zwischen K_f, der $x-$Achse und den Geraden $x = a$ und $x = b$ ber. (Abb. 174/104b)?

Statt $J_a(b)$ schreiben wir künftig $J_a(b) = \int_a^b f(x)dx$; sprich 'I__________ von a bis b $f(x)$ dx' (e: *integral*). Jede Funktion der Form $J_a(x)$ heißt S______funktion (e: *anti-derivative*) von $f(x)$.
Bemerkung: Der 'nicht' Hauptsatz ist schon wahr, er ist aber kein richtiger **Haupt**satz.

Regel: Sei f stetig, und sei $J_0(x_0)$ die zugehörige Flächeninhaltsfunktion zwischen den Geraden $x =$ _ und $x =$ _, dann berechnen wir die Fläche zwischen K_f, der x-Achse und den Geraden $x = a$ und $x = b$ durch $J_0($___$)$ $J_0($___$)$ **(Formel 80, FD 17)**.

Schreibw.: $\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$ oder $\left[F(x)\right]_a^b$ oder $F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$ oder $F(x)\Big|_a^b$.

456. (U) Ber. Sie: a$_{b,1}$) $\int_0^2 t\,dt$; b$_1$) $\int_1^5 t\,dt$; $\boxed{\text{c}_1}$) $\int_1^3 \frac{1}{2}t\,dt$; d$_1$) $\int_0^3 t^2\,dt$; **e**$_1$) $\int_a^a f(t)\,dt$.

g$_r$) Um das Integral zu ber. brauchen Sie eine (S_____-)funktion $F(x)$ für die _____$= f(x)$ gilt.

h$_1$) Skizzieren Sie in Abbildung 175/105 die berechneten Flächen aus den Teilen a)-d). ↕ (KA$_B$)

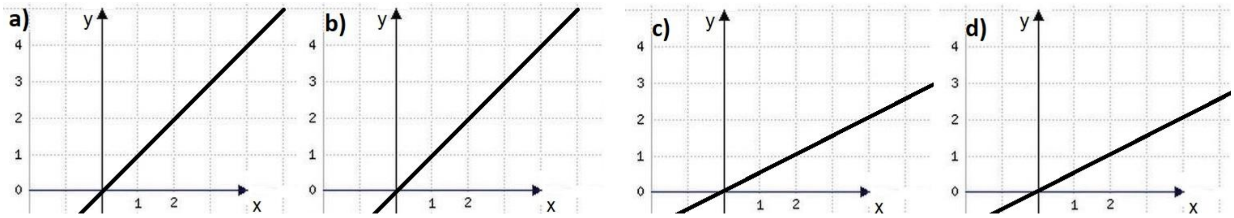


Abb. 105 Flächeninhalte

457. (U) **Regel:** $J_a(x) = \int_a^x f(t)dt$ heißt **Integralfunktion** von f.

Berechnen Sie: **a**$_{b,1,f}$) $\int_0^x t\,dt$; b$_1$) $\int_2^x t^2\,dt$, $\boxed{\text{c}_1}$) $\int_4^x 2t\,dt$, d$_1$) $\int_9^x \frac{t}{2}\,dt$, **e**$_1$) $\int_1^x t^3\,dt$,

Vorsicht: $\int_a^x f(t)dt$ ist u_______________ von t. Das 't' ist eine Integrationsvariable (ähnlich einer S_____________variablen aus der Informatik und t ist nach der Integration v________________).

7.1.7 Beweistechniken (nur LK)

458. (Ü) Hier wird der Mittelwertsatz der Diffrg aus der Ag 153/388 (Monotoniesatz) Abb. 106 benötigt.
Konstante Fktn.:$_{e\ L}$ Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $g(x)$ mit $g'(x) \equiv 0$ (auf einem Intervall $[a; b]$). Welche Vermutung haben Sie in Bezug auf $g(x)$? Beweisen Sie Ihre Vermutung.

459. (U) a$_1$) Geben Sie verschiedene Stammfktn von $f(x) = 2x$ an. Wie unterscheiden sich diese?
b$_{e,L}$) Seien $F(x)$ und $\tilde{F}(x)$ Stammfunktionen von $f(x)$. Wie unterscheiden sich $F(x)$ und $\tilde{F}(x)$? Beweisen Sie Ihre Vermutung. **c**$_{e,L}$) Wieviele Stammfunktionen F einer Fkt f gibt es?

Das unbestimmte Integral: Mit $\int f(x)dx = F(x)+c$ meinen wir künftig: Finde _____ Stammfunktionen der Funktion f. Beispiel: $\int x^2dx =$ ______.

d$_{e,L}$) Wenn eine Integralfunktion $\int_a^x f(t)dt \equiv c$ also konstant ist, dann kann man für x ______ einsetzen, also insbesondere $x =$ _ $\Rightarrow c = \int_a^{\_\_\_\_\_\_} f(t)dt = F(\quad) - F(\quad) =$ __.

e) Leiten Sie die Integralfunktionen aus Ag 176/464 a)-f) ab und formulieren Sie den Hauptsatz aus Ag 174/454 auf eine neue Art. f) $\int_a^a f(x)dx =$ __.

7.1.8 Integrationsregeln → 7.3.3 + 7.3.4 KS$_{17}$: 86-89 + KS$_{09}$: 101,102

Bitte beachten Sie, dass alle Integrationsregeln nur bis auf eine Integrationskonstante gelten.

460. (U) **Die Potenzregel:**$_e$ **a$_1$)** Leiten Sie $f_1(x) = x^2$; $f_2(x) = x^3$; $f_3(x) = x^n$ ab.
b$_e$) (KA$_B$) Finden Sie die Stammfunktion $F_0(x)$ (mit $F_0(x) = 0$) von $f_4(x) = 2x$; $f_5(x) = x$; $f_6(x) = x^2$; $f_7(x) = x^n$ (mit Hilfe dieser Ableitungen). $\int x^n dx =$ _____ **(Formel 81)** .
c$_{2-3}$) i) Für welche n gilt die Potenzregel nicht (und warum)? ii) Was gilt stattdessen?

461. (Ü) **Die Summenregel:**$_e$ a) Formulieren Sie die Regel für die Ableitung einer Summe $(f(x)+g(x))'$ und formulieren (und beweisen) Sie eine entsprechende Regel für Stammfunktionen.
b$_e$) Formulieren und beweisen Sie die Regel des konstanten Faktors für Integrale.
c$_r$) $\int (f(x) + g(x))dx =$ __________; $\int r \cdot f(x)dx =$ __________; **(Formel 81)** .
d$_b$) (KA$_B$) Ber. Sie i) $\int x^{0.3}dx$, ii) $\int \frac{1}{x^3}dx$, iii) $\int \sqrt{x}dx$, iv) $\int (6x^2-4x)\,dx$, $\boxed{\text{v)}}$ $\int (9x-2)^2dx$.
e$_e$) Interpretieren Sie Abbildung 106a. Wie kann $\int_a^c f(x)\,dx$ auch berechnet werden?

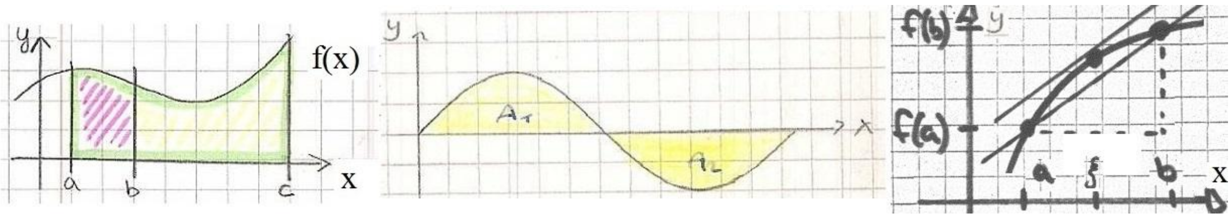


Abb. 106 Zusammensetzen von Flächen, orientierte Flächen Mittelwertsatz

462. (KA$_B$) Geben Sie zu den folgenden Funktionen $f(x)$ alle Stammfunktionen $F(x)$ an: **a$_1$)** $f(x) = 3x$, **b$_1$)** $f(x) = 4x+2$, **c$_1$)** $f(x) = x^2-3x+1$, $\boxed{\text{d}_1\text{)}}$ $f(x) = x^3-2x^2+2x+2$, e$_1$) $f(x) = x^{-2}+3x^{-3}$, **f$_1$)** $f(x) = \sqrt{x} + 2x^4$, **g$_2$)** $f(x) = \frac{2}{x^2} + \sqrt{4x}$, **h$_2$)** $f(x) = \frac{4}{x^3} + \frac{2}{\sqrt{x}}$, **i$_2$)** $f(x) = 3\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{x} - 4x^3$, **j$_2$)** $f(x) = (3x-4)^2$, **k$_2$)** $f(x) = 5 - 2(6x-2)^2$, L$_2$) $f(x) = 3 - 4x^3 - x^2\sqrt{x} + \frac{1}{2x^3} - \frac{x}{3\sqrt{x}}$.

463. (KA$_G$) Geben Sie zu den folgenden Fktn. $f(x)$ die Stammfunktion $F(x)$ durch den Punkt P an:
a$_{b,2}$) $f(x) = 2x$, $P(2|7)$; b$_2$) $f(x) = x^2 - 4x + 2$, $P(3|1)$; $\boxed{\text{c}_2\text{)}}$ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x$, $P(4|2)$;
d$_2$) $f(x) = \sqrt{x}$, $P(9|10)$; **e$_2$)** $f(x) = \sin(x)$, $P(0|4)$; **f$_2$)** $f(x) = 3\cos(x)$, $P(\pi|\sqrt{2})$;
g$_2$) $f(x) = e^x$, $P(1|2e)$; h$_2$) $f(x) = 2e^x + 4$, $P(0|5)$; i$_2$) $f(x) = x - 1 - e^x$, $P(1|2)$;

464. (KA$_B$) Berechnen Sie folgende Integralfktn **a$_1$)** $\int_0^x (2t+1)dt$; **b$_1$)** $\int_3^x (2t+3)dt$; $\boxed{\text{c}_1\text{)}}$ $\int_2^x (t^2+t)\,dt$; **d$_1$)** $\int_3^x (t^2+2t-1)dt$; e$_1$) $\int_{-2}^x (t^3+t)dt$; **f$_2$)** $\int_\pi^x 2\cos(t)dt$; **g$_2$)** $\int_x^2 (4t+2)dt$; **h$_2$)** $\int_x^{2x} (2t+4)dt$.

465. a) Wann braucht man bei der Integration das $' + c'$? **i)** Wenn _____ Stammfunktionen (SF) gesucht sind; **ii)** Wenn eine SF durch einen speziellen Pkt gesucht ist; **iii)** Bei Integralfktn + Dgln; **iv)** Unbestimmtes Integral. b) Wann nicht? **i)** Wenn _____ SF gesucht ist. **ii)** Bei der F________ber.

466. (Thx Trs) Sei $a = \int_{-1}^0 f(x)dx$, $b = \int_0^1 f(x)dx$, $c = \int_0^2 f(x)dx$, $d = \int_0^3 f(x)dx$ und $e = \int_0^4 f(x)dx$. Zeigen oder berichtigen Sie folgende Aussagen: **a$_1$)** $\int_{-1}^4 f(x)dx = e - b$, **b$_1$)** $\int_1^3 f(x)dx = d - b$,
c$_2$) $\int_2^4 (f(x)+1)dx = e - c + 1$, **d$_3$)** $\int_1^2 f(x-1)dx = d - c$, **e$_1$)** $\int_1^3 2f(x)dx = 2(d-b)$,
f$_3$) $\int_0^2 f(2x)dx = e/2$, **g$_3$)** $\int_0^1 2f(4x)dx = d/2$, **h$_4$)** $\int_1^2 f(2x-2)dx = c/2$, **(GFS)**

7.1.9 Praktische Ag mit Integralfktn (≈ Abitur) (KA$_G$) ($\overline{DHBW}$) KS$_{17}$: 90-93

467. (Ü) (Nur LK) Ein stehendes Auto wird mit der konstanten Beschleunigung $a = 2\frac{m}{s^2}$ beschleunigt.
a$_1$) Geben Sie seine Geschwindigkeit $v(t)$ an.
b$_2$) Wie weit ist das Auto nach x Sekunden gefahren? Beschreiben Sie Ihr Ergebnis auch für allgemeines $v(t)$. **c$_2$)** Wie lange dauert es, bis das Auto 36 m zurückgelegt hat?

468. (Ⓤ)(Nur LK ≈ Abi 2005) Eine Forschungsgruppe versucht, die Entwicklung eines Fischbestandes in einem See durch ein mathematisches Modell zu erfassen. Zu Beginn der Untersuchung leben im See 4 Millionen Fische. Die Änderungsrate des Bestandes wird in diesem Modell durch die Funktion $f(t) = \frac{e^t}{(1+e^t)^2}$ beschrieben ($t \geq 0$ in Jahren seit Untersuchungsbeginn, $f(t)$ in Millionen Fische pro Jahr). **a_2)** Untersuchen Sie das Verhalten von f für $t \to \infty$. Weisen Sie nach, dass f für $t > 0$ monoton abnimmt. Bedeutet dies, dass der Fischbestand abnimmt? Begründen Sie!
b_1) Weisen Sie nach, dass die Funktion F mit $F(t) = \frac{-1}{1+e^t}$ eine Stammfunktion von f ist.
c_2) Geben Sie eine Funktion $J_0(t) = F_0(t)$ für den Fischbestand zum Zeitpunkt t an.
d_2) Welcher Fischbestand ist langfristig zu erwarten?

469. (U) (Nur LK) $v(t) = 0.01t^3 - 0.24t^2 + 1.35t$ ($t \in [0; 20]$ sei die Zeit in Stunden, $v(t)$ in $\frac{m^3}{h}$) beschreibe den Zufluss von Wasser in ein Becken. Zu Beginn sei das Becken leer.
a_2) Wieviel m^3 sind nach 6 bzw. x Stunden im Becken?
b_2) Wann ist das meiste Wasser im Becken? Wann ist das wenigste im Becken?
c_2) (GTR oder Wertetabelle) Wann sind $8.4375 m^3$ im Becken?

470. (≈ Abi 2011) In einer großen Stadt breitet sich eine Viruserkrankung aus. Abb. 177/107 zeigt für $t \geq 0$ den Graph einer Funktion f mit $f(t) = 150 \cdot t^2 \cdot e^{-0.2t}$, die die **momentane Erkrankungsrate** (= MER) der Stadt modellhaft darstellt. Dabei ist t die Zeit in Wochen seit Beobachtungsbeginn und $f(t)$ die Anzahl der Neuerkrankungen pro Woche.
a_1) Berechnen Sie, wann die meisten Personen erkranken. Wieviele sind dies etwa?
b_1) Bestimmen Sie in welchem Zeitraum die MER über 500 Personen/Woche liegt.
c_2) Wann nimmt die MER am stärksten ab? Lesen Sie die minimale Abnahme der MER ab.
d_2) Alle Neuerkrankungen werden sofort dem Amt gemeldet. Bei Beobachtungsbeginn sind bereits 2 000 Personen gemeldet. Bestimmen Sie wieviele Personen nach 15 Wochen insgesamt gemeldet sind. e_2) Zeigen Sie, dass für $t > 10$ die MER rückläufig ist.
f_2) Zeigen Sie, dass $F(t) = -750 \cdot (t^2 + 10t + 50) \cdot e^{-0.2t}$ eine Stammfunktion von f ist.
$g_{3,LK}$) Geben Sie eine Funktion $\tilde{F}$ für die Gesamtzahl der gemeldeten Personen nach t Wochen an.
h_3) Weisen Sie nach, dass die Anzahl der Meldungen unter 40 000 bleiben wird.

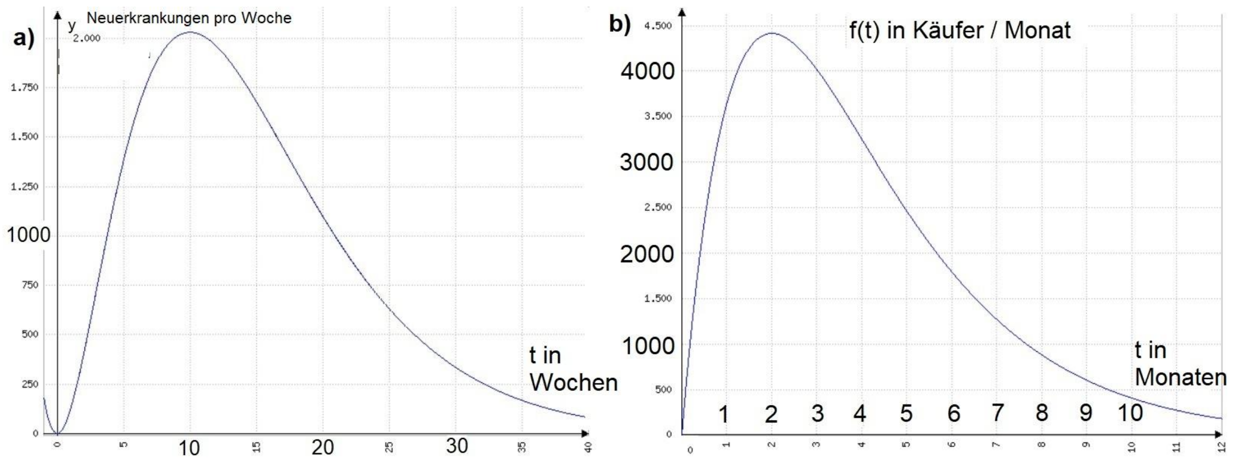


Abb. 107 Erkrankungsrate zu Ag 177/470 App Käufer pro Monat zu Ag 177/471 → ab S.1011

471. (≈ Abi 2017) Abb. 177/107 b zeigt für $0 \leq t \leq 12$ den Graph einer Funktion f mit $f(t) = 6000 \cdot t \cdot e^{-0.5t}$ der die Anzahl der Käufer einer neu eingeführten Smartphone-App modelliert ($0 \leq t \leq 12$ in Monaten nach der Einführung, $f(t)$ in Käufer pro Monat).
a_1) Berechnen Sie die maximale momentane Änderungsrate. b_1) Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem die momentane Änderungsrate größer als 4000 Käufer pro Monat ist. c_1) Bestimmen Sie die Zeitpunkte, zu denen die momentane Änderungsrate am stärksten abnimmt bzw. zunimmt.
d_2) Bestimmen Sie die Gesamtzahl der Käufer fünf Monate nach Einführung der App.
e_2) Zeigen Sie, dass für $t > 2$ die Funktion f smf ist nur positive Werte annimmt. Interpretieren

Sie dies im Bezug auf die Entwicklung der Käuferzahlen.
f_2) Bei einer anderen neuen App erwartet man maximal 30 000 Käufer. In einem Modell soll angenommen werden, dass sich die Gesamtzahl der Käufer nach der Funktion $g(t) = S - c \cdot e^{-kt}$ ($k > 0$) entwickelt. 6 Monate nach Verkaufsbeginn gibt es bereits 20 000 Käufer. Bestimmen Sie einen Funktionsterm, welcher die Gesamtzahl der Käufer in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.

472. (Ü)($\approx$ Abi 2007) Die momentane Ankunftsrate an einem Kino, also die Anzahl der ankommenden Personen pro Min, soll modellhaft beschrieben werden durch die Fktn f mit $f(t) = 0.27t^2 \cdot e^{-0.12t}$. Dabei ist t die Zeit in Minuten seit 19.00 Uhr und $f(t)$ die Anzahl der ankommenden Personen pro Minute. Vor 19.00 Uhr befinden sich noch keine Besucher am Kartenschalter.
a_1) Zeigen Sie, dass $F(t) = -(2.25 \cdot t^2 + 37.5 \cdot t + 312.5) \cdot e^{-0.12t}$ eine Stammfunktion von f ist.
$b_{2,LK}$) Geben Sie eine Fkt $F_0(t)$ für die Anzahl der wartenden Personen um t min nach 19.00 Uhr an.
c_2) Wie viele Personen kommen nach diesem Modell höchstens zum Kino?

7.1.10 Lineare Substitution → 7.5.2

473. (U) a_1) Sei $a \neq 0$; leiten Sie folgende Funktionen ab: $f_1(x) = \sin(2x)$; $f_2(x) = \cos(3x - 1)$; $f_3(x) = e^{ax+b}$; $f_4(x) = \sqrt{ax + b}$; verallgemeinert: $f(ax + b)$.
b_e) Berechnen Sie folgende Stammfunktionen für ($a \neq 0$): $\int 2 \cdot \cos(2x)\,dx$, $\int \cos(2x)\,dx$; $\int \cos(6x)\,dx$, $\int \cos(ax)\,dx$, $\int \cos(ax+b)\,dx$. Verallgemeinern Sie auf $\int e^{3x}\,dx$ und $\int e^{ax+b}\,dx$, $\int \sin(ax + b)\,dx$, $\int (ax + b)^2\,dx$, $\int (ax + b)^3\,dx$, $\int \sqrt{ax + b}\,dx$, $\int \frac{1}{(ax+b)^2}\,dx$, $\int \frac{1}{ax+b}\,dx$.
c_e) Sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$. **i)** Bestimmen Sie $F'(x)$. **ii)** Leiten Sie $F(ax + b)$ ab. Welche Regel benötigen Sie bei dieser Aufgabe? **iii)** Finden Sie eine Stammfunktion von $f(ax + b)$. **iv)** $\int f(ax + b)dx =$ ________ **(Formel 82)** .

474. (Ü) (KA_G) Ber. Sie $a_{b,1}$) $\int e^{6x-3}\,dx$, b_1) $\int \sin(3x - 8)\,dx$, c_1) $\int \cos(\frac{2x-3}{4})\,dx$, $\boxed{d_1)}$ $\int e^{\frac{4-x}{2}}\,dx$, $\boxed{e_1)}$ $\int (3x + 2)^4\,dx$, f_2) $\int \sqrt{4x - 2}\,dx$, g_2) $\int \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx$, h_2) $\int \frac{3}{(2x+1)^5}\,dx$, i_2) $\int \frac{2}{\sqrt{9x+4}}\,dx$, j_2) $\int \cos(2\text{-}x)\,dx$, k_2) $\int \frac{1}{e^{2x+4}}\,dx$, L_2) $\int \sin(\pi\text{-}x)\,dx$, m_3) $\int \left(\frac{1}{1-x}\right)^4 dx$, n_3) $\int \left(\frac{3}{(3-3x)^3}\right)^{-3} dx$.

475. (Ü) (KA_I) a_2) (= Abi 2013) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sin(\pi x)$, für $0 \leq x \leq 1$. Der Graph von f begrenzt mit der x-Achse eine Fläche mit Inhalt A. Berechnen Sie A exakt.
b_2) (= Abi 2016) Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von $f(x) = \frac{48}{(2x-4)^3}$ mit $F(3) = 1$.
c_2) Berechnen Sie **i)** $\int_0^{\pi}(2x - \sin(0.5x))dx$, **ii)** $\int_0^1 \frac{1}{(2x+1)^3}dx$, **iii$_{\bar{f}}$)** $\int_1^9(\frac{2}{\sqrt{x}} - 2)dx$, **iv$_{\bar{f}}$)** $\int_{-3}^0 e^x dx$; **v)** $\int_0^{\ln(4)} e^{0.5x}dx$; vi) $\int_{\ln(2)}^{\ln(4)} e^{2x+4}dx$; $\boxed{\text{vii)}}$ $\int_1^{\ln(3)} e^{5x-2}dx$; **viii)**$_{LK}$ $\int_1^e(\frac{4}{x} - 2x)dx$; **ix)**$_{LK}$ $\int_e^{2e}(\frac{1}{2x} - \frac{1}{(2x)^2})dx$;
$d_{2,LK}$) ($\approx$ Abi 2018) Ist der Wert des Integrals i) $\int_3^{e+2} \frac{1}{x-2} \cdot dx$; ii) $\int_e^{e^2} \frac{3}{x} \cdot dx$ ganzzahlig?

476. (Thx Han Wit; GFS) Berechnen Sie für die folgenden Funktionen f die Fläche, die K_f und die y-Achse zwischen den Geraden $y = a$ und $y = b$ einschließt. a_2) $f(x) = 2x$, $a = 0, b = 2$; b_2) $f(x) = 2x$, $a = 1, b = 2$; c_2) $f(x) = 2x$, $a = a, b = b$; d_3) $f(x) = x^2$, $a = 0, b = 1$;
e_3) Sei $f(x) = \dfrac{\arcsin\,(0.5(x - 2))}{\pi}$; berechnen Sie die Fläche, die K_f und die y-Achse zwischen den Geraden $y = 0$ und $y = 1$ einschließt.

7.1.11 Orientierte Flächen

KS_{17}: 94-96 + KS_{09}: 108

477. (U) a_1) Berechnen Sie $\int_0^{2\pi} \sin(t)dt$. Interpretieren Sie ihr Ergebnis.
b_e) Erklären Sie den Begriff 'orientierter Abstand' - wozu dient dieser Begriff?
c_r) Sei $f(x) < 0$, dann ist $\int_a^b f(x)dx$ ___, falls $a <$ _. Flächen u_______ der x-Achse sind n_______.
d_r) Sei $f(x) > 0$ und $a < b$, dann ist das $\int_a^b f(x)dx$ _ 0.

478. (KA_I) $_T$ Berechnen Sie die Fläche, die jeweils durch den Graphen G_f der folgenden Funktionen und durch die x-Achse eingeschlossen wird.

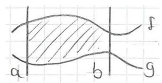
a_{1-2})	i) $0.75x^2 - 0.75$,	ii) $0.75x^2 - 3$,	iii) $0.75x^2 - 6.75$,	iv) $0.75x^2 - 12$,
b_{1-2})	i) $12x(x-1)^2$,	ii) $12x(x-2)^2$,	iii) $12x(x-3)^2$,	iv) $12x(x-4)^2$,
c_{1-2})	i) $x^4 + 4x^3$,	ii) $x^4 - 4x^3$,	iii) $-x^4 + 4x^3$,	iv) $-x^4 - 4x^3$,
d_{1-2})	i) $x^2 - 5x - 6$,	ii) $x^2 - 5x + 6$,	iii) $x^2 + 5x - 6$,	iv) $x^2 + 5x + 6$,
e_2)	i) $x^3 - 6x^2 + 5x$,	ii) $x^3 - 7x^2 + 10x$,	iii) $x^3 - 8x^2 + 15x$,	iv) $x^3 - 9x^2 + 20x$,
f_2)	$\boxed{\text{i)}}$ $(e^x - 1)\cdot(e^x - e)$,	ii) $(e^x - 1)\cdot(e^x - e^2)$,	iii) $(e^x - 1)\cdot(e^x - e^3)$,	iv) $(e^x - 1)\cdot(e^x - \frac{1}{e})$.

7.1.12 Flächen zwischen Kurven

KS_{17}: 97 + KS_{09}: 109-110

479. (U) a$_1$) Sei $f(x) = x + 2$ und $g(x) = x^2$. Berechnen Sie die Fläche, die beide Kurven zwischen den Geraden $x = 0$ und $x = 2$ einschließt.

b$_r$) Sei $g(x) < f(x)$, dann berechnen wir die Fläche zwischen zwei Kurven K_f und K_g zwischen $x = a$ und $x = b$ durch ____________.



c$_2$) Berechnen Sie die Fläche, die K_f, K_g sowie die Geraden $x = 0$ und $x = 1$ einschließen:

i) $f(x) = x - 1$, $g(x) = 3x^2$; **ii)** $f(x) = x\sin(x)$, $g(x) = x\sin(x) + 2$;

iii) $f(x) = (x+1)e^x$, $g(x) = xe^x$; Erst ________ieren, dann ________ieren.

480. (Ü) (KA_G) Berechnen Sie die Fläche, die von den Kurven K_f und K_g eingeschlossen wird:

a$_2$) $f(x) = x^2$,	$g(x) = 4x - x^2$;	b$_2$) $f(x) = -(x-1)^2 + 2$,	$g(x) = (x-1)^2$;
$\boxed{c_2}$) $f(x) = x$,	$g(x) = x^2 - 2x$;	d$_3$)$_{\bar{f}}$ (Polynomdiv.) $f(x) = \frac{1}{x^2}$,	$g(x) = 5.25 - 2.5x$;
e$_3$) $f(x) = \frac{3x^2}{2}$,	$g(x) = x - x^3$;	f$_3$) $f(x) = 4 - e^x$,	$g(x) = 3e^{-x}$;
g$_3$) $f(x) = e^{4x} + 4e^{2x}$,	$g(x) = 5e^{3x}$;	h$_4$)$_{\bar{f}}$ $f(x) = e^{2x} + e^3$,	$g(x) = e^{1+x} + e^{2+x}$;

i$_3$) Das Schaubild von $f(x) = 0.25x^4 - 1.5x^2 + 1.25$ und deren Wendetangenten schließen eine Fläche ein, die den Punkt P(0;1.5) enthält. Berechnen Sie deren Inhalt.

j$_3$) Der Graph der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{3 + 2x}$ schließt mit dem Graphen ihrer Umkehrfunktion und der y-Achse eine Fläche ein. Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche.

k$_3$) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2 + 2x$; $x \in [-1;\infty[$ und die Funktion g mit $g(x) = \sqrt{x+1} - 1$; $x \in [-1;\infty[$. Zeigen Sie, dass g die Umkehrfunktion von f ist. Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die von den beiden Graphen von f und g eingeschlossen wird.

481. (Ü) (KA_z) $_{2-3}$) Berechnen Sie den Inhalt der gefärbten Flächen aus Abb. 179/108 a-h.

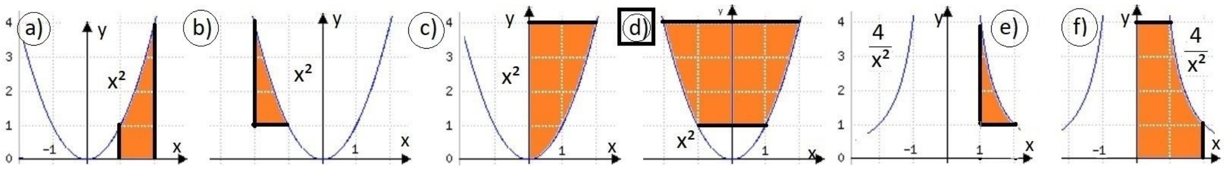
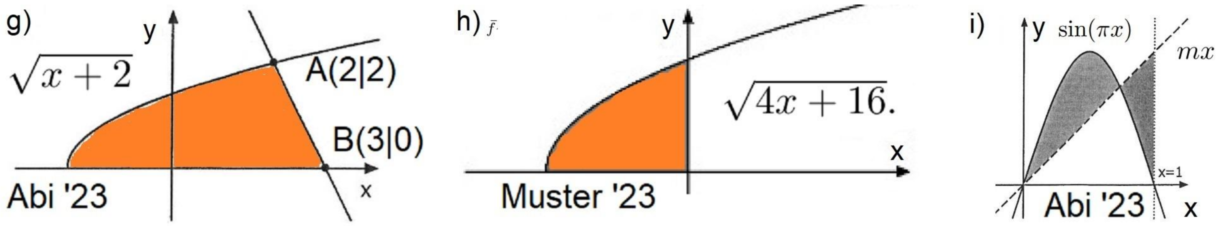


Abb. 108 ↕ Gefärbte Flächen a) - d) $f(x) = x^2$ e) - f) $f(x) = \frac{4}{x^2}$ (≈ Abi 2017)



i$_4$) In Abb 179/108i sind der Graph der Funktion $\sin(\pi x)$ sowie eine Gerade mx abgebildet. Ber. Sie den Wert von m, für den die Inhalte der beiden markierten Flächen gleich groß sind.

482. (KA_G) In Abb. 109 sind Stammfunktionen $F_i(x)$, von $f_i(x), i = 1..4$ abgebildet (siehe auch 154/393).

a$_1$) Schätzen Sie $f_i(1)$; b$_1$) Bestimmen Sie $\int_0^2 f_i(x)dx$; c$_2$) Schätzen Sie $\int_0^2 F_i(x)dx$;

d$_2$) Geben Sie eine Stelle mit $f'(x) = 0$ an. e$_4$) Geben Sie einen Funktionsterm für $F_i(x)$ an.

f$_{3,LK}$) Klassifizieren Sie alle Stellen mit waagrechter Tangente von $\int_2^x F_i(t)dt$;

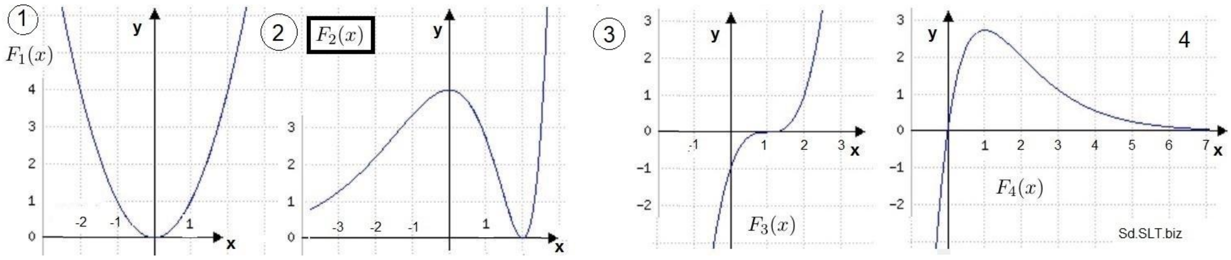


Abb. 109 Stammfunktionen $F_i(x)$

Ende der Integralrechnung des Grundkurses (GK)

7.1.13 Uneigentliche Integration → 7.7.4 + 7.7.5 (GFS) KS$_{17}$: 104-107 + KS$_{09}$: 112

483. (U) a$_e$) i) Berechnen Sie $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$; zeichnen und interpretieren Sie. (Abb. 110).
ii) Es entsteht eine Fläche mit u_________ Umfang aber e_________ Inhalt.
b$_e$) Ber. Sie $\lim\limits_{a\to 0}\displaystyle\int_a^1 f(x)\,dx$ für i) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, ii) $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $\boxed{\text{iii})}$ $f(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$, iv) $f(x)=\frac{1}{x}$.

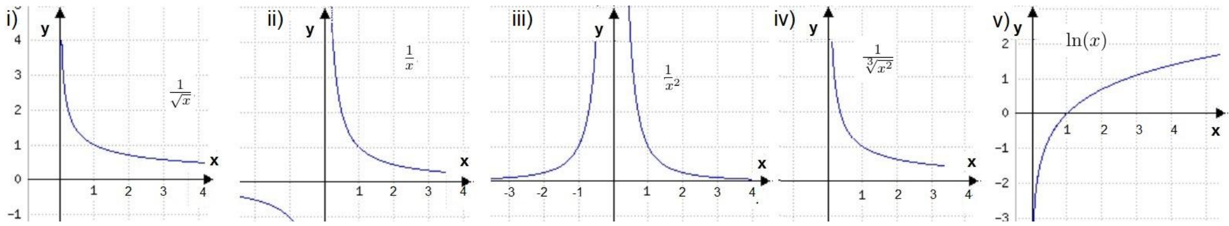


Abb. 110 Graphen mit Polstellen

c$_e$) i) Verallgemeinern Sie Ihr Ergebnis auf Funktionen der Form $f(x) = x^r$ $(r \neq -1)$.
ii) Das Problem ist, dass $F(x)$ =_________ ein B______ sein kann, in welchen man x = _ n______ e____________ darf. Wann ist $r+1$ _______?

Regel: Der $\lim\limits_{a\to 0}\displaystyle\int_a^1 x^r dx$ existiert für _______ und hat dann den Wert _______.

d$_4$) Approximieren Sie mit Hilfe des WTR $\lim_{x\to 0} x\ln(x)-x$ (Beweis mit de l'Hospital 170/443L), berechnen Sie $(x\ln(x)-x)'$, und damit das uneigentliche Integral $\lim_{a\to 0}\int_a^1 \ln(x)dx$.

484. a$_e$) Berechnen Sie $\int_{-2}^1 \frac{1}{x^2}\,dx$; interpretieren Sie Ihr Ergebnis.
b$_1$) (GTR) Berechnen Sie diese Fläche mit dem GTR (Befehl \fnint).
c$_r$) Über eine senkrechte Asymptote darf n________ h__________________________ werden.

485. (U) a$_e$) Ber. Sie $\int_1^b x^{-2}dx$. Was gilt für $b\to\infty$? b$_3$) Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit Ag 180/483.
c) Ber. Sie: i$_{b,2}$) $\lim\limits_{b\to\infty}\displaystyle\int_1^b \frac{1}{x^3}dx$, ii$_2$) $\lim\limits_{b\to\infty}\displaystyle\int_1^b \frac{1}{x^7}dx$, $\boxed{\text{iii}_2}$) $\lim\limits_{b\to\infty}\displaystyle\int_1^b \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx$, iv$_2$) $\lim\limits_{b\to\infty}\displaystyle\int_1^b x^{\frac{-3}{7}}dx$;

d$_r$) Der $\lim\limits_{b\to\infty}\displaystyle\int_1^b x^r dx$ existiert für r_______ und hat dann den Wert _______.

e$_r$) Bei einem uneigentlichen Integral hat die Fläche einen unendlich großen U__________ aber möglicherweise einen e_____________ I__________. Bei uneigentlichen Integralen erster Art ist der Definitionsbereich unendlich groß, bei uneigentlichen Integralen zweiter Art wird bis zu einer s_______________ A_______________ integriert.

486. (KA) Ber. Sie a$_3$) $\lim\limits_{b\to\infty}\displaystyle\int_1^b \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right)dx$; b$_2$) $\lim\limits_{b\to\infty}\displaystyle\int_0^b e^{-0.5x+1}dx$; c$_3$) $\lim\limits_{a\to 0}\displaystyle\int_a^1 (\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{3}{\sqrt[3]{x}})dx$;

d$_2$) $\lim\limits_{b\to\infty}\displaystyle\int_0^b e^{-x}dx$; $\boxed{\text{e}_2}$) $\lim\limits_{b\to\infty}\displaystyle\int_1^b e^{-2x+4}dx$; f$_2$) $\lim\limits_{a\to-\infty}\displaystyle\int_a^0 e^x dx$; $\boxed{\text{g}_2}$) $\lim\limits_{a\to-\infty}\displaystyle\int_a^0 (e^x+e^{2x})dx$;

$_T$) Ber. Sie die Fläche A, die von dem Graphen G_f der folgenden Funktionen, dessen Asymptote für $x \to +\infty$ oder $-\infty$ und der Geraden $x = 1$. **h**$_1$) i) e^{-x}, ii) e^{-2x}, iii) e^{-3x}, iv) e^{x}, v) e^{2x};

i$_{1-2}$) i) $e^{-2x+2} + e^{-3x+3}$, $\boxed{\text{ii)}}$ $e^{-3x+3} - e^{-2x+2}$, iii) $e^{2x-2} + e^{3x-3}$, iv) $e^{3x-3} - e^{-2x+2}$;

j$_1$) i) $e^{-x} + 1$, ii) $2 - e^{-x}$, iii) $3 + e^{x}$, $\boxed{\text{iv)}}$ $4 - e^{x}$; v) $x - e^{-x}$; vi) $2x + 4 + e^{x}$; **k**$_4$) $\frac{1}{x^2}$;

l$_2$) ($\approx$ Abi '23) Gegeben sei die Funktionsschar $f_t(x) = (1 - tx^2) \cdot e^{-2x}$. Die Graphen von f heißen G_t und sei $h(x) = f_t(x) - f_{t+2}(x)$. **i)** Zeigen Sie, dass G_t und G_{t+2} für $x > 0$ keine gemeinsamen Punkte besitzen. **ii')** Zeigen Sie, dass $H(x) = -\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right) \cdot e^{-2x}$ ist eine Stammfunktion von $h(x)$ ist. **iii)** Bestimmen Sie den Inhalt der nach rechts unbegrenzten Fläche, den G_t und G_{t+2} für $x > 0$ einschließen.

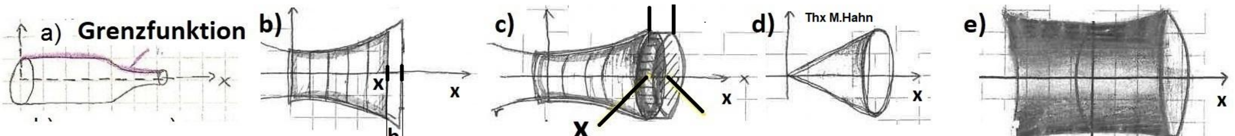


Abb. 111 Rotationskörper

7.1.14 Rotationskörper → 7.8.1 (GFS) KS$_{17}$: 101-103 + KS$_{09}$: 116-117

487. (U) a$_1$) Welche Rotationskörper (e: *solid of revolution*) kennen Sie? Ein Rotationskörper entsteht durch Drehung einer F_____ um die x-Achse. b$_1$) Wir wollen Volumina von Rotationsflächen berechnen. Analog zum Anfang der Integralrechnung approximieren wir Rotationsflächen durch Rechtecke. Was ist das Analogon des Rechtecks beim Rotationskörper?
c$_e$) Analog zu Abs 7.1.5 definieren wir die Volumenfkt $V_0(x)$. Zeichnen Sie in Abb 111 b,c $V_0(x)$ und $V_0(x+h)$ ein. Schätzen Sie wieder $V_0(x+h) - V_0(x)$ und formulieren und beweisen Sie eine Formel für Rotationskörpervolumen: $V_0(x) = \int_0^x \quad dt$ **(Formel 83, FD 19)**.

488. (KA$_L$) Die Fläche unter dem Graphen der Funktion f rotiere im Intervall $[a; b]$ um die x-Achse.
Berechnen Sie das Volumen V. a$_1$) $f(x) = x,\ a = 1; b = 4$; **b**$_{b,1}$) $f(x) = x^2,\ a = 0; b = 5$;
c$_2$) $f(x) = e^x,\ a = 0; b = \ln(2)$; d$_2$) $f(x) = 0.5x$-1, $a = 2; b = 5$; **e**$_2$) $f(x) = 2x$-1, $a = 2; b = 5$;
f$_2$) $f(x) = 1 - x^2,\ a = 0; b = 3$; **g**$_2$) $f(x) = \sqrt{x} + 1,\ a = 0; b = 1$; **h**$_2$) $f(x) = e^{3x},\ a = 0; b = 1$;
i$_2$) $f(x) = e^{2x+4}$, a =-2; $b = 0$; $\boxed{\text{j}_2)}$ $f(x) = 2e^{4-x},\ a = 2; b = 4$; k$_2$) $f(x) = e^x + 1,\ a = 0; b = 2$;

Erst _____rieren, dann _____rieren. Volumina (von Rotationskörpern) sind nie n__________.

489. a$_1$) Die Funktion $f(x) = x$ rotiere im Bereich $0 \le x \le 2$ um die $x-$Achse. Welcher Körper entsteht? Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers auf zwei Arten.
b$_1$) durch die Rotation der Gerade $y = 2x + 1$ im Bereich $0 \le x \le 3$ entsteht ein Körper. Um welchen Körper handelt es sich und welches Volumen hat dieser?
c'$_1$) Die Funktion $f(x) \equiv r$ rotiere im Bereich $x_1 \le x \le x_2$ um die $x-$Achse. Welcher Körper entsteht? Weisen Sie dessen Volumenformel nach.

490. Ein Sektglas entsteht durch Rotation der Funktion $y = \frac{1}{4}t$, $t \in [0; 10]$ in cm um die x-Achse.
a$_1$) Wieviel cm^3 fasst das Glas?
b$_1$) Das Glas ist bis zur halben Höhe gefüllt. Wieviel % des Fassungsvermögens sind im Glas?
c$_2$) Wie hoch muss das Glas gefüllt werden, damit es zu 50% gefüllt ist?
d$_2$) Beweisen Sie mit Hilfe der Integralrechnung die Volumenformeln von Zylinder und Kegel.
e$_2$) Der Kochtopf einer Hexe hat die Form einer Rotationsparabel (Randfunktion x^2). Der Topf hat eine Höhe von 1. Berechnen Sie dessen Volumen.

f) (aus ZPG) Die Füllhöhe h in einem Glas wird beschrieben durch die Funktion f mit $f(x) = 18x^4$, wobei x der Radius der kreisförmigen Flüssigkeitsoberfläche ist, mit $-2 \le x \le 2$. **i**$_2$) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von f und **ii**$_5$) erläutern Sie ihre Bedeutung im Sachzusammenhang. **iii**$_3$) Bestimmen Sie das Volumen des vollständig gefüllten Glases.

491. a$_2$) (= Abi '15) Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = t \cdot \cos x$; $\frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Der Graph K_{f_t} schließt mit der x-Achse eine Fläche ein. Bei Rotation dieser Fläche um die x-Achse entsteht ein Drehkörper. Ber. Sie dessen Volumen abhängig von t. **b$_3$)** (≈ Abi '05) Mit $V = \pi \cdot \int_0^4 (4 - 0.5x)^2\,dx$ wird der Rauminhalt eines Körpers berechnet. Beschreiben Sie den Körper.

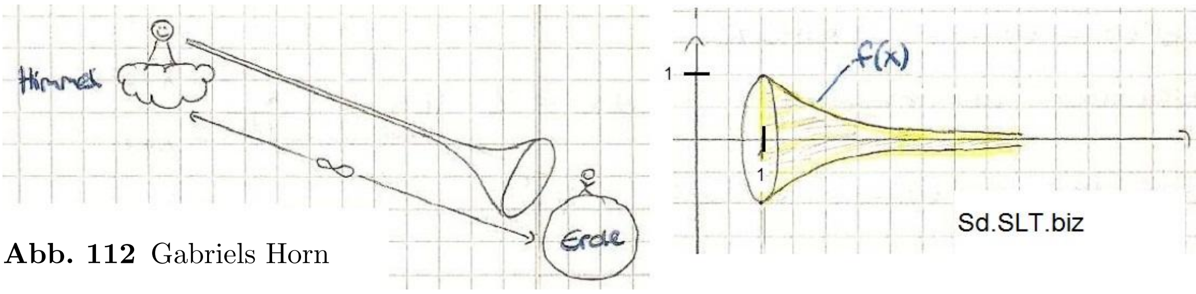


Abb. 112 Gabriels Horn

492. (U) **Gabriels Horn:**$_e$ Der Erzengel Gabriel hat ein Horn (Rotationskörper), das vom Himmel bis auf die Erde reicht. Wir wollen das Volumen und die Oberfläche des Horns berechnen.

a$_e$) Ein Rechteck mit Breite h und Höhe r und Fläche A rotiere um die x-Achse. Berechnen Sie die Mantelfläche M und geben Sie eine Schätzung für die Mantelfläche O eines Rotationskörpers an.

b$_2$) Die Fläche A wird von der Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, der Geraden $x = 1$ und der $x-$Achse begrenzt und reicht bis ins Unendliche. Gabriels Horn wird durch Rotation von A um die $x-$Achse erzeugt. Berechnen Sie dessen Volumen, sowie den Inhalt von A (diese Fläche ist etwa 1/6 der tatsächlichen Oberfläche). Wieviel Farbe brauchen Sie, um die Innenfläche von Gabriels Horn zu streichen - wieviel Farbe um das Horn zu füllen? (Abb. 112) **c$_2$)** Lösen Sie Teil a) mit $f(x) = \frac{1}{x}$. d$_3$) Welche Funktionen der Form $f(x) = x^r$ eignen sich als Hornfunktion? Eignet sich $e^{-kx}, k > 0$?

7.1.15 Mittelwerte (GFS) KS$_{17}$: 98-100 + KS$_{09}$: 114

493. (U) a$_w$) Was ist ein Mittelwert und wie wird der Mittelwert $\bar{m}$ von $y_1, y_2, y_3, .., y_n$ berechnet?
b$_e$) Sei $f(x) = x^2$. Wir möchten den Mittelwert $\bar{m}$ von f im Intervall $[1; 2]$ berechnen. Welches Problem haben wir dabei? Und wie lösen wir derartige Probleme?
c$_1$) Wir wählen zur Approximation zunächst die $x-$Werte 1 und 1.5 - Berechnen Sie den Mittelwert m_2 der zugehörigen Funktionswerte. d$_1$) Berechnen Sie m_4, den Mittelwert der Funktionswerte zu den x-Werten $1, 1.25, 1.5$ und 1.75 sowie m_8 und m_n (siehe Abb. 182/113 a-c).
e$_3$) Wo haben Sie die entstehende Summe schon einmal gesehen?
f$_4$) Geben Sie einen Zusammenhang zwischen R_n und m_n an und lassen Sie das n gegen ___ gehen.
g$_r$) Der Mittelwert m einer Funktion f auf $[a, b]$ ist $m =$ _______________ **(Formel 84)** .

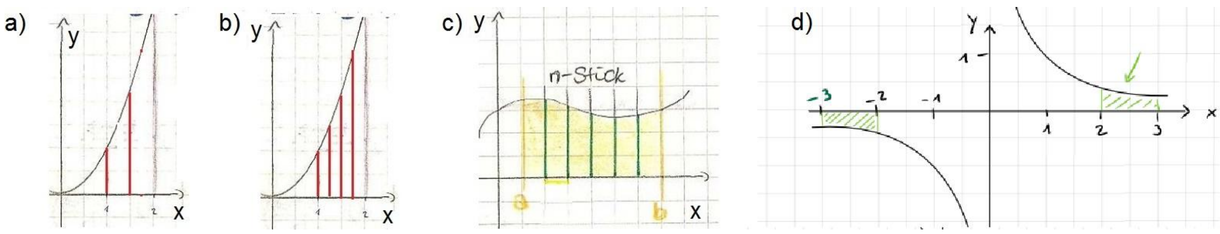


Abb. 113 Mittelwerte Flächen, begrenzt durch den Graph von 1/x

494. Ber. Sie die Mittelwerte der Funktion f im Intervall $[a; b]$: a$_{b,1}$) $f(x) = \frac{x}{2} + 2$, $a = 2, b = 4$; b$_1$) $f(x) = 2x - x^2$, $a = 0, b = 3$; c$_1$) $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, $a = 1, b = 4$; $\boxed{\text{d}_1}$) $f(x) = e^{-x}$, $a = 0, b = \ln(2)$; e$_1$) $f(x) = \sin(x)$, $a = 0, b = \pi$; ← (KA$_G$) Lösen Sie auch die Ag 167/433-169/438.

495. (Ü) (KA$_L$) Formulieren Sie Fragestellungen im Sachzusammenhang, die auf die entsprechenden Gleichungen führen. $f(t)$ modelliere die Wachstumsgeschwindigkeit eines Baumes (t in Jahren, $f(t)$ in Meter pro Jahr) $F(t)$ dessen H_______ in __. a) $x = \int_0^3 f(t)dt$; b) $f(t+3) - f(t) = 2$; c) $\int_x^{x+3} f(t)dt = 2$; d) $\frac{1}{3}\int_x^{x+3} f(t)dt = 2$; e) $\frac{1}{4}\int_x^{x+4} F(t)dt = 5$; Siehe auch 115/299e; 163/426b (Abi 19); 434h und 168/435k sowie (Abitur) 2021 A 2.1 b_2; 2020 A 1.1 b;

7.1.16 Integration von (Stamm-) Brüchen

496. (U) a$_1$) Warum kann die Funktion $f(x)=\frac{1}{x}$ nicht mit der Potenzregel integriert werden?
b$_e$) In Abs. 6.3.6 haben Sie eine Funktion kennengelernt, deren Ableitung $\frac{1}{x}$ ist. Für welche $x-$Werte ist diese Funktion eine Stammfunktion von $\frac{1}{x}$; für welche nicht?
c$_e$) Betrachten Sie Abb. 182/113 d und berechnen Sie zuerst die rechte, dann die linke Fläche. Ber. Sie $\int_{-b}^{-a}\frac{1}{x}\,dx$ (für $0<a<b$). Wie könnte eine Stammfkt von $f(x)=\frac{1}{x}$ für $x<0$ lauten? Fassen Sie die Stammfkten für $x<0$ und für $x>0$ zusammen $\int \frac{1}{x}dx=$ _____ **(Formel 81)** .

497. (U) a$_e$) Welche Terme können wir integrieren und welche können wir nicht integrieren?
b$_1$) Berechnen Sie $\int \frac{4x^2}{x}dx$; Welche Technik dürfen Sie nicht verwenden?
c$_2$) Berechnen Sie $\int \frac{x^2+1}{x^2}dx$; Beachten Sie auch Aufgabe b);
d$_r$) Um einen Term der Form $\frac{p(x)+q(x)}{x^r}$ in integrierbare Form zu bringen, müssen wir diesen:

1) In eine ____________________ umwandeln: $\frac{p(x)+q(x)}{x^r}=$ _______________.

2) Die entstandenen Summanden ____________________ bzw. algebraisch umformen.

3) Jeden Summanden als _______________funktion also in der Form ________ schreiben.

4) Erst dann integrieren! **Niemals Zähler und Nenner getrennt integrieren!**

498. Berechnen Sie: a$_1$) $\int \frac{x^2}{x}\,dx$, b$_1$) $\int \frac{x^2}{x^4}\,dx$, c$_{b,2}$) $\int \frac{x^3-1}{x^2}\,dx$, d$_2$) $\int \frac{x^2-1}{x}\,dx$, e$_2$) $\int \frac{x^2-3x+2}{x}\,dx$, f$_2$) $\int \frac{x^2+5x-4}{x^2}\,dx$, g$_3$) $\int \frac{x^3+5x^2-3x+1}{x^2}\,dx$, $\boxed{\text{h}_2)}$ $\int \frac{x^3+5x^2-4x-3}{x^3}\,dx$, i$_3$) $\int \frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x}}\,dx$, j$_3$) $\int \frac{x^4+5x^2-3\sqrt{x}-1}{x^2}dx$, k$_3$) $\int \frac{x^6+5x^3\sqrt{x}-3x-1}{\sqrt{x}}dx$, L$_2$) $\int \frac{1}{e^{2x}}dx$, m$_3$) $\int \frac{e^x+1}{e^{2x}}dx$, n$_3$) $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x}dx$,
aber: o$_2$) $\int \frac{1}{(x-4)^2}\,dx$, p$_2$) $\int \frac{1}{(3x-4)^5}\,dx$, q$_2$) $\int \frac{1}{\sqrt{3x+2}}\,dx$, r$_2$) $\int \frac{1}{ax+b}\,dx$ $\leftarrow$ (KA$_L$) .

7.1.17 Numerische Integration

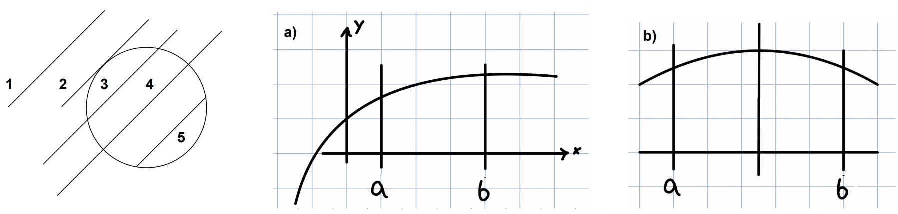


Abb. 114 Die Sehnentrapezregel

499. (GFS) (U) a$_e$) **Die Sehnentrapezregel:**$_e$ (STR) Kennt man von einer Fkt f keine Stammfunktion, so kann $A=\int_a^b f(x)dx$ geschätzt werden, indem man die Punkte $(a/f(a))$ und $(b/f(b))$ geradlinig verbindet. $A\approx$ die Fläche eines T______. Geben Sie dessen Eckpunkte und dessen Fläche an. b$_1$) Approximieren Sie i) $\int_2^4(2x+1)dx$, ii) $\int_0^1 x^2dx$ mit der STR. Wie genau ist die Approximation?

c$_e$) Wenn Sie im Intervall $[a;b]$ zwei Trapeze zusammensetzen, erhalten wir die zusammengesetzte Trapezregel $A\approx \quad \cdot(f(a)+ \quad f(\frac{a+b}{2})+f(b))$. Approx. Sie so i) $\int_3^5 x^2dx$, ii) $\int_1^5 x^3dx$, iii) $\int_0^2 x^4dx$.

d$_e$) Es geht aber besser: Passen Sie bei der kSTR $A\approx\frac{b-a}{4}\cdot(f(a)+2f(\frac{a+b}{2})+f(b))$ das Gewicht '2' (Faktor vor dem $f(\frac{a+b}{2})$) so an, dass $\int_0^2 x^2dx$ exakt berechnet wird.
Die Keplersche Fassregel:$_e$ $A\approx \quad \cdot(f(a)+ \quad f(\frac{a+b}{2})+f(b))$. (KS$_{17}$: 108 + 109)
e$_r$) Berechnen Sie mit der Kepler Fass Regel die Integrale aus c). Die Formel berechnet Flächen von ganzrationalen Funktionen ___ und ___ Grades e__________! Beweisen Sie dies.

500. **Minimalanforderungen** UE 11_3 Integralrechnung: **a)** Berechnen Sie die Fläche, die von den Schaubildern der Funktionen $f_1(x)=-x^2+4x+1$ und $f_2(x)=x^2-6x+9$ eingeschlossen wird.
b) Berechnen Sie i) die unbestimmten Integrale von $f_3(x)$, $f_4(x)$, $f_5(x)$ und $f_6(x)$;
ii)$_{LK}$ die Integralfunktion $J_1(x)=\int_1^x f(t)dt$ der folgenden Funktionen:

$f_3(t) = e^{-2t+2}$, $f_4(t) = \frac{-t+2}{t^3}$, $f_5(t) = \frac{1}{2t-3}$, $f_6(t) = \sin(2-2t)$.
c$_{LK}$) Ber. Sie das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(t)dt$ der Funktionen $f_3(x) - f_5(x)$ aus Teil b).
d$_{LK}$) Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn die Fläche begrenzt vom Graphen von $f_7(x) = \sqrt{2x-4}$ und den Geraden $x = 2, x = 4$ und $y = 0$ um die x-Achse rotiert.
e$_{LK}$) Berechnen Sie den Mittelwert von $f_7(x)$ im Intervall $[2;4]$. Wettbewerbsag 70/204

7.1.18 Der Beweis des Hauptsatzes (UE $M{+}_3$) + Aufgaben zur Intrg (GFS)

501. $\overline{DHBW}$ a$_2$) Wie lautet der (echte) Hauptsatz der Differenzial und Integralrechnung?

b$_2$) Erklären Sie den Hauptsatz an der Funktion $f(x) = x^3$.

c$_3$) (GG) Sei f stetig auf $[a;b]$. Definieren Sie die Begriffe Untersumme, Obersumme und Riemannsumme für eine (äquidistante) Zerlegung mit n Rechtecken.

d$_3$) Führen Sie zuerst den Beweis des HS mit Riemannsummen analog zu Aufgabe 174/454 b).

e$_4$) Führen Sie jetzt die gleiche Rechnung mit den Untersummen durch - wo ist der Unterschied im Beweis zu den Riemannsummen? Schließen Sie den den Beweis ab.

502. a$_e$) i) Formulieren Sie die Produktregel der Ableitung.
ii) I__________ Sie die Gleichung dx und lösen Sie nach $\int u \cdot v' \cdot dx$ auf. iii) Übung Ag 184/503a.

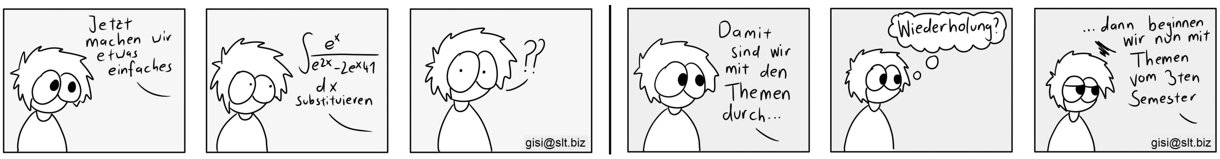
b$_w$) Formulieren Sie die KEttenregel der Ableitung.
c$_e$) Sei g eine Funktion von x, also $g = g(x)$ und sei $F'(x) = f(x)$. i) Differenzieren Sie $F(g) = \int f(g) \cdot dg$ nach x! ii) Integrieren Sie danach beide Seiten der Gleichung dx.
iii) Es entsteht die Formel $\int f(g) \cdot dg = \int f(g(x)) \cdot g'(x) \cdot dx$. Formulieren Sie diese Formel ohne Integrale mit dg und dx analog zum Beweis der K_______regel.

503. (KA$_1$) Ber. Sie eine Stammfunktion **a)** mit Hilfe der partiellen Integration i$_1$) $f_1(x) = x \cdot e^x$,
ii$_1$) $2x \cdot \cos(x)$, iii$_1$) $4x \cdot \sin(2x)$, iv$_2$) $x^2 \cdot e^x$, v$_2$) $(x-1)^2 \cdot \sin(x)$; vi$_2$) $(x^2+3x-4) \cdot e^x$;

b) mit Hilfe der (äußeren) Substitution i$_1$) $2x \cdot \sin(x^2)$, ii$_1$) $2x \cdot \sqrt{x^2+1}$, iii$_1$) $x \cdot e^{x^2}$,
iv$_1$) $x^2 \cdot \cos(x^3-4)$, v$_1$) $\sin(x) \cdot e^{\cos(x)}$, vi$_2$) $\frac{\sin(x)}{\sqrt{1-\cos(x)}}$, vii$_2$) $\frac{\ln(x)}{x}$, viii$_2$) $\frac{x^3-x}{x^4-2x^2}$; ix$_3$) $\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$,

c) mit Hilfe der (inneren) Subst. i$_2$) e^{2x-6}, ii$_2$) $\sin(2x-1)$, iii$_2$)' $\cos(\frac{1}{2}x+4)$, iv$_2$)' $e^{\frac{x}{2}+6}$,
v$_4$) $e^{\sqrt{x}}$, vi$_5$) $\sqrt{1-x^2}$, vii$_5$) $\sqrt{1+x^2}$, viii$_5$) $\frac{1}{\sin(x)}$,

d) von i$_3$) $\sin(x)\cos(x)$, ii$_3$) $(2x-4)\sin(2x)$, iii$_3$) $(x^2-6x)\cos(2x-6)$, iv$_3$) $\frac{\cos(x)}{(1+2\sin(x))^2}$,
v$_3$) $\frac{e^x}{e^{2x}-2e^x+1}$, vi$_4$) $\frac{x^2+x+1}{x+1}$, vii$_3$) $\frac{1}{x\ln(x)}$, viii$_4$) $\tan(x)$, ix$_5$) $\cos(\sqrt{x})$, x$_4$) $\sin(x) \cdot e^x$,
xi$_3$) $\sqrt{2} \cdot \ln(\sqrt{2x+2})$ xi$_5$) $\sin(\ln(x))$, xii$_4$) $\frac{2x}{(x^2+1)\ln(x^2+1)}$, xiii$_5$) $\ln(x^2+1)$, xiv$_4$) $\frac{1}{1+e^{-x}}$,
xv$_4$) $x^3 \cdot e^{x^2}$; xvi$_5$) $(18x^4+6x) \cdot e^{2x^3}$; xvii$_3$) $\frac{2x-7}{x^2-7x+12}$; xviii$_3$) $\frac{2x+4}{(x+2)^3}$;



e) (Vor 104/269) von i$_4$) $\frac{1}{x^2-4x+3}$; ii$_5$) $\frac{x^3}{x^2-1}$; iii$_5$) $\frac{x+1}{x^2-4x+4}$; iv$_5$) $\frac{x}{x^3-3x^2+3x-1}$; v$_5$) $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$;
vi$_5$) $\frac{1}{\cos(x)}$, **f)** von i$_4$) $\frac{1}{x^2-4x+13}$; ii$_4$) $\frac{2x}{x^2-4x+13}$;

7.2 Einführung in die Integration (MV)

7.2.1 Berechnung von Dreiecksflächen

Wir berechnen die Fläche unter der Funktion $y = x$ bis zur Stelle $x = x_0$. Die Fläche des i-ten Rechtecks $= \frac{x_0}{n} \cdot f(\frac{i \cdot x_0}{n}) = \frac{x_0}{n} \cdot \frac{i \cdot x_0}{n} = \frac{i \cdot x_0^2}{n^2}$. Damit ergibt sich für die Riemannsumme:

$$\begin{array}{lcll} \text{Fläche} & = & \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i \cdot x_0^2}{n^2} & \text{s.o.} \\ & = & \frac{x_0^2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i & \text{Distributivgesetz} \\ & = & \frac{x_0^2}{n^2} \frac{n^2-n}{2} & \text{nach Formel 4.6.4} \\ & = & \frac{x_0^2}{2} - \frac{x_0^2}{2n} & \text{zusammengefasst} \\ & \to & \frac{x_0^2}{2} & \text{für } n \to \infty \end{array}$$

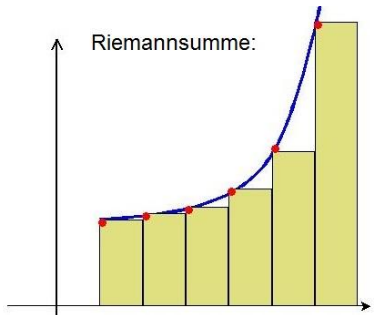


Abb. 115 Riemannsumme

7.2.2 Definition: Riemannsumme

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann heißt

(1) $RS(n) := \dfrac{(b-a)}{n} \cdot \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(a + \frac{k \cdot (b-a)}{n})$ eine **Riemannsumme** von f auf $[a, b]$.

(2) Die Summe $US(n) := \dfrac{(b-a)}{n} \cdot \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \min_{x \in [a+\frac{k\cdot(b-a)}{n};a+\frac{(k+1)\cdot(b-a)}{n}]} f(x)$ heißt **Untersumme** von f auf $[a, b]$. Die Obersumme $OS(n)$ definieren wir analog mit max statt min.

(3) **Bemerkung:** Häufig werden $RS(n)$ und $US(n)$ verwechselt; die RS und die US sind aber nur für monoton wachsende Funktionen äquivalent. Trivialerweise gilt $US(n) \le RS(n) \le OS(n)$.

Eine Funktion heißt (Riemann-) integrierbar $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} US(n) = \lim_{n\to\infty} RS(n) = \lim_{n\to\infty} OS(n)$.

(4) **Stetige Funktionen sind integrierbar:** Wir beweisen dies nur für monoton wachsende Funktionen: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und monoton wachsend, dann gilt

$$US(n) = \frac{(b-a)}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(a + \frac{k \cdot (b-a)}{n}) \qquad OS(n) = \frac{(b-a)}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(a + \frac{(k+1) \cdot (b-a)}{n}).$$

$$\begin{aligned} OS(n) - US(n) = \tfrac{(b-a)}{n} \cdot & \Big(f(a + \tfrac{1\cdot(b-a)}{n}) + \ldots + f(a + \tfrac{(n-1)\cdot(b-a)}{n}) + f(a + \tfrac{n\cdot(b-a)}{n}) \\ & - \Big(f(a + \tfrac{0\cdot(b-a)}{n}) + f(a + \tfrac{1\cdot(b-a)}{n}) + \ldots + f(a + \tfrac{(n-1)\cdot(b-a)}{n})\Big)\Big) \end{aligned}$$

$$= \tfrac{(b-a)}{n} \cdot \Big(f(a + \tfrac{n\cdot(b-a)}{n}) - f(a + \tfrac{0\cdot(b-a)}{n})\Big) = \tfrac{(b-a)}{n} \cdot (f(b) - f(a)) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

stetige Fktn auf kompakten Intervallen sind beschränkt (Studium), also ist $-\infty < f(a) \le f(b) < \infty$.

Der Beweis ist durchaus nicht einfach auf nicht monotone Funktionen übertragbar. Naheliegend wäre eine Einteilung in endlich viele Monotoniebereiche, was aber zB bei der stetigen Funktion $\tilde{f}(x) = x \cdot \sin(\frac{\pi}{x} + \frac{\pi}{2})$ und $\tilde{f}(0) = 0$ mit $\tilde{f}(\frac{1}{n}) = \frac{(-1)^n}{n}$ nicht funktioniert.

7.2.3 Beispiel: Flächen von Trapezen

Wir berechnen die Fläche unter einer Geraden $y = mx + c$ über dem Intervall $[a, b]$.

$$\begin{array}{lcll} \text{Fläche} & = & \frac{(b-a)}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(a + \frac{i\cdot(b-a)}{n}) & \text{s.o.} \\ & = & \frac{(b-a)}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} m(a + \frac{i\cdot(b-a)}{n}) + c & \text{Definition von } f \\ & = & \frac{(b-a)}{n} \cdot (\sum_{i=0}^{n-1} ma + \sum_{i=0}^{n-1} m\frac{i\cdot(b-a)}{n} + \sum_{i=0}^{n-1} c) & \text{Distributivgesetz und} \\ & = & \frac{(b-a)}{n} \cdot (ma \cdot n + m\frac{(b-a)}{n} \sum_{i=0}^{n-1} i + c \cdot n) & \text{Assoziativgesetz (2.7.2)} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} = & \frac{(b-a)}{n} \cdot (ma \cdot n + \frac{m(b-a)\cdot(n^2-n)}{2n} + c \cdot n) & \text{nach Formel 4.6.4} \\ = & ma(b-a) + \frac{m(b-a)^2}{2} - \frac{m(b-a)^2}{2n} + c(b-a) & \\ \to & \frac{m(b^2-a^2)}{2} + c(b-a) \quad = \quad \int_a^b mx + c \ dx & \text{für } n \to \infty \end{array}$$

7.2.4 Definition: orientierte Fläche / Stammfunktion

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist $\int_a^b f(t)\ dt$ (als Limes der Riemannsummen) die von f und der $x-$Achse eingeschlossene (orientierte) **Fläche**. $F_a(x) := \int_a^x f(t)\ dt$ heißt **eine Stammfkt** von f.

7.3 Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung (BA 1_{10})

7.3.1 Satz: Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung (auswendig)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $F_a(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, dann gilt:

$$F_a'(x) = \left(\int_a^x f(t)\ dt\right)'^{x} = f(x).$$

Integrieren ist also so etwas ähnliches wie die Umkehrung des Differenzierens.

Wir beweisen den Satz hier nur für stetige streng monoton wachsende Funktionen f.
Sei $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ stetig und smw, $a \le x \le b$ und $h > 0$, dann gilt

$F_a(x+h) \le F_a(x) + h \cdot f(x+h) \overset{-F_a(x)\ :h}{\Longleftrightarrow} \frac{F_a(x+h)-F_a(x)}{h} \le f(x+h)$ dies gilt für alle $h > 0$

insbesondere gilt: $\frac{F_a(x+h)-F_a(x)}{h} \xrightarrow{h\to 0} F_a'(x)$ (nach der Definition der Ableitung)

und $f(x+h) \xrightarrow{h\to 0} f(x)$ (weil f stetig ist), also gilt $F_a'(x) \le f(x)$.

$F_a(x+h) \ge F_a(x) + h \cdot f(x) \overset{-F_a(x)\ :h}{\Longleftrightarrow} \frac{F_a(x+h)-F_a(x)}{h} \ge f(x)$ wie oben gilt also $F_a'(x) \ge f(x)$ und damit ist $F_a'(x) = f(x)$ (Hauptsatz).

Der Beweis für Funktionen, die nicht streng monoton wachsend sind geht analog, man muss nur sehr oft min und max schreiben, was den Kern des Beweises verwischt.

Bemerkung: Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen sind beschränkt (siehe Studium). Der Wert der berechneten Fläche ist auch beschränkt und es gilt

Aus dem Hauptsatz + dem MWS folgt unter anderem: Wenn F_1 und F_2 Stammfunktionen von f sind, so ist $F_1 - F_2$ konstant.
Sei F eine beliebige Stammfunktion von f, dann läßt sich $\int_a^x f(t)\ dt$ berechnen durch
$\int_a^x f(t)\ dt = F(x) - F(a)$.
Bemerkung: Die Einschränkung 'stetig' kann entschärft werden. Mehr dazu im Studium.

HA 18 Berechnen Sie $\int x^2$ über eine Zerlegung ohne Verwendung des Hauptsatzes.

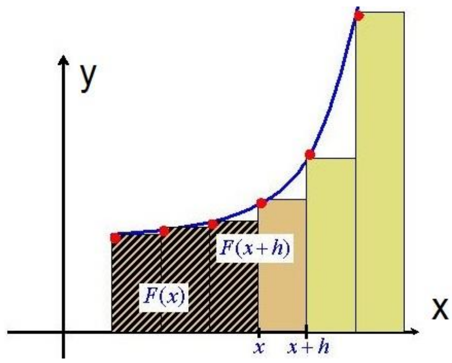


Abb. 116 Riemannsummen und Differenzenquotient

7.3.2 Beispiel: Anwendungen des Hauptsatzes

$$\int \cos x \ \ dx = \sin x + c \qquad \int \sin x \ \ dx = -\cos x + c \qquad \int e^x \ \ dx = e^x + c.$$

Wichtige Formel für die Integration mit Partialbruchzerlegung (auswendig):

$$\int \frac{1}{1+x^2}\ dx \ = \ \arctan x + c \qquad \text{mit Abschnitt 14.13.6}$$

7.3.3 Satz: Linearität des Integrals (auswendig)

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann gilt: $$\int_0^x c \cdot f(t) + g(t)\ dt = c \cdot \int_0^x f(t)\ dt + \int_0^x g(t)\ dt$$

Beweis: (mit Hauptsatz)

$$\left(\int_0^x c \cdot f(t) + g(t)\ dt - \left(c \cdot \int_0^x f(t)\ dt + \int_0^x g(t)\ dt\right)\right)' = c \cdot f(x) + g(x) - (c \cdot f(x) + g(x)) = 0$$

Damit ist $\int_0^x c \cdot f(t) + g(t)\ dt - \left(c \cdot \int_0^x f(t)\ dt + \int_0^x g(t)\ dt\right)$ konstant$(= k)$. k kann durch Punktprobe (oder mit Abschnitt 7.1.7) für $x = 0$ zu 0 festgelegt werden.

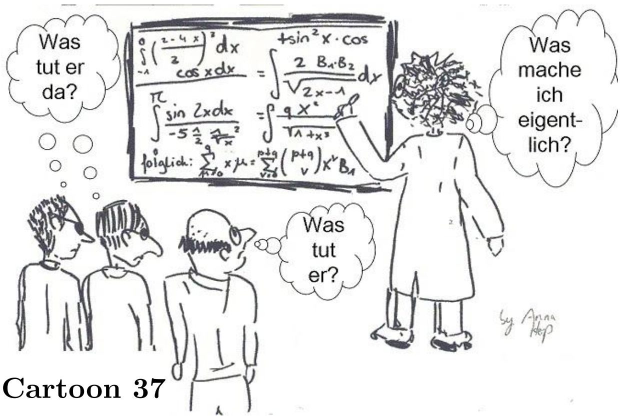
Bemerkung: Der Begriff Linearität ist wichtig und stammt tatsächlich von (proportionalen) 'Geraden': Bei diesen $(f(x) = m \cdot x)$ gilt nämlich: $f(a \cdot x_1 + x_2) = a \cdot f(x_1) + f(x_2)$. Zusatzaufgabe: Suchen Sie weitere Funktionen mit dieser Eigenschaft.

7.3.4 Satz: Die Potenzregel (auswendig)

Sei $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, dann gilt:

$$\int_0^x t^n\ dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Der Beweis folgt analog zur Linearität aus dem Hauptsatz.



Cartoon 37

7.3.5 Satz: Der Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $\int_a^b f(x)\ dx = f(\xi)(b - a)$. Der Beweis folgt aus dem Hauptsatz (Abs. 7.3) und dem Mittelwertsatz der Differenzialrechnung (Abs. 14.14.3).

7.3.6 Satz: Monotonie des Integrals

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, und $f(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$, dann gilt: $\int_a^b f(x)\ dx > 0$. Der Beweis folgt direkt aus dem Mittelwertsatz. Mit oben und der Linearität des Integrals (Abschnitt 7.3.3)

folgt $$f > g \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\ dx > \int_a^b g(x)\ dx$$ wenn f, g stetig auf $[a, b]$ sind.

7.4 Die Produktintegration (BA 1_{11})

7.4.1 Satz: Die Produktregel (auswendig)

Seien $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann gilt: $\int u' \cdot v \cdot dx = u \cdot v - \int u \cdot v' \cdot dx.$

Mit der Produktregel der Differenziation $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ folgt diese Regel aus dem Hauptsatz. Diese Regel wird auch partielle Integration genannt.

Beispiel: Eine Produktintegration: Wir wollen $\int x \cdot e^x \cdot dx$ berechnen. Dazu müssen wir die Rollen von u und v verteilen. Wir wählen $u' = e^x$ und $v = x$, dann gilt

$$\begin{array}{ccccccccccc} \int & x & \cdot & e^x \cdot dx & = & x & \cdot & e^x & - & \int & 1 & \cdot & e^x \cdot dx = x \cdot e^x - e^x \\ \int & v & \cdot & u' \cdot dx & = & v & \cdot & u & - & \int & v' & \cdot & u \cdot dx \end{array}.$$

Wir versuchen die Wahl umgedreht:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \int & x & \cdot & e^x \cdot dx & = & \frac{x^2}{2} & \cdot & e^x & - & \int & \frac{x^2}{2} & \cdot & e^x \cdot dx \\ \int & u' & \cdot & v \cdot dx & = & u & \cdot & v & - & \int & u & \cdot & v \cdot dx \end{array} .$$

damit ist die Aufgabe eher schwieriger geworden.

Die Rollenverteilung ist also wichtig. Allgemein gilt bei

$$\int \text{Polynom} \cdot \begin{cases} \sin x \\ \cos x \\ e^x \end{cases} \cdot dx \quad : \text{Das Polynom} = v \;\text{ und }\; \sin x,\ \cos x,\ e^x = u' .$$

7.4.2 Beispiel einer mehrfach angewendeten Produktintegation

Wir wollen $\int x^2 \cdot e^x \cdot dx$ berechnen. Wir wählen wie oben beschrieben $u' = e^x$ und $v = x^2$. Dann gilt

$$\begin{array}{ccccccccccccl} \int & x^2 & \cdot & e^x \cdot dx & = & x^2 & \cdot & e^x & - & \int & 2x & \cdot & e^x \cdot dx = x^2 \cdot e^x - 2(x-1) \cdot e^x = (x^2 - 2x - 2) \cdot e^x \\ \int & v & \cdot & u' \cdot dx & = & v & \cdot & u & - & \int & v' & \cdot & u \cdot dx \end{array}$$

7.4.3 Beispiel: Produktintegrationen analog zum Summenwertetrick

Wir wollen $\int \sin^2 x \cdot dx$ berechnen.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \int & \sin x & \cdot & \sin x \cdot dx & = & -\cos x & \cdot & \sin x & - & \int & -\cos x & \cdot & \cos x \cdot dx \\ \int & u' & \cdot & v \cdot dx & = & u & \cdot & v & - & \int & u & \cdot & v' \cdot dx \end{array} .$$

Dies ist aber nur scheinbar 'im Kreis' gerechnet:

$$\begin{array}{rcll} \int \sin^2 x \cdot dx & = & -\cos x \cdot \sin x + \int \cos^2 x \cdot dx & \text{siehe oben} \\ & = & -\cos x \cdot \sin x + \int (1 - \sin^2 x) \cdot dx & \text{mit Formel 5.10.1} \\ & = & -\cos x \cdot \sin x + x - \int \sin^2 x \cdot dx & \text{Linearität des Integrals} \end{array}$$

Addition von $\int \sin^2 x \cdot dx$ ergibt: $2 \cdot \int \sin^2 x = x - \cos x \cdot \sin x \quad \Rightarrow \quad \int \sin^2 x dx = \frac{x - \cos x \cdot \sin x}{2}$.

Auf ähnliche Weise berechnen wir $\int \sin(x) \cdot e^x dx$:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \int \sin(x) & \cdot & e^x & dx & = & \sin(x) & \cdot & e^x & - \int & \cos(x) & \cdot & e^x & dx \\ \int u(x) & \cdot & v'(x) & dx & = & u(x) & \cdot & v(x) & - \int + & u'(x) & \cdot & v(x) & dx \end{array}$$

Jetzt benötigen wir noch das (scheinbar äquivalente) $\int \cos(x) \cdot e^x dx$. Bei der zweiten Produktintegration muss die Rollenverteilung aber gleich bleiben.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \int \cos(x) & \cdot & e^x & dx & = & \cos(x) & \cdot & e^x & - \int & -\sin(x) & \cdot & e^x & dx \\ \int u(x) & \cdot & v'(x) & dx & = & u(x) & \cdot & v(x) & - \int & u'(x) & \cdot & v(x) & dx \end{array}$$

Es gilt also $\int \sin(x) \cdot e^x dx = \sin(x) \cdot e^x - \cos(x) \cdot e^x$ - $\int \sin(x) \cdot e^x dx$ und damit

$$\int \sin(x) \cdot e^x dx = \frac{\sin(x) \cdot e^x - \cos(x) \cdot e^x}{2} \quad (+c).$$

Probe: $0.5 \cdot (\sin(x) \cdot e^x - \cos(x) \cdot e^x)' = 0.5 \cdot (\sin(x) \cdot e^x + \cos(x) \cdot e^x - \cos(x) \cdot e^x + \sin(x) \cdot e^x) \ \surd$.

HA 19 Berechnen Sie analog $\int \cos^2 x\, dx$ und $\int \cos(x) \cdot e^x dx$ $[= 0.5(\sin(x) + \cos(x)) \cdot e^x]$.

7.4.4 Beispiel: Integral des Logarithmus

$$\begin{array}{cccccccccccccl} \int \ln x\, dx = & \int & 1 & \cdot & \ln x\, dx & = & x & \cdot & \ln x & - & \int & x & \cdot & \frac{1}{x}\, dx = x \ln x - \int 1\, dx = x \ln x - x \\ & \int & u' & \cdot & v\, dx & = & u & \cdot & v & - & \int & u & \cdot & v'\, dx \end{array}$$

7.5 Die Substitutionsregel der Integration (BA 1_{12})

7.5.1 Satz: Die Substitutionsregel

Sei $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f : [g(a), g(b)] \to \mathbb{R}$ stetig, dann gilt:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) \;\; dx \overset{\longleftarrow}{\underset{\longrightarrow}{=\!=}} \int_{g(a)}^{g(b)} f(g) \;\; dg$$

$\longrightarrow$: äußere Substitution - Normalfall $\longleftarrow$: innere Substitution - Sonderfall.

Beweisskizze: Sei $\int f(g)\; dg =: F(g)$, dann gilt mit der Kettenregel (Substitutionsregel der Ableitung):

$$F(g(x))'^x = F'^g \cdot g'^x(x) = f(g) \cdot g'^x(x).$$

Integriert man beide Seiten der Gleichung dx (und vertauscht diese), so ergibt sich mit dem Hauptsatz:

$$\int f(g(x)) \cdot g'^x(x) \;\; dx = \int F(g(x))'^x \;\; dx = F(g) = \int f(g) \; dg.$$

7.5.2 Beispiel: Die lineare Substitution (äußere Substitution)

$$\begin{array}{rcll}
\int e^{m\cdot x} \cdot m \;\; dx & = & \int e^{g(x)} \cdot g'^x \;\; dx & g(x) = m \cdot x \\
& = & \int e^g \; dg & \text{äußere Substitution} \\
& = & e^g & \text{Integration} \\
& = & e^{m\cdot x} & \text{Rücksubstitution}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
\int \sin(m\cdot x) \;\; dx & = & \frac{1}{m} \int \sin(m\cdot x)\cdot m \;\; dx & \text{'Erschaffen' einer inneren Ableitung} \\
& = & \frac{1}{m} \int \sin(g(x)) \cdot g'^x \;\; dx & g(x) = m \cdot x \\
& = & \frac{1}{m} \int \sin g \; dg & \text{äußere Substitution} \\
& = & \frac{1}{m}(-\cos g) & \text{Integration} \\
& = & -\frac{1}{m}\cos(m\cdot x) & \text{Rücksubstitution}
\end{array}$$

Allgemein gilt: Sei $\int f(x) = F(x)$, dann ist $\displaystyle\int f(a\cdot x + b) \;\; dx = \frac{1}{a} \cdot F(a\cdot x + b)$.

7.5.3 Beispiel: Komplexere äußere Substitution

$$\begin{array}{rcll}
\int (x-3)\cdot e^{x^2-6x+7} \;\; dx & = & \frac{1}{2}\int (2x-6)\cdot e^{x^2-6x+7} \;\; dx & \\
& = & \frac{1}{2}\int g'(x) \cdot e^{g(x)} \;\; dx & g(x) := x^2 - 6x + 7 \\
& = & \frac{1}{2}\int e^g \; dg & \text{äußere Substitution} \\
& = & \frac{1}{2} e^g & \text{Integration} \\
& = & \frac{1}{2} e^{x^2-6x+7} & \text{Rücksubstitution}
\end{array}$$

7.5.4 Beispiel: Eine äußere Substitution ohne erkennbare innere Ableitung

Wir wollen $\int e^{\sqrt{x}}$ berechnen. dabei wählen wir $g(x) := \sqrt{x}$ und damit $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2g}$.

$$\begin{array}{rcll}
\int e^{\sqrt{x}} \;\; dx & = & \int e^g \frac{dg}{g'} & \text{Substitution} \\
& = & \int 2g \cdot e^g \; dg & g' \text{ eingesetzt (Doppelbruch)} \\
& = & 2(g-1)e^g & \text{siehe Beispiel 7.4.1} \\
& = & 2(\sqrt{x}-1)\cdot e^{\sqrt{x}} & \text{Rücksubstitution}
\end{array}$$

7.5.5 Beispiel: äußere Substitution bei trigonometrischen Funktionen

$$\begin{array}{rcll}
\text{Wir berechnen} \quad \int \sin^3 x \;\; dx & = & \int \sin x \cdot (1-\cos^2 x) \;\; dx & \text{nach Satz 5.10.1} \\
& = & \int -g'(x)\cdot(1-g^2(x)) \;\; dx & g(x) := \cos x \\
& = & -\int 1 - g^2 \; dg & \text{äußere Substitution} \\
& = & -g + \frac{g^3}{3} & \text{Integration} \\
& = & -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} & \text{Rücksubstitution}
\end{array}$$

7.5.6 Beispiel: Stammfunktion von tan x

Wir berechnen
$$\begin{aligned}
\int \tan x \ dx &= \int \tfrac{\sin x}{\cos x} \ dx && \text{nach Definition von } \tan x \\
&= \int \tfrac{-g'(x)}{g(x)} \ dx && g(x) := \cos x \\
&= -\int \tfrac{1}{g} \, dg && \text{äußere Substitution} \\
&= -\ln|g| && \text{Integration} \\
&= -\ln|\cos x| && \text{Rücksubstitution}
\end{aligned}$$

7.5.7 Eine Arkustangenssubstitution

$$\begin{aligned}
\int \tfrac{12}{(x+1)^2+9} \ dx &= \int \tfrac{12}{9\cdot(\frac{(x+1)^2}{9}+1)} \ dx \\
&= \tfrac{12}{9} \int \tfrac{1}{(\frac{x+1}{3})^2+1} \ dx \\
&= \tfrac{4}{3} \int \tfrac{1}{g^2+1} \ dx && g(x) := \tfrac{x+1}{3} \\
&= \tfrac{4}{3} \int \tfrac{1}{g^2+1} \tfrac{dg}{g'} && \text{äußere Subst.} \\
&= 4 \arctan g && \text{Integration} \\
&= 4 \arctan \tfrac{x+1}{3} && \text{Rücksubst.}
\end{aligned}$$

Cartoon 38

7.5.8 Beispiel: Stammfunktion von 1/x

Nach dem Hauptsatz 7.3 gilt $\int \frac{1}{x} = \ln x$ $(x > 0)$. Was gilt aber für $x < 0$? $\int \frac{1}{x} = -\int \frac{1}{(-x)} = \ln x$.

allgemeiner gilt: $\int \frac{1}{x+a} = \ln|x+a|$ mit Substitution $(g(x) = x + a)$

Bemerkung: 'Integration ist eine Kunst' (Pelster). Viele Funktionen sind nicht geschlossen integrierbar - man hat also keine Darstellung der Stammfunktionen mittels der elementaren Funktionen gefunden. Als Beispiele seien hier e^{x^2} und $\sin(x^2)$ erwähnt. In Beispiel 8.4.4 wird ein Verfahren angegeben die Stammfunktionen punktweise zu berechnen.

7.5.9 Beispiel: innere Substitution mit sin x (Höhepunkt der Integralrechnung)

Wir berechnen $\int \sqrt{1-x^2} \ dx$ für $x > 0$ (Viertelkreis mit Radius 1 um 0/0). Hier wird x als Funktion von u aufgefasst: $x := x(u) = \sin u$. $dx = du \cdot x'$ also $dx = du \cdot (\sin u)'^{u} = du \cdot \cos u$

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2} \ dx &= \int \sqrt{1-(\sin u)^2} \cdot \cos u \ du && \text{innere Substitution (s.o.)} \\
&= \int \sqrt{(\cos u)^2} \cdot \cos u \ du && \text{nach Formel 5.10.1} \\
&= \int \cos^2 u \ du && \text{zusammengefasst} \\
&= \int (1-\sin^2 u) \ du && \text{nach Formel 5.10.1} \\
&= u - \tfrac{u - \sin u \cos u}{2} && \text{nach Formel 7.4.3} \\
&= \tfrac{\arcsin(x) \ + \ x\cos(\arcsin x)}{2} && \text{Rücksubstitution} \\
&= \tfrac{\arcsin(x) \ + \ x\sqrt{1-x^2}}{2} && \text{nach Formel 14.10.3}
\end{aligned}$$

7.5.10 Beispiel: innere Substitution mit sinh x

Wir berechnen $\int \sqrt{1+x^2} \ dx$. Hier wird wieder x als Funktion von u aufgefasst:
$x := x(u) = \sinh u$. $dx = du \cdot (\sinh u)'^{u} = du \cdot \cosh u$.

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+x^2} \ dx &= \int \sqrt{1+(\sinh u)^2} \cdot \cosh u \ du && \text{innere Substitution (s.o.)} \\
&= \int \sqrt{(\cosh u)^2} \cdot \cosh u \ du = \int \cosh^2 u \ du && \text{nach Hausaufgabe 13} \\
&= \tfrac{1}{4} \int (e^{2u} + 2 + e^{-2u}) \ du && \text{nach Definition 5.10.4} \\
&= \tfrac{1}{4} (\tfrac{e^{2u}}{2} + 2u + \tfrac{e^{-2u}}{-2}) && \text{integriert mit äußerer Substitution} \\
&= \tfrac{1}{8} (e^{2 \operatorname{area sinh} x} + 4 \operatorname{area sinh} x - e^{-2 \operatorname{area sinh} x}) && \text{Rücksubstitution} \\
&= \tfrac{1}{8} ((x+\sqrt{x^2+1})^2 + 4 \operatorname{area sinh} x - \tfrac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})^2}) && \text{nach Definition 5.10.4}
\end{aligned}$$

7.6 Integration durch Partialbruchzerlegung (MV)

Bisher ist keine effektive Quotientenregel der Integralrechnung bekannt. Um trotzdem Quotienten (von Polynomen) integrieren zu können, bedienen wir uns der Partialbruchzerlegung (siehe Kapitel 5.8) und der Stammfunktionen aus 7.5.8 (Stammfunktion von $\frac{1}{x}$), 7.3.2, 7.5.7 (Stammfunktion von $\frac{1}{1+x^2}$) und 7.3.4 (Potenzregel).

7.6.1 Beispiel für eine Integration

Wir wollen eine Stammfunktion der Funktion $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-3)}$ finden. Wir zerlegen zunächst

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3}$$

und finden mittels der Grenzwertmethode (5.8.3) die Koeffizienten A und B:

$$1 = A \cdot (x-3) + B \cdot (x-1) \quad \text{mit } x = 3 \Rightarrow B = \frac{1}{2} \quad \text{mit } x = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

Mit dieser Zerlegung kann $f(x)$ jetzt integriert werden:

$$\int f(x)dx = \int \left(\frac{-0.5}{x-1} + \frac{0.5}{x-3} \right) dx = \frac{1}{2} \cdot \left(\int \frac{1}{x-3}dx - \int \frac{1}{x-1}dx \right) \text{ und mit 7.5.8}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\ln|x-3| - \ln|x-1|) = \ln \sqrt{\left| \frac{x-3}{x-1} \right|}(+c). \quad \text{Durch die letzte}$$

Umformung sehen wir, dass die Stammfunktion ebenfalls eine 'Bruchstruktur' haben kann.

7.6.2 Integration gebrochenrat. Fktn mit paarweise verschiedenen Nennernst

Sei $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ eine gebrochenrationale voll gekürzte Funktion und Grad$(p) <$ Grad$(q) = n$ und $q(x)$ hat nur verschiedene (Vielfachheit 1), reelle Nullstellen $\{x_1, ...x_n\}$ (vgl 5.8.1), dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int \frac{p(x)}{q(x)}dx &= \int \left(\frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + .. + \frac{A_n}{x-x_n}\right)dx && \text{nach 5.8.1} \\
&= \int \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{x-x_i}\right)dx && \text{Def. des Summenzeichens} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int \frac{A_i}{x-x_i}dx && \text{nach 7.3.3} \\
&= \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \ln|x-x_i|(+c) && \text{nach 7.5.8}
\end{aligned}$$

7.6.3 Beispiel einer Intergration

Sei $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)(x-1)}$. Hier sind die Voraussetzungen vom vorigen Abschnitt nicht erfüllt, es kann aber eine Polynomdivision (mit Rest) angewandt werden (vgl 14.9.6): $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)(x-1)} = x + \frac{x}{(x+1)(x-1)}$. Also gilt

$$\begin{aligned}
\int f(x)dx &= \int \left(x + \frac{x}{(x+1)(x-1)}\right)dx && \text{Def. von } f \text{ + Polynomdivision} \\
&= \int \left(x + \frac{0.5}{x+1} + \frac{0.5}{x-1}\right)dx && \text{partialbruchzerlegt} \\
&= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1|(+c) && \text{nach Satz 7.6.2}
\end{aligned}$$

7.6.4 Satz: Integration gebrochenrat. Fktn mit einer mehrfachen Nennernullstelle

Sei $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ eine gebrochenrationale voll gekürzte Funktion und Grad$(p) <$ Grad(q) und $q(x) = a \cdot (x - x_0)^n$ (vgl 5.8.2), dann gilt:

$$\begin{array}{rcll}
\int \frac{p(x)}{q(x)}dx & = & \int(\frac{A_1}{x-x_0} + \frac{A_2}{(x-x_0)^2} + .. + \frac{A_n}{(x-x_0)^n})dx & \text{nach 5.8.2} \\
& = & \int(\sum_{i=1}^n \frac{A_i}{(x-x_0)^i})dx & \text{Definition des Summenzeichens} \\
& = & \sum_{i=1}^n \int \frac{A_i}{(x-x_0)^i}dx & \text{nach 7.3.3} \\
& = & A_1 \cdot \ln|x-x_0| - \sum_{j=2}^n \frac{A_j}{(1-j)\cdot(x-x_0)^{1-j}}(+c) & \text{nach 7.5.8 und 7.3.4}
\end{array}$$

7.6.5 Integrale gebr.rat. Fktn mit paarweise verschiedenen komplexen Nennernst

Sei $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ eine gebrochenrationale voll gekürzte Funktion und Grad$(p) <$ Grad$(q) = 2 \cdot n$ und $q(x)$ hat nur verschiedene komplexe (nicht reelle) Nullstellen $\{x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2, ...x_n, \bar{x}_n\}$ (vgl 5.8.6). Sei weiter

$$q_i(x) \;:=\; (x - x_i)\cdot(x - \bar{x}_i) \;=\; x^2 - (x_i + \bar{x}_i)x + x_i \cdot \bar{x}_i \;=\; x^2 - 2 \cdot \text{ Realteil } (x_i)\cdot x + |x_i|^2,$$

dann ist q_i ein reelles Polynom und mit 5.8.6 gilt: $\dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{A_1x + B_1}{q_1(x)} + \dfrac{A_2x + B_2}{q_2(x)} + .. + \dfrac{A_nx + B_n}{q_n(x)}$.

Für alle i stellen wir $\frac{A_ix+B_i}{q_i(x)}$ in der Form $\frac{C_i \cdot q_i' + D_i}{q(x)}$ dar. Die weitere allgemeine Ausführung der Integration ist Hausaufgabe. Hier noch ein Beispiel: Sei $f(x) := \frac{4x+16}{x^2+4x+8}$, dann gilt:

$$x^2 + 4x + 8 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x_{1,2} \;=\; \frac{-4 \pm \sqrt{16-32}}{2} \;=\; -2 \pm 2i$$

also definieren wir $n = 1$, $x_1 = -2 + 2i$, $\bar{x}_1 = -2 - 2i$ und $q_1(x) = x^2 + 4x + 8$. $q_1'(x) = 2x + 4$. Wir stellen $\frac{4x+16}{x^2+4x+8} = \frac{A_1x+B_1}{q_1(x)}$ in der Form $\frac{C_i \cdot q_i' + D_i}{q(x)}$ dar:

$$\frac{4x+16}{x^2+4x+8} \;=\; \frac{2\cdot(2x+4)+8}{x^2+4x+8} \;=\; \frac{2\cdot q_1'(x)+8}{x^2+4x+8} \;=\; \frac{2\cdot q_1'(x)}{q_1(x)} + \frac{8}{x^2+4x+8}$$

Integrieren wir zuerst den Bruch $\frac{8}{x^2+4x+8}$ (siehe hierzu auch 7.5.7). Durch quadratische Ergänzung erhalten wir $x^2 + 4x + 8 = x^2 + 4x + 4 + 4 = (x+2)^2 + 4$. Damit gilt:

$$\begin{array}{rcll}
\int \frac{8}{x^2+4x+8}dx & = & \int \frac{8}{(x-2)^2+4}dx & \text{Nenner quadratisch ergänzt} \\
& = & \int \frac{1}{4}\frac{8}{\frac{1}{4}\cdot(x-2)^2+1}dx & \text{Im Nenner 4 ausgeklammert} \\
& = & \int \frac{2}{(\frac{x-2}{2})^2+1}dx & \sqrt{1/4} \text{ in das Quadrat multipliziert} \\
& = & \arctan(\frac{x-2}{2})(+c) & \text{vergleiche 7.5.7 und 7.3.2}
\end{array}$$

damit ist: $\displaystyle\int \frac{4x+16}{x^2+4x+8}dx \;=\; \int(\frac{2\cdot q_1'}{q_1} + \frac{8}{x^2+4x+8})dx \;=\; 2\cdot\ln|x^2+4x+8| + \arctan(\frac{x-2}{2})(+c).$

7.6.6 Sind mit diesen Ideen wirklich alle gebrochenrationalen Fktn integrierbar?

Nein, sonst wäre die Wahl der Überschrift anders ausgefallen. Funktionen der Form $f_n(x) = \frac{1}{(x^2+1)^n}$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$, bzw. Funktionen mit mehrfachen komplexen Nullstellen können so nicht reell integriert werden. Mit freundlicher Unterstützung habe ich folgendes herausgefunden (Beweis durch ableiten):

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx \;=\; \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{x^2+1} + \arctan(x)\right)(+c).$$

Dieser Ansatz kann verallgemeinert werden durch die Ableitung der Funktion $g(x) = \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}}$:

$$g'(x) = \left(\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}}\right)' = \frac{1-(2n-3)x^2}{(x^2+1)^n}.$$

Ferner gilt:

$$\begin{aligned} g'(x) + \tfrac{2n-3}{(x^2+1)^{n-1}} &= \tfrac{1-(2n-3)x^2}{(x^2+1)^n} + \tfrac{(2n-3)\cdot(1+x^2)}{(x^2+1)^n} && \text{Def. von } g' \text{ und erweitert} \\ &= \tfrac{2n-2}{(x^2+1)^n} && \text{zusammengefasst} \\ &= (2n-2)\cdot f_n(x) && \text{Def. von } f \end{aligned}$$

also gilt für das $\int f_n(x)dx$:

$$\begin{aligned} \int f_n(x)dx &= \int \tfrac{1}{2n-2}\left(g'(x) + \tfrac{2n-3}{(x^2+1)^{n-1}}\right)dx && \text{mit obiger Erkenntnis} \\ &= \tfrac{1}{2n-2}\left(\int g'(x) + \int \tfrac{2n-3}{(x^2+1)^{n-1}}dx\right) && \text{Anwendung einiger Integrationsregeln} \\ &= \tfrac{1}{2n-2}\left(g(x) + (2n-3)\cdot\int \tfrac{1}{(x^2+1)^{n-1}}dx\right) && \text{Hauptsatz (7.3) u.ä.} \\ &= \tfrac{1}{2n-2}\left(\tfrac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + (2n-3)\cdot\int f_{n-1}(x)dx\right) && \text{Definition von } g \end{aligned}$$

Damit ist eine Rekursionsformel für $\int f_n(x)$ gefunden. Vermutlich werden Sie diese aber am Anfang Ihres Studiums noch nicht brauchen.

7.6.7 Beispiel: Integration von Wurzeln

Sei $f(x) = \frac{p}{q}$ gebrochenrational und $ad \neq bc$. Gesucht ist $\displaystyle\int f(x)\cdot\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\ dx$.

Wir substituieren die komplette Wurzel: $\displaystyle\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}} := t \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{dt^2-b}{a-ct^2}$.

Damit kann innen substituiert werden:

$$\int f(x)\cdot\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\ dx = \int f\left(\frac{dt^2-b}{a-ct^2}\right)\cdot t\cdot\left(\frac{dt^2-b}{a-ct^2}\right)'\ dt\ .$$

Die zu integrierende Funktion ist gebrochenrat. und kann mit den vorigen Abs. integriert werden.

7.6.8 Beispiel: Integration von $P(x)\cdot f(x)$

Diesen Abschnitt hat Lukas Bonfert entwickelt. Sei $P(x)$ ein Polynom vom Grad n, $f_0(x)$ (stetig) $f_k(x)$ ist rekursiv definiert durch $f_{k+1}(x) = \int_a^x f_k(t)dt$ (a beliebig in $\mathbb{R}$), dann ist

$$\int P(x)f(x)dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k P^{(k)}(x) f_{k+1}(x)dx.$$

7.6.9 Beispiel: Die Generalsubstitution

Sei $f(x)$ gebrochenrational mit den Argumenten $\sin x$ und $\cos x$, z. B. $f(x) = \frac{\sin^3 x\cos x - 2\sin x + 6}{\cos^2 x \sin^3 x + 7}$. Gesucht ist eine Stammfunktion von f. Wir streben eine innere Substitution mit $x = 2\arctan t$ oder $t = \tan\frac{x}{2}$ an. $\sin x, \cos x$ und dx müssen in gebrochenrationale Funktionen umgewandelt werden. Dazu betrachten wir $\sin 2y$ und $\cos 2y$ mit Abschnitt 5.10.1:

$$\begin{aligned} \sin 2y = 2\sin y\cos y &= \tfrac{2\sin y\cos y}{\sin^2 y + \cos^2 y} && \text{mit 5.10.1} \\ &= \tfrac{2\frac{\sin y}{\cos y}}{\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y}+1} && \text{mit } \tfrac{1}{\cos^2 y} \text{ erweitert} \\ &= \tfrac{2\tan y}{\tan^2 y + 1} && \tan y = \tfrac{\sin y}{\cos y}. \end{aligned}$$

Mit $x = 2y$ ist $\quad \sin x \;=\; \dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+1} \;=\; \dfrac{2t}{t^2+1}.$

$$\begin{aligned}\cos 2y &= \cos^2 y - \sin^2 y = \tfrac{\cos^2 y - \sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} && \text{mit 5.10.1}\\ &= \tfrac{1-\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y}}{\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y}+1} && \text{mit } \tfrac{1}{\cos^2 y} \text{ erweitert}\\ &= \tfrac{1-\tan^2 y}{\tan^2 y+1} && \tan y = \tfrac{\sin y}{\cos y}.\end{aligned}$$

Mit $x = 2y$ ist $\quad \cos x \;=\; \dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+1} \;=\; \dfrac{1-t^2}{t^2+1}.$

Weil $x = 2\arctan t$ ist, gilt $x'(t) \;=\; \dfrac{2}{t^2+1}$, also $dx \;=\; x' \cdot dt \;=\; \dfrac{2}{t^2+1}\,dt.$

Mit diesen drei Formeln ist jede gebrochenrationale Funktion mit den Argumenten $\sin x$ und $\cos x$ integrierbar.

7.6.10 Beispiel: e Funktionen

Sei $f(x)$ gebrochenrational mit den Argumenten e^x und e^{-x} (z. B. $\frac{e^{3x}-3+7e^{-5x}}{e^2e^x-7+e^{-4x+2}}$). Gesucht ist eine Stammfunktion von f. Erweitere $f(x)$ so, dass alle negativen Exponenten verschwunden sind. Substituiere $g = e^x$, dann ist $e^x = g' = \frac{dg}{dx}$, also $dx = \frac{dg}{g}$. Die entstehende Funktion ist gebrochenrational und kann mit den Abschnitten 7.6.2 - 7.6.6 integriert werden.

7.7 Uneigentliche Integration

7.7.1 Definition + Beispiel: Uneigentliches Integral erster Art

Sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig, dann definieren wir $\int_a^\infty f(x)\,dx \;=\; \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$.
Sei $f : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$ stetig, dann definieren wir $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx \;=\; \lim_{b\to-\infty} \int_b^a f(x)\,dx$, wenn die Limites existieren. Integrale dieser Art heißen **uneigentliche** Integrale erster Art. Im Falle der Existenz des Limes sagen wir auch: Das uneigentliche Integral existiert. Bitte beachten Sie, dass f auf $[a, \infty)$ definiert ist, also keine Definitionslücken haben darf.

Beispiel: Sei $f_1 : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_1(x) = \frac{1}{x}$, dann gilt

$$\int_1^b f_1(x)\,dx \;=\; [\,\ln|x|\,]_{x=1}^{x=b} \;=\; \ln|b| - \ln|1| \;=\; \ln|b| \quad \text{und} \quad \ln|b| \to \infty \;\text{ für }\; b\to\infty$$

$\Rightarrow \quad \int_1^\infty f_1(x)\,dx \quad$ existiert nicht.

Sei $f_2 : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_2(x) = \frac{1}{x^2}$, dann gilt

$$\int_1^b f_2(x)\,dx \;=\; \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx \;=\; \left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_{x=1}^{x=b} \;=\; -\frac{1}{b} - (-\frac{1}{1}) \;=\; 1 - \frac{1}{b} \;\to 1 \;\text{ für }\; b\to\infty$$

$\Rightarrow \quad \int_1^\infty f_2(x)\,dx \quad$ existiert und $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \;=\; 1.$

Sei $n > 1$ und $f_n : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) = \frac{1}{x^n}$, dann gilt

$$\int_1^b f_n(x)\,dx \;=\; \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right]_{x=1}^{x=b} \;=\; \frac{b^{-n+1}}{-n+1} - (\frac{1}{-n+1}) \;=\; \frac{1}{n-1} - \frac{b^{-n+1}}{n-1} \;\to \frac{1}{n-1} \;\text{ für }\; b\to\infty$$

$\Rightarrow \quad \int_1^\infty f_n(x)\,dx \quad$ existiert und $\int_1^\infty \frac{1}{x^n}\,dx \;=\; \frac{1}{n-1}$. Insbesondere gilt nach der Monotonie des Integrals (Abschnitt 7.3.6), dass das $\int_1^\infty \frac{1}{x^n}\,dx$ genau für $n > 1$ existiert.

7.7.2 Satz + Beispiel: Das Vergleichskriterium

Seien $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig und $g \geq f \geq 0$ und $\int_a^\infty g(x)\, dx$ existiert, dann gilt $\int_a^\infty f(x)\, dx$ existiert und $\int_a^\infty f(x)\, dx \leq \int_a^\infty g(x)\, dx$. g heißt **Majorante** von f.

Gilt umgekehrt, dass $\int_a^\infty f(x)\, dx$ nicht existiert, dann existiert auch $\int_a^\infty g(x)\, dx$ nicht. f heißt **Minorante** von g. Der Beweis folgt aus den Abschnitten 4.8.9 und 7.3.6.

Bsp: $$\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^2}\, dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx = \left[\frac{-1}{x} \right]_{x=1}^{x=\infty} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^2}\, dx \quad \text{existiert und } 0 \;\leq\; \int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^2}\, dx \;\leq\; 1.$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{\ln x}\, dx \;\geq\; \int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx \;=\; [\, \ln|x|\,]_{x=1}^{x=\infty} \;=\; \infty \quad\Rightarrow\quad \int_1^\infty \frac{1}{\ln x}\, dx \quad \text{existiert nicht.}$$

7.7.3 Def + Bsp. : In beide Richtungen unbegrenzte uneigentliche Integrale

Sei $f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig, dann definieren wir

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx \quad \text{existiert} \quad :\Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^b f(x)\, dx \text{ existiert und } \int_b^\infty f(x)\, dx \text{ existiert} \quad \text{für alle } b \in \mathbb{R}.$$

Weil f keine Definitionslücken hat, genügt es hier die Existenz für ein b zu zeigen.

Beispiel: Wir berechnen $\int_{-\infty}^\infty x e^{-x^2}\, dx$. Mit $g = -x^2$ gilt:

$$\int x e^{-x^2}\, dx \;=\; \frac{-1}{2} \int -2x e^g\, dx \;=\; -\frac{1}{2} \int g' e^g\, dx \;=\; -\frac{1}{2} \int e^g\, dg \;=\; -\frac{1}{2}\, e^g \;=\; -\frac{1}{2}\, e^{-x^2}.$$

$$\text{Damit gilt} \quad \begin{array}{lclcll} \int_a^b x e^{-x^2}\, dx & = & -\frac{1}{2}\, e^{-b^2} + \frac{1}{2}\, e^{-a^2} & \to & -\frac{1}{2}\, e^{-b^2} & \text{für } a \to -\infty \\ \int_b^a x e^{-x^2}\, dx & = & -\frac{1}{2}\, e^{-a^2} + \frac{1}{2}\, e^{-b^2} & \to & \frac{1}{2}\, e^{-b^2} & \text{für } a \to \infty \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^\infty x e^{-x^2}\, dx \;=\; \int_{-\infty}^b x e^{-x^2}\, dx + \int_b^\infty x e^{-x^2}\, dx \;=\; -\frac{1}{2}\, e^{-b^2} + \frac{1}{2}\, e^{-b^2} \;=\; 0\,.$$

Dieses Ergebnis konnte erwartet werden, weil die Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

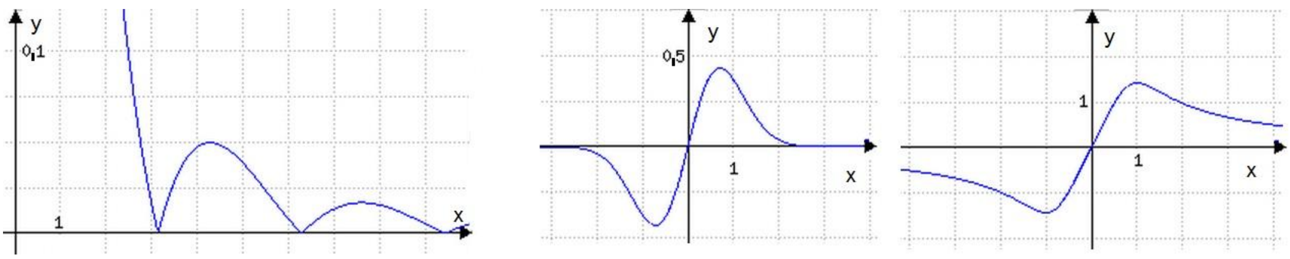


Abb. 117 $y = \frac{|\sin x|}{x^2}$, $\quad f(x) = x \cdot e^{-x^2}$, $\quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}$

Als weiteres Beispiel betrachten wir $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}\, dx$. Mit dem Vergleichskriterium gilt für $1 < b$:

$$\int_1^b \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} dx \;\geq\; \int_1^b \frac{x}{\sqrt{(2x)^4}} dx \;=\; \frac{1}{4} \int_1^b \frac{1}{x} dx \;\to\; \infty \quad \text{für } b \to \infty\,.$$

Also existiert das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}\, dx$ nicht, obwohl wir bei einer punktsymmetrischen Funktion das Ergebnis 0 erwartet hätten.

7.7.4 Definition + Beispiel: Uneigentliche Integrale zweiter Art

Sei $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und $f(x)\to\infty$ für $x\to a$, dann definieren wir

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \lim_{c\to a}\int_c^b f(x)\,dx,\quad \text{wenn der Limes existiert.}$$

Analoges definieren wir für $f:[b,a)\to\mathbb{R}$.
Integrale dieser Art heißen **uneigentliche** Integrale zweiter Art.

Beispiele: $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx = \lim_{c\to 0}\int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{c\to 0}\left[\,2\sqrt{x}\,\right]_{x=c}^{x=1} = \lim_{c\to 0} 2-2\sqrt{c} = 2$$

$$\int_c^1 \frac{1}{x}dx = \left[\,\ln|x|\,\right]_{x=c}^{x=1} = \ln 1-\ln c \;\to\infty \quad \text{für } c\to 0.$$

Sei $r\in\mathbb{R}$, dann gilt $\int_0^1 \frac{1}{x^r}dx$ existiert genau für $r<1$. Vergleichen Sie hierzu Abschnitt 7.7.1 - die hier betrachteten Flächen gehen durch eine Spiegelung an der Geraden $y=x$ aus den dort betrachteten Flächen hervor. Dies entspricht dem Bilden der Umkehrfunktion. Beachten Sie dabei, dass $\frac{1}{x^{\frac{1}{r}}}$ die Umkehrfunktion von $\frac{1}{x^r}$ ist.

7.7.5 Beispiel: Zweiseitige uneigentliche Integrale zweiter Art

Sei $f:(a,b)\cup(b,c)\to\mathbb{R}$ stetig und $f(x)\to\infty$ für $x\to b$, dann definieren wir

$$\int_a^c f(x)\,dx \;:=\; \int_a^b f(x) \;+\int_b^c f(x)\,dx,\quad \text{wenn die uneigentlichen Integrale existieren.}$$

Zuerst betrachten wir $$f(x):=\frac{1}{\sqrt{|x|}} = \begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x}} & \text{falls } x>0\\ \frac{1}{\sqrt{-x}} & \text{falls } x<0\end{cases}:$$

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{-x}}dx+\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \left[\,-2\sqrt{-x}\,\right]_{x=-1}^{x=0} + \left[\,2\sqrt{x}\,\right]_{x=0}^{x=2} = 2\sqrt{2}+2$$

Jetzt betrachten wir $f(x)=\frac{1}{x^2}$ für $x\neq 0$.

Folgende Rechnung ist falsch:

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=-1}^{x=2} = \frac{-1}{2}+1 = \frac{1}{2},$$

denn weder $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}dx$ noch $\int_0^2 \frac{1}{x^2}dx$ existieren. Sogar die orientierte Fläche wäre unendlich, obwohl das Integral eine endliche Fläche diagnostiziert. Sie müssen also die Integrale einzeln auswerten und dürfen nicht über einen Pol (=senkrechte Asymptote) 'hinwegintegrieren'.

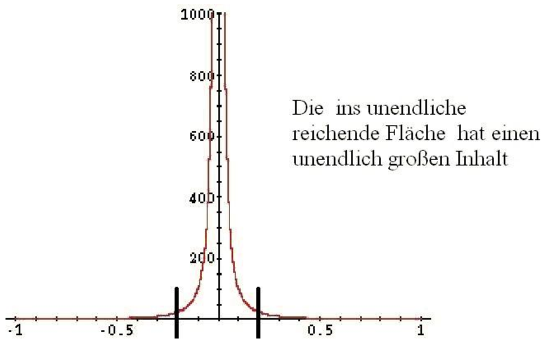


Abb. 118 $f(x)=\frac{1}{x^2}$

7.8 Rotationskörper

7.8.1 Satz: Volumen von Rotationskörpern um die x-Achse

Seien $a<b\in\mathbb{R}$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig mit $f(x)\geq 0\;\;\forall x\in[a,b]$. Wie groß ist das Volumen des Körpers K, der entsteht, wenn $f(x)$ um die x-Achse rotiert? Zuerst zerlegen wir $[a,b]$ in n

äquidistante (gleichbreite) Intervalle der Breite $h := \frac{b-a}{n}$ mit den Intervallgrenzen $x_i = a+i\cdot\frac{b-a}{n}$, $i = 0..n$. Wir approximieren K durch Zylinder mit der Höhe $= h$ und Grundkreisradius $f(x_i)$. Das Volumen eines Zylinders ist: $V = \pi r^2 \cdot h = \pi f^2(x_i)\cdot h$.
Sei $V_a^n(x)$ das Volumen des Rotationskörpers von a bis x bei der Zerlegungsfeinheit n. Mit dieser Definition ist:

$$\begin{array}{rcl} V_a^n(x+h) - V_a^n(x) & = & \text{Volumen des Zylinders mit } r = f(x) \quad = \quad \pi f^2(x)\cdot h \\ \Rightarrow \ \pi f^2(x) & = & \frac{V_a^n(x+h)-V_a^n(x)}{h} \quad \rightarrow \quad V_a'(x) \\ \Rightarrow \ V_a(x) & = & \int_a^x \pi f^2(t)\, dt \ . \end{array}$$

Eine Fläche $= \int f(x)dx$ summiert quasi Strecken, ein Rotationskörper $= \pi\int f^2(x)dx$ summiert Kreise. Sei $c > 0, f : [0, c] \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$. $f(x)$ rotiere im Definitionsbereich um die $x-$Achse,

dann gilt: $$V(c) = \int_0^c \pi\, f^2(x)\, dx = \int_0^c \pi\,(\sqrt{x})^2\, dx = \int_0^c \pi\, x\, dx = \left[\pi\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=c} = \pi\frac{c^2}{2}$$

7.8.2 Satz: Volumen von Rotationskörpern um die y-Achse

Sei $a < b \in \mathbb{R}$ $f : [a, b] \to [c, d]$ (surjektiv) stetig und streng monoton wachsend (damit ist $f(x)$ insbesondere invertierbar, das heißt, die Umkehrfunktion $f^{-1}(y)$ existiert), dann gilt

$$V_a(y) = \pi\int_a^y (f^{-1})^2(\eta)\, d\eta \ .$$

Die Rotation um die $y-$Achse wird also als Rotation um die $x-$Achse interpretiert.

Sei $d > 0, f : [0, d] \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$. $f(x)$ rotiere im Definitionsbereich um die $y-$Achse, dann gilt $f^{-1} : [0, d^2] \to \mathbb{R}$ mit $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

$$V(d) = \int_0^{d^2} \pi(f^{-1}(\eta))^2\, d\eta = \int_0^{d^2} \pi(\sqrt{\eta})^2\, d\eta = \pi\left[\frac{\eta^2}{2}\right]_{\eta=0}^{\eta=d^2} = \pi\frac{d^4}{2}$$

mit $d^2 = c$ folgt (wie erwartet) $V(c) = \frac{c^2}{2}$, also das gleiche Ergebnis wie in Abschnitt 7.8.1.

7.8.3 Satz + Beispiel: Innere Substitution bei der Rotation um die y-Achse

Bei manchen Funktionen ist die Umkehrfunktion schwer zu finden. Sei $a < b \in \mathbb{R}$ $f : [a, b] \to [c, d]$ (surjektiv) stetig und streng monoton wachsend, dann gilt $V_a(b) = \pi\int_{f(a)}^{f(b)} x(y)\, dy$. Hier kann mit $dy = y'\cdot dx$ innen substituiert werden und man erhält

$$V_a(b) = \pi\int_{f(a)}^{f(b)} (x(y))^2\, dy = \pi\int_a^b x^2\cdot y'\, dx = \pi\int_a^b x^2\cdot f'(x)\, dx \ .$$

Dies stellt im Allgemeinen eine erhebliche Vereinfachung dar.

Sie können diesen Satz auch mit dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung (7.3) beweisen. Nach der Kettenregel und dem Hauptsatz gilt: $\left(\int_0^{g(x)} f(t)\, dt\right)' = f(g(x))\cdot g'(x)$.

Folgende Umformungen gelten nur bis auf einen konstanten Summanden:

$$\begin{array}{llll} & \pi\int_{f(0)}^{f(x)} (f^{-1}(t))^2\, dt & = \pi\int_0^x t^2\cdot f'(t)\, dt & \text{Formel der Rotation} \\ \Leftrightarrow & \left(\pi\int_{f(0)}^{f(x)} (f^{-1}(t))^2\, dt\right)' & = \left(\pi\int_0^x t^2\cdot f'(t)\, dt\right)' & \text{nach } x \text{ abgeleitet} \\ \Leftrightarrow & \left(f^{-1}(f(x))\right)^2\cdot f'(x) & = x^2\cdot f'(x) & \text{nach Hauptsatz und Kettenregel} \\ \Leftrightarrow & x^2\cdot f'(x) & = x^2\cdot f'(x) & f^{-1}(f(x)) = x \ . \end{array}$$

Beispiel: Sei wieder $d > 0, f : [0, d] \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$. $f(x)$ rotiere im Def. Ber. um die $y-$Achse, dann gilt: $V_0(d) \;=\; \int_0^d \pi x^2 \cdot y' \, dx \;=\; \int_0^d \pi x^2 \cdot 2x \, dx \;=\; \int_0^d \pi \, 2x^3 \, dx \;=\; \left[\pi \frac{x^4}{2}\right]_{x=0}^{x=d} \;=\; \pi \frac{d^4}{2}$.

Die Gleichheit mit dem Ergebnis von Abschnitt 7.8.2 ist kein Zufall.

Sei $f : [0, 1] \to [0, 2] : f(x) = x^3 + x$. Es soll das Volumen des Rotationskörpers um die $y-$ Achse gefunden werden (viel Spaß beim Suchen der Umkehrfunktion).

$$V_0(1) \;=\; \int_0^1 \pi x^2 \cdot y' \, dx \;=\; \int_0^1 \pi x^2 \cdot (3x^2+1) \, dx \;=\; \pi \int_0^1 (3x^4+x^2) \, dx \;=\; \pi \left[\frac{3x^5}{5} + \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{14\pi}{15} .$$

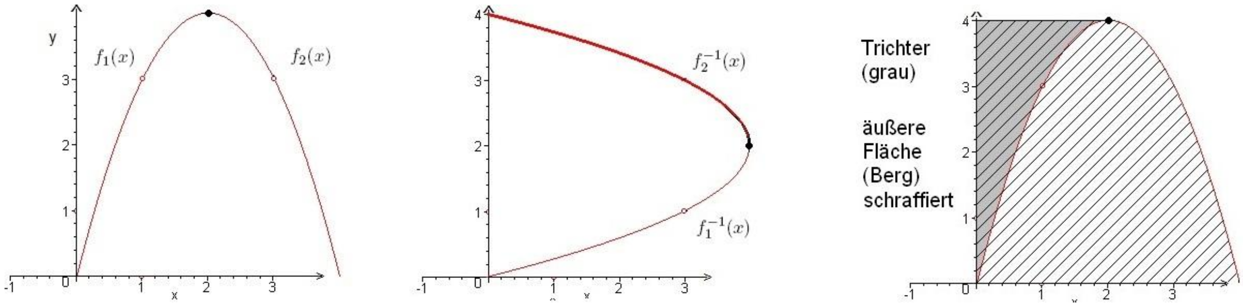


Abb. 119 $f(x) = -(x-2)^2+4$; $f_1^{-1}(x)$ und $f_2^{-1}(x)$ (fett); Teilung des Rotationskörpers

7.8.4 Beispiel: Rotation um die y-Achse einer nicht bijektiven Funktion

Sei $f : [0; 4] \to [0; 4]$ definiert durch $f(x) = -(x-2)^2 + 4$ (nach unten offene) Parabel mit dem Scheitel $S(2/4)$. wir wollen das Volumen des Rotationskörpers der Funktion f um die $y-$Achse berechnen (ähnlich einem Vulkankrater). Dazu betrachten wir die Einschränkungen $f_1(x) = f(x) \mid_{[0;2]}$ ($= f(x)$ eingeschränkt auf $[0;\ 2]$) und $f_2(x) = f(x) \mid_{[2;4]}$. Die zwei Zweige der Umkehrfunktion berechnen sich als $f_1^{-1}(x) = -\sqrt{4-x} + 2$ und $f_2^{-1}(x) = \sqrt{4-x} + 2$.

Wir bestimmen das Volumen des Rotationskörpers auf zweierlei Arten:

1) Durch die Integration der Umkehrfunktion:

$$\begin{array}{rlcll} V & = \pi \int_0^4 (f_2^{-1}(x))^2 \, dx & - & \pi \int_0^4 (f_1^{-1}(x))^2 \, dx & \\ & = \pi \int_0^4 (\sqrt{4-x} + 2)^2 \, dx & - & \pi \int_0^4 (-\sqrt{4-x} + 2)^2 \, dx & \\ & = \pi \int_0^4 (4 - x + 4\sqrt{4-x} + 4) \, dx & - & \pi \int_0^4 (4 - x - 4\sqrt{4-x} + 4) \, dx & \\ & = 2\pi \int_0^4 4\sqrt{4-x} \, dx & = & -8\pi \frac{2(4-x)^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_{x=0}^{x=4} & = \frac{128\pi}{3} \end{array}$$

2) Durch die Integration mit Hilfe der inneren Substitution: Berechnen wir zuerst eine Stammfunktion $\int x^2 dy$:

$$\int x^2 dy = \int x^2 \cdot f'(x) \, dx = \int x^2 \cdot (4x - x^2)' \, dx = \int 4x^2 - 2x^3 \, dx = (\frac{4x^3}{3} - \frac{x^4}{2}) =: W(x)$$

Wir berechnen das Volumen des Trichters (innen) $V_1 = \pi \cdot (W(2) - W(0)) = \frac{8\pi}{3}$

und des Berges (außen): $V_2 = \pi \cdot (W(4) - W(2)) = \frac{-136\pi}{3}$.

Das äußere Volumen ist negativ, weil $f_2(x)$ streng monoton fällt. Das Volumen des Rotationskörpers ist damit $V = -(V_2 - V_1) = \frac{128\pi}{3} = W(0) - W(4)$.

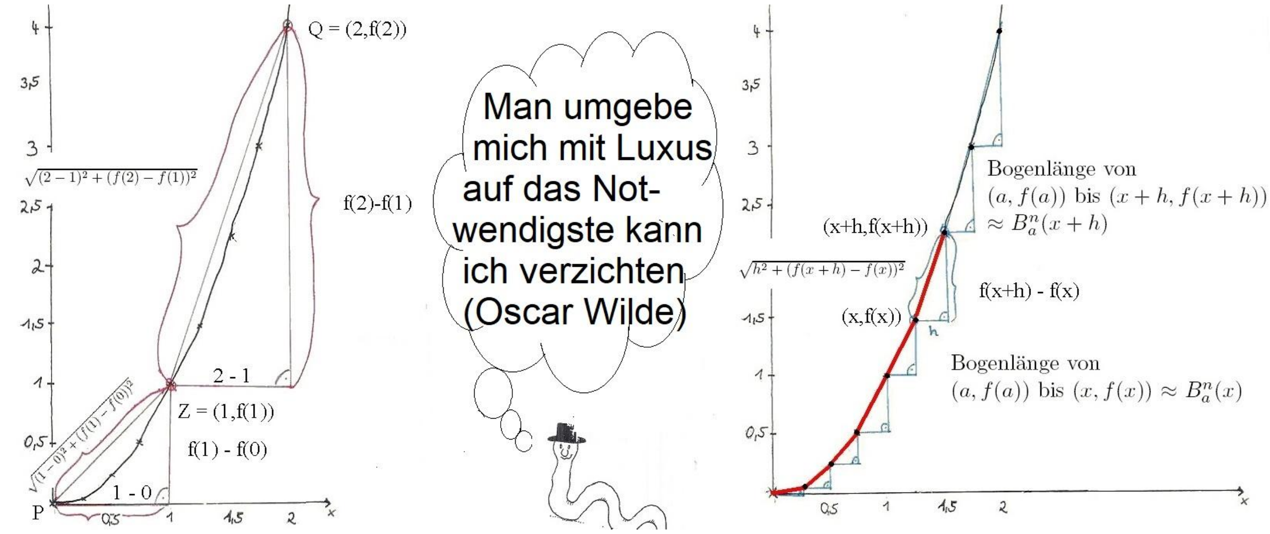


Abb. 120 Spezielle Bogenlänge Allgemeine Bogenlänge

7.9 Bogenlängen

7.9.1 Beispiel: Approximation der Bogenlänge

Wir wollen die Bogenlänge der Parabel $y = x^2$ zwischen den Punkten $P = (0/0)$ und $Q = (2/4)$ näherungsweise berechnen. Die Bogenlänge approximieren wir über den Zwischenpunkt $Z = (1/1)$ durch die Längen der Strecken $\overline{|P,Z|} + \overline{|Z,Q|} = \sqrt{2} + \sqrt{10} \sim 4,58$.

7.9.2 Satz: Die Bogenlängenformel

Wir verallgemeinern diesen Ansatz. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Wir zerlegen $[a, b]$ in n gleichgroße Teilintervalle der Breite $h := \frac{b-a}{n}$. Sei x_0 einer der $n-1$ Stützstellen (= Endpunkte der Teilintervalle) $\in (a, b)$. Wir definieren $B_a^n(x_0)$ als genäherte Bogenlänge vom Punkt $(a, f(a))$ zum Punkt $(x_0, f(x_0))$ (wobei das Intervall $[a, b]$ in n gleichgroße Teilintervalle zerlegt wurde). Sei $x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$, dann gilt

$$B_a^n(x_k) = \sum_{i=1}^{k-1} \sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2} = \sum_{i=1}^{k-1} \sqrt{h^2 + (f(x_i+h) - f(x_i))^2} \text{ mit } h = \frac{b-a}{n}$$

$\lim_{n\to\infty} B_a^n(x_0) =: B_a(x_0)$ sei die tatsächliche Bogenlänge des Bogens von $f(x)$ von a bis x_0. Die Differenz $B_a^n(x_0+h) - B_a^n(x_0)$ = die Hypotenuse des Dreiecks bei $(x_0, f(x_0))$. Damit gilt

$$B_a^n(x_0+h) - B_a^n(x_0) = \sqrt{(x_0+h-x_0)^2 + (f(x_0+h) - f(x_0))^2} = h \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{B_a^n(x_0+h) - B_a^n(x_0)}{h} = \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\right)^2} \text{ und für } h \to 0 (\Leftrightarrow n \to \infty) \text{ gilt}$$

$$B_a'(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2} \quad \Rightarrow \quad B_a(x) = \int_a^x \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt$$

Für die Parabel $y = x^2$ gilt dann mit Abschnitt 7.5.10:

$$B_0(x) = \int_0^x \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt = \int_0^x \sqrt{1 + (2t)^2}\, dt$$

$$= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} (\left(2t + \sqrt{(2t)^2 + 1} \right)^2 + 4 \operatorname{area\,sinh} 2t - \frac{1}{(2t + \sqrt{(2t)^2+1})^2}) \right) \right]_{t=0}^{t=x}.$$

7.9.3 Satz: Parametrisierte Kurven

Sei K eine, in Parameterdarstellung gegebene Kurve: $K = (u(t), v(t))$ mit $x = u(t), y = v(t)$: $[a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Wenn $u(t)$ invertierbar ist, dann kann K als Funktion $f(x) := y(x^{-1})$ interpretiert werden:

$$t = u^{-1}(x) \text{ und } y = v(t) = v(u^{-1}(x)) = f(x),$$

(siehe auch nächster Abschnitt). Nach dem Strahlensatz gilt $\frac{v'(t)}{u'(t)} = \frac{f'(x)}{1}$. Damit gilt für die Bogenlänge:

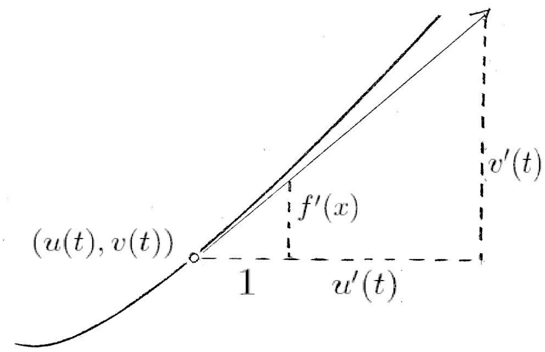


Abb. 121 Bogenlänge einer Kurve

$$\begin{aligned}
B_a(b) &= \textstyle\int_{x(a)}^{x(b)} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx && \text{Formel für Bogenlänge} \\
&= \textstyle\int_{x(a)}^{x(b)} \sqrt{1 + (\frac{v'(t)}{u'(t)})^2}\, dx && \text{mit Strahlensatz} \\
&= \textstyle\int_a^b \sqrt{1 + (\frac{v'(t)}{u'(t)})^2}\, u'(t) \cdot dt && \text{innere Substitution } dx = u'(t) \cdot dt \\
&= \textstyle\int_a^b \sqrt{(u'(t))^2 + (v'(t))^2}\, dt && u'(t) \text{ in die Wurzel multipliziert.}
\end{aligned}$$

7.9.4 Beispiel: Die Kreisbogenlänge

Gegeben sei ein Kreis $K = (r \cos t, r \sin t)$, dann gilt für die Bogenlänge von 0 bis zum Winkel w (im Bogenmaß):

$$B_0^w = \int_0^w \sqrt{(u'(t))^2 + (v'(t))^2}\, dt = \int_0^w \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2}\, dt = \int_0^w \sqrt{r^2}\, dt = r \cdot w .$$

Dies entspricht genau der Sektorformel aus der Mittelstufe.

Wie kann der Kreis in Parameterdarstellung als Funktion gedeutet werden? $x = u(t) = r \cos t$ ist invertierbar für $w \leq \pi$, also gilt $t = u^{-1}(x) = \arccos \frac{x}{r}$ und

$$y = r \sin t = r \sin(\arccos \frac{x}{r}) = r\sqrt{1 - (\frac{x}{r})^2} = \sqrt{r^2 - x^2} = f(x).$$

8 Differenzialgleichungen

8.1 Kontinuierliche Wachstumsvorgänge (UE 12_3)

Basis: Ag 163, F 54, F 76,

8.1.1 Die Dgl des exp Wachstums → 8.6.3 + 8.8.2

KS_{17}: 63-64 + KS_{09}: 182-185

504. (U) Eine Differenzialgleichung (Dgl) ist eine Gleichung, in welcher eine (unbekannte) Funktion y und deren Ableitung y' vorkommen (können). a_1) Geben Sie irgendeine Dgl an.
b_1) Geben Sie (zwei) Lösungen der Dgl $y' = y$ an.
c_2) Bauen Sie weitere Lösungen der Dgl $y' = y$ mit dem Ansatz $y_{\text{neu}} = 2 \cdot y_{\text{bekannt}}$.
d_2) Lösen Sie die Dgl $y' = 2y$ mit dem Ansatz $y = e^{\lambda x}$.
e_2) Lösen Sie die Dgl $y' = 3y$ und danach $y' = ky$.
(U) f_3) Wir zeigen, dass $y =$__________ alle Lösungen von $y' = ky$ sind. Sei f auf $\mathbb{R}$ diffbar. Bestimmen Sie mit Hilfe der Dgl die Ableitung von $g(x) := e^{-kx} \cdot y$ und folgern Sie damit, dass die Dgl keine weiteren Lösungen besitzt.

ⓖ$_e$) Klären Sie die Funktionsweise eines Daumenkinos - und warum die vierte (Raum-) Dimension auch die Zeit sein kann.

10 Analytische Geometrie

10.1 Einführung in Vektoren (UE 10_5) Sd10: S. 15-17

Basisformeln: F 6, F 14, F 16, F 19, F 29, F 31, F 34, F 35, F 36, F 43, F 44, F 46.

Vektoren werden bei räumlichen Beschreibungen und bei der Kräftezerlegung angewendet.

10.1.1 Dreidimensionale Koordinatensysteme LS10: 68-71 + EM6: S.203-207

650. (Ü) a$_e$) Zeichnen Sie einen Würfel mit der Kantenlänge 4cm. Welche Lage wäre günstig zur Wahl eines Koordinatensystems? Geben Sie die Eckpunkte des Würfels in Ihrem Koordinatensystem an.

b$_r$) Ein dreidimensionales Gebilde kann nur als S_________________ gezeichnet werden.

651. ⓐ$_1$) Zeichnen Sie einen Bungalow (Quader) (Länge 8m; Breite 10m; Höhe 3m) im Maßstab 1:100. Geben Sie allen Ecken Koordinaten.

ⓑ$_1$) Liegt der Punkt $Q(8|10|4)$ auf der _-Achse? Wie stellt man sinnvollerweise Q dar?

ⓒ$_r$) Bei räumlichen Zeichnungen wird p____________, das heißt, wenn ein Bildpunkt P' in der Zeichnung nicht auf einer Geraden g' liegt, dann ist das Original P___ g (im Raum); liegt in der Zeichnung aber P' auf g' so bedeutet das _______ (unbedingt) P___ g (im Raum).

ⓓ$_1$) Der Bungalow soll ein Spitzdach (senkrechte Pyramide) bekommen. Die Dachspitze soll 6m über dem Boden über der Mitte des Bungalows sein. Zeichnen Sie das Dach ein und klären Sie, wie man die Koordinaten der Spitze S bekommt.

ⓔ$_1$) Zeichnen Sie den Bungalow B_1 mit $l = 4m, b = 5m, h = 3m$ sowie B_2: $l = 4m, b = 3m, h = 3m$ mit einem 3m hohem Spitzdach im Maßstab 1:100. Geben Sie die Koordinaten aller Eckpunkte an.

652. $\boxed{\mathbf{a}_1}$) Zeichnen Sie eine Pyramide mit rechteckiger Grundfläche und den Eckpunkten $A(0|0|0)$, $B(4|0|0)$, $D(0|5|0)$. Die Pyramide soll 3 LE hoch sein und S soll über dem Mittelpunkt des Rechtecks liegen. Geben Sie die Koordinaten der Spitze S an.
b$_1$) Zeichnen Sie einen achsenparallelen Quader mit den Seitenlängen $a = 4$, $b = 3$, $c = 2$. Geben Sie den Punkt P des Quaders an, der vom Ursprung am weitesten entfernt ist.
c$_1$) Zeichnen Sie eine Gerade durch die Punkte $A(2|3|4)$ und $B(-2|2|1)$. **d$_1$)** Zeichnen Sie eine Pyramide mit dreieckiger Grundfläche und den Ecken $A(6|2|1), B(4|1|2), C(2|4|2)$ und $D(2|2|3)$.

10.1.2 Vektoren → 10.9.1 LS10: 72-78 + LS: 238-239

653. (Ü) a$_e$) Zeichnen Sie in ein (zweidimensionales) Koordinatensystem die Punkte $A(1|1)$ und $B(4|3)$ ein. Wie würden Sie eine Verschiebung beschreiben, die A in B überführt?

b$_r$) Eine Verschiebung, die einen Punkt um a Einheiten nach rechts und um b Einheiten nach _____________ transportiert, wird durch $\begin{pmatrix} \\ \_\_ \end{pmatrix}$ beschrieben.
Wir nennen dies einen V_____________, der durch einen P_____________ symbolisiert wird. Eine Verschiebung, die den Punkt A in den Punkt B überführt, notieren wir als _______________
Motto: E______ − ___________ **(Formel 64)** . Sei $R(5|2)$, $S(4|3)$, berechnen Sie $\overrightarrow{RS}$.
c$_1$) Welche Verschiebung überführt $C(2|3)$ nach A, (C nach $D(0|4)$, C nach B)?
d$_1$) Finden Sie eine Regel, die $P(p_1|p_2)$ nach $Q(q_1|q_2)$ überführt.
e$_e$) Vergleichen Sie die Verschiebungen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BA}$ und formulieren Sie ein allgemeines Gesetz.
$_r$) Der Vektor $\overrightarrow{BA}$ heißt G_____vektor (e: *opposite/negative vector*) von $\overrightarrow{AB}$.
f$_e$) Beschreiben Sie die Verschiebung $\overrightarrow{AA}$. g$_e$) $\binom{0}{0}$ heißt N_______________.
$\boxed{\mathbf{h}_1}$) Seien $A(3|2|1)$ $B(4|1|-2)$ $C(-1|-2|2)$ gegeben. Berechnen Sie $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$ und $\overrightarrow{CA}$.

654. Sei $A_1(0|0)$, $B_1(2|3)$, $A_2(3|0)$, $B_2(5|3)$, $A_3(5|1)$, $B_3(7|4)$, $A_4(4|3)$, $B_4(6|6)$, $A_5(2|4)$, $A_6(1|7)$. Zeichnen und ber. Sie die Vektoren $\overrightarrow{A_iB_i}$ $(i = 1..4)$. Verschieben Sie die Pkte A_5 und A_6 um $\overrightarrow{A_1B_1}$.

(Ⓤ) **Regel:** Jeder Vektor im Raum hat u________ viele äquivalente Vertreter (Repräsentanten). Ein Vektor hat weder einen bestimmten A______punkt noch einen bestimmten E__________.

655. (Ⓤ) a_e) Führen Sie die Verschiebung $\binom{2}{1}$ und danach die Verschiebung $\binom{1}{3}$ durch. Welche Verschiebung resultiert aus der Hintereinanderausführung der Verschiebungen? Welche Verknüpfung wird durch die Hintereinanderausführung von Verschiebungen (in der Menge aller Vektoren) induziert (e________)? b_r) Wir definieren die Vektor-a____________ k____________ weise,

das heißt $\vec{a} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \end{pmatrix}$.

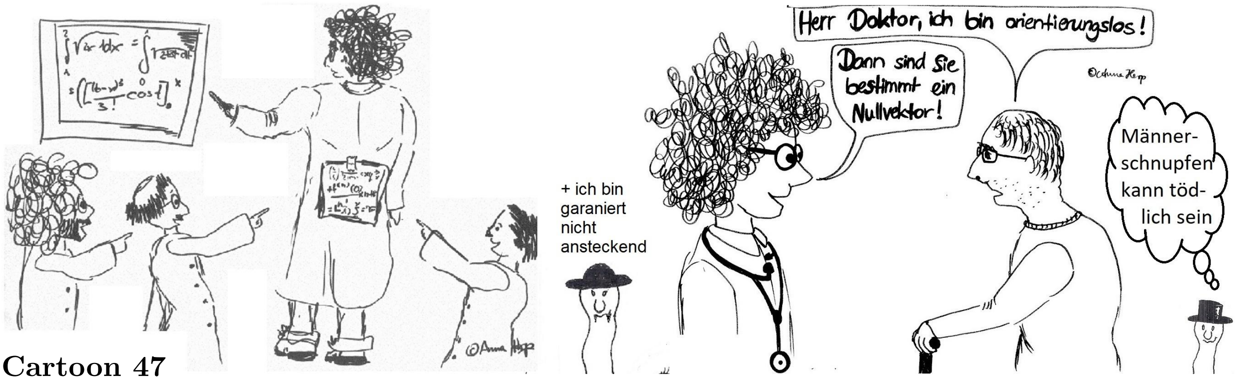
c_e) Führen Sie die Verschiebung $\binom{2}{1}$ zwei (drei; n) Mal durch. Welche Verknüpfung wird induziert?

d_r) Ein Skalar (e: *scalar*) in der Mathematik ist eine Z_____ im Gegensatz zu einem V_________.

Skalar kennen wir vom Begriff S_________. Die Multiplikation mit einem Skalar definieren wir:

$r \cdot \vec{a} = r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \end{pmatrix}$. Ber. Sie $e_{b,1}$) $3 \cdot \binom{1}{3} - 2 \cdot \binom{1}{2}$ und $\boxed{\mathbf{f}_1}$) $4 \cdot \binom{-1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \binom{-4}{-6}$.

Die k_________weise Multiplikation zweier Vektoren ist **immer verboten!**



Cartoon 47

10.1.3 Der Vektorraum (Zusatz, $\overline{DHBW}$)

KS$_{04}$: S. 230-232

656. **Abelsche Gruppe:**$_e$ Eine Abelsche Gruppe G ist eine algebraische Struktur mit einer inneren Verknüpfung '+': $G \times G \to G$; dies sagt: zwei Elemente aus ___ werden v_____________ und ein (neues) Element aus ___ entsteht.

'+' muss dabei folgenden Bedingungen genügen:

1) Assoziativgesetz: _______________________

2) Existenz des neutralen Elementes n (oder Null) mit _______________________.

3) Existenz des inversen Elementes '-a' (oder auch a^{-1}) mit _______________________.

4) Kommutativgesetz: _______________________

a_1) Finden Sie Abelsche Gruppen. b_2) Sind $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ Gruppen?

c_2) Betrachten Sie vollen Stunden der Uhrzeit (0-23 Uhr). Es soll 23+1=0, 22+5=3 usw. gelten. Diese Gruppe heißt 24 mod 24$\mathbb{Z}$. Zeigen Sie die Gesetze (2) und (3) (siehe auch Ag 41/118).

657. **Vektorraum:**$_e$ a_e) Ein Vektorraum V ist eine abelsche Gruppe in welcher zusätzlich eine Multiplikation mit einem Skalar ___ $\times$ ___ $\to$ ___ definiert ist mit folgenden Gesetzen:

(5) Distributivgesetz$_1$: ____________________ (6) Distributivgesetz$_2$: ____________________
(7) Assoziativgesetz: ____________________ (8) Einsgesetz: ____________________

b_e) Warum ist das Assoziativgesetz kein echtes Assoziativgesetz?
Welches Distributivgesetz ist auch nicht echt?

10.1.4 Gesetze des affinen Punktraums

→ 14.15.1 + 10.9.1 EM6:211-212; KS_{04}:236

658. (Ü) **Punkte und Vektoren:**$_e$ a_e) Welche (der folgenden) Operationen sind (intuitiv) erlaubt? Welche verboten? Welcher Typ resultiert aus der Verknüpfung?

$$\text{Vektor} + \text{Vektor} \quad \text{Punkt} + \text{Vektor} \quad \text{Punkt} + \text{Punkt} \quad \text{Punkt} - \text{Punkt} \quad n \cdot \text{Punkt}$$

b_e) Was resultiert geometrisch aus den erlaubten Operationen?
c_r) Ein Vektor hat keinen (eindeutig definierten) A______- oder E__________. Ein **Ortsvektor** (e: *position vector*) hingegen soll im Ursprung beginnen. In der Notation sind Vektoren und Ortsvektoren (dummerweise) identisch. Auf welchen Punkt zeigt der Ortsvektor $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$?
Ein Ortsvektor ist ein _________, der so tut als wäre er ein _________.

10.1.5 Die Parallelogrammgesetze (nach Sd) → 14.15.16

EM6: S.213; KS_{04}: S. 230-233

659. (Ü) **a_1)** Bestimmen Sie den Mittelpunkt M von $A(4|1)$ und $B(2|3)$. **b_e)** Verallgemeinern Sie Ihr Ergebnis auf $A(a_1|a_2)$ und $B(b_1|b_2)$. **c_e)** Beweisen Sie Ihre Vermutung **(Formel 65)** 1 PaG: $\overrightarrow{OM_{AB}} =$ ____________. $d_{1,b}$) Berechnen Sie den Mittelpunkt M_{AB} von $A(1|2|3)$ und $B(5|6|7)$.

660. (Ü) a_1) Gegeben sind die Punkte $A(1|1)$, $B(3|1)$ und $C(4|3)$. Bestimmen Sie D so, dass das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ergibt. b_e) Verallgemeinern und beweisen Sie ihr Ergebnis: $\overrightarrow{OA}$_______________ **(Formel 65)** 2 PaG. c_1) Ergänzen Sie $A(1|2|3)$, $B(5|6|7)$ und $D(2|4|3)$ zum, Parallelogramm $ABCD$. d_1) Gegeben seien die Punkte $A(1|0), B(3|1)$ und $C(2|3)$. Ergänzen Sie ABC zum Quadrat und berechnen Sie dessen Mittelpunkt M.

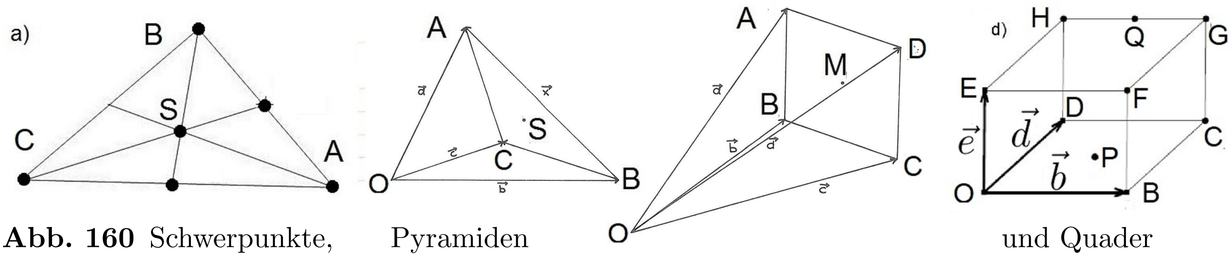


Abb. 160 Schwerpunkte, Pyramiden und Quader

661. a_1) Spiegeln Sie den Punkt $A(1|0)$ am Punkt $L(3|1)$. Der gespiegelte Punkt heiße A'.
b_1) Welche besondere Lage hat L in Bezug auf A und A'? Das 3 PaG (nach Sd) **(Formel 65)** : $\overrightarrow{OA'} =$ _______________. Ihre Formel gilt übrigens für jede Art der Spiegelung.

662. (Ü) (KA_Z) (GG_{01}) Ber. Sie die Seitenmitten des Dreiecks ABC und ergänzen Sie es zum Parallelogramm $ABCD$. Spiegeln Sie Δ ABC am Pkt D. **$a_{b,1}$)** $A(2|2|-2)$, $B(6|2|4)$, $C(6|0|4)$;
b_1) $A(3|2|1)$, $B(5|0|-2)$, $C(-1|-2|2)$; **c_1)** $A(\sqrt{2}|2\sqrt{3}|2)$, $B(3\sqrt{2}|4\sqrt{3}|-2)$, $C(-\sqrt{2}|-2\sqrt{3}|4)$;
$\boxed{d_1}$) $A(4|1|5)$, $B(2|3|4)$, $C(3|2|5)$; **e_1)** $A(6|9|2)$, $B(7|3|2)$, $C(4|6|2)$; **f_1)** $A(8|3|4)$, $B(2|6|5)$, $C(2|8|1)$;
g_1) Gegeben sei ein Quader mit den Ecken $A(8|2|0)$, $B(8|6|0)$, $C(2|6|0)$ und $E(8|2|6)$. Berechnen Sie die restl. Ecken des Quaders, sowie die markierten ten (siehe Abb. 161 a).

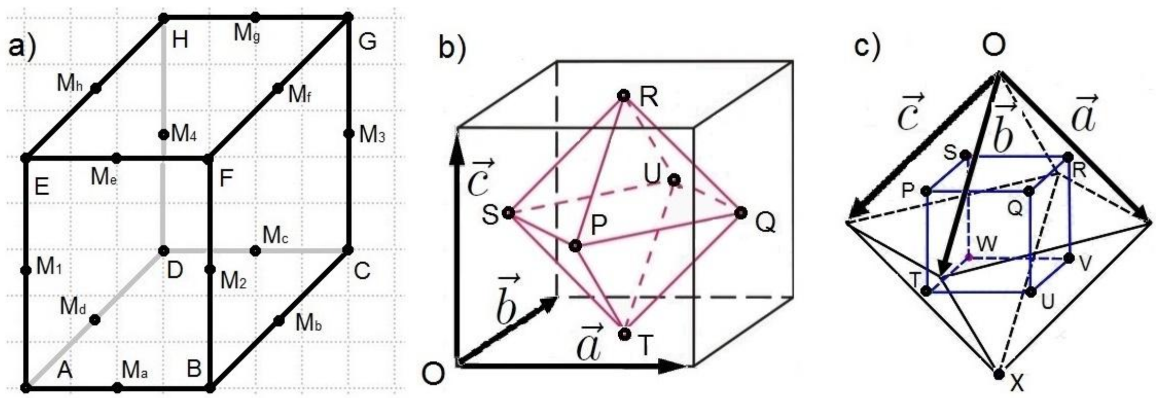


Abb. 161 Quader Würfel und Oktaeder

10.1.6 Pyramiden und Schwerpunkte KS$_{04}$: S. 237

663. a$_w$) Wie finden Sie den Schwerpunkt S des Dreiecks aus Abb. 160 a (elementargeometrisch)?
b$_1$) S sei der Schwerpunkt des Dreiecks A, B, C, berechnen Sie **(Formel 65)** 4 PaG: $\overrightarrow{OS} =$ __________. c$_1$) Berechnen Sie alle Schwerpunkte der Dreiecke ABC aus Aufgabe 662.
d$_1$) Die quadratische Pyramide O, A, B, C, D aus Abb. 160 c) werde von den Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ erzeugt. M ist die Mitte des Grundquadrates A, B, C, D. Berechnen Sie $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$ und $\vec{m} = \overrightarrow{OM}$ abhängig von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$. Welche Gesetze haben Sie verifiziert?
e$_1$) (KA$_L$) Der Quader O, B, C, D, E, F, G, H aus Abb. 160 d) werde von den Vektoren $\vec{b}, \vec{d}$ und $\vec{e}$ erzeugt. Ber. Sie $\overrightarrow{CH}_f$, $\overrightarrow{GE}_f$, $\boxed{\overrightarrow{EQ}_f}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{FD}_f$, $\overrightarrow{PQ}_f$, $\overrightarrow{BQ}$, $\overrightarrow{QC}$ und $\overrightarrow{HP}_f$ abhängig von $\vec{b}, \vec{d}$ und $\vec{e}$.

664. (U) a$_2$) Der Würfel aus Abb. 161 b) werde von den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ erzeugt. Die Ecken des einbeschriebenen Oktaeders liegen genau auf den Mittelpunkten der Flächenquadrate. Geben Sie $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{RT}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PS}$, $\overrightarrow{SR}_f$, $\overrightarrow{ST}$, $\overrightarrow{QR}$, $\overrightarrow{VS}_f$, $\overrightarrow{UQ}$ und $\overrightarrow{US}$ abhängig von $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ an.

b$_3$) Der Oktaeder aus Abb. 161 c) werde von den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ erzeugt. Die Ecken des einbeschriebenen Würfels liegen genau auf den Schwerpunkten der Flächendreiecke.
Geben Sie $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OT}$, $\overrightarrow{OW}$, $\overrightarrow{PT}_f$, $\overrightarrow{ST}_f$, $\overrightarrow{SQ}_f$, $\overrightarrow{PU}$, $\overrightarrow{UQ}_f$ und $\overrightarrow{WQ}$ abhängig von $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ an.

10.1.7 LGS 3 Gleichungen 2 Unbekannte (3 $\times$ 2 LGS)

665. (Ü) (GG$_{02}$) a$_w$) Lösen Sie das folgende LGS i) $\begin{pmatrix} 2x+3y=8 \\ -x+2y=3 \end{pmatrix}$ [Übung: ii) $\begin{pmatrix} 7x-2y=\ 4 \\ 3x+4y=-8 \end{pmatrix}$, iii) $\begin{pmatrix} 6x+5y=-10 \\ -4x+3y=\ -6 \end{pmatrix}$].
b$_e$) Lösen Sie erst das LGS $\begin{pmatrix} 2x+3y=8 \\ -x+2y=3 \\ 5x-2y=1 \end{pmatrix}$, dann $\begin{pmatrix} 2x-3y=\ \ 1 \\ -4x+6y=-2 \\ 7x+8y=22 \end{pmatrix}$; was müssen Sie beachten?
c$_e$) Formulieren Sie einen Algorithmus zum Lösen von LGS 3 Gleichungen mit zwei Unbekannten.
d$_1$) Lösen Sie i) $\begin{pmatrix} x+y=4 \\ 2x+3y=9 \\ x-2y=1 \end{pmatrix}$, $\boxed{\text{ii)}}$ $\begin{pmatrix} 6x-4y=4 \\ -3x+2y=-2 \\ 2x-y=1 \end{pmatrix}$, iii) $\begin{pmatrix} 3x+2y=0 \\ -3x+2y=0 \\ x+y=1 \end{pmatrix}$, iv) $\begin{pmatrix} 6x-4y=-2 \\ 9x-6y=-3 \\ 30x-15y=0 \end{pmatrix}$.

10.1.8 Linearkombinationen 10.9.4 EM6: S.214-216; KS$_{04}$: S. 247-249

666. (Ü) a$_r$) **Identitätssatz für Vektoren$_r$:** Zwei Vektoren $\binom{a}{b}$ und $\binom{c}{d}$ sind gleich $\Leftrightarrow a =$ _ und _____. Formulieren Sie den Identitätssatz auch dreidimensional.

b$_e$) (Thx Pia H) Auf einem Fußballfeld liegt ein Ball in der Ecke $O(0|0)$ Pia und Sd spielen zu zweit Fußball. Die Schusskräfte der beiden sind unterschiedlich stark, während Pia den Ball immer um $\vec{w} = \binom{2}{1}$ kickt, schießt Sd mit einer Schussweite von $\vec{s} = \binom{1}{1}$. Wann muss Pia an Sd den Ball abgeben, wenn vom Startpunkt $O(0|0)$ der Punkt $P(4|3)$ erreicht werden soll?
c$_e$) In welchem Zusammenhang haben Sie die Konstruktion in der Physik schon einmal gesehen?
d$_e$) Wie erreichen Sie $B(2|0)$? **Berechnen** Sie Pias und Sds Schussanteile (Kräftezerlegung).
(GG$_{03}$) (KA$_G$) Geben Sie eine Linearkombination an, so dass $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} = \vec{c}$ gilt.

e$_1$) $\vec{a} = \binom{1}{2}$, $\vec{b} = \binom{3}{2}$, $\vec{c} = \binom{5}{2}$; f$_1$) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 17 \\ 2 \end{pmatrix}$;

$\boxed{\text{g}_1}$) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$; h$_1$) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$;

667. (Ü) Geben Sie eine Linearkombination an, so dass $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} = \vec{c}$ gilt.
a$_1$) $\vec{a} = \binom{1}{-2}$, $\vec{b} = \binom{-2}{4}$, $\vec{c} = \binom{3}{6}$; b$_1$) $\vec{a} = \binom{-1}{2}$, $\vec{b} = \binom{2}{-4}$, $\vec{c} = \binom{-3}{6}$;
c$_e$) Warum geht die Linearkombination aus Teil a nicht auf?
d$_r$) Zwei Vektoren $\vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b}$ heißen linear abhängig (p_________) wenn sie V_________ voneinander sind: $\vec{a} =$___. Der $\vec{0}$ ist _______ linear abhängig.

e$_e$) Welche Punkte der Ebene sind mit $\vec{s} = \binom{1}{1}$ und $\vec{w} = \binom{2}{1}$ erreichbar? Beweisen Sie!

f$_e$) Geben Sie ein Vektorpaar an, bei welchem nicht mehr alle Pkte erreichbar sind. Beweisen Sie!

668. $\boxed{(\text{Ü})}$ (Thx Trl) Ein Heißluftballon startet im Punkt $S(1|2|0)$. Er steigt in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Plötzlich ändert sich der Wind und er fliegt in Richtung $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ w_3 \end{pmatrix}$.
Der Ballon landet im Punkt $Z(4.5|7.5|5)$.
a$_2$) Berechnen Sie w_3.
b$_2$) In welcher Höhe hat sich der Wind geändert?

Cartoon 48

10.1.9 Geraden in Parameterform

→ 14.15.2 LS10:79-81

669. (Ü) Auf einem See herrscht eine Strömung in eine (noch unbekannte) Richtung (e: *direction*). Wir befinden uns im Punkt $P(0|1)$. Nach einer Sekunde sind wir im Punkt $Q(2|2)$.
a$_1$) Welche Richtung hat die Strömung? Wo sind wir nach 2, 3, t Sekunden?
b$_1$) Entlang welcher Linie bewegen wir uns? c$_1$) (Zusatz) Wie schnell ist das Schiff?
d$_r$) Die Form $\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{r}$ ($t \in \mathbb{R}$), $\vec{r} \neq$ __ heißt P________________ einer Geraden (e: *vector equation of a line*). $\vec{p}$ heißt dabei A__________ oder S____vektor, $\vec{r}$ heißt dabei __________vektor (e: *direction vector*) und t ist der P_________; **e$_1$)** Berechnen Sie die Verbindungsgerade von i) $P_1(1|0)$ und $Q_1(3|3)$, ii) $P_2(2|4)$ und $Q_2(1|-1)$, iii) $P_3(1|-1)$ und $Q_3(2|4)$, iv) $P_4(0|0|0)$ und $Q_4(2|1|-1)$ und v) $P_5(1|2|3)$ und $Q_5(3|2|5)$. Die Gerade durch P und Q ist von der Form $\vec{x} =$ ____________ Die Parameterdarstellung ist nicht e__________. ↑ **(Order 66)**.
f$_r$) Im Raum gibt es keine Darstellung von Geraden der Form ________________; Geraden sind im Raum immer in P_______________form anzugeben.
g$_e$) Stellen Sie die Gerade aus Teil b) nicht nur in Parameterform sondern auch in einer anderen Form dar. Überführen Sie beide Formen ineinander.
h$_1$) Geben Sie die Gerade durch $P(1|2)$ und $Q(1|0)$ in der Hauptform und der Parameterform an.
i$_1$) (KA$_B$) Ber. Sie alle Verbindungsgeraden $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ aus Ag 251/662 a+b.
j$_1$) Die x_1-Achse geht durch (_|_|_) und (_|_|_). Geben Sie eine Parameterdarstellung der x_1-Achse sowie der x_2 und x_3-Achse an **(Order 66)**.

670. Sei $g : \vec{x} = \binom{1}{0} + t \cdot \binom{2}{3}$ ($t \in \mathbb{R}$). **a$_1$)** Geben Sie einige Punkte der Geraden an.
b$_1$) (KA$_B$) Liegen $B(9|12)$, $C(-1|-3)$, $D(4|5)$, $E(15|21)$ auf der Geraden?
c$_r$) Ein Punkt Q liegt auf der Geraden $\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{r} \Leftrightarrow$ das ______ $\vec{q} = \vec{p} + t \cdot \vec{r}$ ist l__________ ⇔ es kommt g___________ e___________ Wert für _ heraus.
d$_1$) Rechnen und zeichnen Sie die Verbindungsgerade von $P(2|2)$ und $Q(4|3)$.
Zeichnen Sie die Punkte für $t = -1$, $t = 0$, $t = 0.5$, $t = 1$ und $t = 2$ ein.
e$_r$) Die Parameterdarstellung erzeugt eine S_________. Wo befinden sich alle Punkte mit $0 < t < 1$?
f$_{b,1}$) Liegt P auf der Geraden durch A und B. Liegt P zwischen A und B? **i)** $A(1|2|3)$, $B(4|2|1)$, $P(-2|2|5)$. **ii)** $A(4|2|3)$, $B(7|8|-3)$, $P_1(5|4|1)$, $P_2(3|0|5)$, $P_3(8|10|-5)$, $P_4(2|-2|6)$, $P_5(6|6|-1)$,

Bemerkung: Der Zusatz $t \in \mathbb{R}$ ist eigentlich neben jeder Geraden in Parameterform zu notieren. Diesen Zusatz lasse ich weg, wenn es sowieso klar ist. Von einigen Kollegen, die (idR) die Form über den Inhalt stellen, wird dieser Zusatz immer verlangt (im Abi ist es besser, ihn zu notieren).

671. $\boxed{\text{(Thx He)}}$ Im Jahre 1912 sank die Titanic, nachdem sie mit einem Eisberg kollidierte. Nachdem das Schiffswrack im Jahr 1985 gefunden wurde, haben Touristen heutzutage die Möglichkeit das Wrack der Titanic in einem U-Boot zu besuchen. Eine Expedition fährt mit einem Schiff in die Nähe des Titanic-Wracks. Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass das U-Boot seine Richtung und Geschwindigkeit konstant beibehält. Das U-Boot wird am Startpunkt $U_0(37|1157|0)$ ins Wasser gelassen und startet von dort aus seinen Weg zum Wrack der Titanic. Eine Minute nach dem Start wird das U-Boot am Punkt $U_1(29|1133|-36)$ geortet.
a$_1$) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Geraden an, die die Fahrtroute des U-Bootes be-

schreibt. Welche Bedeutung besitzt der Parameter?
b_1) An welchem Punkt U_5 befindet sich das U-Boot 5 Minuten nach dem Start?
c_1) Das Wrack der Titanic befindet sich in der Position $W(-763|-1243|-3600)$ auf dem Meeresboden. Überprüfen Sie, ob mit der eingeschlagenen Fahrtroute das Wrack der Titanic erreicht wird. Wie viele Stunden dauert die Tauchfahrt zum Wrack?
d_1) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit (in $\frac{m}{min}$) des U-Bootes (1 LE entspricht 1m).

10.1.10 Schneiden von Geraden

LS10: 85-88 + EM6: 221-222+225-227

672. (Ü) (GG_{04}) (KA_B) Sei $t \in \mathbb{R}$; schneiden Sie die Geraden g und h.
a_1) $g: \vec{x} = \binom{1}{0} + t \cdot \binom{2}{3}$ und $h: \vec{x} = \binom{3}{3} + t \cdot \binom{-2}{-1}$; b_1) $g: \vec{x} = \binom{2}{0} + t \cdot \binom{1}{-2}$ und $h: \vec{x} = \binom{0.5}{0.5} + t \cdot \binom{2}{1}$;
c_1) $g: \vec{x} = \binom{0}{5} + t \cdot \binom{4}{-3}$ und $h: \vec{x} = \binom{3}{0} + t \cdot \binom{1}{2}$; d_1) $g: \vec{x} = \binom{0}{-3} + t \cdot \binom{1}{2}$ und $h: \vec{x} = \binom{-1}{1} + t \cdot \binom{-1}{0}$;
e_1) $g: \vec{x} = \binom{-3}{-1} + t \cdot \binom{3}{2}$ und $h: \vec{x} = \binom{3.5}{0} + t \cdot \binom{-1}{-1}$;
$f_{b,1}$) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0.5 \end{pmatrix}$; $\boxed{\mathbf{g}_1}$) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; h_1) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;
i_1) Berechnen Sie den Schnittpunkt: $g_{AB} \cap g_{CD}$: **i)** $A(4|2|3)$, $B(5|4|1)$, $C(3|2|5)$ und $D(1|-1|9)$; **ii)** $A(4|5|6)$, $B(7|2|0)$; $C(2|5|3)$; und $D(8|3|5)$; **iii)** $A(3|3|9)$, $B(4|5|6)$; $C(4|9|4)$; und $D(8|1|0)$;
j_r) Wenn nach einem Algorithmus in der Geometrie gefragt ist, sollten Sie als erstes den beschriebenen Gebilden N________ geben. Eine S_______ kann auch hilfreich sein. Eine Gerade durch zwei (verschiedene) Punkte A und B notieren Sie optimalerweise als _____.
k_3) Geben Sie einen Algorithmus für das Schneiden zweier Geraden an.
L_r) Die D______ durch einen Vektor ist immer v______! (F 86)

10.1.11 Lagebez. von Geraden (+ Kl.11) (GFS)

LS10: 82-4

673. (Ü) a_e) Nennen Sie alle Lagebeziehungen von 2 Geraden in der Ebene. **b_1)** Sei $g: \vec{x} = \binom{1}{1} + t \cdot \binom{2}{1}$, $t \in \mathbb{R}$. Geben Sie zu jeder Lagebeziehung Geraden an, die zu g eben jene Lagebeziehung hat.
c_1) Sei $g: \vec{x} = \binom{0}{2} + t \cdot \binom{4}{-2}$, berechnen Sie den Schnittpunkt (e: *point of intersect.*) von g mit folgenden Geraden **i)** $g_1: \vec{x} = \binom{2}{1} + s \cdot \binom{2}{3}$; **ii)** $g_2: \vec{x} = \binom{2}{1} + s \cdot \binom{-2}{1}$; **iii)** $g_3: \vec{x} = \binom{1}{2} + s \cdot \binom{2}{-1}$; **iv)** $g_4: \vec{x} = \binom{5}{2} + s \cdot \binom{1}{2}$, $t \in \mathbb{R}$.
d_2) Wie können Sie die Lage der Geraden algebraisch festellen (Vor.: Ag 274/759)?

674. (Ü) **Regel:** Zwei Geraden $g_1: \vec{x} = \vec{p_1} + t \cdot \vec{r_1}$ und $g_2: \vec{x} = \vec{p_2} + t \cdot \vec{r_2}$, $t \in \mathbb{R}$ in der Ebene
i) sind parallel (e: *parallel*) $\Leftrightarrow$ es gibt eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit _______________;
ii) schneiden sich $\Leftrightarrow$ ____________________;
iii) sind identisch $\Leftrightarrow$ ____________________ und ____________________;
iv) sind echt parallel $\Leftrightarrow$ ____________________ und ____________________;

675. Seien $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.
(GG_{05}) **a**$_1$) Welche Lage haben die Geraden g und h sicher nicht (Zeichnung)?
b_e) Warum haben die Geraden g und h keine Lage, die Sie aus der Ebene kennen? Diese Lage heißt w______________ (e: *skew*). **c**$_2$) (KA_G) Ber. Sie die Lage von g (später von h und k) zu
i) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, ii) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ iii) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$
d$_{2,T}$) (KA_G) Berechnen Sie die Lage von g zu
$\boxed{\text{i)}}$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$, ii) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}$, iii) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix}$,
$\boxed{\text{iv)}}$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, v) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, vi) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$,

$\boxed{\text{vii)}}$ $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$, viii) $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}$, ix) ($\bar{f}$) $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\7\end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$.

e$_1$) Der Baum: Verallgemeinern Sie Aufgabe 674 auf Geraden im Raum **(Formel 67)** und ergänzen Sie Abb 255/162b. **f'**$_2$) Geben Sie einen algebraischen Algorithmus zur Berechnung der Lage zweier Geraden im Raum an.

676. (Ü) (KA_G) Gegeben sei der Quader aus Abb. 255/162a. **a**$_1$) Berechnen Sie die Koordinaten folgender Punkte C, E, G, H, M, N. b$_2$) Berechnen Sie die Lage folgender Geradenpaare g_i und h_i zueinander: i) $g_1=\overline{AG}$, $h_1=\overline{BH}$; ii) $g_2=\overline{BE}$, $h_2=\overline{MN}$; iii) $g_3=\overline{ED}$, $h_3=\overline{BG}$; iv) $g_4=\overline{AH}$, $h_4=\overline{BG}$; $\boxed{\text{v)}}$ $g_5=\overline{BH}$, $h_5=\overline{MN}$; vi) $g_6=\overline{AF}$, $h_5=\overline{CH}$;

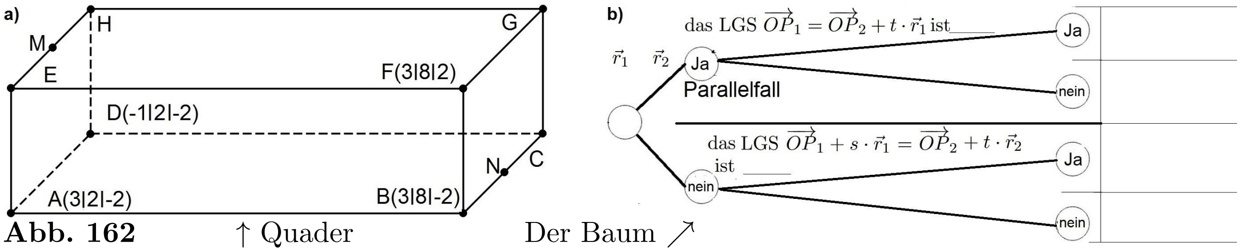


Abb. 162 ↑ Quader Der Baum ↗

677. (Ü) (GG_{06}) (KA_I) Berechnen Sie für allgemeines a die Lagen der Geraden g und h.

a$_3$) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\a\\-3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ und $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}-3\\7\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{b}_3)}$ $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix}$ und $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\4\\a\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-4\\-2\\8\end{pmatrix}$,

c$_3$) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\a^2\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ und $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}6\\7\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$,

d$_4$) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}8\\1\\5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}$ und $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}a\\2\\-2\end{pmatrix}$,

e$_4$) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\a\\6\end{pmatrix}$ und $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\3\\7\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$.

f$_e$) Warum können die Lagen 'parallel' bzw. 'identisch' nicht zeichnerisch entschieden werden? Betrachten Sie dazu die Geraden

$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}$ und $h_a:\vec{x}=\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. Welche spezielle Lage haben g und h_0?

678. **a**$_2$) Die Schnittpunkte einer Geraden mit einer Koordinatenebene heißen **Spurpunkte**. Bei der x_1, x_2 Ebene ist $x_3=0$. **(Formel 91)** Berechnen Sie alle Spurpunkte der Geraden aus Ag 680.

Im Folgenden sind zwei Spurpunkte einer Geraden gegeben. Ber. Sie den fehlenden Spurpunkt.

(GG_{08}) b) $S_{1,2}(1|2|0)$, $S_{2,3}(0|1|2)$, c) $S_{1,3}(-1|0|4)$, $S_{1,2}(3|-2|0)$, d) $S_{2,3}(0|1|1)$, $S_{1,3}(2|0|1)$.

10.1.12 Lagebez. von Geraden mit dem GTR (+ Kl.11) (GFS) EM6: S.229-231; LS: 240-241

679. Dieser Abs. ist durch den Wegfall des GTR Makulatur, die Lagen der Geraden aus Ag $\boxed{\text{680 a) - e)}}$ und h) - k) kann aber zur Übung auch ohne GTR gerechnet werden $_2$) (BAg 254/675).

680. i$_1$) Wie lautet das LGS bzw. die zugehörige Matrix des Schnittproblems aus Aufgabe 675 a)? Schreiben Sie diese Matrix komponentenweise und in Spaltenvektorschreibweise.
ii$_2$) Verallgemeinern Sie die erzeugte Matrix beim Schnittproblem der Geraden $g_1:\vec{x}=\vec{p}_1+t\cdot\vec{r}_1$ und $g_2:\vec{x}=\vec{p}_2+t\cdot\vec{r}_2$, $t\in\mathbb{R}$ (im Raum). Schreiben Sie die Matrix wieder in Spaltenvektorschreibweise. Diese Matrix kann mit Hilfe des GTR und dem Befehl \rref in eine **Klassifikationsmatrix** überführt werden. Gruppieren Sie die Klassifikationsmatrizen anhand folgender Lagebeziehungsproblemstellungen.

<u>Sei</u> $g_1:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$, ($t\in\mathbb{R}$), bestimmen Sie die Lagebeziehungen zur Geraden g_2:

a) $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$ $\underrightarrow{\text{GTR}}$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\underrightarrow{\text{rref}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$ $\underrightarrow{\text{GTR}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ -2 & -4 & -4 \end{pmatrix}$ $\underrightarrow{\text{rref}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$ $\underrightarrow{\text{GTR}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ $\underrightarrow{\text{rref}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$ $\underrightarrow{\text{GTR}}$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\underrightarrow{\text{rref}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$ $\underrightarrow{\text{GTR}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ -2 & -6 & 0 \end{pmatrix}$ $\underrightarrow{\text{rref}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

f) Finden Sie Zeilen, die in mehreren Matrizen vorkommen. Geben Sie die zugehörigen Gleichungen an.
g) Eine dieser Zeilen bedeutet die Antwort 'nein'. Geben Sie die Frage an, die zu dieser Antwort gehört.

(GG_{07}) Sei jetzt $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, bestimmen Sie die Lagebeziehungen zur Geraden g_2:

h) $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$, i) $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$, j) $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$,

k) $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$, bei allen Geraden gilt $t \in \mathbb{R}$.

681. Sei $\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ eine Klassifikationsmatrix. Dabei sei die Lage der Geraden

a) windschief, b) Schnittlage, c) parallel, d) identisch. Welche Werte von $\underline{A}$ sind dann fest, welche variabel? e) Warum ist immer $a_{11} = 1$ (und nie $= 0$)? f) Bei den Lagen (echt) parallel oder ____________________ ist $a_{12} \neq 0$, sonst wäre __________, was nicht sein darf.

682. Welche der folgenden Matrizen können eine Klassifikationsmatrix eines Lagebeziehungsproblems sein und welche Lagebeziehung haben die Ausgangsgeraden?

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 1 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *e)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *f)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *h)* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *i)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *j)* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ k) Welche besondere Situation liegt bei Aufgabe e) vor?

10.1.13 Länge von Vektoren LS: S.242-245

683. (Ü) a_1) Berechnen Sie die Länge des Vektors $\binom{4}{3}$. Verallgemeinern Sie Ihr Ergebnis auf den Vektor $\binom{a}{b}$. Beziehen Sie die Formel auf eine Linie in einem Viereck.

b_e) Berechnen Sie $\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right|$ und verallgemeinern Sie auf $|\vec{v}| = \left|\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right|$ (e: *magnitude*) und beziehen Sie Ihre Formel wieder auf eine Linie **(Formel 85, FD 22)**: $|\vec{v}| =$ _______________.

c_2) (Die Dreiecksungleichung) Berechnen Sie die Seitenlängen des Dreiecks $A(1|1)$ $B(3|2)$ und $C(4|4)$. Welche Ungleichung gilt für die Seiten eines Dreieckes immer?

d_2) Ein Vektor der Länge 1 heißt Einheitsvektor (e: *unit vector*). Der Vektor $\binom{4}{3}$ hat Länge 5. Finden Sie einen Vektor der Länge 1, der in Richtung des Vektors $\binom{4}{3}$ geht. Verallgemeinern Sie Ihren Ansatz auf einen Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Für welches t hat $\vec{x}$ die Länge l? e_2) $\vec{x} = \binom{t}{3}$, $l = 5$; f_2) $\vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$, $l = 3$; $\boxed{g_2}$) $\vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix}$, $l = \sqrt{27}$.

684. a_e) Geben ist die Gerade $g : \vec{x} = \binom{1}{0} + t \cdot \binom{3}{4}$. Berechnen Sie alle Punkte auf g, die zum Punkt $(1|0)$ den Abstand 1 (später 2,3,4,d) haben. b_r) Sei $g : \vec{x} = \overrightarrow{OP} + s \cdot \vec{r}$, dann heißt die Darstellung

$g : \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \_\_\_\_\_ \cdot \vec{r}$ **Bogenlängenparametrisierung** von g.
c_1) Berechnen Sie eine Bogenlängenparametrisierung der Geraden durch A und B.
i) $A(1|0|-1)$, $B(-1|1|1)$, $\boxed{\text{ii)}}$ $A(-1|-2|2)$, $B(2|2|2)$, iii) $A(-2|2|-3)$, $B(2|-2|4)$.

d_r) Wenn man in die Bogenlängenparametrisierung einer Geraden $g : \vec{x} = \overrightarrow{OP} + s \cdot \vec{r}$
i) für d den Wert 5 einsetze, dann erhalte ich den Punkt Q, der von _ in Richtung _ den Abstand _ hat. **ii)** Welcher Punkt $R \neq Q$ auf g hat von P noch den Abstand 5?
e_{2-3}) (≈ Abi 23) Gegeben sind die Pkte $A(3|5|5)$, $B(1|1|1)$ und $E(2|1|1)$. Best. Sie die Koordinaten zweier Pkte C und D so, dass C auf g_{BE} liegt und das Viereck $ABCD$ eine Raute ist.

10.1.14 Bewegungsaufgaben in der Ebene (+ Kl.12, $\overline{DHBW}$) (GFS) LS10: 88-90

685. (Ü) a_1) Ein Boot B_1 bewegt sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit und befindet sich im Pkt $P_0(0|1)$; 1/2 Stunde später ist es im Pkt $P_{0.5}(3|5)$. i) Wie weit ist das Boot in dieser Zeit gefahren (1 LE = $1km$)? ii) Wo befindet es sich nach $0, 1, 2, t$ Stunden? iii) Wie schnell ist es?

b_r) Normalerweise kommt es auf die Länge des R______________vektors bei Geraden nicht an - bei Bewegungsdarstellungen ist aber $|\vec{r}| =$ _.

c_1) Ein anderes Boot B_2 befindet sich im Punkt $Q_0(-34|64)$ und bewegt sich mit $20\frac{km}{h}$ in Richtung $\vec{v} = \binom{4}{-3}$. Wann ist es im Punkt $A_2(-26|58)$, wann in $A_2(-22|55)$; wo ist B_2 nach einer Stunde; wo ist B_2 nach t Stunden?

d_r) **Die Zeit-Ort-Gleichung:**$_e$ Ein Boot B befindet sich im Punkt P und bewegt sich mit Geschwindigkeit v (in $\frac{LE}{ZE}$) in Richtung $\vec{r}$. Das Boot befindet sich nach t Zeiteinheiten an der Stelle $\vec{x} = \overrightarrow{OP}$ __________ **(Formel 68)** .

e_1) Wo schneiden sich die Fahrtrouten der Boote. Stoßen Sie dort zusammen?

f_1) Berechnen Sie den Vektor von B_1 nach B_2 zum Zeitpunkt 0, 1 und zum Zeitpunkt t.

g_w) Wie berechnet man den Scheitel einer Parabel $y = ax^2 + bx + c$?

h_1) Berechnen Sie $d(0)$, $d(1)$ und $d(t)$.

i_4) Wann kommen sich die Boote am nächsten? Berechnen Sie dazu nicht den Abstand d sondern das Quadrat des Abstandes d^2 und minimieren Sie dies. Wo sind die Boote dann und wie weit sind sie dann voneinander entfernt? Fortsetzung Klasse 12: Aufgabe 756.

686. Geben Sie von folgenden Bewegungen mit Startpunkt S Richtung $\vec{r}$ und Geschwindigkeit v in $\frac{LE}{ZE}$ eine Darstellung an, bei welcher $\vec{x}_t$ deren Ort nach t ZE beschreibt.

a_1) i) $S(1|3)$, $\vec{r} = \binom{12}{5}$, $v = 13$; ii) $S(1|2)$, $\vec{r} = \binom{8}{15}$, $v = 51$; $\boxed{\text{iii)}}$ $S(2|3)$, $\vec{r} = \binom{24}{7}$, $v = 100$;

$b_{1,T}$) i) $S(1.5|2)$, $\vec{r} = \binom{4}{3}$, $v = 10$; ii) $S(3|4)$, $\vec{r} = \binom{8}{6}$, $v = 20$; iii) $S(6|8)$, $\vec{r} = \binom{12}{9}$, $v = 30$;

c$_{1,T}$) $S(1|2|3)$, $v = 30$; i) $\vec{r} = \begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$, ii) $\vec{r} = \begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix}$, iii) $\vec{r} = \begin{pmatrix}-6\\6\\3\end{pmatrix}$; iv) $\vec{r} = \begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$;

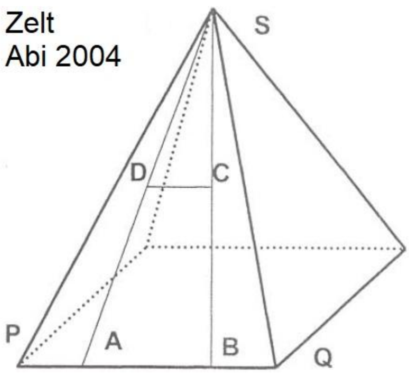
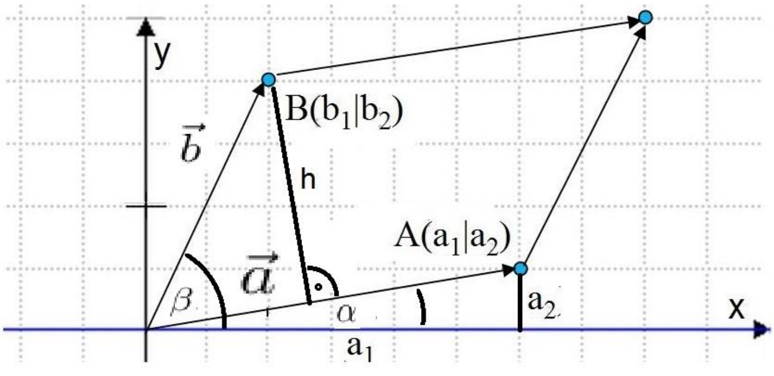


Abb. 163 Ag 258/687 g



Ag 258/690: Von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erzeugtes Parallelogramm

10.1.15 Geraden im Abitur

687. (Ⓤ) (≈ Abi 2006) Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} + s \cdot \vec{v}$. (Basisformeln: F 64, F 66, F 67, BD).

Geben Sie zu jeder der folgenden Lagebeziehungen von g und h jeweils einen möglichen Vektor $\vec{v}$ an und begründen Sie Ihre Antworten: g und h sind **a$_2$)** (echt) parallel, **b$_2$)** identisch, **c$_2$)** windschief; **d$_3$)** g und h schneiden sich im Punkt $S(-4|0|-1)$. (BAg 255/679)

e$_2$) (≈ Abi 2016) Gegeben ist die Gerade g durch die Punkte $P(3|0|1)$ und $Q(2|-4|-2)$. Untersuchen Sie, ob es einen Punkt auf g gibt, dessen drei Koordinaten identisch sind (BAg 252/665).

f$_3$) (≈ Abi BY 2018) Sei $P_a(2|a-4|4)$ und $Q_a(4|a-6|5)$ und g_a sein die Geradenschar $\overline{P_aQ_a}$. i) Berechnen Sie den Schnittpunkt S_a von g_a mit der x_1x_2-Ebene. ii) Ermitteln Sie, für welchen Wert von a g_a die x_3-Achse schneidet und berechnen Sie den Schnittpunkt R.

g$_3$) (≈ Abi 2004) Ein Zelt hat die Form einer senkrechten Pyramide mit quadratischer Grundfläche ($PQRT$, $a = \overline{RP} = 2m$) und Spitze S (Höhe $h = 2m$) Abb. 257/163. In der Mitte der Vorderfläche PQS befindet sich eine trapezförmige Einstiegsöffnung $ABCD$. C und D sind die Mitten der Strecke BS bzw. der Strecke AS. Die Strecke $\overline{AB}$ hat die Länge $1m$, $|\overline{PA}| = 0.5m$.
i$_2$) Wieviel Prozent der Vorderfläche beansprucht die Einstiegsöffnung?
ii$_3$) Zur Beleuchtung wird eine punktförmige Lichtquelle $25cm$ unter der Spitze aufgehängt. Ihr Licht dringt durch die Einstiegsöffnung nach außen und erzeugt auf dem Boden vor dem Zelt das Bild $ABC'\,D'$ der Einstiegsöffnung als 'Lichtteppich'. Ber. Sie die Länge der Strecke $C'D'$.

688. **Minimalanforderungen UE 10_5 Vektorrechnung**: (Ⓤ) Gegeben seien die Punkte $A(-2|1|3)$, $B(0|2|2)$, $C(2|-2|2)$, $D(2|3|1)$, $E(6|0|0)$, $F(6|5|-1)$, $G(8|6|-2)$; $O(0|0|0)$;
a) Berechnen Sie die Mittelpunkt M von A und F.
b) Ergänzen Sie A, B, C zum Parallelogramm A, B, C, K. **c)** Spiegeln Sie A am Punkt $Z = D$.
d) Welche Lage hat die Gerade $g = \overline{AB}$ mit der Geraden **i)** $g_1 = \overline{CE}$; **ii)** $g_2 = \overline{DG}$; **iii)** $g_3 = \overline{FC}$; **iv)** $g_4 = \overline{CO}$; **e)**$_f$ Geben Sie eine Darstellung aller dreidimensionalen Koordinatenachsen an.

10.2 Das Skalarprodukt (UE 11_6)

Basisformeln: F 14, F 28, F 32, F 34, F 35, F 64, F 65, F 100, F 103.

Das Skalarprodukt ist die Basis zur Winkelberechnung.

10.2.1 2×2 Determinante → 14.15.8 (GFS)

689. **Polarkoordinaten:**$_e$ ⓐ$_e$)Sei $\vec{a} = \binom{a_1}{a_2}$ und sei $|\vec{a}|$ die Länge von $\vec{a}$ und α der Winkel, den $\vec{a}$ mit der positiven $x-$Achse (Vektor ( )) einschließt. Ber. Sie a_1, a_2 abhängig von $|\vec{a}|$ und α.
ⓑ$_3$) Wandeln Sie $\binom{2}{2}$, $\binom{8}{-6}$, $\binom{-1}{-\sqrt{3}}$ und $\binom{0}{-2}$ in Polarkoordinaten um und verallgemeinern Sie!

690. (U) **Determinante:**$_e$ a) Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Vektoren der Ebene und γ deren eingeschlossener Winkel. Berechnen Sie die Fläche des Parallelogramms aus Abb. 163 (abhängig von α, β, $|\vec{a}|$ und $|\vec{b}|$).

b$_w$) Wie lautet das Additionstheorem $\sin(\beta - \alpha)$? c$_e$) Berechnen Sie (mit Hilfe des Additionstheorems Ag 108/280) die Fläche des Parallelogramms abhängig von a_1, a_2, b_1 und b_2.
d$_r$) Die Determinante $\det(\vec{a}, \vec{b}) =$ ____________ entspricht dem o____________ F____________ des Parallelogramms, dass von ____________ erzeugt wurde **(Formel 103)** .
e$_r$) Das LGS $x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} = \vec{c}$ ist eindeutig lösbar ⇔ ____________.

691. Berechnen Sie die Fläche des Parallelogramms, dass von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erzeugt wird.
a$_{b,1}$) $\vec{a} = \binom{2}{1}$, $\vec{b} = \binom{1}{2}$; $\boxed{\text{b}_1}$) $\vec{a} = \binom{3}{4}$, $\vec{b} = \binom{3}{1}$; c$_1$) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$;

10.2.2 Das Skalarprodukt → 14.15.4 + 14.15.5 (GFS) LS: S.293-294

692. (U) a$_w$) Wie lautet das Additionstheorem $\cos(\beta - \alpha)$?
b$_e$) Stellen Sie $\cos(\beta - \alpha)$ abhängig von a_1, a_2, b_1, b_2 sowie $|\vec{a}|$ und $|\vec{b}|$ dar. Verwenden Sie dazu

die Formeln aus Aufgabe 689 **(Formel 86)** : $\cos(\beta - \alpha) =$ ______________.

(KA$_B$) Berechnen Sie den Winkel γ zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

c$_e$) $\vec{a} = \binom{1}{1}$, i) $\vec{b} = \binom{1}{0}$, ii) $\vec{b} = \binom{0}{-1}$, iii) $\vec{b} = \binom{1}{-1}$, iv) $\vec{b} = \binom{-1}{-1}$, v) $\vec{b} = \binom{1}{\sqrt{3}}$, vi) $\vec{b} = \binom{-\sqrt{3}}{-1}$.

vii) Zeigen Sie: $\cos(15°) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. Geben Sie $\sin(15°)$ an. ↓ (KA$_B$) (Teile d,e,f,g)

d$_{1,T}$) $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}$; $\vec{b} =$ i) $\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix}6\\4\\12\end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix}12\\8\\24\end{pmatrix}$ iv) $\begin{pmatrix}-3\\-2\\-6\end{pmatrix}$ v) $\begin{pmatrix}-6\\-4\\-12\end{pmatrix}$ vi) $\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}$ vii) $\begin{pmatrix}-2\\-3\\-6\end{pmatrix}$

e$_{1,T}$) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; $\vec{b} =$ *i)* $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ iv) $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ v) $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ vi) $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ vii) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

f$_{1,T}$) $\vec{a} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$; $\vec{b} =$ *i)* $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ iv) $\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ v) $\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$ vi) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ vii) $\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$

g$_{1,T}$) $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$; $\vec{b} =$ *i)* $\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ iv) $\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$ v) $\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ vi) $\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$ vii) $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

h$_r$) Wir definieren das (ein) Skalarprodukt (e: *scalar product*) als: $\binom{a_1}{a_2} \circ \binom{b_1}{b_2} :=$ ____________.
Erweitern Sie diese Verknüpfung in die dritte Dimension.
i$_e$) Berechnen Sie einige Skalarprodukte und klären Sie $\mathbb{D}$ und $\mathbb{B}$ der Verknüpfung. Das Skalarprodukt ist keine innere Verknüpfung, weil diese aus dem Verknüpfungsbereich h_______ führt.
j$_r$) Multiplizieren Sie zwei Vektoren niemals ____________weise.
k$_1$) Berechnen Sie alle Skalarprodukte $\vec{a} \circ \vec{b}$ und die $\sphericalangle(\vec{a}; \vec{b})$ aus Aufgabe 258/691.
L$_1$) (KA$_G$) Berechnen Sie alle Innenwinkel der Dreiecke $\Delta_1 : A_1(1|2|3), B_1(2|4|5), C_1(5|5|3)$,
$\boxed{\Delta_2}$: $A_2(-1|3|4), B_2(3|1|0), C_2(-2|5|2)$, $\Delta_3 : A_3(0|1|2), B_3(2|-1|1), C_3(2|3|6)$.

693. (Ü) **a$_e$)** Berechnen Sie $\left|\binom{3}{4}\right|^2$ und $\binom{3}{4} \circ \binom{3}{4}$. Verallgemeiner + beweisen Sie! **(Formel 85)** : Sei $\vec{a} = \binom{a_1}{a_2}$, dann ist $\vec{a} \circ \vec{a} =$ __________ $=$ $\vec{a}$. **b$_2$)** Sei $\vec{a} \neq \vec{0}$. Wie lang ist der (Einheits-)Vektor $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$?
c$_2$) Welche Gesetze der Algebra (Kommutativgesetz usw.) gelten für das Skalarprodukt?
d$_2$) Für welche Vektoren $\vec{x}$ gilt $\vec{x} \circ \vec{x} > 0$? $\bar{f}$

694. ($\bar{f}$) **Das mathematische Pendel:$_e$** Ein Pendel wird in eine Kreisbewegung versetzt.
Die Zentrifugalkraft $\vec{F}_Z$ wirkt mit der Stärke $\frac{m \cdot v^2}{r}$ nach ______________), die Gewichtskraft $\vec{G}$ wirkt mit der Stärke $m \cdot g$ nach ______________). Die Richtung $\vec{F}_N$ des Pendels ergibt sich als ______________ von $\vec{F}_Z$ und $\vec{G}$. Um welchen Winkel wird das Pendel ausgelenkt?

10.2.3 Orthogonale Vektoren → 14.15.9 + 14.15.6 LS: S.250-253

695. (Ü) a$_1$) Berechnen Sie den eingeschlossenen Winkel von $\binom{3}{1}$ und $\binom{-2}{6}$.
b$_1$) Orthogonale Vektoren schließen einen Winkel von _____ ° ein. Formulieren Sie mit Hilfe von Ag 258/692 b) eine Bedingung für zwei orthogonale Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$
(Formel 86) : $\vec{a} \perp b \Leftrightarrow$ _____. c$_e$) Was können Sie über den Satz vom Nullprodukt aussagen?

696. (KA$_Z$) Gegeben sind die drei Pkte $A(3|1), B(4|3), C(2|4)$ [später $A(-1|2|2), B(3|10|3), C(10|6|7)$].
(Ü) a$_1$) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig und rechtwinklig ist.
b$_1$) Bestimmen Sie D so, dass ABCD ein Quadrat ist. Berechnen Sie dessen Fläche.
c$_w$) Benennen Sie die ersten drei Parallelogrammgesetze.

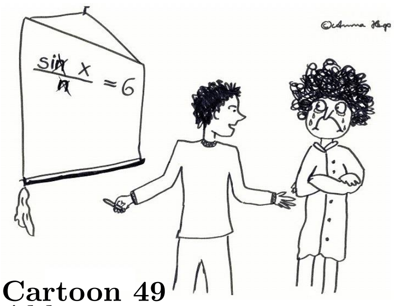
697. (KA$_G$) a$_1$) Zeigen Sie, dass $\binom{3}{-6} \perp \binom{4}{2}$. b$_2$) Wie muss a gewählt werden, damit $\binom{-6}{3} \perp \binom{a}{2}$ ist?
$\boxed{\textbf{c}_2}$) Geben Sie alle Vektoren an, die zu $\binom{4}{2}$ bzw $\begin{pmatrix}2\\6\\-4\end{pmatrix}$ orthogonal sind; ($\overline{\text{KA}}$)
d$_3$) (= WT Abi 2012) Welche Punkte der x_1-Achse bilden jeweils mit $A(6|1|0)$ und $B(2|3|0)$ ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse AB? **e$_2$)** Was stellen diese (Orts-)Vektormengen dar?

698. **orthogonale Zerlegung:$_e$** (U) a$_2$) Sei $\vec{a} = \binom{4}{4}$ und $\vec{b} = \binom{2}{0}$. Projizieren Sie $\vec{b}$ orthogonal auf $\vec{a}$. Welchen Vektor erhalten Sie? **b$_3$)** Zerlegen Sie (allgemein) einen Vektor $\vec{b} = \vec{b}_{||} + \vec{b}_\perp$ so, dass $\vec{b}_{||}$ in Richtung eines Vektors $\vec{a}$ zeigt und $\vec{b}_\perp$ orthogonal zum Vektor $\vec{a}$ ist.

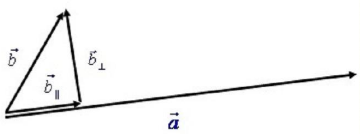
c$_2$) Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$. Zerlegen Sie $\vec{b}_i$ so in zwei Vektoren $\vec{b}_{||}$ und $\vec{b}_\perp$, dass $\vec{b}_{||}$ in Richtung von $\vec{a}$ weist und $\vec{b}_\perp$ orthogonal zu $\vec{a}$ ist.

699. In der Physik wird bei einer schiefen Ebene die Gewichtskraft $\vec{G}$ (mit $|\vec{G}| = m \cdot g$) in Hangabtriebskraft $\vec{F}_H$ und Normalkraft $\vec{F}_N$ aufgeteilt (orthogonal zerlegt). **a$_3$)** Geben Sie den Einheitsvektor $\vec{a}$ der schiefen Ebene abhängig von α und den Vektor $\vec{G}$ (Gewichtskraft) an. **b$_3$)** Berechnen Sie $\vec{F}_H$ und $\vec{F}_N$ (sowie deren Beträge).

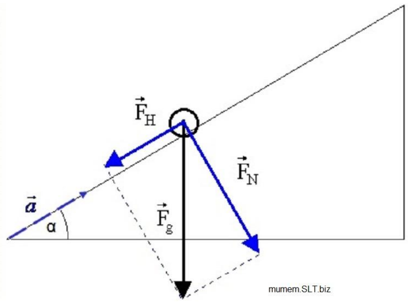
700. (Ü) **Winkelhalbierende:**$_e$ a$_2$) Konstruieren Sie eine Winkelhalbierende. Beweisen Sie die Technik.
b$_e$) Sei $\vec{a} = \binom{1}{2.4}$ und $\vec{b} = \binom{2.4}{1}$. **i$_1$)** Berechnen Sie $|\vec{a}|$ und $|\vec{b}|$. **ii$_1$)** $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind g__________ weil nur die Kom__________ getauscht wurden. **iii$_2$)** *Bestimmen* Sie einen winkelhalbierenden Vektor $\vec{w}$. **iv$_e$)** Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gleich lang, dann ist $\vec{w} =$ ________ ein winkelhalbierender Vektor.
c) Sei $\vec{a} = \binom{1}{2.4}$ und $\vec{b} = \binom{4.8}{2}$. i$_2$) Bestimmen Sie wieder einen winkelhalbierenden Vektor $\vec{w}$. ii$_w$) Sei $\vec{a} \neq \vec{0}$, dann hat _____ Länge 1. iii$_e$) Seien $\vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b}$ (beliebig lang), berechnen Sie einen winkelhalbierenden Vektor $\vec{w}$. **(Formel 87)** : $\vec{w} =$__________.
d$_{1-2}$) Berechnen Sie einen winkelhalbierenden Vektor von $\vec{a}$ und $\vec{b}$: i) $\vec{a} = \binom{0}{2}$, $\vec{b} = \binom{3}{0}$; ii) $\vec{a} = \binom{2}{0}$, $\vec{b} = \binom{-1}{\sqrt{3}}$; iii) $\vec{a} = \binom{3}{4}$, $\vec{b} = \binom{6}{8}$; iv) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; v) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.
e$_1$) i) Berechnen Sie einen winkelhalbierenden Vektor von $\binom{2}{-1}$ und $\binom{-4}{2}$.
ii) Von den Vektoren $\vec{a}$ und $k \cdot \vec{a}$ (k_____) kann so _____ Winkelhalbierende berechnet werden.
f$_2$) Seien $g_1 : \vec{x} = \vec{p}_1 + t \cdot \vec{r}_1$ und $g_2 : \vec{x} = \vec{p}_1 + t \cdot \vec{r}_2$ Geraden. Welchen Punkt haben die Geraden gemeinsam? Berechnen Sie die winkelhalbierenden Geraden g, h von g_1 und g_2.
g$_3$) Zeigen Sie, dass g und h (aus Teil d) o______________ sind.
h$_2$) Ber. Sie alle winkelhalbierenden Geraden von g_{AB} und g_{AC} mit i) $A(2|8)$, $B(5|12)$, $C(9|32)$, ii) $A(1|2|3)$, $B(4|6|3)$ und $C(8|2|27)$.



Cartoon 49
Abb. 164



a) Orthogonale Zerlegung



b) Hangabtrieb

701. (Ü) (≈ Abi 2010) Gegeben sind der Punkt $A(4.5|6|3.5)$ sowie die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
a$_2$) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der Geraden g mit der x_1, x_2-Ebene hier ist $x_3 =$ _.
(b)) i$_2$) Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden h die durch Spiegelung von g an A entsteht.
ii$_3$) Zeigen Sie, dass bei einer Punktspiegelung das Bild einer Geraden g immer __________ zum Urbild ist. **c$_1$)** Sei $A(0|4|0)$, $B(0|0|2)$ und $C(4|0|0)$. Zeigen Sie, dass ΔABC gleichschenklig ist, ergänzen Sie ΔABC durch D zu einer Raute und berechnen Sie deren Innenwinkel.
d$_2$) (≈ Abi 2005) Gegeben sind die Punkte $A(2|1|3)$, $B(2|5|3)$, $C(5|3|5)$ und $D(6|3|5)$. Der Punkt T liegt auf der Geraden g_{CD} und bildet zusammen mit den Punkten A und B ein bei T rechtwinkliges Dreieck. Bestimmen Sie die Koordinaten von T. Welchen Flächeninhalt hat ΔABT?
e$_{1,3}$) (≈ Abi 2016) Gegeben sind die Punkte $B(6|0|0)$, $M_1(0|-3|2.5)$, $M_2(0|3|2.5)$ und $S(0|0|5)$.
i) Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks ΔBM_1M_2. ii) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q, der auf der Kante BS liegt und mit M_1 und M_2 ein rechtwinkliges Dreieck bildet.
f) (≈ Abi 2023) **i$_1$)** Geben Sie eine Parameterdarstellung der Geraden g_{AB} durch $A(1|1|1)$ und $B(2|3|1)$ und g_{AC} durch A und $C(3|2|1)$ an. **ii$_1$)** Begründen Sie, dass g_{AB} und g_{AC} nicht

identisch sind. **iii**$_2$) Die Gerade g_{AB} soll durch Spiegelung an einer Geraden g auf die Gerade g_{AC} abgebildet werden. Best. Sie eine Gleichung einer solchen Geraden g. **iv**$_3$) (Nach Abs 261/10.3) Die Gerade g_{AB} soll durch Spiegelung an einer Ebene E auf die Gerade g_{AC} abgebildet werden. Bestimmen Sie eine Gleichung einer geeigneten Ebene E und erläutern Sie Ihr Vorgehen.

10.2.4 Beweise mit Vektoren (nur LK, $\overline{DHBW}$) (GFS) LS: S.325-326

Algorithmus: Bei einem Beweis mit Hilfe von Vektoren sollten Sie folgendermaßen vorgehen:
1) Fertigen Sie eine Skizze an (das ist sowieso immer gut - benennen Sie vor allem die Punkte).
2) Formulieren Sie Voraussetzung und Behauptung des Satzes als 'Wenn - dann' Aussage (Verwenden Sie dabei die Verbindungsvektoren der Punkte aus Schritt 1).
3) Benennen Sie (möglichst wenige) Vektoren.
4) Stellen Sie die Voraussetzung (oder Behauptung) als Linearkombination der Vektoren aus 3) dar.
5) Rechnen Sie (hoffentlich die Behauptung mit Hilfe der Voraussetzung) aus.

702. (Ü) Beweisen Sie die folgenden Sätze mit Hilfe von Vektoren:
a$_2$) Wenn sich die Diagonalen im Viereck halbieren, dann ist das Viereck ein Parallelogramm.
b$_2$) Sei A, B, C, D ein Parallelogramm und M_1, M_2, M_3, M_4 dessen Seitenmitten, dann ist M_1, M_2, M_3, M_4 ein Parallelogramm.
c$_3$) Was entsteht bei b), wenn A, B, C, D ein beliebiges Viereck ist?
d$_3$) In welchem Verhältnis teilt der Schwerpunkt eines Dreieck dessen Schwerlinie?

703. Beweisen Sie die folgenden Sätze mit Hilfe von Vektoren und dem Skalarprodukt:
a$_3$) Im gleichschenkligen Dreieck ist die Seitenhalbierende orthogonal zur Basis.
b$_3$) Liegt der Mittelpunkt des Umkreises auf einer Seite, so ist das Dreieck rechtwinklig.
c$_3$) Wenn $\vec{a} \perp \vec{b}$ ist, dann ist $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 \quad (\vec{a}^2 = \vec{a} \circ \vec{a})$.
d$_2$) Welche berühmten Sätze verbergen sich hinter b) und c).
e$_2$) Wen in einem Paralleogramm die Diagonalen gleich lang sind, dann ist es ein Rechteck.
f$_5$) Im Drachen sind die Diagonalen orthogonal. Weiter Abs 269/10.4.6

704. (U) **Minimalanforderungen UE 11_6 Skalarprodukt$_f$:** Gegeben seien die Punkte $A_1 = A_2 = A_3(1|2|3)$, $B_1(3|4|4)$, $C_1(-1|3|5)$, $B_2(0|2|4)$, $C_2(2|3|3)$, $B_3(3|4|4)$, $C_3(7|8|6)$,
a$_1$) Berechnen Sie die Innenwinkel der Dreiecke $\Delta_i : A_i, B_i, C_i,\ i = 1, 2, 3$.
b$_2$) Seien $\vec{a} = \overrightarrow{B_2A_2}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{B_2C_2}$; Berechnen Sie $\vec{b}_{||}$ und $\vec{b}_{\perp}$.
c$_2$) Berechnen Sie die Winkelhalbierende von $\overrightarrow{A_2B_2}$ und $\overrightarrow{A_2C_2}$. **Wettbewerbsag: 67/183**

10.3 Ebenenberechnung (UE 12_1)

Basis: F 64, Ag 255/676b, Ag 255/679, F 86. **DHBW erst Abs. 266/10.4.**

10.3.1 Die Parameterform (e: *parametric form*) der Ebene → 14.15.3 LS: S.246-249

705. (U) a$_w$) Sei $A \neq B$; geben Sie die Verbindungsgerade analog zu Ag 253/669 **(Order 66)** an. Erklären Sie die von dieser Parameterdarstellung erzeugte S____________.
b$_1$) Finden Sie Punkte der Ebene aus Abbildung 165. Was haben alle diese Punkte gemeinsam?
c$_e$) Beschreiben Sie die Punkte der Ebene komponentenweise.
d$_e$) Eine Gerade im Raum wird mit der Form $\vec{x} =$ ________ beschrieben. Finden Sie eine analoge Beschreibung für eine Ebene.
e$_r$) Eine Ebene (e: *plane*) ist ________dimensional und hat deshalb ________ nicht k_____________ ________vektoren.

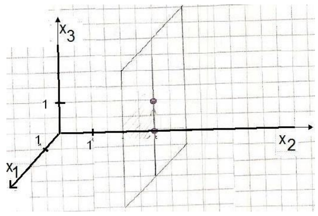


Abb. 165 Ebene

f$_1$) Seien A, B, C drei (nicht kollineare) Punkte. Wie können Sie die Ebene durch diese Punkte darstellen. Vergleichen Sie mit der Darstellung einer Geraden durch A und B. **(Formel 90, FD 23)**: $E_{ABC} : \vec{x} = \overrightarrow{OA}$ ___________.
g$_1$) Berechnen Sie die Ebene durch (i) $A(1|2|3)$, $B(2|2|6)$ und $C(1|1|3)$ (bzw. (ii) $A(0|1|2)$, $B(3|1|1)$ und $C(-1|2|3)$). Liegt der Ursprung in der Ebene?

h_1) Berechnen Sie die Ebene durch $A(1|1|1), B(1|2|3)$ und $C(1|3|5)$. Was fällt Ihnen auf?

706. **Schneiden von Ebenen in Parameterform:**$_e$ L

a$_2$) Sei $E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Schneiden Sie E_1 und E_2. Das _ × _ LGS ist u____________. Damit ist die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ nicht e_________ $(u - g = p = \_)$, idR ____ dimensional (geometrisch: Eine _______).

b) Berechnen Sie den Schnittpunkt S der Ebene E durch $A(1|1|1)$, $B(5|-1|1)$ und $C(3|1|0)$ und der Geraden g durch $P(0|5|2)$ und $Q(1|7|4)$ mit Hilfe eines _ × _ L____.

10.3.2 Die Punktnormalenform (nur LK) → 14.15.12 LS: S.254-255

707. (Ü) a$_e$) Betrachten Sie den Fußboden. Welche Eigenschaft haben alle Vektoren, die auf der Fußbodenebene senkrecht stehen? b$_r$) Es gibt ____ viele Vektoren, die zu einer Ebene senkrecht stehen. Diese heißen N______vektoren (e: *normal vectors*) und sind alle __________.
c$_e$) Gegeben sei eine Ebene E, ein Vektor $\vec{n}$, der zu E orthogonal ist, sowie zwei Punkte der Ebene P und X. Beschreiben Sie die Lage des Vektors $\overrightarrow{PX}$ bezogen auf E bzw. $\vec{n}$. Welche (algebraische) Bedingung gilt für $\overrightarrow{PX}$ und $\vec{n}$? **d$_r$)** Eine Ebene, die den Punkt P enthält und orthogonal zum Vektor $\vec{n}$ ist kann durch die Gleichung _______________ **(Formel 90)** beschrieben werden. Diese Form heißt P_________________________ (e: *normal equation*).

e$_1$) Sei (i) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P(1|1|2)$, $\boxed{\text{(ii)}}$ $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $P(7|2|1)$, (iii) $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P(2|4|3)$.

Geben Sie eine PNF von E an. Liegen $A(2|4|3)$, $B(2|1|2)$ bzw. $C(0|0|0)$ in der Ebene?

708. (U) a$_e$) Gegeben sei die Ebene $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Finden Sie einen Vektor $\vec{n}$, der zu E orthogonal ist. **b$_1$)** Welche Bedingungen gelten für $\vec{n}$? Geben Sie eine PNF von E an.

c$_1$) Um $\vec{n}$ zu finden erzeugt jeder Spannvektor $\vec{s}_1, \vec{s}_2$ eine Gleichung _________ = _.

d$_e$) Das Gleichungssystem hat immer das Absolutglied _ und heißt deshalb h___________.

e$_1$) Homogene LGS haben i______ die (t_________) Lösung $\vec{x}$ = ___; sind also i_________ l_________. $\vec{n}$ wird also von einem (u__________) HLGS mit ____ Gleichungen und ____ Unbekannten gefunden. Es gibt also ____ viele Normalenvektoren.

709. (Ü) Wandeln Sie folgende Ebenen in PNF um $(r, t \in \mathbb{R})$.

a$_2$) $E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\boxed{\textbf{b}_2}$) $E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$;

10.3.3 Die Koordinatenform (KF) der Ebene → 14.15.13 LS: S.256-259

710. (Ü) a$_1$) Multiplizieren Sie $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ aus.

b$_2$) Verallgemeinern Sie Ihr Ergebnis auf $(\vec{x}-\vec{p})\cdot\vec{n} = 0$. Stellen Sie dabei die Vektoren _____________ dar. 'Sammeln Sie sinnvoll'. ↓ **(Formel 90)**
c$_r$) Die KF einer Ebene mit Normalenvektor $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ist ____________________ $(e \in \mathbb{R})$.

Ein Normalenvektor der Ebene steht als '____________' vor den x_i.

d$_1$) Berechnen Sie die Koordinatenform (Koordinatengleichung) von $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$. Welcher spezielle Punkt liegt in der Ebene?

e_r) Die Punkte einer Menge, deren Koordinaten die Gleichung $ax_1 + bx_2 + cx_3 = e$ erfüllen (a, b, c) ____________, stellen eine Ebene dar. Diese Darstellungsform heißt ___________form (e: *Cartesian form*), wobei der Vektor _______ _________ auf E steht.

f_1) Geben Sie von folgenden Ebenen einen Normalenvektor an. i) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 7$; ii) $3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -6$; iii) $x_1 - x_2 + x_3 = 1$; $\boxed{\text{iv)}}$ $x_1 - x_3 = 5$; v) $-x_2 = 2$;

g_e) Wir kennen jetzt drei Darstellungsformen der Ebene; welche Frage stellt sich jetzt?

$(\bar{f})$ h_e) Folgende Objekte (Punkte, Geraden) legen eine Ebene fest. i) __ nicht _______ Punkte, ii) eine Gerade g und ein Punkt P mit P __ g. iii) zwei _________ oder (echt) _______ Geraden.

711. (KA_Z) Berechnen Sie eine Koordinatenform der Ebene die durch die Punkte A, B, C geht.

ⓐ$_{1-2}$)	$A(1\|1\|1),\ B(0\|0\|2),\ C(3\|5\|3)$;	ⓑ$_{1-2}$)	$A(1\|-2\|1),\ B(0\|-2\|1),\ C(0\|1\|2)$;
$\boxed{ⓒ_{1-2})}$	$A(3\|2\|1),\ B(4\|1\|4),\ C(2\|2\|0)$;	ⓓ$_{1-2}$)	$A(4\|0\|0),\ B(0\|4\|0),\ C(2\|2\|2)$;
$\mathrm{e}_{1-2,T}$) ⓘ)	$A(1\|6\|7),\ B(1\|2\|3),\ C(1\|8\|2)$;	ii)	$A(2\|6\|7),\ B(1\|6\|3),\ C(1\|6\|2)$;
iii)	$A(1\|6\|7),\ B(1\|2\|7),\ C(1\|8\|7)$;	iv)	$A(2\|3\|2),\ B(2\|3\|3),\ C(2\|3\|4)$;
$\mathrm{f}_{1-2,T}$) i)	$A(2\|-4\|2),\ B(-3\|2\|1),\ C(0\|0\|0)$;	ii)	$A(1\|2\|2),\ B(2\|3\|2),\ C(0\|0\|0)$;
iii)	$A(1\|1\|2),\ B(2\|3\|2),\ C(1\|2\|0)$;	iv)	$A(1\|1\|4),\ B(1\|2\|6),\ C(3\|0\|6)$;
$\mathrm{g}_{1-2,T}$) ⓘ)	$A(2\|1\|1),\ B(-3\|-3\|-1),\ C(4\|4\|-1)$;	ii)	$A(-2\|-1\|-1),\ B(3\|3\|1),\ C(-4\|-4\|1)$;
$\mathrm{h}_{1-2,T}$) i)	$A(1\|-2\|2),\ B(0\|-2\|4),\ C(-1\|0\|3)$;	ii)	$A(-1\|-2\|2),\ B(0\|-2\|4),\ C(1\|0\|3)$;
ⓘii)	$A(1\|2\|2),\ B(0\|2\|4),\ C(-1\|0\|3)$;	iv)	$A(1\|-2\|-2),\ B(0\|-2\|-4),\ C(-1\|0\|-3)$;
i_{1-2}) ⓘ)	$A(1\|3\|2),\ B(1\|1\|1),\ C(2\|6\|1)$;	ii)	$A(2\|3\|2),\ B(2\|1\|1),\ C(4\|6\|1)$;
iii)	$A(1\|9\|2),\ B(1\|3\|1),\ C(2\|18\|1)$;	ii)	$A(1\|3\|4),\ B(1\|1\|2),\ C(2\|6\|2)$;
$\mathrm{j}_{1-2,T}$) ⓘ)	$A(1\|1\|1),\ B(3\|-1\|0),\ C(5\|3\|2)$;	ii)	$A(2\|2\|2),\ B(6\|-2\|0),\ C(10\|6\|2)$;
$\mathrm{k}_{1-2,T}$) i)	$A(2\|0\|0),\ B(0\|3\|0),\ C(0\|0\|1)$;	ii)	$A(2\|0\|0),\ B(0\|3\|0),\ C(0\|0\|2)$;
iii)	$A(2\|0\|0),\ B(0\|3\|0),\ C(0\|0\|3)$;	iv)	$A(2\|0\|0),\ B(0\|3\|0),\ C(0\|0\|4)$;
$\mathrm{L}_{1-2,T}$) i)	$A(1\|2\|3),\ B(2\|3\|4),\ C(3\|4\|5)$;	ii)	$A(1\|2\|3),\ B(2\|4\|6),\ C(3\|6\|9)$;

Berechnen Sie eine Koordinatenform der Ebene, die die Gerade g und den Punkt P enthält.

$\mathrm{m}_{2,T}$) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$; i) $(-2|0|2)$, ii) $(1|2|3)$, iii) $(4|4|4)$, iv) $(7|6|5)$, v) $(10|8|6)$.

Berechnen Sie eine Koordinatenform der Ebene, welche die Geraden g und h enthält.

$\mathrm{n}_{2,T}$) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$; i) $h_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$, ii) $h_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}4\\6\\2\end{pmatrix}$,

iii) $h_3: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}6\\9\\3\end{pmatrix}$, iv) $h_4: \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\6\\5\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-2\\-3\\-1\end{pmatrix}$, v) $h_5: \vec{x} = \begin{pmatrix}10\\8\\6\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-4\\-6\\-2\end{pmatrix}$,

vi) $h_6: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$, vii) $h_7: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$, viii) $h_8: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$.

712. **Die Elimination der Parameter:**$_{e\ f}$ (Zusatz)

Gegeben sei die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$. Stellen Sie E komponentenweise dar.

Was hat die Parameterform, was die Koordinatenform nicht hat? Wandeln Sie E ohne Verwendung der Idee aus den Aufgaben 262/708 und 262/709 in Koordinatenform um.

10.3.4 Lagebeziehung von Gerade und Ebene (GFS) LS: S.262-264

713. (Ⓤ) **Schnitt g und E:**$_e$ Sei $E: x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3$ und $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$. Schneiden Sie g und E. Stellen Sie dazu g k___________________ dar. Berechnen Sie die Lage der Ebene E und der Geraden durch A_i und B_i, $i = 1, 2, 3$. Versuchen Sie dazu den _______________ zu berechnen. Liegt S zwischen A und B? ↓ (KA_Z) (T) ↓

a_2) $E: x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3$, ⓘ)$A_1(3|5|-5)$, $B_1(2|3|-2)$; ii') $A_2(2|3|-2)$, $B_2(3|5|-5)$;

b$_{2,c}$) $E: x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3$, i) $A_1(1|1|0)$, $B_1(1|3|1)$; ii') $A_2(1|1|1)$, $B_2(1|3|2)$;
c$_{2,c}$) $E: 2x_1 - x_2 - x_3 = -2$, i) $A_1(-1|2|-2)$, $B_1(0|1|1)$; ii') $A_2(-1|2|-1)$, $B_2(0|1|2)$;
d$_2$) $E: 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2$, i) $A_1(1|1|1)$, $B_1(4|2|-1)$; ii') $A_2(1|1|1)$, $B_2(4|2|6)$;
e$_{2,c}$) $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$, i) $A(-1|1|-3)$, $B(0|1|-1)$; ii') $A(-2|2|-6)$, $B(-2|2|-6)$;
f$_{2,c}$) $x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 2$, i) $A(1|2|3)$, $B(-1|0|1)$; ii') $A(2|3|4)$, $B(0|1|2)$;
g'$_2$) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$, i) $A(1|3|3)$, $B(0|1|2)$; ii) $A(-1|-3|-3)$, $B(0|-1|-2)$;
h'$_2$) $4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 5$, i) $A(3|2|1)$, $B(4|2|4)$; ii) $A(-3|-2|-1)$, $B(-4|-2|-4)$;
i'$_2$) $2x_1 + x_2 = 4$, i) $A(3|8|3)$, $B(2|5|3)$; ii) $A(3|8|4)$, $B(2|5|4)$; iii) $A(3|8|5)$, $B(2|5|5)$;
j'$_{2,c}$) $x_1 - x_2 = 1$, i) $A(3|2|1)$, $B(2|1|4)$; ii) $A(4|3|2)$, $B(4|3|5)$; iii) $A(7|6|5)$, $B(7|6|8)$;
k$_2$) $3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 5$, i) $A(4|2|3)$, $B(7|8|0)$; ii) $A(2|3|4)$, $B(0|-5|-6)$;

714. (Ü) a$_e$) Wir wollen einen (algebraischen) Algorithmus finden, der alle Lagen von Geraden und Ebenen entscheidet. Dieser gliedert sich in die drei Phasen: Definitionsphase, Rechnungsphase und Interpretationsphase. Beschreiben Sie, was Sie in der Ag 263/713 gemacht haben.

b$_e$) Suchen Sie einen (geometrischen) Alg. der alle Lagen von Geraden und Ebene entscheidet.

715. (Ü) $_3$) Gegeben sei das Parallelogramm $A(1|2|3)$, $B(5|10|-1)$, $C(11|13|-4)$, D, sowie die Punkte $P(1|3|0)$ und $Q(10|9|3)$. Zeigen Sie, dass die Gerade g_{PQ} die Ebenen E_{ABC} im inneren des Parallelogramms $ABCD$ schneidet.

10.3.5 Zeichnen von Ebenen LS: S.260-261

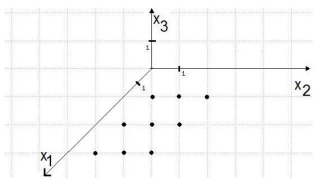


Abb. 166 Punkte

716. Wir suchen eine Darstellung aller Koordinatenebenen.
a$_e$) Benennen Sie die markierten Punkte der x_1x_2 Ebene aus der nebenstehenden Abbildung (166).
b$_e$) Welche Gemeinsamkeit haben alle diese Punkte? Welche Gleichungsdarstellung dieser Ebene würden Sie vorschlagen?

c$_r$) Die x_1, x_2 Ebene ist _______, die x_2, x_3 Ebene ist _______ und die x_1, x_3 Ebene ist _______ **(Formel 91)** . d$_e$) Verifizieren Sie Ihre Darstellung über die PNF.

717. **Spurpunkte:**$_e$ (vgl. Ag 255/678) Gegeben sei die Ebene $E: x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$. Die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen heißen Spurpunkte. Berechnen Sie die Spurpunkte von E. Zeichnen Sie diese in ein Achsenkreuz und verbinden Sie sie. Was erhalten Sie?

(KA$_I$) Zeichnen Sie die folgenden Ebenen mit Hilfe der Spurdreiecke. a$_1$) $E_a: 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6$,
b$_1$) $E_b: -x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -8$, c$_1$) $E_c: x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6$, d$_1$) $E_d: -x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 8$,
e$_1$) $E_e: x_1 + 2x_3 = 6$, f$_1$) $E_f: -x_2 - 2x_3 = -2$, g$_1$) $E_g: -x_1 + 4x_3 = 8$,
h$_1$) $E_h: x_1 = 4$, i$_1$) $E_i: x_3 = 3$, j$_1$) $E_j: -x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8$,
k$_1$) Welche besondere Lage haben die Ebenen e) bis i)? E_e ist ____ zur _-Achse, weil das _______.

L$_1$) ($\approx$ Abi 2018) Zeigen Sie, dass das Spurdreieck von $E: x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$ gleichschenklig ist.

718. a$_e$) Die Spurpunkte einer Geraden sind deren Schnittpunkte mit einer K________________.
b$_e$) Die Spurpunkte einer Geraden sind deren Schnittpunkte mit einer K________________.

Sei $t \in \mathbb{R}$ und ($|d| + |e| > 0, k \neq 0$). Berechnen Sie die Spurpunkte der Geraden

c$_{1,T}$) i) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ii) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ iii) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Geraden der Form $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ e \end{pmatrix}$, haben keinen Spurpunkt ___ und liegen komplett in der Ebene _____.

d$_{1,T}$) i) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ ii) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ iii) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

Geraden der Form $\vec{x} = \begin{pmatrix} k\cdot d \\ k\cdot e \\ a \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} d \\ e \\ b \end{pmatrix}$, haben den Spurpunkt S S (_|_|_____) für $t =$_.
Genau diese Geraden schneiden die _______.

10.3.6 Lagebeziehung von zwei Ebenen (GFS) LS: S.265-268

719. (Ü) **Schnitt E mit E:**$_e$ Sei $E_1 : x_1+2x_2+3x_3 = 3$ und $E_2 : x_1+x_2+x_3 = 2$. Schneiden Sie E_1 und E_2. Interpretieren Sie dazu E_1 und E_2 als ____________ vom Typ ____________________.

720. (KA_Z) (T) (LK) Schneiden Sie die Ebene E jeweils mit den Ebenen F_j.

a_1)	$E : x_1 + x_2 + x_3 = 3$,	i) $F_1 : -x_2 + x_3 = 0$,	ii) $F_2 : 2x_2 - 2x_3 = 0$,
b_1)	$E : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$,	i) $F_1 : -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$,	ii) $F_2 : 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$,
$\boxed{\mathbf{c}_1}$)	$E : x_1 - 2x_2 + x_3 = 2$,	i) $F_1 : 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4$,	ii') $F_2 : -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4$,
d_1)	$E : x_1 + x_2 - x_3 = 1$,	i) $F_1 : -5x_1 + x_2 + x_3 = -3$,	ii') $F_2 : -4x_1 + 2x_2 = -2$,
iii)	$F_3 : -3x_1 + 3x_2 - x_3 = -1$,	iv') $F_4 : -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0$,	v') $F_5 : -x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 1$,
$_r$)	Die Addtion zweier Ebenen E,F mit $E \cap F = g$ erzeugt eine dritte ______ G mit _____ G.		
e$_2$)	$E : 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 = 3$,	i) $F_1 : -2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = -2$,	ii) $F_2 : -2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 2$,
f_1)	$E : -2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 2$,	i) $F_1 : 6x_1 - 12x_2 + 18x_3 = 6$,	ii') $F_2 : -3x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 6$,
$_r$)	Genau bei i_________ oder _________ Ebenen sind die Normalenvektoren ______________.		
g_2)'	$E : 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$,	i) $F_1 : 2x_1 + x_2 + x_3 = 2$,	ii) $F_2 : 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$,

h_1)'	$E : x_1 + 2x_2 = 5$,	i) $F_1 : x_1 + x_3 = 4$,	ii) $F_2 : x_2 + x_3 = 4$,	iii) $F_3 : x_1 + x_2 = 4$,
i_1)	$E : 2x_1 - 4x_2 = 4$,	i') $F_1 : -3x_1 + 6x_3 = 6$,	ii) $F_2 : x_1 - 2x_2 = 2$,	iii)' $F_3 : x_1 + 2x_2 = 2$,
j_2)	$E : -x_1 = 4$,	i)' $F_1 : x_3 = 2$,	ii) $F_2 : x_3 = 3$,	iii)' $F_3 : x_2 = 2$,

721. (Ü) a_2) ($\approx$ Abi 2008) Beschreiben Sie alle möglichen Lagen von E_1 und E_2 geometrisch (mit Hilfe von Vektoren). Schnittgerade = (e: *line of intersection*)
b_2) Beschreiben Sie alle möglichen Lagen von E_1 und E_2 algebraisch, indem Sie die Gleichung aus dem LGS betrachten, wenn Sie eine Variable eliminiert haben.

722. a_1) Welche Lage haben drei Ebenen normalerweise? Geben Sie dafür ein praktisches Beispiel an.
b$_1$) Welche spezielle Lage haben die drei Ebenen $E_1 : x_1 + x_2 - x_3 = 1$, $E_2 : 3x_2 - 2x_3 = 1$ und $E_3 : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ zueinander? Geben Sie auch für diese Lage ein praktisches Beispiel an.

723. (Ü) **Minimalanforderungen** UE 12_1 Ebenen: Gegeben seien die Punkte
$A(2|1|1)$, $B(1|2|1)$, $C(3|3|0)$, $D(4|2|0)$, $G(2|5|3)$, $I(4|7|5)$, $J(3|8|5)$, $K(5|9|4)$, $L(7|2|-1)$.
a) Berechnen Sie die Koordinatenform der Ebene E durch A, B und C. **total wichtig**
b) Zeichnen Sie E. **c)** Wie lauten die Koordinatenformen aller Koordinatenebenen?
d) Geben Sie eine Ebene durch G an, die parallel zur x_1, x_2 Ebene ist.
e) Welche spezielle Lage hat die Ebene $E_1 : x_1 + 8x_3 = 8$? Zeichnen Sie E_1.
f) Welche Lage hat E zu den Geraden $\overline{DL}$, $\overline{IJ}$ und $\overline{IL}$? Berechnen Sie ggf. den Schnittpunkt.
$\mathbf{g}_{LK}$) Berechnen Sie die Schnittgerade von E mit $E_5 : x_1+x_2 = 0$ und mit $E_6 : x_1-2x_2+2x_3 = 2$.
h) Berechnen Sie die Lagen von E zu E_2 durch A, B und D, zu E_3 durch A, B und I und zu E_4 durch I, J und K.

724. (Ü) **Ebenen im Abitur:** (Teile a + b $\approx$ Abi 2011) a) Eine prismenförmige Truhe ist durch ihre Eckpunkte $A(6|4|0)$, $B(6|8|0)$, $C(-4|8|0)$, $D(-4|4|0)$, $P(6|4|4)$, $Q(6|8|6)$, $R(-4|8|6)$ und $S(-4|4|4)$ gegeben. Das Viereck $PQRS$ beschreibt den Deckel der Truhe.

i_1) Stellen Sie die Truhe in einem Koordinatensystem dar. Berechnen Sie das Volumen der Truhe. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in welcher der Deckel der Truhe liegt.

$ii_{3,L}$) Gegeben ist eine Ebenenschar durch $E_a : x_2 - ax_3 = 8 - 6a$. Zeigen Sie, dass die Ebene, in der der Deckel liegt, und die Ebene, in der die Rückwand $BCRQ$ liegt, zur Ebenenschar gehören. Zeigen Sie, dass es eine Gerade gibt, die in allen Ebenen E_a der Schar liegt.

b) Ein Gebäude hat als Grundfläche das Rechteck $A(4|0|0)$, $B(4|6|0)$, $C(0|6|0)$ und $D(0|0|0)$ und als Dachfläche das Viereck $E(4|0|4)$, $F(4|6|1)$, $G(0|6|5)$ und $H(0|0|8)$ (Koordinatenangaben in Meter). i_1) Stellen Sie das Gebäude in einem Koordinatensystem dar. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der die Dachfläche liegt. Zeigen Sie, dass die Dachfläche ein Parallelogramm ist. ii_4) Eine Person mit 1.7 m Augenhöhe bewegt sich vom Punkt $P(5|1|0)$ aus in positiver x_2-Richtung. Wie weit muss sie mindestens gehen, damit sie die Ecke H sehen kann?

c) ($\approx$ Abi 2016) In einem Koordinatensystem beschreiben die Punkte $A(15|0|0)$, $B(15|20|0)$ und $C(0|20|6)$ Eckpunkte der rechteckigen Nutzfläche $ABCD$ einer Tribüne (alle Koordinaten in m). Die x_1x_2 -Ebene stellt den Erdboden dar. Die Ecken der Dachfläche liegen in der Ebene $E : x_1 - 3x_3 = -27$ und vertikal über den Ecken der Nutzfläche. i_1) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der die Nutzfläche liegt. Ermitteln Sie den Inhalt der Nutzfläche. i_2) Aus Sicherheitsgründen muss die senkrecht zum Erdboden verlaufende Rückwand zwischen der Nutzfläche und der Dachfläche mind. $2.5m$ hoch sein. Überprüfen Sie, ob dies erfüllt ist.

d_3) ($\approx$ Abi 2014) An einer rechteckigen Platte mit den Ecken $A(10|6|0)$, $B(0|6|0)$, $C(0|0|3)$ und $D(10|0|3)$ ist im Punkt $F(5|6|0)$ ein $2m$ langer Stab befestigt, der in positive x_3-Richtung zeigt. Eine punktförmige Lichtquelle befindet sich im Punkt $L(8|10|2)$. (Koordinatenangaben in m)
i_1) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der die Platte liegt. Stellen Sie die Platte, den Stab und die Lichtquelle in einem Koordinatensystem dar.
ii_3) Der Stab wirft einen Schatten auf die Platte. Bestimmen Sie den Schattenpunkt des oberen Endes des Stabes. Begründen Sie, dass der Schatten vollständig auf der Platte liegt.

e_3) ($\approx$ Abi 2019) An der Stelle $F(7.8|3|0)$ steht ein Mast senkrecht zur x_1x_2 Ebene. Die Sonne fällt in Richtung $\vec{v} = (-9|1|-4)^\tau$ ($^\tau$ heißt Spaltenvektor) ein. Der Schattenpunkt der Spitze liegt auf der Strecke $O(0|0|0)$, $A(4|6|10)$. Wie hoch ist der Mast (alle Maße in m)?

Cartoon 50

10.4 Das Spatprodukt (UE 12_2)

Basis: Ag 666 h, Ag 691, Ag 708, F 86.

Das Spatprodukt dient zur Berechnung von Pyramidenvolumina.

10.4.1 Das Kreuzprodukt (e: *cross product*) $\rightarrow$ 14.15.7 (GFS) LS: S.303+304 Ag 1,2

725. (Ü) a_1) Was gilt für einen Vektor $\vec{n}$, der zu den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal ist (vgl. Ag 708, F 86)?
b_1) Ber. Sie einfach eine Lösung ($\neq (0|0)$) der Gln: $3x - 4y = 0$, $6x + 11y = 0$, $ax + by = 0$.
c_w) Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$; finden Sie alle Vektoren $\vec{n}$, die zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal sind.
d_4) i) Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht parallel (linear unabhängig). Berechnen Sie (allgemein) einen Vektor $\vec{n}$, der zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal ist **(Formel 92)** .

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad - \quad \\ \quad - \quad \\ \quad - \quad \end{pmatrix}.$$

ii) Beim Lösen des LGS entsteht ein bestimmter Vorfaktor. Wo haben Sie diesen schon einmal gesehen? iii) Berechnen Sie $\vec{a} \times \vec{b}$ aus Teil b)
e_2) (KA_G) Ber. Sie i) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\boxed{\text{ii)}}$ $\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ und iii) ($\bar{f}$) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, sowie das Kreuzprodukt (oder Vektorprodukt) der Richtungsvektoren von Aufgabe 709 (+ Ag 711).
f_2) Zeigen Sie $\vec{a} \perp (\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$ **(Formel 93)** .

726. (Ü) a_e) Berechnen Sie $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$ und verallgemeinern Sie.
b_5) Zeigen Sie $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}$ und $\vec{b}$ sind parallel (linear abhängig) **(Formel 93)** .
c_1) Lösen Sie die Klammer von $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})$ auf. Welches Gesetz verbirgt sich dahinter?
d_1) Lösen Sie die Klammer von $r \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ auf. Warum ist dies kein echtes Assoziativgesetz?
e_1) Berechnen Sie $\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, vergleichen Sie Ihr Erg. mit Ag 725 d) und verallgemeinern Sie.
f_2) Warum gilt das Kommutativgesetz beim Vektorprodukt nicht? Was gilt stattdessen?

727. (Ü) (Nur LK) Ber. Sie eine Koordinatenfom der Ebene durch $A(1|1|1)$, B_a und C_a. Beschreiben Sie die Lage der Schar. $\boxed{a_3)}$ $B_a(3|2|3)$; $C_a(0|0|a)$; b_3) $B_a(1|a|2)$; $C_a(a|1|a)$; c_3) $B_a(4|2|3)$; $C_a(a|1|a)$;
d_3) Bestimmen Sie bei den Teilen a) und c) die Ebene, die A und B_a aber nicht C_a enthält.
e_3) Zeigen Sie, dass sich alle Ebenen der folgenden Scharen ($a \in \mathbb{R}$) in einer Geraden schneiden:
(KA$_L$) **i)** $3x_1 - ax_2 + 3ax_3 = 6a + 3$, **ii)** $3x_1 - 3ax_2 + (2a-1)x_3 = 2 - a$,
$\boxed{\textbf{iii)}}$ $(a+2)x_1 - ax_2 - (a+1)x_3 = a + 2$; **iv)** $(a^2-1)x_1 - (2a - a^2)x_2 + (a - a^2)x_3 = 6a$;
f_4) Untersuchen Sie, welche Punkte der x_2x_3 Ebene keiner Ebene der Ebenenschar
$E_k : 3x_1 + kx_2 - kx_3 = 6$ liegen.
g_5) ($\bar{f}$) (Thx Man Heg) Zeigen Sie: Alle Ebenenscharen (mit gemeinsamen Punkten) der Form $(a_1 \cdot t + b_1)x_1 + (a_2 \cdot t + b_2)x_2 + (a_3 \cdot t + b_3)x_3 = a_4 \cdot t + b_4$ haben eine gemeinsame Gerade.

10.4.2 lineare Abh. im Dreidimensionalen (nur LK) → 10.9.4 LS: S.321-324

728. a_r) Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit $\vec{a} \neq \vec{0}$ heißen parallel (linear abhängig = l.a.), wenn diese die gleiche Richtung haben, oder wenn $\vec{b} =$________ ist. Sie liegen also 'auf einer ______________'.
b_e) Wir betrachten jetzt die Vektoren $\vec{a} = \binom{2}{1}$ und $\vec{b} = \binom{4}{-2}$. Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ l.a.? Was ist $r\vec{a}+s\vec{b} = \vec{0}$ für eine Gleichung und was können Sie über deren Lösungsmenge aussagen?
Bei linear unabhängigen Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ hat das hLGS $r\vec{a} + s\vec{b} = \vec{0}$ ______________ ____________ ______________ $r =$ ____________. Der Nullvektor kann nur trivial linearkombiniert werden.
c_e) Sind $\vec{a}$ und $\vec{c} = \binom{4}{2}$ l.a.? Gilt die Aussage von b) auch für die Gleichung $r\vec{a} + s\vec{c} = \vec{0}$?
Bei ________________________ Vektoren $\vec{a}, \vec{c}$ hat das hLGS $r\vec{a}+s\vec{c} = \vec{0}$ __________________________.
d_e) Definieren Sie mit den Erkenntnissen aus b,c) den Begriff der linearen Unabhängigkeit (l.U.).
e_1) Untersuchen Sie $\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ auf l.U.

729. (Ü) a_e) Verallgemeinern Sie mit Hilfe der Aufgabe 728 a) den Begriff der linearen Abhängigkeit auf drei Vektoren. Definieren Sie auch den Begriff der l.U. mit Hilfe von 728 c).
$b_{e,\bar{f}}$) Untersuchen Sie $\vec{a} = \binom{1}{1}$, $\vec{b} = \binom{1}{2}$ und $\vec{c} = \binom{1}{3}$ auf l.A. Welche Aussage können Sie für drei zweidimensionale Vektoren treffen?
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind als ____________________ linear abhängig, obwohl sie ____________________ l.u. sind.
c_1) Untersuchen Sie $\vec{d} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{e} = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$ und $\vec{f} = \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$ auf l.U.
$\boxed{\mathbf{d}_1}$) Untersuchen Sie $\vec{d} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, $\vec{e} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{f} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ auf l.U.

730. (Ü) a_2) Schneiden Sie die Ebenen $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$ und $2x_2 - 4x_3 = -2$.
b_1) Bilden Sie das Vektorprodukt der Normalenvektoren $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ aus Aufgabenteil a).
c_2) Beweisen Sie: Der Richtungsvektor der Schnittgeraden $\vec{r}_g$ ist __________ von $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

10.4.3 Parallelogrammflächen → 14.15.8

731. (U) a_2) Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\vec{a} \times \vec{b}$ sowie $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

b_2) Zeigen Sie: $|\vec{a}\times\vec{b}| =$ die ______________ des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ _________________ _________________.
Dieser Satz gilt sogar für beliebige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im Raum **(Formel 93)** (siehe Ag 689).

c_r) Die Fläche F eines Dreiecks $\Delta(A, B, C)$ berechnen wir durch $F = |\Delta| =$_______________.

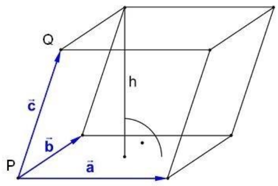
$_{2,T}$) Ein Parallelogramm wird von den Vekt. $\vec{a}$ und $\vec{b}_j$ aufgespannt; ber. Sie dessen Flächeninhalt.

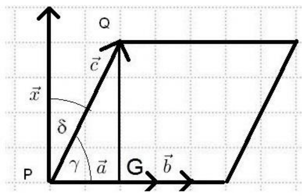
d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, i) $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; ii) $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$; iii) $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$; iv) $\vec{b}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$;

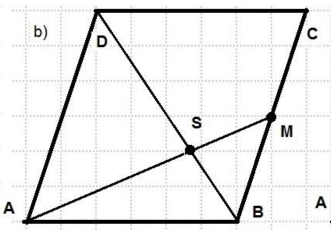
e) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, i) $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$; ii) $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; iii) $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; iv) $\vec{b}_4 = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$;

f) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$, i) $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$; ii) $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$; iii) $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$; iv) $\vec{b}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$;

g$_2$) (KA$_G$) Gegeben sei A, B, C. Ber. Sie D und die Fläche des Parallelogramms A, B, C, D.
i) $A(4|7|5), B(0|5|9)$ $C(8|7|3)$ ii) $A(1|2|3), B(3|4|4)$ $C(1|5|6)$, $\boxed{\text{iii)}}$ $A(2|1|2), B(3|5|8)$ und $C(4|7|4)$.
Die Fläche des Dreiecks $\Delta(A, B, C)$ entspricht der _______ des Parallelogramms A, B, C, D.







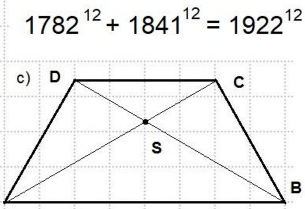


Abb. 167 Spat und Vektorbeweise

10.4.4 Das Spatprodukt → 14.15.10 (GFS) LS: S.305

732. (U) Ein Spat ist ein 'räumliches Parallelogramm'. Ein Spat werde von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ erzeugt (Abb. 268/167). a_w) Wie berechnet man dessen Volumen?
b_e) Die Fläche G des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms ist $G =$ ________. G entspricht der ____________ des Spates. Den eingeschlossenen Winkel α zwischen zwei Vektoren $\vec{g}$ und $\vec{c}$ berechnen wir mit $\alpha =$______________________.

c$_e$) i) Berechnen Sie G und h abhängig von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$. Betrachten Sie Abb. 167. Was könnte $\vec{x}$ sein? ii) Berechnen Sie Winkel δ und damit Winkel γ abhängig von $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$. Welche (erstaunlich einfache) Formel ergibt sich für das Volumen eines Spates? iii) Das _______________ Volumen V eines von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ erzeugt wurde ist $V =$ _______________ **(Formel 94)** , d$_e$) Berechnen Sie das Volumen des Spates, das von den Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ erzeugt wird. Klären Sie den Fehler aus Teil c).

e_r) $\det(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) := (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} > 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden ein _________system **(Formel 94)** .
f_e) Wie berechnet man mit Hilfe des Spatproduktes das Volumen eines Tetraeders (Pyramide mit dreieckiger Grundfläche), der von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ erzeugt wird.
g$_3$) Zeigen Sie $\det(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind linear abhängig **(Formel 94)** .
h_e) Im n-dimensionalen entspricht die Determinante der Vektoren $\vec{x}_1, .., \vec{x}_n$ dem ___________ n-dim ___________ des (n-dim) Spates, das von den Vektoren ___________ ___________ wird.

i$_e$) Gilt $(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{a}) \circ \vec{c}$? Wie ändert sich der Wert, wenn man $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ beliebig vertauscht?

j$_r$) $(\vec{a}\times\vec{b}) \circ \vec{c} = \_(\vec{b}\times\vec{c}) \circ \vec{a} = \_(\vec{c}\times\vec{a}) \circ \vec{b} = \_(\vec{a}\times\vec{c}) \circ \vec{b} = \_(\vec{c}\times\vec{b}) \circ \vec{a} = \_(\vec{b}\times\vec{a}) \circ \vec{c}$ (z__________).

733. (Ü) (KA_l) Ber. Sie das Volumen einer Pyramide mit dreieckiger Grundfläche und den Eckpunkten
a_2) $A(1|1|1)$, $B(2|1|2)$, $C(3|2|4)$, $D(-1|-1|3)$; b_2) $A(0|1|2)$, $B(3|2|3)$, $C(-1|2|3)$, $D(3|-2|5)$;
$\boxed{c_2}$) $A(2|2|1)$, $B(6|3|1)$, $C(2|3|3)$, $D(3|2|2)$; d_2) $A(0|0|1)$, $B(1|1|1)$, $C(-1|0|2)$, $D(1|2|2)$;

734. a_1) Untersuchen Sie die l.U. der Vektoren von Aufgabe 729 c und d mit Hilfe des Spatproduktes.
Für welche a sind $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig?
b$_3$) $\vec{a} = \begin{pmatrix} a^2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$; c$_3$) $\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$;

735. **Pyramiden im Abitur:**$_e$ a$_1$) (≈ Abi ′19) Die Pkte $A(6|6|0), B(2|8|0), C(2|3|5)$ und $S(4|6|10)$ sind Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide. Stellen Sie diese in einem Koordinatensystem dar und berechnen Sie deren Volumen. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E_{ABC}.
b) (≈ Abi ′18) i) Ber. Sie das Volumen der Pyramide $A(0|0|15)$, $B(0|30|15)$, $C(-25|5|15)$, $D(-10|10|35)$.
ii) (Nach UE 12_4) Welcher Punkt der Strecke D und $F(-5|5|15)$ hat zur Ebene E_{ABC} den Abstand 8?

10.4.5 Die Cramersche Regel → 14.15.11 + 11.3.8 (GFS)

736. (Ü) Wir betrachten das LGS

$$\begin{pmatrix} 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & =7 \\ -x_1 & +4x_2 & -2x_3 & =0 \\ -5x_1 & +6x_2 & +7x_3 & =3 \end{pmatrix} \text{ vektoriell: } x_1\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

verallgemeinert $x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c} = \vec{d}$. Ein LGS ist also als Vektorgleichung interpretierbar.
a$_e$) 'Kreuzmultiplizieren' Sie die Vektorgleichung mit $\vec{b}$. $\vec{b} \times \vec{b} =$ __, weil $\vec{b}$ l______________ ist.
Danach skalarmultiplizieren Sie das Ergebnis mit $\vec{c}$. $(\vec{c} \times \vec{b}) \circ \vec{c} =$ __.
Damit ist das LGS (teilweise) ____________.
b$_w$) (Reminder): D__________________ durch einen Vektor (allein) ist v__________________!
c$_2$) Geben Sie eine Formel für x_2 und für x_3 an.
Die Lösung eines LGS kann direkt mit Hilfe von __ Spatprodukten angegeben werden.
d$_2$) Die Formel gilt nicht, falls $(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}$ _____.
e$_2$) Welche Aussage können Sie über eindeutige Lösbarkeit von LGS ($3G$ $3U$) machen?
f$_2$) Wenden Sie Ihr Ergebnis auf das obige LGS an.
g$_2$) Stellen Sie das nebenstehende LGS vektoriell dar und berechnen Sie die Lösung mit Hilfe der Cramerregel

$$\begin{pmatrix} x_1 & +2x_2 & -3x_3 & =5 \\ 2x_1 & +6x_2 & +3x_3 & =14 \\ -3x_1 & +4x_2 & & =5 \end{pmatrix}$$

h_2) Berechnen Sie (wenn möglich) die LGS der Aufgaben $\boxed{\text{736 a)}}$, 276/762 c), 278/768 g) sowie 280/776 a) und 776 b) mit Hilfe der Cramerregel.

10.4.6 Das Teilverhältnis (nur LK, $\overline{DHBW}$) → 14.15.17 (GFS) LS: S.327-331

737. (U) a_1) Herr Sd teilt sich mit seinem Bruder einen Bauernhof im Verhältnis 7:5. Der Hof hat einen Gesamtwert von 360 000 €. Welchen Wert hat der Besitz von Herrn Sd (Rechnung verlangt)?
b_1) Wir betrachten die drei Punkte $S(1|1)$, $T(3|5)$ und $Z(4|7)$. Welche Eigenschaft haben die drei Punkte? Welchen Teil der Strecke SZ hat man in T zurückgelegt? Definieren Sie Größe 'Teilstrecke' (TS). Wo haben Sie diese Größe schon ein Mal gesehen?
c_2) Zeichen Sie in Ihre Skizze aus b) noch zwei weitere induzierte Punktetripel mit gleicher Teilstrecke ein. **d**$_e$**)** Es genügt die Teilstrecke von _________ ______________ zu berechnen.
e_1) Berechnen Sie die Teilstrecke von $S(5|2|-8)$, $Z(13|-2|12)$ und $T(7|1|-3) = TS(S, Z, T)$.
f_1) In welchem Verhältnis teilt T die Stecke SZ? Definieren Sie 'Teilverhältnis' und berechnen Sie $TV(S, Z, T)$ mit den Punkten aus b) und c).
g_2) Wie kann $TV = TV(S, Z, T)$ (fast bijektiv) in $TS = TS(S, Z, T)$ umgerechnet werden?

738. (Ü) Vorr.: Abs 261/10.2.4; Suchen Sie bei den Teilen a bis d einen Vektorzug mit Parametern und argumentieren Sie mit linearer Unabhängigkeit.

a_3) Zeigen Sie (vektoriell), dass im Parallelogramm sich die Diagonalen halbieren.

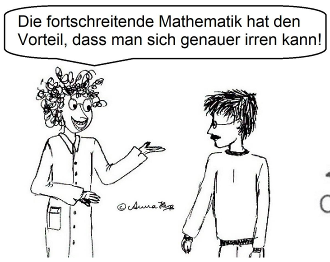
b_3) Sei A, B, C, D ein Parallelogramm und M die Mitte von $\overline{BC}$ und sei $S = \overline{AM} \cap \overline{BD}$. Welchen Teil der Strecke $\overline{AM}$ hat man in S zurückgelegt (Abb. 268/167b)?

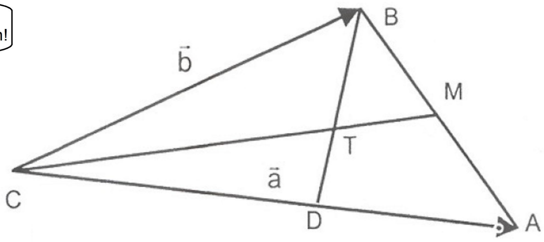
c_3) Im gleichschenkligen Trapez A, B, C, D ist $|\overline{AB}| = 2 \cdot |\overline{CD}| = 2 \cdot |\overline{AD}|$. Sei S der Schnittpunkt der Diagonalen. Welchen Teil der Strecke $\overline{AC}$ haben Sie in S zurückgelegt (Abb. 268/167c)?

d_3) Zeigen Sie, dass sich die Schwerlinien im Dreieck im Verhältnis 2:1 teilen.

e_3) Abi 2004: (Abb: 168a) Ein Dreieck ABC wird durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt. M ist die Mitte der Strecke AB. T teilt die Strecke CM im Verhältnis $3:1$. Die Strecke BD verläuft durch T. In welchem Verhältnis wird diese Strecke durch T geteilt?

f_2) Abi 2005: Die Pkte P, Q, R und S bilden die Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide mit der Spitze S. Die Pkte M_1 und M_2 sind die Mittelpkte der Strecken PQ und PR, die Pkte M_3 und M_4 sind die Mittelpkte der Strecken QS und RS. Zeigen Sie, dass $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_3M_4}$ gilt.





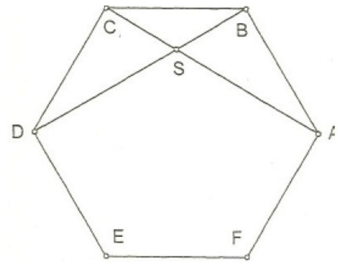
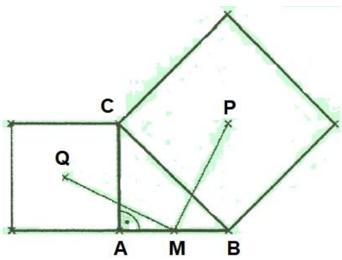
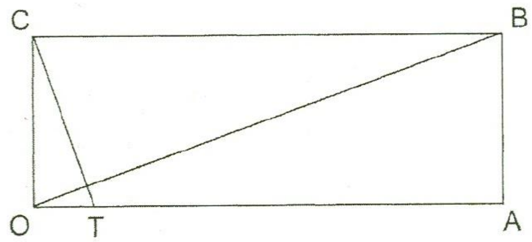


Abb. 168 Abi 2004 Abi 2006

g_2) Abi 2006: (Abb: 168b) Gegeben ist das regelmäßige Sechseck $ABCDEF$. Bestimmen Sie das Verhältnis, in dem sich die Strecken AC und BD teilen.

h_2) Abi 2007: (Abb: 169a) Das Dreieck ΔABC ist gleichschenklig und rechtwinklig, P und Q sind die Schnittpunkte der Quadratdiagonalen, M ist die Mitte von AB. Beweisen Sie, dass die Strecken MP und MQ orthogonal und gleich lang sind.





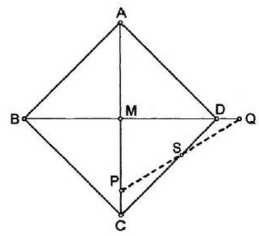


Abb. 169 Abi 2007 Abi 2009 Abi 2010

i_2) Abi 2008: Im Viereck $ABCD$ gilt für die Diagonale AC: $\overrightarrow{AC} = 0.4 \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Zeichnen Sie den Sachverhalt. In welchem Verhältnis wird die Diagonale AC von BD geteilt?

j_2) Abi 2009: (Abb: 169b): Das Rechteck $OABC$ ist dreimal so lang wie breit. Für den Punkt T gilt $\overrightarrow{OT}=\frac{1}{9} \cdot \overrightarrow{OA}$. Zeigen Sie, dass die Strecken OB und TC orthogonal sind.

k_2) Abi 2010: (Abb: 169c) Das Quadrat $ABCD$ hat den Mittelpunkt M. Die Punkte P und Q werden so gewählt, dass $\overrightarrow{MP}=\frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{MC}$ und $\overrightarrow{MQ}=\frac{5}{4} \cdot \overrightarrow{MD}$ gilt. Die Strecken CD und PQ schneiden sich im Punkt S. In welchem Verhältnis teilt der Punkt S die Strecke CD?

739. **Minimalanforderung, nur LK** UE 12_2: Berechnen Sie die Ecke D, die Grundfläche und das Volumen einer Pyramide deren Grundfläche ein Parallelogramm $A(5|2|0), B(2|5|0), C(4|2|-2), D$ und deren Spitze $S(1|1|0)$ ist.

10.5 Schnittwinkel und Abstände (UE 12_4)

Basis: F 31, F 32, F 34, F 35, F 66, F 85, F 86, Ag 263/711.

10.5.1 Schnittwinkel ($\overline{\mathbf{RP}}$) LS: S.295-298

740. (Ü) a$_w$) Mit welcher Formel berechnet man den Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$?
b$_2$) Berechnen Sie den Schnittwinkel der Geraden g_1 und g_2. Warum schneiden sich die Geraden?

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ und } g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

c$_1$) Verallgemeinern Sie Ihr Ergebnis auf $g_1 : \vec{x} = \vec{p_1} + t\vec{r_1}$ und $g_2 : \vec{x} = \vec{p_1} + t\vec{r_2}$.

741. (Ü) a$_e$) Berechnen Sie den Schnittwinkel von $E_1 : x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -3$ und $E_2 : x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5$.
b$_e$) Verallgemeinern Sie auf $E_1 : (\vec{x} - \vec{p_1}) \circ \vec{n_1} = 0$ und $E_2 : (\vec{x} - \vec{p_2}) \circ \vec{n_2} = 0$

742. (Ü) Wir wollen den Schnittwinkel zwischen einer Geraden $\vec{x} = \vec{p} + t\vec{r}$ und einer Ebene $E : (\vec{x} - \vec{q}) \circ \vec{n} = 0$ berechnen.
a$_e$) Welche Probleme gibt es dabei? Erstellen Sie eine S_______.
b$_e$) Welchen Winkel können Sie einfach berechnen?
c$_1$) Welcher Zusammenhang besteht zwischen β und α?
d$_e$) Welche Formel können Sie anwenden? Vereinfachen Sie Ihre gefundene Schnittwinkel-Formel.

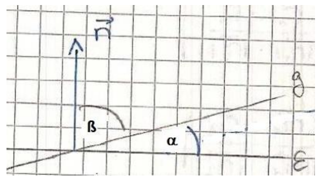


Abb. 170 $\sphericalangle (g, E)$

743. a$_r$) Seien für i=1,2 die Geraden $g_i : \vec{x} = \vec{p_i} + t \cdot \vec{r_i}$ und die Ebenen $E_i : (\vec{x} - \vec{q_i}) \cdot \vec{n_i} = 0$ und die Vektoren $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ definiert. Geben Sie die Winkel $\sphericalangle (g_1, g_2)$, $\sphericalangle (E_1, E_2)$, $\sphericalangle (g_1, E_1)$, $\sphericalangle (\vec{v_1}, \vec{v_2})$ an.
b$_1$) Bei gleichen Objekten benutzt man __________, bei ungleichen __________.
c$_1$) (KA$_G$) Seien $E_1 : 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$, $E_2 : x_1 + x_2 + x_3 = 3$, $E_3 : 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3$, sowie $A(1; 1; 1)$, $B(3; 3; 0)$, $C(3; 0; 3)$ gegeben. Berechnen Sie $\sphericalangle (E_1, E_2)$, $\sphericalangle (E_1, E_3)_f$, $\sphericalangle (E_2, E_3)$, $\sphericalangle (g_{AB}, g_{AC})$, $\sphericalangle (g_{BA}, g_{BC})$, $\sphericalangle (g_{CA}, g_{CB})$, $\sphericalangle (E_i, g_{AB})$, $\sphericalangle (E_i, g_{AC})$, $\sphericalangle (E_i, g_{BC})$ $(i = 1, 2, 3)$.
d$_1$) Welche Geraden g sind orthogonal zu einer Ebenen E_i. ↓ **(Formel 95)** .
e$_r$) $g \perp E \Leftrightarrow \vec{r}$ ____ $\vec{n}$; $g || E \Leftrightarrow \vec{r}$ ____ $\vec{n}$. $E_1 \perp E_2 \Leftrightarrow \vec{n_1}$ ____ $\vec{n_2}$; $E_1 || E_2 \Leftrightarrow \vec{n_1}$ ____ $\vec{n_2}$;

10.5.2 Abst. Pkt, Ebene (im Raum) → 14.15.14 (GFS) LS: S.280-282

744. a$_e$) Gegeben sei die Gerade $g : \vec{x} = \binom{3}{2} + t \binom{4}{3}$. Berechnen Sie den Abstand von $P_1(-4|3)$ zu g.
b$_1$) Berechnen Sie auch den Abstand von $P_2(6| - 2)$, $P_3(-5|0)$ und $P_4(-3|3)$ zu g.

745. (Ü) a$_e$) Berechnen Sie den Abstand von $P_1(5|3|3)$ zur Ebene $E : 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$. Verwenden Sie das Hilfsmittel aus Aufgabe 271/744. b$_3$) Verallgemeinern Sie!
c$_2$) Berechnen Sie den Abstand von E zu i) $P_2(2|0|3)$, $\boxed{\text{ii}}$) $P_3(7|2|6)$ und iii) $P_4(-2|-2|-1)$.

10.5.3 Abstand Punkt Gerade (nur LK) (GFS) LS: 286-288

746. (U) a$_e$) Berechnen Sie den Abstand von $P_1(3|4|7)$ zur Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Welche Hilfsmittel benötigen Sie? Vgl. Aufgabe 271/745. ↓ (KA$_G$)
b$_2$) Berechnen Sie den Abstand von g zu i) $P_2(3|4|2)$, $\boxed{\text{ii)}}$ $P_3(2|9|7)$ und iii) $P_4(-1|0| - 6)$.
c$_2$) Berechnen Sie den Abstand des Punktes P von der Gerade durch A und B, sowie den Spiegelpunkt P' von P an g_{AB}: i) $P(3|8|12)$, $A(7|0|3)$, $B(4|1|3)$; $\boxed{\text{ii)}}$ $P(-2|3|8)$, $A(3|0|1)$, $B(1| - 2|1)$.

747. (U) Sei $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P(3|9| - 1)$ und sei $\overrightarrow{OW(t)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 + 2t \\ 3 + t \end{pmatrix}$ ein Wanderpunkt.
Was hat $W(t)$ mit der Geraden zu tun? Sei L der Lotfußpunktvon P auf g.
a$_e$) Berechnen Sie $f(t) = |\overrightarrow{PW(t)}|$. Was muss für $f(t)$ gelten, damit $f(t)$ den Wert des Abstandes von g und P annimmt. Berechnen Sie diesen Abstand.
b$_e$) Es gibt ein t_0 für welches $W(t_0) = L$ ist. Was gilt für $\overrightarrow{PL}$ bezogen auf den Richtungsvektor $\vec{r}$ der Geraden? Für welches t_0 ist $W(t_0) = L$? Berechnen Sie damit den Abstand von g und P.

748. (Ü) Sei $g: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{r}$ eine Gerade im Raum und sei Q ein beliebiger Punkt.
a$_e$) Welchen Wert gibt $|\overrightarrow{PQ} \times \vec{r}|$ (geometrisch gesehen) an? b$_e$) Auf welche Weise kann man mit diesem Wert den Abstand der Geraden g vom Punkt Q berechnen?

749. Gegeben sind im Raum eine Gerade g und ein Punkt A, der nicht auf g liegt.
a$_3$) (= Abi 2004) Beschreiben Sie ein Verfahren zur Bestimmung des Abstandes von A zu g.
b$_3$) (= Abi 2011) Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man denjenigen Punkt B auf g bestimmt, der den kleinsten Abstand von A hat.

10.5.4 Spiegelungen von Punkten → 14.15.16 LS: S.300-302

750. **a$_1$)** Spiegeln Sie den Punkt $P(2|-1)$ am Pkt $Z = L(1|1)$ **b$_{1,f}$)** Welche spezielle Lage hat L bezogen auf P und P'? Geben Sie eine Formel für P' an. **c$_1$)** Spiegeln Sie alle Punkte aus den Ag 271/744, 745 und 746 an den Geraden bzw. Ebenen aus den jeweiligen Aufgaben. **d$_r$)** Wenn man eine ganze Gerade spiegeln möchte spiegelt man ____________ und verbindet diese danach.

751. **(Vor. 274/759)** a$_3$) (≈ Abi 2005) Gegeben sind eine Ebene E und ein Punkt P, der nicht in E liegt. P wird an E gespiegelt. Beschreiben Sie ein Verfahren, um den Bildpunkt P' zu bestimmen. b$_3$) (= Abi 2009) Gegeben sind eine Gerade g und ein Punkt A im Raum. A liegt nicht auf g. A wird an der Geraden g gespiegelt. Beschreiben Sie ein Verf. um den Bildpunkt A' zu bestimmen. c$_3$) (= Abi 2010) Die Gerade g und die Ebene E schneiden sich im Punkt S. Die Gerade g' ist das Bild von g bei Spiegelung an E. Beschreiben Sie ein Verfahren zur Bestimmung von g'.

10.5.5 Hessenormalform → 14.15.15 (GFS)

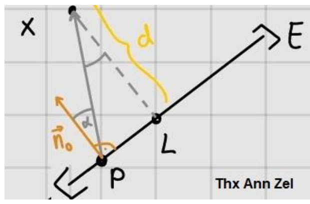


Abb. 171 HNF

752. Sei $\vec{v} = \binom{2}{0}$ welcher Vektor $\vec{v}_0$ zeigt in Richtung $\vec{v}$ und hat Länge 1? Berechnen Sie v_0 für $\vec{v} = \binom{-3}{0}$, $\vec{v} = \binom{4}{3}$ und für $\vec{v}$ (allgemein).
(Ü) Gegeben seien eine Ebene $E: (\vec{x} - \vec{p}) \circ \vec{n}_0 = 0$, mit $|\vec{n}_0| = 1$ (Ag 259/693) und ein Pkt X. Sei L der Lotfußpunkt von X auf E.
a$_2$) Berechnen Sie $\alpha = \sphericalangle(\overrightarrow{PX}, \vec{n}_0)$.
b$_3$) Weil $\overrightarrow{XL}$ _____ $\vec{n}_0$ ist ebenfalls $\alpha = \sphericalangle(\overrightarrow{X\_\_}, \overrightarrow{X\_\_})$.
c$_2$) Berechnen Sie im Dreieck $\Delta($______$)$ $d(X, E)$ abh. von α, X, P und setzen Sie das Ergebnis von Teil a) ein. Welche einfache Gleichung ergibt sich? **Übungsaufgaben: LS: S.283-285**
d$_2$) Die gefundene HNF sieht aus wie eine PNF - wie (und in welche Form) könnte diese umgewandelt werden? **(Formel 96)** ↘
e$_r$) Die Abstandsform einer Ebene $ax_1 + bx_2 + cx_3 = e$ ist d = ________________.

753. (T) (KA$_B$) Ber. Sie bei den folgenden Ebenen E_i die Abstände zu den Punkten P_j mit der HNF.

a$_1$)	$E_a: 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1;$	P_1(3|-1|2),	P_2(5|-3|3),	P_3(7|-5|4);	P_4(9|-7|5);
$\boxed{\text{b}_1)}$	$E_b: 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = -1;$	P_1(2|3|-6),	P_2(4|3|-5),	P_3(6|3|-4),	P_4(8|3|-3);
c$_1$)	$E_c: 8x_1 - x_2 - 4x_3 = 3;$	P_1(-6|2|7),	P_2(1|-3|2),	P_3(8|-8|-3),	P_4(15|-13|-8).

d$_2$) (Zum Üben) Berechnen Sie die Lotfußpunkte der P_i auf E_a, E_b bzw. E_c.

(nur LK) e$_2$) Gegeben sei die Ebenenschar $E_a: 2x_1 + x_2 - 2x_3 = a$. i) Geben Sie die Lage zweier Ebenen E_{a_1} und E_{a_2} an. ii) Ber. Sie die Ebene der Schar, die zu E_1 den Abstand 3 hat.
f$_3$) (≈ Abi 2019) Gegeben sei für $a > 0$ die Geradenschar $g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 0 \\ 3.5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ 2/a \end{pmatrix}$ sowie die Ebenen $T: 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 30$ und $U: -5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 5$. **i)** Begründen Sie, dass keine Gerade der Schar in der Ebene $F: x_3 = 3.5$ liegt. **ii)** Zeigen Sie, dass alle Geraden g_a in einer Ebene W liegen. **iii)** Untersuchen Sie, ob die Schnittgerade h von T und U zur Schar gehört.

g$_3$) (≈ Abi 2019) Gegeben sei die Schar $E_a: a \cdot x_1 + (a-2) \cdot x_2 + x_3 = 4$, $a \in \mathbb{R}$.
i) Berechnen Sie alle gemeinsamen Punkte aller Ebenen E_a.
ii) Geben Sie an für welche Werte von a E_a alle Koordinatenachsen schneidet. Für diese Werte

von a bilden die Spurpunkte von E_a zusammen mit dem Koordinatenursprung die Eckpunkte einer Pyramide. Bestimmen Sie einen Wert für a so, dass das Pyramidenvolumen 6 VE beträgt.
iii) Bestimmen Sie den Wert für a so, dass der Abstand von $P(0|0|1)$ zu E_a maximal ist.
iv) Begründen Sie, dass die Schar keine (verschiedenen) zueinander parallele Ebenen enthält

h) (≈ Abi 2011) Sei F eine Ebene, die $P(6|4|4), Q(6|8|6), R(-4|8|6)$ und $S(-4|4|4)$ enthält und sei weiterhin eine Ebenenschar durch $E_a : x_2 - ax_3 = 8 - 6a$ gegeben. **i**$_2$**)** Zeigen Sie, dass F zur Ebenenschar gehört. **ii**$_3$**)** Zeigen Sie, dass es eine Gerade g gibt, die in allen Ebenen E_a der Schar liegt. **iii**$_2$**)** Berechnen Sie den Schnittwinkel α von E_0 und E_2. **iv**$_5$**)** Welche andere Ebene E_a schließt mit der Ebene E_2 ebenfalls den Winkel α ein?

10.5.6 Vollständiges Fünfseit → 14.15.14 (Abst. windschiefer Geraden) (nur LK) (GFS)

754. (Ü) Gegeben seien die (windschiefen) Geraden $g_1 : \vec{x} = \overrightarrow{OP_1} + t\vec{r}_1$ und $g_2 : \vec{x} = \overrightarrow{OP_2} + t\vec{r}_2$. Ein **Proximum** ist ein Punkt bester Approximation also der Punkt eines Gebildes, der einem anderen Gebilde am nächsten kommt. L_1 bzw. L_2 seien die Proxima der Geraden.

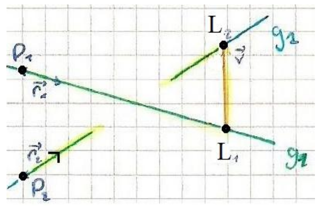


Abb. 172 Fünfseit

a) Beschreiben Sie im Unterrichtsraum wo bei zwei windschiefen Geraden die Proxima liegen. **b**$_1$**)** Wie liegt der Vektor $\overrightarrow{L_1 L_2}$ bezogen auf die Geraden? Geben Sie einen Einheitsvektor $\vec{n}_0$ in Richtung von $\overrightarrow{L_1 L_2}$ an. In welcher Beziehung stehen $\vec{n}_0$ und $\overrightarrow{L_1 L_2}$?
c$_1$) Wir möchten den Abstand d der Geraden berechnen. Dazu wandern wir von P_1 nach P_2 und dabei wollen wir möglichst wenig außerhalb der Geraden laufen. Beschreiben Sie einen Weg - zunächst mit Punkten, dann mit den gegebenen Vektoren.

d$_e$) (Skalar-)Multiplizieren Sie Ihre Vektorgleichung mit $\vec{n}_0$. Tipp: Wie liegen $\vec{r}_i$ und $\vec{n}_0$? Was ergibt $\vec{n}_0 \circ \vec{n}_0$? Welche erstaunlich einfache Formel erhalten Sie? Den Abstand zweier windschiefer Geraden berechnen wir durch $d = |$_______________$|$ **(Formel 97)** .
e$_e$) Warum heißt die Methode 'vollständiges Fünfseit', wo doch nur 4 Punkte vorkommen?
f$_2$) Formel F 97 entspricht eigentlich der _______________ einer Ebene E. Geben Sie E an.

755. a$_2$) Berechnen Sie den Abstand der (windschiefen) Geraden:

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

b$_4$) Geben Sie auch die Koordinaten der Punkte L_1 auf g_1 und L_2 auf g_2 an, die diesen Abstand voneinander haben.

c$_4$) Berechnen Sie analog zu a) Abstand, L_1 und L_2 von

$$(1)\quad g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -12 \\ 33 \\ -15 \end{pmatrix} \text{ und } g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\boxed{(2)}\quad g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -20 \\ -9 \end{pmatrix} \text{ und } g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 23 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$ **ÜA: LS 289-292**

10.5.7 Bewegungsaufgaben (nur LK, $\overline{DHBW}$) LS: S.308: Ag 15,16

756. (Ü) (Voraussetzung Ag 257/685) Zwei Schiffe S_1 und S_2 begegnen sich auf dem offenen Meer. Beide fahren mit konstanter Geschwindigkeit und halten einen geradlinigen Kurs.

a$_1$) Um 12.00 Uhr befindet sich S_1 im Punkt $P_1(10|0)$ und S_2 im Punkt $P_2(-20|100)$. Eine Stunde später ist S_1 im Punkt $Q_1(20|20)$ und S_2 im Punkt $Q_2(0|60)$. Entlang welcher Bahn bewegen sich S_1 und S_2? Wie schnell sind S_1 und S_2? Wo schneiden sich die Bahnen von S_1 und S_2?
b$_3$) Wann kommen sich die Schiffe am nächsten? Wo befinden Sie sich dann?

c_3) S_1 befindet sich zum Zeitpunkt 0 im Punkt $P(-3|1)$ und fährt mit einer Geschwindigkeit von 25 km/h in Richtung $\vec{r_1} = \binom{3}{4}$. Zur gleichen Zeit befindet sich S_2 im Punkt $P_2(2|2)$ und fährt mit einer Geschwindigkeit von 20 km/h in Richtung $\vec{r_2} = \binom{-1}{0}$. Wann und wo kommen sich die Schiffe am nächsten?

d_3) Wenn ein Objekt am Pkt P startet und sich mit Geschwindigkeit v (in $\frac{LE}{ZE}$) in Richtung $\vec{r}$ geradlinig bewegt, dann befindet es sich nach t Zeiteinheiten $\vec{x} = \overrightarrow{OP}$__________ **(Formel 68)** .

757. Ein Ballon B_1 befindet sich im Pkt P_1 und bewegt sich geradlinig gleichförmig mit einer Geschwindigkeit von v_1 in Richtung $\vec{r}_1$. Gleichzeitig startet ein weiterer Ballon B_2 im Pkt P_2 und fliegt mit Geschwindigkeit v_2 in Richtung $\vec{r}_2$. Wann und wo kommen sich B_1 und B_2 am nächsten?

a_3) $P_1(0|0|9)$, $v_1 = 6$ km/h, $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $P_2(0|0|0)$, $v_2 = 6$ km/h, $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\mathbf{b}_3}$) $P_1(0|-29|8)$, $v_1 = 12$ km/h, $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_2(0|0|0)$, $v_2 = 6$ km/h, $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

c_3) $P_1(0|-2|3)$, $v_1 = 10$ km/h, $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_2(0|0|0)$, $v_2 = 9$ km/h, $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

758. (≈ Abi '17) (Ü) Zwei Flugzeuge F_1 und F_2 bewegen sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit über der x_1x_2- Ebene. F_1 befindet sich jetzt im Pkt $P_0(3|-2|6)$, 2 Min. später befindet es sich im Pkt $P_2(21|22|6)$. F_2 befindet sich jetzt im Pkt $Q_0(5|17|1)$ und bewegt sich mit $v_2 = 9\frac{km}{min}$ in Richtung des Punktes $R(7|15|2)$ $(1LE = 1km)$. a_2) Ber. Sie die Geschwindigkeit v_1 von F_1.

b_1) Wo befinden sich F_1 bzw. F_2 nach t Minuten?

c_1) Befinden sich die Flugzeuge im Steig oder im Sinkflug?

d_3) Wenn der Abstand unter $\sqrt{6}$ km sinkt muss F_2 den Kurs ändern. Wann ist das der Fall?

e_3) Jetzt sei v_2 unbekannt (Ort und Richtung von F_2 bleibt aber). Der Pilot von F_1 beobachtet zum Zeitpunkt $t = 1$, dass F_2 direkt unter ihm ist. Ber. Sie die neue Geschwindigkeit v_{2neu} von F_2.

10.5.8 Weitere Verfahrensaufgaben aus dem Abitur (teilweise auch GK, $\overline{DHBW}$)

759. (Ü) a_r) Wenn nach einem Verfahren in der Geometrie gefragt ist, sollten Sie als erstes den beschriebenen Gebilden N________ geben. Wenn Ebenen vorkommen, stellen Sie diese bitte wenn möglich in der ____________form ($\vec{x}$ ____) ___ = _ dar. Eine S_______ kann auch hilfreich sein. Definieren Sie alle eigenen Variablen oder Objekte genau. Alle (bekannten) Größen (eigene und aus dem Aufgabentext) sollten in der Skizze erwähnt werden. Eine Gerade durch zwei (verschiedene) Punkte A und B notieren Sie optimalerweise als _____; eine Ebene durch die drei (nicht kollinearen) Punkte A, B, C als _____; Antwortsätze sollten (wenn nicht anders definiert) die Einheiten ____ für Längen, ____ für Flächen und ____ für Volumina haben. Beachten Sie, dass vom Zweitkorrektor beim Imperativ (Operator) **'beschreiben'** oder **'begründen'** Prosatext (vollständige Sätze) und nicht 'nur' mathematische Formeln erwartet werden (Thx Mk, Hmb).

b_2) (= Abitur 2006) Gegeben sind zwei Punkte A und B. Diese liegen bezüglich einer Ebene E symmetrisch. Beschreiben Sie ein Verfahren zur Bestimmung einer Gleichung von E.

c_3) (= Abitur 2007) Von einem senkrechten Kegel kennt man die Koordinaten der Spitze S, die Koordinaten eines Punktes P des Grundkreises sowie eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der der Grundkreis liegt. Beschreiben Sie ein Verfahren, um den Mittelpunkt M und den Radius r des Grundkreises zu bestimmen.

d_3) (= Abitur 2012) Gegeben sind eine Ebene E und eine Gerade g, die in E liegt. Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man eine Gleichung einer Geraden h ermitteln kann, die orthogonal zu g ist und ebenfalls in E liegt.

e_3) (= Abitur 2014) Gegeben sind Mittelpunkt einer Kugel sowie eine Ebene. Die Kugel berührt diese Ebene. Beschreiben Sie, wie man den Kugelradius und den Berührpunkt bestimmen kann.

f_4) (= Abitur 2016) Von zwei Kugeln K_1 und K_2 sind die Mittelpunkte M_1 und M_2 sowie die Radien r_1 und r_2 bekannt. Die Kugeln berühren einander von außen im Punkt B. Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man B bestimmen kann.

g_3) (= Abitur 2017) Gegeben sind eine Ebene E, ein Punkt P in E sowie ein weiterer Punkt S, der nicht in E liegt. S ist die Spitze eines senkrechten Kegels, dessen Grundkreis in E liegt und durch P verläuft. Die Strecke PQ bildet einen Durchmesser des Grundkreises. Beschreiben Sie ein Verfahren mit dem man die Koordinaten des Punktes Q bestimmen kann.

10.5.9 Kugelaufgaben ohne Kugelgleichungen ($\overline{DHBW}$)

760. Aus dem BY Abitur. Zusatz: Geben Sie auch die beschriebenen Kugelgleichungen an.
(Ü) a_2) ($\approx$ '20) Die Kugel K mit dem Mittelpunkt $M(-13|20|0)$ berührt die Ebene E : $4x_1 - 8x_2 + x_3 = -50$. Bestimmen Sie den zugehörigen Berührpunkt $F \in E$ sowie den Radius r.

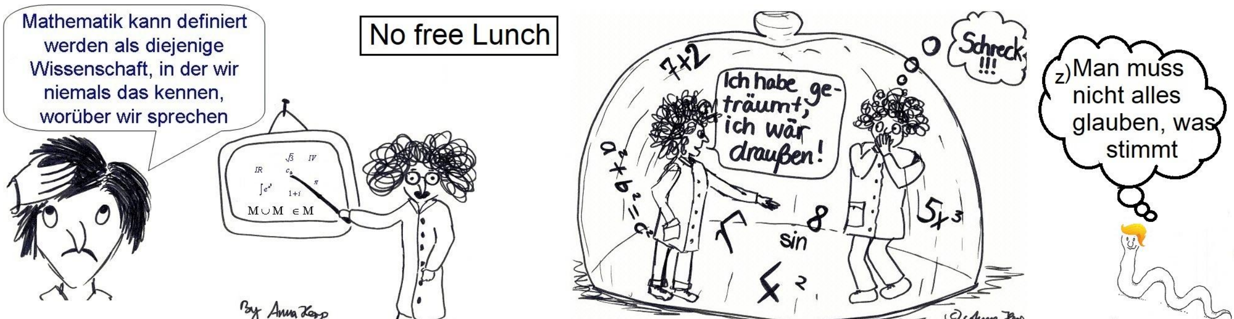
b_2) ($\approx$ '14) Eine Kugel K besitzt den Mittelpunkt $M(-3|2|7)$. Der Punkt $P(3|4|4)$ liegt auf der Kugel. Der Punkt Q liegt ebenfalls auf der Kugel, die Strecke $\overline{PQ}$ verläuft durch M. i) Ermitteln Sie die Koordinaten von Q. ii) Weisen Sie nach, dass die Kugel die x_1x_2-Ebene berührt.

c_2) ($\approx$ '18) Gegeben ist die Kugel K mit Mittelpunkt $M(1|1|0)$ und Radius 5. i) Bestimmen Sie alle Werte $p \in \mathbb{R}$, für die der Punkt $P(5|1|p)$ auf der Kugel liegt. ii) Die Gerade g berührt die Kugel im Punkt $B(-3|8|2)$. Ermitteln Sie eine mögliche Gleichung von g.

d_2) ($\approx$ Probeabi) Zwischen die Ebenen $E_1 : 6x_1 - 12x_2 + 4x_3 = -84$ und $E_2 : 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 12$ soll eine Kugel K gelegt werden, so dass diese beiden Ebenen die Kugeloberfläche berühren. i) Geben Sie Radius und Mittelpunkt einer solchen Kugel K an.
ii) Beschreiben Sie das geometrische Gebilde, auf dem die Mittelpunkte aller Kugeln liegen.

e) ($\approx$ '12) Gegeben sind die Punkte $A(10|2|0)$, $B(10|8|0)$, $C(10|4|3)$, $R(2|2|0)$, $S(2|8|0)$ und $T(2|4|3)$. Der Körper $ABCRST$ ist ein gerades dreiseitiges Prisma mit den dreieckigen Seitenflächen ABC und RST, welches auf dem Rechteck $ABRS$ liegt. i_1) Ber. Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E auf der die Pkte $BSTC$ liegen. ii_2) $M(5|6.5|3)$ ist der Mittelpkt einer Kugel K, die E im Pkt W berührt. Ber. Sie den Radius r von K sowie die Koordinaten von W.

Die Kugel rollt nun die Ebene E hinab. Der Kugelmittelpunkt bewegt sich vom Punkt M aus parallel zur Kante $\overline{CB}$ auf einer Geraden g. iii_1) Geben Sie eine Gleichung von g an. iv_4) Ber. Sie die Länge des Wegs, den der Kugelmittelpunkt zurücklegt, bis die K die x_1x_2-Ebene berührt.



Cartoon 51

761. **Minimalanforderung** UE 12_4 Schnittwinkel und Abstände: Gegeben seien die Punkte $A(6|7|4)$, $B(2|3|2)$, $C(-6|4|7)$, $D(-4|3|5)$, $F(1|-1|3)$, $G(7|5|6)$, $K(4|8|6)$, $L(0|1|1)$, $M(4|5|3)$.
a$_{LK}$) Berechnen Sie die HNF der Ebene E durch C, D und F.
b) Berechnen Sie den Abstand von E zu A. **c)** Spiegeln Sie B an E.
d) Liegen A und B auf der verschiedenen Seiten von E?
e$_{LK}$) Berechnen Sie den Abstand von C zur Geraden $g := \overline{AB}$. (∗) Ber. Sie die HNF von g.
f$_{LK}$) Spiegeln Sie C (später D) an g. **g**$_{LK}$) Ber. Sie den Abstand der Geraden $\overline{AK}$ und $\overline{CD}$.

h$_{LK}$) Berechnen Sie den Abstand der Geraden $\overline{AG}$ und $\overline{CD}$. (∗) Ber. Sie auch deren Proxima.

i) Berechnen Sie den Schnittwinkel der Geraden $g_2 : \overline{DC}$ und $\overline{DM}$.

j) Berechnen Sie den Schnittwinkel der Ebenen E_1 durch A, C, G und E_2 durch A, G, M.

k) Berechnen Sie den Schnittwinkel der Ebene E_2 durch A, G, M und der Geraden $g_2 : \overline{CD}$.

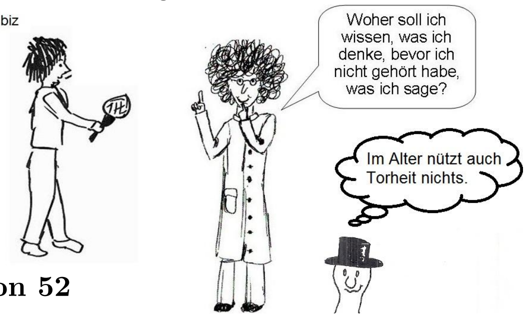
10.6 Lineare Gleichungssysteme (UE 11_5)

Basisformeln: F 58, F 69, Abs. 2.2.3.

10.6.1 LGS 3 Gleichungen, 3 Unbekannte → 11.2.4 LS: S. 213, 214

762. (Ü) a_e) Betrachten Sie das LGS $\begin{pmatrix} 2x & -4y & = 6 \\ 3x & +y & = 2 \end{pmatrix}$. Zur Lösung verwenden wir dabei ein in der Mitte geteiltes Blatt - in die rechte Hälfte kommt eine Nebenrechnung.

$$\begin{array}{llll|lll}
\text{Hauptrechnung} & & & & \text{Nebenrechnung} & & \\
2x & -4y & = 6 & \xrightarrow{\cdot 3} & 6x & -12y & = 18 \\
3x & +y & = 2 & \xrightarrow{\cdot(-2)} & -6x & -2y & = -4 \\
\hline
 & & & & 0x & -14y & = 14 \\
2x & -4y & = 6 & \swarrow & & & \\
 & -14y & = 14 & \Rightarrow & y = -1 & & \\
 & & & \swarrow & & & \\
2x & -4(-1) & = 6 & \Rightarrow & 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \mathbb{L} = \{(1; -1)\} & &
\end{array}$$



Cartoon 52

b_e) Berechnen Sie das LGS (I): $\begin{pmatrix} 2x & +y & +3z & = 8 \\ & 2y & -4z & = 6 \\ & 3y & +z & = 2 \end{pmatrix}$. LGS (II): $\begin{pmatrix} 2x & +y & -3z & = 5 \\ 3x & -2y & +z & = 6 \\ 4x & +3y & -2z & = 16 \end{pmatrix}$

I__________ Sie vorerst die erste Gleichung.

c_e) Sie können 3x3 LGS lösen, wenn das x nur in der e________ Z____________ v____________.
Lösen Sie jetzt LGS (II). (Matrixschreibweise 26/31)

Algorithmus zur Lösung eines 3x3 LGS:

1) E________________ Sie zuerst das _ in der zweiten und dritten Zeile.

2) Lösen Sie dann das entstehende ____________ durch Elimination von _ in der dritten Zeile.

3) Das LGS hat jetzt D____________form und die Variable _ kann bestimmt werden.

4) Bestimmen Sie jetzt erst _ und dann _ durch E____________.

Nur Studium: d_e) Schreiben Sie das LGS aus a in der Matrixform (genannt $\underline{A}\vec{b}$) und lösen Sie es.
e_r) Eine elementare Zeilenumformung (EZU) ist eine Umformung der Matrix $\underline{A}\vec{b}$, bei welcher die ________________ des zugehörigen LGS __________ __________.

1) ________________ einer Zeile mit einem Faktor a ___.

2) __________ einer Zeile zu einer mit einem __________ Faktor multiplizierten Zeile.

3) __________ zweier Zeilen. Warum sind diese Umformungen bei Spalten verboten?

763. (Ü) Berechnen Sie die folgenden LGS:

a_2) $\begin{pmatrix} 2x & -2y & -z & = -1 \\ 4x & +2y & -z & = 5 \\ x & -3y & +2z & = 0 \end{pmatrix}$, b_2) $\begin{pmatrix} 4x & -y & +z & = 2 \\ 2x & +3y & +z & = 8 \\ -2x & +3y & -2z & = 4 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{c'}_2}$) $\begin{pmatrix} 3x & +2y & +2z & = 1 \\ 2x & -2y & -z & = -5 \\ 3x & +2y & +z & = 0 \end{pmatrix}$,

d_2) $\begin{pmatrix} 3x & & -2z & = 8 \\ 3x & -2y & & = 8 \\ & -y & +3z & = 4 \end{pmatrix}$, e_2) $\begin{pmatrix} 3x & +2y & -z & = 4 \\ 4x & -y & +2z & = 5 \\ 2x & +2y & -z & = 3 \end{pmatrix}$, f'_1) $\begin{pmatrix} x & +y & +z & = 3 \\ 2x & -2y & +z & = 1 \\ -x & +2y & -z & = 0 \end{pmatrix}$, g'$_1$) $\begin{pmatrix} 3x & -4y & +5z & =-2 \\ 4x & +y & -z & =5 \\ 2x & -3y & +z & =1 \end{pmatrix}$, h'$_1$) $\begin{pmatrix} 2x & -2y & +5z & =-3 \\ 3x & +2y & -z & =-3 \\ 2x & -5y & +2z & =-12 \end{pmatrix}$, i'$_1$) $\begin{pmatrix} 6x & -7y & +2z & =3 \\ 5x & -3y & +3z & =1 \\ 4x & -4y & +3z & =3 \end{pmatrix}$,

764. (U) a$_1$) Lösen Sie die LGS (1)+(2). b$_e$) Warum sind diese so einfach lösbar? c$_e$) Ein $m \times n$ LGS (mit den Unbekannten $x_1, ..x_n$) hat i) *Dreiecksform* $\Leftrightarrow$ $n =$ ___ und wenn in der Zeile k die Variable ___ und dann höchstens noch die die Variablen ________ vorkommen. ii) *Stufenform* $\Leftrightarrow$ wenn in jeder Zeile mindestens eine Variable w________ vorkommt, als den Zeilen zuvor. Aus optischen Gründen sollte die Reihenfolge der Variablen sinnvoll gewählt werden.

d$_r$) Ein $m \times n$ LGS heißt *überbestimmt* $\Leftrightarrow$ _____ und *unterbestimmt* $\Leftrightarrow$ _____.

(1) $\begin{pmatrix} x_1 & -2x_2 & +2x_3 & =1 \\ & 2x_2 & +3x_3 & =5 \\ & & 6x_3 & =6 \end{pmatrix}$, (2) $\begin{pmatrix} 4x_1 & -x_2 & +3x_3 & =11 \\ & 3x_2 & +2x_3 & =12 \\ & & 4x_3 & =12 \end{pmatrix}$, (3) $\begin{pmatrix} 2x_1 & -x_2 & & =1 \\ & 2x_2 & -x_3 & =1 \\ & & 0 & =0 \end{pmatrix}$.

e$_e$) Welche der LGS (1), (2), (3), 276/763d, 763m, 763r haben Stufenform; welche Dreiecksform?
f$_e$) (Nur LK) Erklären Sie, wie Sie schrittweise ein 4×4 LGS auf Dreiecksform bringen sollen.

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = a_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = a_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = a_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{①} \begin{pmatrix} x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4= \\ x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4= \\ x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4= \\ x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4= \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{②} \begin{pmatrix} x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4= \\ x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4= \\ x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4= \\ x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4= \end{pmatrix} \xrightarrow{③} \begin{pmatrix} x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4= \\ x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4= \\ x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4= \\ x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4= \end{pmatrix}$$

g$_3$) (Nur LK) Berechnen Sie: i) $\begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 7 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{ii)}}$ $\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 9 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 7 \end{pmatrix}$

10.6.2 Steckbriefaufgaben (Interpolation 3) LS: S. 219-221

765. (Ü) (KA$_l$) (Siehe Ag 92/223 und 155/395) Ber. Sie den Funktionsterm der beschriebenen Fktn.
a$_2$) Eine Parabel 2. Ordnung geht durch die Punkte $P(2|2)$, $Q(3|4)$ und $R(4|8)$.
$\boxed{\textbf{b}_2}$) Eine Parabel 3. Ordnung geht durch die Punkte $P(0|1)$, $Q(1|0)$, $R(-1|-4)$ und $S(2|-1)$.
c$_3$) Eine Parabel 3. Ordnung hat den lokalen Tiefpunkt $T(-1|1)$ und den Hochpunkt $H(1|6)$.
d$_3$) Eine Parabel 3. Ordnung hat den lokalen Tiefpunkt $T(5|-26)$ und den Wendepkt $W(3|-10)$.
e$_3$) Eine Parabel 4. Ordnung ist achsensymmetrisch zur $y-$Achse, sie geht durch die Punkte $P(0|2)$ und $Q(1|1)$, wobei sie bei $x = 1$ ein Minimum besitzt.
f$_3$) Eine ganzrationale Funktion 4. Grades hat bei $x = 0$ eine Extremstelle. An der Stelle $x = 1$ verläuft die Wendetangente parallel zur $x-$Achse. An der Stelle $x = -2$ hat ihr Graph die Tangente $y = -24x - 47$. $\mathbb{L}$ von 277/764 h) i) (1;2;0;1) ii) (2;1;1;0)
g$_2$) ($\approx$ Abi '08; $\bar{f}$) Für eine ganzrationale Funktion h zweiten Grades gilt: $T(-1|-4)$ ist der Tiefpunkt und $Q(2|5)$ ein weiterer Punkt ihres Schaubilds.

766. (Ü) **a**$_e$) Was ist der Kobayashi-Maru-Test?
b$_w$) Welcher Bezug besteht zwischen einem Intelligenztest und Ag 64/169 (insbesondere Teil o).
c$_2$) Wie bin ich auf die Folge $a_n = \frac{8}{30}n^5 - \frac{14}{3}n^4 + \frac{92}{3}n^3 - \frac{280}{3}n^2 + \frac{3902}{30}n - 63$ gekommen?
d$_4$) Geben Sie eine Technik an, mit welcher Sie eine beliebige Folge fortsetzen können, deren Anfang $a_1, a_2, ..., a_n$ bekannt ist.

10.6.3 LGS mit unendlich vielen Lösungen (LK) → 11.1.9 + 11.2.6 LS: S.225-230

767. (Ü) a_1) Nina kauft beim Bäcker x Brötchen zu 0.3 € und y Hörnchen zu 0.6 € pro Stück. Insgesamt hat sie 2.40 € ausgegeben. Wieviele Brötchen bzw. Hörnchen hat Nina gekauft? Geben Sie alle möglichen Kombinationen an.

b_e) Lösen Sie das LGS $\left(\begin{array}{rrl} 2x & -4y & =6 \\ -3x & +6y & =-9 \end{array}\right)$. Geben Sie dessen Lösungsmenge analog zu Ag 26/30 (Klasse 8) an.

c_e) Wie geht die zweite Gleichung aus der ersten hervor?

d_4) Welche Bedingungen müssen die Koeffizienten beim LGS $\left(\begin{array}{rrl} ax & +by & =e \\ cx & +dy & =f \end{array}\right)$ erfüllen damit das LGS eine, keine oder unendlich viele Lösungen hat?

768. (U) (KA_G) Lösen Sie die folgenden LGS (ohne GTR).

a_2) $\left(\begin{array}{rrl} x & -2y & =6 \\ -2x & +4y & =-12 \end{array}\right)$, b_2) $\left(\begin{array}{rrl} 4x & +6y & =12 \\ -6x & -9y & =-18 \end{array}\right)$, c_2) $\left(\begin{array}{rrrl} x & +2y & +3z & =6 \\ 4x & +5y & +6z & =15 \\ 7x & +8y & +9z & =24 \end{array}\right)$,

d_2) $\left(\begin{array}{rrrl} x & +y & +z & =3 \\ x & -3y & +3z & =1 \\ & 4y & -2z & =2 \end{array}\right)$, $\boxed{e_2)}$ $\left(\begin{array}{rrrl} 2x & -4y & +4z & =6 \\ -2x & -y & +z & =-1 \\ 4x & -3y & +3z & =7 \end{array}\right)$, f_2) $\left(\begin{array}{rrrl} x & -3y & +2z & =-2 \\ 2x & +4y & -z & =6 \\ 4x & -2y & +3z & =2 \end{array}\right)$,

$g_{3,f}$) $\left(\begin{array}{rrrl} 2x & -2y & +5z & =2 \\ x & -2y & -z & =1 \\ 3x & -2y & +11z & =3 \end{array}\right)$, h_3) $\left(\begin{array}{rrrl} 3x & -y & +2z & =7 \\ x & +2y & +3z & =14 \\ x & -5y & -4z & =-21 \end{array}\right)$, i'$_3$) $\left(\begin{array}{rrrl} 1x & +0y & +z & =1 \\ 3x & +0y & +2z & =3 \\ 4x & +0y & +3z & =4 \end{array}\right)$,

j_3) $\left(\begin{array}{rrrl} 3x & -4y & +5z & =4 \\ x & & -3z & =-2 \\ & y & +4z & =5 \\ x & +y & +z & =3 \\ -x & -3y & +4z & =0 \end{array}\right)$, k'$_3$) $\left(\begin{array}{rrrl} 7x & -5y & +3z & =10 \\ x & +y & -z & =0 \\ 8x & -4y & +2z & =10 \\ 15x & -9y & +5z & =20 \\ -2x & -2y & +2z & =0 \end{array}\right)$, L'$_3$) $\left(\begin{array}{rrrl} 3x & -4y & -z & =0 \\ x & -2y & +z & =0 \\ 4x & -6y & & =0 \\ 3x & -2y & -5z & =0 \\ -2x & +4y & -2z & =0 \end{array}\right)$,

m_2) $\left(\begin{array}{rrrl} x & -2y & -z & =1 \\ & y & -z & =1 \end{array}\right)$, n_2) $\left(\begin{array}{rrrl} 4x & -3y & +5z & =-2 \\ -x & +2y & -3z & =3 \end{array}\right)$, o'$_2$) $\left(\begin{array}{rrrl} 3x & -6y & +9z & =2 \\ -2x & +4y & -6z & =-3 \end{array}\right)$,

p_2) $\left(\begin{array}{rrrl} 4x & +2y & +z & =23 \\ 3x & -2y & +2z & =21 \\ 5x & +y & -3z & =16 \end{array}\right)$, q_2) $\left(\begin{array}{rrrl} -2x & -2y & +z & =-3 \\ 5x & -3y & +2z & =4 \\ x & -7y & +4z & =2 \end{array}\right)$, r_2) $\left(\begin{array}{rrrl} 2x & -4y & +6z & =2 \\ 3x & -6y & +9z & =3 \\ -4x & +8y & -12z & =-4 \end{array}\right)$,

s_2) $\left(\begin{array}{rrrl} 2x & -4y & +6z & =-2 \\ -x & +2y & -3z & =1 \\ 3x & -6y & +9z & =-6 \end{array}\right)$, t_2) $\left(\begin{array}{rrrl} x & -y & +2z & =3 \\ 2x & -y & -z & =1 \\ 4x & -3y & +3z & =7 \end{array}\right)$,

769. (KA_I) Bei a) fallen __ Gleichungen weg, es ist nur __ Gleichung relevant. Wir benötigen __ Parameter.

a_2) $\left(\begin{array}{rrrl} x & +y & -z & =1 \\ 2x & +2y & -2z & =2 \\ 3x & +3y & -3z & =3 \end{array}\right)$, b_2) $\left(\begin{array}{rrrl} 2x & -2y & -4z & =4 \\ 3x & -3y & -6z & =6 \\ x & -y & -2z & =2 \end{array}\right)$, c_3) $\left(\begin{array}{rrl} x & -2y & =1 \end{array}\right)$, d'$_3$) $\left(\begin{array}{rrrl} x & -2y & +3z & =2 \end{array}\right)$,

e'$_3$) $\left(\begin{array}{rrrl} x & +0y & +3z & =2 \end{array}\right)$. f_2) $\left(\begin{array}{rrrl} 2x & +3y & +4z & =5 \end{array}\right)$, g_2) $\left(\begin{array}{rrrl} 4x & +2y & +6z & =8 \end{array}\right)$,

$\boxed{h_2}$) $\left(\begin{array}{rrrl} 2x & +3y & +4z & =1 \\ 3x & -y & +3z & =-1 \\ x & -4y & -z & =-2 \end{array}\right)$, i_2) $\left(\begin{array}{rrrl} x & +2y & +3z & =4 \\ x & +2y & -z & =8 \\ 2x & +4y & +2z & =12 \end{array}\right)$, j'$_{3,f}$) $\left(\begin{array}{rrrrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & =4 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & & =3 \\ x_1 & +x_2 & & +x_4 & =3 \\ & & +x_3 & +x_4 & =2 \end{array}\right)$,

k_3) $\left(\begin{array}{rrrrl} x_1 & +3x_2 & +4x_3 & -x_4 & =6 \end{array}\right)$, L_3) $\left(\begin{array}{rrrrrl} 2x_1 & -4x_2 & -10x_3 & +4x_4 & +2x_5 & =2 \end{array}\right)$,

m_3) $\left(\begin{array}{rrrrl} x_1 & & +2x_3 & -3x_4 & =4 \\ & x_2 & -5x_3 & +6x_4 & =7 \end{array}\right)$, n_3) $\left(\begin{array}{rrrrl} x_1 & +2x_2 & +5x_3 & +8x_4 & =5 \\ & x_2 & +2x_3 & +3x_4 & =1 \end{array}\right)$, o$_3$) $\left(\begin{array}{lllll} x_1 & -3x_2 & +2x_3 & +4x_4 & =5 \\ 2x_1 & -6x_2 & +3x_3 & +8x_4 & =3 \end{array}\right)$, p$_3$) $\left(\begin{array}{lllll} 2x_1 & -2x_2 & +6x_3 & -2x_4 & =8 \\ 2x_1 & -2x_2 & +4x_3 & +2x_4 & =6 \end{array}\right)$,

q$_3$) $\left(\begin{array}{llll} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & =5 \\ 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 & =10 \\ -3x_1 & -6x_2 & -9x_3 & =15 \end{array}\right)$, r'$_3$) $\left(\begin{array}{llll} x_1 & +4x_2 & -2x_4 & =3 \\ -x_1 & -3x_2 & -3x_4 & =-7 \\ x_1 & +0x_2 & +18x_4 & =19 \end{array}\right)$, s'$_3$) $\left(\begin{array}{lll} 12x_3 & -16x_5 & =4 \\ \frac{-3}{2}x_3 & +2x_5 & =\frac{-1}{2} \\ 15x_3 & -20x_5 & =5 \end{array}\right)$.

770. a$_r$) Ein LGS mit m Gleichungen und n Unbekannten heißt $m \times n$ LGS. Allgemein kann ein LGS genau _______, _______ oder ____________ viele Lösungen haben. Die Größe der Lösungsmenge kann vorher geschätzt werden. Wahrscheinlich hat ein $m \times n$ LGS eine _________________ Lösungsmenge falls $m < n$, _________________ Lösungsmenge falls $m = n$ und _________________ Lösungsmenge falls $m > n$ ist. **GTR:** Beim Rechnen eines LGS mit dem GTR bedeutet die resultierende Zeile 0 0 ... 0 1 immer, dass es eine _________________ Lösungsmenge hat, denn diese Zeile sagt eigentlich, dass _______ ist. Treten Zeilen der Form _________________ ($a \neq 0$) auf, so hat das LGS eine u_________________ Lösungsmenge. Treten nur Zeilen mit genau einer 1 (nicht am Ende) oder Nullenzeilen auf, so hat das LGS eine _________________ Lösungsmenge. Die Anzahl der relevanten Gleichungen $g - n$ heißt *Rang* des LGS. Damit ist $p = U - Rang$.

b) (KA) Berechnen Sie die Lösungsmenge, (den Rang des LGS) und verifizieren Sie $p = U - g + n$.

i$_2$)' $\left(\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9 \\ 2x_1 + 0x_2 + 4x_3 = 6 \end{array}\right)$, ii$_2$) $\left(\begin{array}{l} 2x_1 + 0x_2 - 4x_3 = -2 \\ -x_1 + 0x_2 - 2x_3 = 1 \end{array}\right)$, iii$_2$)' $\left(\begin{array}{l} 6x_2 - 9x_4 = 0 \\ -4x_2 + 6x_4 = 0 \end{array}\right)$,

iv$_3$) $\left(\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3 \\ 4x_1 - 3x_2 + 9x_3 + 6x_4 = 1 \end{array}\right)$, v$_3$) $\left(\begin{array}{l} 6x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 4 \\ -9x_1 + 3x_2 - 6x_3 - 12x_4 - 3x_5 = -6 \\ 12x_1 - 4x_2 + 8x_3 + 16x_4 + 4x_5 = 8 \end{array}\right)$,

vi$_3$) $\left(\begin{array}{l} 4x_1 - 8x_2 + 6x_3 - 6x_5 = 0 \\ 6x_1 - 12x_2 + 9x_3 - 9x_5 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 3x_5 = 0 \end{array}\right)$, $\boxed{\text{vii}_3)}$ $\left(\begin{array}{l} 1x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 5x_4 - 3x_5 - 3x_6 = 1 \\ 8x_1 - 2x_3 - 2x_4 + 4x_5 + 6x_6 = 6 \end{array}\right)$.

c$_3$) **Interpolation 4:** Finden Sie alle Parabeln 2. Ordnung, die durch die Punkte P und Q gehen: i) $P(3|0)$, $Q(7|0)$, ii) $P(1|2)$, $Q(-1|2)$, iii) $P(1|2)$, $Q(2|5)$.

d$_3$) Interpretieren Sie den Lösungsansatz $a(x-2)(x-1) + \frac{5-2}{2-1}(x-1) + 2$ für Teil c iii).

e$_{4-6}$) Die Ag 'Gegeben seien die Punkte P, Q, R. Bestimmen Sie den Funktionsterm einer Parabel 2. Ordnung, die durch diese Punkte geht.' erzeugt ein LGS. Wie müssen P, Q, R gewählt werden, damit dieses LGS genau eine, keine oder unendlich viele Lösungen hat? Verallgemeinern Sie!

Cartoon 53

771. **Stöchiometrisches Rechnen:**$_e$ (aus LS KS 220/2) (Ü) Gleichen Sie die Reaktionsgleichungen aus:
a$_1$) x_1 Fe + x_2 $O_2 \longrightarrow x_3$ Fe_2O_3 $\boxed{\text{d}_1}$) x_1 $C_3H_5N_3O_9 \longrightarrow x_2$ CO_2+ x_3 H_2O + x_4 N_2 + x_5 O_2
b$_1$) x_1 $C_6H_6O_6$ + x_2 $O_2 \longrightarrow x_3$ CO_2+ x_4 H_2O c$_1$) x_1 FeS_2 + x_2 $O_2 \longrightarrow x_3$ Fe_2O_3+ x_4 SO_2
e$_1$) Lösen Sie das LGS, das aus der Reaktion zwischen Kaliumpermanganat und Glycerin entsteht: $4x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 2x_5 - x_6 = 0$; $x_1 - 2x_3 = 0$; $x_1 - x_4 = 0$; $3x_2 - x_3 - x_5 = 0$; $8x_2 - 2x_6 = 0$;

772. **Die Knotenregel:**$_e$ a$_3$) Im Einbahnstraßensystem aus Abb. 173 sind die Verkehrsflüsse eingezeichnet. Beispiel: An Kreuzung A stoßen 200 Fahrzeuge zum System dazu und 100 Fahrzeuge

verlassen das System. Von D nach A fahren x_4 Fahrzeuge. Notieren Sie die algebraische Gleichung die den einfahrenden und abfahrenden Verkehr der Kreuzung A beschreibt.
b$_3$) Stellen Sie analog die Gleichungen für die Kreuzungen B, C und D auf und berechnen Sie die Verkehrsflüsse.
c$_3$) Interpretieren Sie die Lösungsmenge, welche Straße könnte ohne (externe) Verkehrsbehinderung gesperrt werden?
d$_1$) **Die Parallelschaltung:**$_e$ Berechnen die den Widerstand einer Parallelschaltung. Verwenden Sie dazu die Knotenregel, sowie das Ohmsche 'Gesetz' $I_i = \frac{U}{R_i}$ $(i = 1, 2)$.

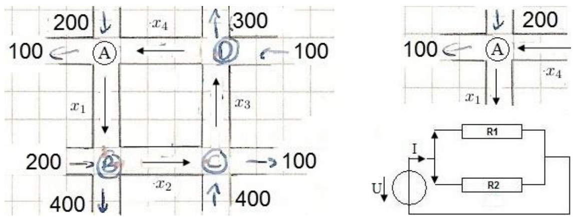


Abb. 173 Einbahnstraßensystem

e$_1$) **Mischen:**$_e$ Aus Silber (Dichte 10.4 g/cm^3) und Gold (Dichte 19.3 g/cm^3) soll eine Legierung mit der Dichte 12.18 g/cm^3 entstehen. Wieviel % Gold enthält die Legierung?

f$_2$) Die Anteile von Eiweiß, Kohlehydraten und Fett in Milch, Kartoffeln und Fleisch sowie der Bedarf dieser Anteile sind

1 kg enthält (in g)	Milch	Kartoffeln	Fleisch	Bedarf
Eiweiß	30	20	190	409
Kohlehydrate	50	190	0	708
Fett	35	0	140	280

gegeben. Wieviel kg Milch, Kartoffeln und Fleisch sind nötig, um den Bedarf an Eiweiß, Kohlehydraten und Fett zu decken? (aus Maurer: Ana Geo)

10.6.4 LGS mit Parameter (nur LK)

LS: S.215

773. (Ü) Lösen Sie die LGS (mit eventueller Fallunterscheidung) abhängig von $k \in \mathbb{R}$

a'$_2$) $\begin{pmatrix} 3x & -2y & +3z & = 8k \\ 2x & +3y & -5z & = 7k \\ 2x & -5y & +4z & = 0 \end{pmatrix}$, b$_2$) $\begin{pmatrix} 5x & -y & +z & = 2+8k \\ 2x & +y & -2z & = 4+6k \\ 3x & -y & +z & = 4k \end{pmatrix}$, $\boxed{c_2}$) $\begin{pmatrix} 6x & -y & +z & = 1+2k \\ 3x & +2y & +z & = 4+8k \\ x & +y & +z & = 3+6k \end{pmatrix}$,

d$_a$) (GTR, $\overline{f}$) Erklären Sie, wie man ein LGS der Form $\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{b} + k \cdot \vec{c}$ mit dem GTR lösen kann.

e'$_2$) $\begin{pmatrix} 2x & -4y & +z & = k \\ x & +2y & -z & = 2k \\ 4x & & -z & = 5k \end{pmatrix}$, f$_4$) $\begin{pmatrix} 5x & +6y & +2z & = 5+8k \\ 5x & +5y & -z & = 5+4k \\ & y & +3z & = 0 \end{pmatrix}$, g'$_4$) $\begin{pmatrix} 6x & -2y & +3z & = 7+4k \\ 2x & +2y & +z & = 5+4k \\ 2x & -6y & +z & = 1 \end{pmatrix}$,

774. (Ü) Für welche a hat das LGS mehr als eine Lösung? Geben Sie in diesem Falle die Lösungsmenge an.

a$_3$) $\begin{pmatrix} x & -2y & = 3 \\ -2x & +a^2y & = 3a \end{pmatrix}$, b$_3$) $\begin{pmatrix} ax & +9y & = 12 \\ x & +ay & = a+1 \end{pmatrix}$, c$_3$) $\begin{pmatrix} 3x & +ay & = a \\ (a+1)x & +2y & = 2a-2 \end{pmatrix}$,

d$_4$) $\begin{pmatrix} ax & +2y & +2z & = -6 \\ 2x & -y & +2z & = 6 \\ 2x & +2y & +az & = -18 \end{pmatrix}$, e$_4$) $\begin{pmatrix} x & +2y & +3z & = 2a \\ 4x & +5y & +6z & = 5a \\ 7x & +8y & +a^2z & = 8a \end{pmatrix}$, f$_4$) $\begin{pmatrix} x & +y & +z & = 1 \\ x & +ay & +z & = 1 \\ x & +y & +a^2z & = a^2 \end{pmatrix}$.

775. Gegeben sei das nebenstehende LGS. Von diesem sei die Lösungsmenge a$_2$) $\mathbb{L} = \{1; 1; 1\}$; b$_2$) $\mathbb{L} = \{3; 6; 4\}$; c$_2$) $\mathbb{L} = \{0; 0; 0\}$ bekannt. Bestimmen Sie a, b, c.

$$\begin{pmatrix} ax_1 & -bx_2 & -4cx_3 & = 3 \\ bx_1 & +2cx_2 & -ax_3 & = -4 \\ 2x_1 & -ax_2 & -bx_3 & = c \end{pmatrix}.$$

776. **Minimalanforderungen UE 11_5 LGS**: Lösen Sie die folgenden LGS (b,c = LK):

a) $\begin{pmatrix} 9x & +3y & +1z & = -3 \\ -4x & +2y & -z & = 8 \\ 12x & -4y & +1z & = 0 \end{pmatrix}$, *b)* $\begin{pmatrix} 3x & -4y & +5z & = 4 \\ x & -2y & +3z & = 2 \\ x & -y & +z & = 1 \end{pmatrix}$, *c)* $\begin{pmatrix} 10x & -15y & +25z & = 20 \\ -4x & +6y & -10z & = -8 \\ 6x & -9y & +15z & = 12 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} 3x & -4y & +5z & = 4 \\ x & -2y & +3z & = 2 \\ x & -y & +z & = 2 \end{pmatrix}$,

e) Eine ganzrationale Funktion dritten Grades $p(x)$ geht durch den Ursprung und durch $P(3|-9)$, und hat im Punkt $H(-2|16)$ einen Hochpunkt. Berechnen Sie dessen Koeffizienten.

Wettbewerbsaufgabe: 70/205

10.6.5 Der Rang + die Determinante einer Matrix (BA 1_2) → 11.1.13 (GFS)

777. (Ü) (auch Abs 292/11.1) a$_r$) i) Eine Matrix $\underline{A}_{m\times n}$ ist ein ______eckiges Zahlenfeld. Dabei heißt $\underline{A}_{m\times n}$ dass die Matrix $\underline{A}$ m _____en und n _____en hat. ii) Die Einträge nennt man Komponenten $a_{i,j}$ $1 \le i \le$ _ und $1 \le j \le$ _. i ist der _______index und j ist der _______index. iii) Die Summe zweier Matrizen ist k____________weise definiert: $\underline{C} := \underline{A} + \underline{B}$ bedeutet $c_{i,j} :=$ _______. iv) Erklären Sie die s-Multiplikation; mit welcher Operation ist diese verwandt?

b$_1$) Sei $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$. Geben Sie deren Komponenten, Spalten und Zeilenvektoren an.

Matrixmultiplikation: (das Falksche Schema): Motto Z______ · S______. $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$.

Sei $\underline{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

		1	2	3	0
		6	7	8	1
3	4				
5	6				
0	1				

c$_r$) Sei $\underline{A}_{m\times n}$ und $\underline{B}_{p\times q}$; Wann ist i) $\underline{A} + \underline{B}$ ii) $\underline{A} \cdot \underline{B}$ möglich? Welche Dimension hat das Ergebnis?

Seien $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\underline{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, $\underline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ und $\underline{D} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$.

d$_1$) i) Ber. Sie $\underline{A} \cdot \underline{B}$ und $\underline{B} \cdot \underline{A}$ (auch $\underline{C} \cdot \underline{D}$ und $\underline{D} \cdot \underline{C}$). Das Matrixprodukt ist nicht k___________.
ii) Die Operation die Zeilen und Spalten vertauscht heißt T_______________. Die transponierte Matrix von $\underline{A}$ notieren wir als $\underline{A}^T$. Es gilt $\underline{A}^T =$ ___ und $\underline{D}^T =$ ___.
iii) Welches Gesetz gilt an Stelle des Kommutativgesetzes?

e$_1$) Berechnen Sie alle möglichen Matrixprodukte der Matrizen aus Aufgabe 282/781 $\underline{A_i} \cdot \underline{A_j}$, $\underline{A_i}^T \cdot \underline{A_j}$, $\underline{A_i} \cdot \underline{A_j}^T$ und $\underline{A_i}^T \cdot \underline{A_j}^T$, $(i, j = 1..15)$ (es sind vermutlich $4 \cdot 15^2 = 900$ Produkte).

778. **inverse Matrizen:**$_e$ Seien $\underline{A} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$, $\underline{B} = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 8 \end{smallmatrix}\right)$, $\underline{C} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)$, $\underline{F} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ und $\underline{1}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. a$_1$) Die Matrix $\underline{1}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ heißt E__________matrix. Berechnen Sie $\underline{1}_2 \cdot \underline{A}$ und $\underline{A} \cdot \underline{1}_2$, sowie $\underline{1}_2 \cdot \underline{C}$ und $\underline{C} \cdot \underline{1}_2$. Die Einheitsmatrix multipliziert mit einer beliebigen Matrix ($\underline{C}$) verändert diese _______.
b$_e$) Definieren Sie $\underline{1}_3$ und $\underline{1}_4$ und verallgemeinern Sie.

c$_w$) Die D__________ zweier Vektoren $\binom{a}{c}$ und $\binom{b}{d} = \det(\binom{a}{c}, \binom{b}{d}) =$ _____ entspricht der o__________ F_____ des von $\binom{a}{c}$ und $\binom{b}{d}$ aufgespannten P_______________.

d$_e$) Berechnen Sie die Determinaten $\det(\underline{A})$, $\det(\underline{B})$, $\det(\underline{C})$ und $\det(\underline{1}_2)$.
e$_e$) Ber. Sie eine Matrix $\underline{A}^{-1}$, für die $\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{1}_2$ gilt. Die Matrix $\underline{A}^{-1}$ heißt i________ Matrix.
f) Berechnen Sie die Lösungsmenge des LGS $\underline{A} \cdot \vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right) \cdot \vec{x} = \binom{4}{10}$ mit Hilfe von $\underline{A}^{-1}$.

779. a$_r$) **Die Streichmatrix:**$_e$ Eine Matrix $\underline{S}_{i,j}$ entsteht aus einer Matrix $\underline{A}$, indem man die i-te ______ und die j-te ______ streicht. geben Sie $\underline{S}_{24}$ aller Matrizen aus (∗) an.

b$_r$) **Der Laplacesche Entwicklungssatz:**$_e$ Die Determinante ist rekursiv definiert (ohne Bew.):

$$\det(\underline{A}_{n\times n}) \quad = \quad \sum_{z=1}^{n} (-1)^{z+s} \cdot a_{zs} \cdot \det(\underline{S}_{zs}) \qquad\qquad \sum^{n} (-1)^{z+s} \cdot a_{zs} \cdot \det(\underline{S}_{zs})$$

s kann dabei ______ zwischen _ und _ gewählt werden. c$_w$) Die Determinante der Vektoren $\vec{x}_1, .., \vec{x}_n$ entspricht dem o___________ n-dim V___________ des (n-dim) Spates, das von den Vektoren _____________ e___________ wird.

d$_3$) Weisen Sie nach, dass diese Formel für $n = 2$ (Ag 21/9 bzw. 258/690) und für $n = 3$ (Ag 268/732) die Determinante berechnet.
e$_3$) Zeigen Sie die Äquivalenz zur Entwicklung nach Sarrus aus Abschnitt 300/11.3.4.
f$_2$) (KA$_l$) Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrizen.

$\mathrm{i}_T)$ $\underline{A_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $\underline{A_2'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \\ 6 & 1 & 4 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $\underline{A_3'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$; $\underline{A_4'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \\ 6 & 1 & 4 & 3 \\ 8 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$;

$\mathrm{ii}_T)$ $\underline{B_1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\underline{B_2'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\underline{B_3'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 9 & 3 & 6 \end{pmatrix}$; $\underline{B_4'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 9 & 3 & 6 \end{pmatrix}$;

$\mathrm{iii}_T)$ $\underline{B_5'} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 6 & 8 \\ 6 & 18 & 3 & 6 \end{pmatrix}$; $\underline{C_1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; $\underline{C_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\underline{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$;

g_2) Die Cramersche Regel:$_e$ Formulieren Sie die Cramersche Regel für $n = 2$ und $n = 3$ mit Determinanten und verallgemeinern Sie.

780. **lineare Abhängigkeit:**$_e$ a_e) **Ein** Vektor allein ist immer linear _____hängig, es sei denn es ist der _____vektor; der ist immer linear _____hängig. b_e) **Zwei** Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ sind linear abhängig (p_________) genau dann, wenn es ein $r \in \mathbb{R}$ gibt, mit $\vec{a} =$ ____.
c_e) **Drei** Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (wobei $\vec{b}$ und $\vec{c}$ l._ sind) sind linear abhängig (liegen in einer E______) genau dann, wenn es $r, s \in \mathbb{R}$ gibt, mit $\vec{a} =$ ____________.
d_e) **Vier** Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ (wobei $\vec{b}, \vec{c}$ und $\vec{d}$ l._ sind) sind linear abhängig (liegen in einem R______) genau dann, wenn es $r, s, t \in \mathbb{R}$ gibt, mit $\vec{a} =$ ______________.

781. Sei $\underline{A}_{m\times n}$ eine $m \times n$ Matrix, dann hat das LGS $\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}$ _ Gleichungen und _ Unbekannten.
a_2) Der (Spalten-) Rang einer Matrix ist die Maximalanzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren.

Algorithmus: 1) Streiche alle Nullvektoren aus den $\vec{s}_i$; $M := \emptyset$.
2) Gehe alle (verbliebenen) $\vec{s}_i$ durch. $\vec{s}_j$ wird im M aufgenommen, wenn $\vec{s}_j$ l.u. (nicht nur paarweise l.u.) zu allen Vektoren aus M ist.
3) Der Rang von A ist die Anzahl der Elemente von M.

Allgemeine Regeln: 1) Wenn eine Matrix nur Nullen als Einträge hat, dann ist ihr Rang _.
2) Wenn eine Matrix einen Eintrag $\neq 0$ enthält, dann ist ihr Rang ____.
3) Wenn eine $n \times n$ Matrix Determinante $\neq$ _ hat, dann ist ihr Rang ____.

(KA) Ber. Sie den Rang von i) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, ii) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, iii) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, iv) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$,
v) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, vi) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$, vii) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, viii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,
($\bar{f}$) ix) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, x) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, xi) $\begin{pmatrix} 4 & -8 & 12 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$, xii) $\begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 & 9 \\ 8 & 4 & -4 & 12 \\ 10 & 5 & -5 & 15 \end{pmatrix}$;

b_2) Berechnen Sie auch den Zeilenrang der Matrizen aus Teil a).

c_r) Tatsächlich gilt (ohne Beweis) Zeilenrang _ Spaltenrang. Damit ist der Rang $\underline{A}_{m\times n} \leq$ _____.

Sei $\underline{A}_{n\times n}$ quadratisch mit $\det(\underline{A}) \neq 0$ dann hat $\underline{A}$ _____rang: Rang($\underline{A}$)=__.

d_2) Sei $\underline{A} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{smallmatrix}\right)$. Lösen Sie das LGS $\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}$. Welche Dimension haben $\vec{x}$ und $\vec{0}$? Welchen Rang hat $\underline{A}$? Je höher der Rang von $\underline{A}$ desto ________ Parameter braucht man für die Lösungsmenge des LGS $\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}$. Folgern Sie aus der Formel $p = U - G + n$ eine Formel für den Rang. Der Rang($\underline{A}$) ist die Anzahl der relevanten G__________ des LGS $\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}$.

e_2) Berechnen Sie die Lösungsmenge und die Dimension des Lösungsraumes (Anzahl der Parameter) von $\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}$ für alle Matrizen aus Teil a).

f_r) Finden Sie einen Zusammenhang zwischen dem Rang und der Dimension des Lösungsraumes.

g_2) (KA) Berechnen Sie die Lösungsmenge des LGS $\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ sowie den Rang($\underline{A}$) mit $\underline{A} =$

xiii) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, xiv) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -6 & 2 \\ 4 & -8 & 12 & -4 \end{pmatrix}$, xv$_3$) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 14 & 8 & 6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

10.7 Relationen (MV)

10.7.1 Definition: Das kartesische Produkt

Seien M und N zwei nicht leere Mengen, dann heißt die Menge aller (geordneten) Paare (a, b) mit $a \in M$ und $b \in N$ **kartesisches Produkt** (oder auch $M \times N$) von M und N.

Durch diese Definition können Verknüpfungen als Funktionen interpretiert werden.

$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad / : \mathbb{R} \times \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R} \quad \text{Potenz} : (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}) \cup (0 \times \mathbb{R}^+) \cup (\mathbb{R}^- \times \mathbb{Z}) \to \mathbb{R}.$

10.7.2 Definition: Relation

Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge, dann heißt eine beliebige Teilmenge R von $M \times M$ **Relation**. Statt $(a, b) \in R$ schreiben wir dann $a\,R\,b$ oder $a \sim b$ und meinen a steht in Relation zu b.

Eine Relation $\sim$ heißt **reflexiv**,	$\Leftrightarrow$	$\forall a \in M$ gilt $a \sim a$ gilt.
Eine Relation $\sim$ heißt **symmetrisch**	$\Leftrightarrow$	$\forall a, b \in M$ mit $a \sim b$ gilt auch $b \sim a$.
Eine Relation $\sim$ heißt **antisymmetrisch**	$\Leftrightarrow$	$\forall a, b \in M$ mit $a \sim b$ und $b \sim a$ folgt $a = b$.
Eine Relation $\sim$ heißt **transitiv**	$\Leftrightarrow$	$\forall a, b, c \in M$ mit $a \sim b$ und $b \sim c$ gilt auch $a \sim c$.

Eine Relation $\sim$ heißt **Äquivalenzrelation**, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Gilt statt der Symmetrie die Antisymmetrie, so heißt die Relation eine **Ordnungsrelation**.

10.7.3 Beispiel: mehrere Äquivalenzrelationen

$'='$ ist eine Äquivalenzrelation, denn es gilt $\forall a, b, c \in M$:

Reflexivität:	$(a, a) \in R$	$\Leftrightarrow a = a$ (wahre Aussage)
Symmetrie :	$(a, b) \in R$	$\Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow b = a \Leftrightarrow (b, a) \in R$
Transitivität:	$(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$	$\Leftrightarrow a = b$ und $b = c \Rightarrow a = c \Leftrightarrow (a, c) \in R$

Sei $R = M \times M$, so ist R ebenfalls eine Äquivalenzrelation (Beweis ist Hausaufgabe). $'='$ ist die feinste und $M \times M$ die gröbste Äquivalenzrelation auf M. Für alle Äquivalenzrelationen A gilt:

$$'=' \quad \subseteq \quad A \quad \subseteq \quad M \times M.$$

Sei $M = \mathbb{N}_0$ und n beliebig $\in \mathbb{N}_0$. Wir definieren eine Relation $\sim$: $a \sim b \;\Leftrightarrow\; a \bmod 3 = b \bmod 3$ oder a und b haben bei der Division durch 3 den gleichen Rest.
Hier gilt z. B. $2 \sim 5$, denn $2 \bmod 3 = 5 \bmod 3 = 2$. Des Weiteren gilt $1 \sim 4 \sim 7 \sim 10 \sim ... \sim 3n + 1$. Hierbei handelt es sich tatsächlich um eine Äquivalenzrelation:

Reflexivität:	$(a, a) \in R$	$\Leftrightarrow a \bmod 3 = a \bmod 3$ (wahre Aussage)
Symmetrie :	$(a, b) \in R$	$\Leftrightarrow a \bmod 3 = b \bmod 3 \Leftrightarrow b \bmod 3 = a \bmod 3 \Leftrightarrow (b, a) \in R$
Transitivität:	$(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$	$\Leftrightarrow a \bmod 3 = b \bmod 3$ und $b \bmod 3 = c \bmod 3$
		$\Rightarrow a \bmod 3 = c \bmod 3 \Leftrightarrow (a, c) \in R$

$a \bmod 3$ kann nur die Werte $0, 1, 2$ annehmen. Deshalb zerfällt die Menge $\mathbb{N}_0$ durch diese Relation in drei Klassen (Mengen):

$R[0] := \{x \in N_0 \mid x \bmod 3 = 0 \text{ oder } x = 3n\}$	(dies ist die Menge aller durch 3 teilbaren Zahlen)
$R[1] := \{x \in N_0 \mid x \bmod 3 = 1 \text{ oder } x = 3n + 1\}$	($x/3$ hat Rest 1)
$R[2] := \{x \in N_0 \mid x \bmod 3 = 2 \text{ oder } x = 3n + 2\}$	($x/3$ hat Rest 2)

Diese Mengen werden auch Restklassen genannt. Dies gibt zu folgender Definition Anlass:

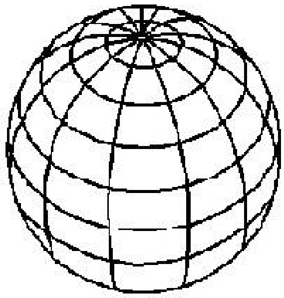
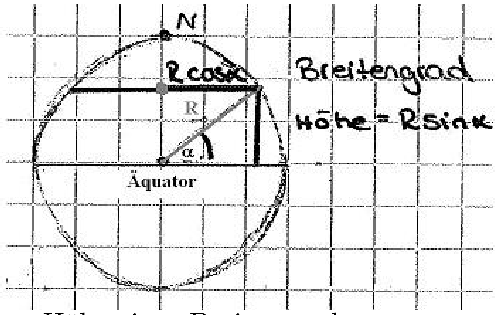




Abb. 179 Welt Längen und Breitengrade Höhe eines Breitengrades

10.10.7 Definition: Tissotsche Indikatrix

Die Tissotsche Indikatrix ist ein Maß für die Verzerrung der Abbildung einer Kugeloberfläche in die Ebene. Betrachtet wird dabei das Bild eines infinitesimal kleinen Kreises (Kreis mit Radius h). Je nach Lage des Kreises ist das Bild eine Ellipse mit den Halbachsen a, b. Die Halbachsen bilden die Hauptverzerrungsrichtungen. Diese stehen immer aufeinander senkrecht. Aus den Hauptverzerrungsrichtungen kann man Treueeigenschaften ablesen:

flächentreu	$a \cdot b = h^2$
winkeltreu	$a = b$
abstandstreu	$b = h$
abweitungstreu	$a = h$
längentreu	$a = b = h$

Cartoon 57

10.10.8 Satz: Das Theorema Egregium

Es gibt keine längentreue Abbildung der Kugeloberfläche in die Ebene. Beweis: Längentreue Abbildungen sind auch winkeltreu (nach dem Kongruenzsatz sss). Ebene Dreiecke haben eine Winkelsumme von $\pi = 180°$. Bei einem Kugeldreieck ist die Winkelsumme im Allgemeinen $> \pi$: Wähle als Kugeldreieck P, Q, N mit $P : \alpha = \varphi = 0$, $Q : \alpha = 0, \varphi = \frac{\pi}{2}$ und $N : \alpha = \frac{\pi}{2}$. P und Q liegen auf dem Äquator und alle Seiten schneiden sich in einem rechten Winkel. Die Winkelsumme ist also $\frac{3\pi}{2} > \pi$. **Nach** dem Theorema Egregium gibt es keine längentreue Abbildung der Kugeloberfläche in die Ebene. Dennoch können gewisse Grössen erhalten werden. Es gibt flächentreue, winkeltreue (der Schnittwinkel von Gebilden ändert sich nicht), abstandstreue (die Längengrade werden längentreu abgebildet) und abweitungstreue (die Breitengrade werden längentreu abgebildet) Abbildungen.

11 Matrizen

11.1 Operationen auf Matrizen (BA 1_3)

11.1.1 Definition: Matrix

Eine $m \times n$ $(m, n \in \mathbb{N})$ Matrix ist ein rechteckiges Feld reeller Zahlen mit m Zeilen und n Spalten.

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{die } a_{ij} \text{ heißen } \textbf{Koeffizienten}$$

Die Dimension schreibt man gerne als Index an eine Matrix: $\underline{B}_{2\times 3}$ sagt, dass die Matrix $\underline{B}$ zwei Zeilen und drei Spalten hat. In der Regel heißen die Koeffizienten einer Matrix $\underline{B}$ b_{ij}. Matrizen können auch für komplexe Zahlen oder andere Inhalte definiert werden. Die Menge aller $m \times n$ Matrizen heißt $\mathbb{R}^{m\times n}$. Damit sind (n dimensionale) Vektoren $n \times 1$ Matrizen und reelle Zahlen 1×1 Matrizen.

11.1.2 Definition: Zeilen und Spaltenvektoren

Sei $\underline{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, dann kann A gelesen werden als

$$\begin{array}{cccccc} & \text{Matrix} & & \text{als Spaltenvektoren } \vec{s}_i & & \text{als Zeilenvektoren } \vec{z}_j \\ \underline{A} = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} \vec{s}_1 & \vec{s}_2 & \dots & \vec{s}_n \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} \vec{z}_1^T \\ \vec{z}_2^T \\ \dots \\ \vec{z}_m^T \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\text{Es ist } \vec{s}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \dots \\ a_{mi} \end{pmatrix} 1 \le i \le n \qquad \text{und} \qquad \vec{z}_j = \begin{pmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \dots \\ a_{jn} \end{pmatrix} 1 \le j \le m$$

Sei $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, dann ist $\vec{s_1} = \binom{1}{4}$, $\vec{s_2} = \binom{2}{5}$, $\vec{s_3} = \binom{3}{6}$, $\vec{z_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{z_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Bemerkung: Vektoren sind immer Zahlenspalten. Weil hier aber auch Zahlenzeilen als Vektoren gedeutet werden sollen, schreiben wir $\vec{x}^T$ sprich 'Vektor x transponiert' und meinen eine Zahlenzeile. Die Zeilenvektoren sind also Spaltenvektoren.

11.1.3 Definition: +, s-Multiplikation; Vektorraum der Matrizen

Seien $\underline{A}, \underline{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, dann definieren wir die Summe $\underline{A} + \underline{B}$ komponentenweise, das heißt

$$\underline{A}+\underline{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Summe zweier Matrizen ist also nur für Matrizen gleicher Dimension definiert. Ich verzichte auf eine Kenntlichmachung des neuen '+', weil durch die Argumente die Art des '+' klar sein müsste. Die Multiplikation mit einem Skalar (s-Multiplikation) definieren wir ebenfalls komponentenweise. Sei $r \in \mathbb{R}$ beliebig, dann definieren wir

$$r \cdot \underline{A} = \underline{A} \cdot r = r \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cdot a_{11} & r\cdot a_{12} & \dots & r\cdot a_{1n} \\ r\cdot a_{21} & r\cdot a_{22} & \dots & r\cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ r\cdot a_{m1} & r\cdot a_{m2} & \dots & r\cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Menge aller $m \times n$ Matrizen bildet mit $+$ und $\cdot$ einen Vektorraum der Dimension $m \cdot n$. Das neutrale Element der Addition heißt Nullmatrix $\underline{N}_{m\times n}$ mit $n_{ij} = 0$ für $1 \le i \le n$ und $1 \le j \le m$.

11.1.4 Definition: Transposition

Sei $\underline{A}_{m\times n}$ wie in Abschnitt 11.1.1 gegeben, dann definieren wir die $n \times m$ Matrix $\underline{A}^T$:

$$\underline{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \textbf{Beispiel:} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Es werden also Zeilen und Spalten vertauscht. Der Begriff der Transposition läßt sich auf Vektoren übertragen (siehe die Bemerkung von Abschnitt 11.1.2). Für $\underline{A}$, $\underline{B}$ aus $\mathbb{R}^{m\times n}$ und $r \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(\underline{A} + \underline{B})^T = \underline{A}^T + \underline{B}^T \quad \text{und} \quad (r \cdot \underline{A})^T = r \cdot \underline{A}^T.$$

11.1.5 Definition: Quadratische Matrix, Einheitsmatrix

Eine $n \times n$ Matrix heißt **quadratisch**.

$$\text{Sei } \underline{E}_{n\times n} \text{ eine Matrix der Form } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = \underline{1}_n = \underline{E}_n,$$

dann heißt $\underline{1}_n$ die $n-$te Einheitsmatrix mit den Koeffizienten $e_{ij} = 0$ falls $i \neq j$ und $e_{ii} = 1$ für $1 \leq i, j \leq n$. Statt e_{ij} schreibt man auch δ_{ij}, das sogenannte **Kroneckersymbol**.

Beispiele: $\underline{1}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\underline{1}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

11.1.6 Definition: Matrixmultiplikation (Falksches Schema)

Betrachten wir zunächst folgendes Beispiel:

Sei $\underline{A} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$ und sei $\underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, dann definieren wir $\underline{A} \cdot \underline{B}$ als

$$\begin{array}{cc|ccc} & & 1 & 2 & 3 \\ & & 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 1\cdot 7+4\cdot 8 & 2\cdot 7+5\cdot 8 & 3\cdot 7+6\cdot 8 \\ 9 & 0 & 1\cdot 9+4\cdot 0 & 2\cdot 9+5\cdot 0 & 3\cdot 9+6\cdot 0 \end{array} \quad \text{also} \quad \underline{A}\cdot\underline{B} = \begin{pmatrix} 39 & 54 & 69 \\ 9 & 18 & 27 \end{pmatrix}$$

Die Technik das Matrixprodukt in einem Kreuz zu schreiben heißt **Falksches Schema.**
Verallgemeinert heißt das: Seien $\underline{A} \in \mathbb{R}^{k\times m}$ und $\underline{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, dann definieren wir $\underline{C}_{k\times n} := \underline{A} \cdot \underline{B}$ durch

$$c_{pq} = \sum_{j=1}^{m} a_{pj} \cdot b_{jq} \qquad 1 \leq p \leq k \qquad 1 \leq q \leq n \qquad \text{Motto: Zeile} \cdot \text{Spalte.}$$

Deuten wir $\underline{A}$ als Matrix, die aus den Zeilenvektoren $\vec{z}_i$ $(1 \leq i \leq k)$ besteht und $\underline{B}$ als Matrix, die aus den Spaltenvektoren $\vec{s}_j$ $(1 \leq j \leq n)$ besteht, dann sind die Vektoren $\vec{z}_i$ und $\vec{s}_j$ alle $m-$dimensional und c_{pq} kann als Skalarprodukt gedeutet werden: $c_{pq} = \vec{z}_p \odot \vec{s}_q$.
Im Beispiel ist $\vec{s}_1 = \binom{1}{4}$, $\vec{s}_2 = \binom{2}{5}$, $\vec{s}_3 = \binom{3}{6}$, $\vec{z}_1 = \binom{7}{8}$, $\vec{z}_2 = \binom{9}{0}$.
Z. B. ist $c_{13} = \vec{z}_1 \odot \vec{s}_3 = a_{11} \cdot b_{13} + a_{12} \cdot b_{23} = 7 \cdot 3 + 8 \cdot 6 = 69$.

Weiteres Beispiel: Seien $\underline{A} = (1; 2; 3) \in \mathbb{R}^{1\times 3}$ und $\underline{B} = (4; 5; 6)^T \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, dann ist

$$\underline{A}\cdot\underline{B} = \begin{array}{ccc|c} & & & 4 \\ & & & 5 \\ & & & 6 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 32 \end{array} \qquad \underline{B}\cdot\underline{A} = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 4 & 8 & 12 \\ 5 & 5 & 10 & 15 \\ 6 & 6 & 12 & 18 \end{array}$$

$\underline{A} \cdot \underline{B} \in \mathbb{R}^{1\times 1}, \underline{B} \cdot \underline{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.
Sei $\underline{A} \in R^{n\times n}$, dann definieren wir $\underline{A}^k = \underline{A}\cdot\underline{A}...\cdot\underline{A}$ (k Faktoren) - $\underline{A}^0 := \underline{1}_n$,

Cartoon 58

11.1.7 Satz: Die Matrixmultiplikation ist i.A. nicht kommutativ

Die Matrixmultiplikation ist im Allgemeinen nicht einmal bei quadratischen Matrizen kommutativ.

Bsp: Seien $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, dann ist $\underline{A}\cdot\underline{B} = \begin{array}{cc|cc} & & 1 & 0 \\ & & 2 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 11 & 4 \end{array}$ $\underline{B}\cdot\underline{A} = \begin{array}{cc|cc} & & 1 & 2 \\ & & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 8 \end{array}$

11.1.8 Satz: Rechenregeln für die Matrixmultiplikation

Seien $\underline{A} \in \mathbb{R}^{k\times m}$, $\underline{B}, \underline{D} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\underline{C} \in \mathbb{R}^{n\times p}$, dann gelten:

Assoziativgesetz:	$(\underline{A}\cdot\underline{B})\cdot\underline{C}$	$=$	$\underline{A}\cdot(\underline{B}\cdot\underline{C})$	
Distributivgesetze:	$\underline{A}\cdot(\underline{B}+\underline{D})$	$=$	$\underline{A}\cdot\underline{B}+\underline{A}\cdot\underline{D}$	$(\underline{B}+\underline{D})\cdot\underline{C}=\underline{B}\cdot\underline{C}+\underline{D}\cdot\underline{C}$
	$(\underline{A}\cdot\underline{B})^T$	$=$	$\underline{B}^T\cdot\underline{A}^T$	
	$\underline{A}\cdot\underline{1}_m$	$=$	$\underline{1}_k\cdot\underline{A}=\underline{A}$	

Die Regeln können mit den Rechenregeln für das Skalarprodukt (14.15.4) bewiesen werden.

11.1.9 Satz: Die inverse 2 x 2 Matrix

Sei $\underline{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Wir suchen die Matrix $\underline{B}$, für die $\underline{A}\cdot\underline{B}=\underline{1}_2$ ist. Die Matrix $\underline{B}$ heißt **Inverse** von $\underline{A}$ oder $\underline{A}^{-1}$

$$\underline{A}\cdot\underline{B} = \begin{array}{cc|cc} & & b_{11} & b_{12} \\ & & b_{21} & b_{22} \\ \hline a_{11} & a_{12} & a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22} \end{array}$$

und weil $\underline{A}\cdot\underline{B}=\underline{1}_2$ sein soll, wird folgendes LGS (mit den b_{ij} als Unbekannten) erzeugt:

$$\begin{array}{ll} a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}=1 & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22}=0 \\ a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21}=0 & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22}=1 \end{array}$$

Betrachten wir die erste Spalte:

$$\begin{array}{lclcl} a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}=1 & \xrightarrow{\cdot a_{22}} & a_{11}\cdot b_{11}\cdot a_{22}+a_{12}\cdot b_{21}\cdot a_{22} & = & a_{22} \\ a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21}=0 & \xrightarrow{\cdot(-a_{12})} & -a_{21}\cdot b_{11}\cdot a_{12}-a_{22}\cdot b_{21}\cdot a_{12} & = & 0 \\ & & + & & \\ & & (a_{11}\cdot a_{22}-a_{21}\cdot a_{12})\cdot b_{11} & = & a_{22} \end{array}$$

analog berechnen sich die anderen Koeffizienten: $\downarrow$ **(Formel 108)**

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{a_{11}\cdot a_{22}-a_{21}\cdot a_{12}} & \frac{-a_{12}}{a_{11}\cdot a_{22}-a_{21}\cdot a_{12}} \\ \frac{-a_{21}}{a_{11}\cdot a_{22}-a_{21}\cdot a_{12}} & \frac{a_{11}}{a_{11}\cdot a_{22}-a_{21}\cdot a_{12}} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{11}\cdot a_{22}-a_{21}\cdot a_{12}}\cdot\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Eine solche Matrix $\underline{B}$ existiert also genau dann, wenn $a_{11}\cdot a_{22}-a_{21}\cdot a_{12}\neq 0$ ist.
$a_{11}\cdot a_{22}-a_{21}\cdot a_{12}$ heißt **Determinante** von $\underline{A}$ oder $\det(\underline{A})$. Die Determinante entspricht genau der Determinante der Spaltenvektoren. $\det(\underline{A}) = \det(\vec{s}_1\vec{s}_2)$. Die Inverse existiert, genau dann, wenn die Spaltenvektoren linear unabhängig sind.

11.1.10 Beispiel: Eine inverse 3 x 3 Matrix

Um eine allgemeine inverse Matrix zu bestimmen, muss man ein LGS von n^2 Gleichungen mit n^2 Unbekannten lösen. Auf Grund der speziellen Struktur des LGS kann es auf n LGS mit je n Unbekannten reduziert werden. Als Bsp wollen wir die Inverse einer 3×3 Matrix mit dem Gauß-algorithmus ber.Dazu schreiben wir neben die zu invertierende Matrix eine Einheitsmatrix und versuchen durch elementare Zeilenumformungen (EZU) links eine Einheitsmatrix zu erzeugen.

$$\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot(-3)} \\ \\ \nearrow \end{array} \quad \begin{array}{ccc|ccc} -6 & -12 & -3 & -3 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -13 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 13} \\ \xrightarrow{\cdot 1} \\ \end{array} \quad \begin{array}{rrr|rrr} 0 & 13 & 26 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & -13 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 28 & -3 & 13 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 28 & -3 & 13 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \xrightarrow{\cdot(-14)} \\ \xrightarrow{\cdot 1} \end{array} \quad \begin{array}{rrr|rrr} 0 & -14 & -28 & 0 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 28 & -3 & 13 & 1 \\ 0 & -14 & 0 & -3 & -1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 28 & -3 & 13 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 28} \\ \xrightarrow{\cdot(-8)} \\ \xrightarrow{\cdot(-1)} \end{array} \quad \begin{array}{rrr|rrr} 56 & 112 & 28 & 28 & 0 & 0 \\ 0 & -112 & 0 & -24 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & -28 & 3 & -13 & -1 \\ 56 & 0 & 0 & 7 & -21 & 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rrr} 56 & 0 & 0 & 7 & -21 & 7 \\ 0 & 56 & 0 & 12 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 56 & -6 & 26 & 2 \end{array} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{56} \begin{pmatrix} 7 & -21 & 7 \\ 12 & 4 & -4 \\ -6 & 26 & 2 \end{pmatrix}$$

11.1.11 Definition: Dreiecksmatrix

Sei $\underline{A}$ eine $n \times n$ Matrix mit der Eigenschaft, dass $a_{ij} = 0$ falls $i > j$, dann heißt $\underline{A}$ **obere Dreiecksmatrix.** Alles unter der Hauptdiagonale a_{ii} ist 0. Analog definieren wir untere Dreiecksmatrix. Eine Matrix, die gleichzeitig obere und untere Dreiecksmatrix ist, heißt **Diagonalmatrix**. Über die Koeffizienten in der Hauptdiagonale ist nichts ausgesagt. Die Nullmatrix $\underline{N}_n$ und die Einheitsmatrix $\underline{1}_n$ sind Diagonalmatrizen.

$\underline{A}$ ist invertierbar $\Leftrightarrow$ die Zeilenvektoren sind l.u. $\Leftrightarrow$ die Spaltenvektoren sind l.u. $\Leftrightarrow$ die Zeilenvektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow$ die Spaltenvektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^n$

11.1.12 Die Gruppe der n x n Matrizen

Die Menge aller invertierbaren $n \times n$ Matrizen bildet bezüglich der Matrixmultiplikation eine nicht abelsche Gruppe mit neutralem Element $\underline{1}_n$ und inversem Element $\underline{A}^{-1}$.

Für invertierbare $n \times n$ Matrizen $\underline{A}, \underline{B}$ gilt $\quad (\underline{A} \cdot \underline{B})^{-1} = \underline{B}^{-1} \cdot \underline{A}^{-1} \quad$ und $\quad (\underline{s}A)^{-1} = \frac{1}{s}\underline{A}^{-1}$.

11.1.13 Definition + Beispiel: Rang einer Matrix **Ag: 281/10.6.5**

Seien $\underline{A}$ eine $m \times n$ Matrix, $\vec{s}_j$ $(1 \le j \le n)$ die zugehörigen Spaltenvektoren und $\vec{z}_i$ $(1 \le i \le m)$ die zugehörigen Zeilenvektoren. Die Spaltenvektoren $\vec{s}_j$ erzeugen (sind ein Erzeugendensystem für) einen Untervektorraum U_s des $\mathbb{R}^n$. Die Dimension von U_s heißt **Spaltenrang** von $\underline{A}$. Analog definieren wir U_z und den **Zeilenrang** von $\underline{A}$.

Beispiel: Sei $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$, dann ist $\vec{z}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{z}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ und

$$\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{s}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad U_s : \vec{v} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad U_z : \vec{v} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\dim(U_s) = 1$ (Spaltenrang) und $\dim(U_z) = 1$ (Zeilenrang).

Die Gleichheit ist kein Zufall. Allgemein gilt Spaltenrang($\underline{A}$) = Zeilenrang($\underline{A}$) = Rang($\underline{A}$).

Gegeben sei das LGS $\underline{A}_{z\times s}\vec{x} = \vec{b}$ und sei r=Rang($\underline{A}$) , dann hat die erzeugte Matrix in Stufenform $\underline{S}$ $n = z - r$ Nullenzeilen, wenn das LGS lösbar ist (oder wenn $\vec{b} = \vec{0}$). Die Lösung enthält dann $s - r$ Parameter.

Berechnen Sie den Rang der Matrix $\underline{A}$, die von folgenden Spaltenvektoren erzeugt wird:

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$; b) $\binom{1}{2}, \binom{2}{4}, \binom{-2}{-1}$; c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$; d) $\vec{0}$.

Lösungen: a) 1 (alle Vektoren sind l. a.) b) 2, weil $\vec{s_1}$ und $\vec{s_2}$ l.u. sind hat $\underline{A}$ Maximalrang, c) 2, weil $\vec{s_1}$, $\vec{s_2}$ und $\vec{s_3}$ l. a. sind und $\vec{s_1}$ und $\vec{s_3}$ l.u. sind. d) 0, $\vec{0}$ ist immer l. a.

11.2 Lineare Gleichungssysteme (LGS) (BA 1_4)

11.2.1 Definition: Die Matrixdarstellung eines LGS

Gegeben sei ein LGS mit 3 Gleichungen und drei Unbekannten, dann ist das LGS folgendermaßen darstellbar (x_k sind die Unbekannten):

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &=& b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &=& b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &=& b_3 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

Allgemein kann ein LGS mit m Gleichungen und n Unbek. in der Form einer Matrixgleichung $\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit $m \times n$ Matrix $\underline{A}$, $\vec{x}$ ist n dimensional und $\vec{b}$ ist m dimensional beschrieben werden.

11.2.2 Satz: Lösen von LGS über inverse Matrizen

Wenn $\underline{A}$ invertierbar (also insbesondere quadratisch) ist, dann kann die Lösung eines LGS berechnet werden durch: $\underline{A}\vec{x} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{A}^{-1}\underline{A}\vec{x} = \underline{A}^{-1}\vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = \underline{A}^{-1}\vec{b}$.

Die Matrixgleichung wurde also mit $\underline{A}^{-1}$ von links her durchmultipliziert.

Beispiel: $\begin{array}{rcrcr} x_1 &+& 2x_2 &=& 5 \\ x_1 &-& 3x_2 &=& -5 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{A}^{-1} = \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{x} = \underline{A}^{-1}\vec{b} = \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ also } \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{array} \text{ löst das LGS.}$$

Dieses Verfahren ist besonders effektiv, wenn das LGS $\underline{A}\vec{x} = \vec{b}$ mehrmals für eine feste Matrix $\underline{A}$ und einen variierenden Vektor $\vec{b}$ gelöst werden muss.

11.2.3 Definition: Erweiterte Matrix

Gegeben ist das LGS $\underline{A}\vec{x} = \vec{b}$, ($\underline{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$), dann heißt die Matrix $(\underline{A}\vec{b})$ die um $\vec{b}$ erweiterte Matrix $\underline{A}$.

$$(\underline{A}\vec{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$$

Ein Beispiel finden Sie in Abschnitt 11.2.4.

Cartoon 59

11.2.4 Definition: Elementare Zeilenumformungen (EZU)

Sei $\underline{M}$ eine Matrix, dann heißen folgende Umformungen elementare Zeilenumformungen:

(a) Multiplikation einer Zeile mit einem Faktor $\neq 0$.

(b) Addition des beliebigen Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

(c) Vertauschen zweier Zeilen.

Satz: Seien $\underline{A}\vec{x} = \vec{b}$ ein LGS und $\underline{M} = (\underline{A}\vec{b})$, dann ändert sich die Lösungsmenge des LGS durch EZU nicht.

Bsp: Seien $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$, dann ist $(\underline{A}\vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & -5 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

Wir führen einige EZU durch:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & -5 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3')=(1)+(3)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4')=(4)-(1)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2')=(2)\cdot\frac{1}{2}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1')=(1)+2\cdot(2')} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{dies entspricht} \quad \begin{array}{rcr} x_1 + 0 \cdot x_2 & = & 1 \\ 0 \cdot x_1 + x_2 & = & -2 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array}$$

Hier entstand eine Folgen von Matrizen $\underline{A}_1 ... \underline{A}_5$ die alle ein LGS mit der Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{(1;-2)\}$ darstellen, wobei die Lösungsmenge bei der Matrix $\underline{A}_5$ direkt abgelesen werden kann.

11.2.5 Definition: Stufenform

Sei $\underline{S}$ eine $m \times n$ Matrix. Die Abbildung AFN: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{N}_0$ ordnet jedem Zeilenvektor $\vec{z}_j$ $1 \leq j \leq m$ die Anzahl der führenden Nullen zu: $AFN(0;0;-1;0)^T = 2$.

$\underline{S}$ hat **Stufenform** $\Leftrightarrow$ für $1 \leq i < j \leq m$ ist $\begin{array}{ll} AFN(\vec{z}_i) < AFN(\vec{z}_j), & \text{falls } AFN(\vec{z}_i) < n \text{ und} \\ AFN(\vec{z}_i) = AFN(\vec{z}_j), & \text{falls } AFN(\vec{z}_i) = n. \end{array}$

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat Stufenform und $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat keine Stufenform

Die Matrizen $\underline{A}_3$, $\underline{A}_4$ und $\underline{A}_5$ aus Abschnitt 11.2.4 haben Stufenform, $\underline{A}_1$ und $\underline{A}_2$ hingegen nicht.

Das erste Element $\neq 0$ einer Zeile $\vec{z}_j$ heißt **Zeilenkopfelement** (sofern es existiert).

11.2.6 Satz: Lösbarkeit von LGS

Sei $\underline{A}\vec{x} = \vec{b}$ ein LGS $\underline{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Wir bringen $(\underline{A}\vec{b})$ durch EZU auf Stufenform. Die Stufenform soll so normiert werden, dass das Zeilenkopfelement $= 1$ ist. Diese Stufenform heiße $\underline{S}$. $\underline{S}$ kann in vier Teile zerlegt werden. Trennen der letzten Spalte (Vektor $\vec{c}$) und der Nullenzeilen:

$$\begin{array}{c} r \left\{ \vphantom{\begin{array}{c} * \\ ... \end{array}} \right. \\ m-r \left\{ \vphantom{\begin{array}{c} 0 \\ ... \\ 0 \end{array}} \right. \end{array} \left(\begin{array}{cccccc|c} * & * & * & ... & * & * & * \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \hline 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & * \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & * \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \underline{M}_1 & \vec{c}_1 \\ \hline \underline{M}_2 & \vec{c}_2 \end{array} \right),$$

wobei $\underline{M}_1$ keine Nullenzeile enthält und $\underline{M}_2$ nur aus Nullenzeilen besteht. Die Matrix $\underline{M}_1$ habe die Dimension $r \times n$ ($\vec{c}_1$ und $\vec{c}_2$ entsprechen der erweiterten Spalte $\vec{b}$), dann ist r genau der Rang von $\underline{A}$! $\underline{M}_2$ hat die Dimension $(m-r) \times n$.

Satz: Das LSG ist lösbar $\Leftrightarrow$ $\vec{c}_2 = \vec{0}$ (sofern $\vec{c}_2$ überhaupt existiert). Die Dimension des Lösungsraumes des LGS ist $n - r$ (Zeilenrang) = Die Anzahl der Zeilenkopfelemente (Spaltenrang). Ist weiterhin $\underline{M}_1 = \underline{1}_r$ (insbesondere also $r = n$), dann ist das LGS eindeutig lösbar (ein Punkt hat Dimension 0). Die Lösungsmenge eines LGS kann direkt abgelesen werden, wenn alle Spaltenvektoren, die ein Zeilenkopfelement enthalten sonst nur aus Nullen bestehen.

Beispiele: Beim LGS aus Abschnitt 11.2.4 gilt $m = 4$, $n = 2$, $r = 2$ und $\vec{c}_2 = \vec{0}$, also ist das LGS eindeutig lösbar.

$$\text{Sei } \underline{S} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ dann ist das LGS wegen } \vec{c}_2 = \vec{0} \text{ lösbar.}$$

Hier gilt $n = 5, m = 4, r = 2$. Die Lösungsmenge kann hier direkt abgelesen werden, denn $\vec{s}_1 = (1;0;0;0)^T$ und $\vec{s}_3 = (0;1;0;0)^T$ enthalten außer dem Zeilenkopf (zu 1 normiert) nur Nullen. Die Lösungsmenge ergibt sich aus den zwei Gleichungen $x_1 = -2 - 4x_2 + 3x_5$ und $x_3 = 1 + x_5$. $\mathbb{L} = \{(-2 - 4x_2 + 3x_5; x_2; 1 + x_5; x_4; x_5)\}$ für alle $x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$. Hier ist $m = 1$, $n = 3$ und $r = 1$; $\dim(\mathbb{L}) = n - r = 2$.

11.2.7 Definition: Homogenes lineares Gleichungssystem (HLGS)

Ein LGS $\underline{A}_{m\times n}\vec{x} = \vec{b}$ heißt **homogen** oder HLGS $\Leftrightarrow \vec{b} = \vec{0}$. Wenn $\vec{b} \neq \vec{0}$ ist, heißt das LGS **inhomogen**. Jedes HLGS wird von $\vec{x} = \vec{0}$ gelöst. Diese Lösung heißt **triviale Lösung**.

Satz: Die Lösungsmenge eines HLGS ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$.
Beweis: Seien $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ Lösungen von $\underline{A}\vec{x} = \vec{0}$, $r \in \mathbb{R}$, dann gilt nach den Abschnitten 11.1.8 und 11.1.3: $\underline{A}(r\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = r\underline{A}\vec{v}_1 + \underline{A}\vec{v}_2 = r\,\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$.
$r\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ löst auch das HLGS - damit ist das Untervektorraumkriterium (10.9.6) erfüllt.

Seien $\vec{b}_1, ..\vec{b}_{n-r}$ eine Basis für diesen UVR, dann setzt sich die allgemeine Lösung eines inhomogenen LGS aus irgendeiner speziellen Lösung für das LGS $\underline{A}\vec{x} = \vec{b}$ $\vec{x}_{sp}$ und einer beliebigen Linearkombination der $\vec{b}_i$ zusammen:

$$\mathbb{L} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n |\ \vec{x} = \vec{x}_{sp} + \lambda_1\vec{b}_1 + .. + \lambda_{n-k}\vec{b}_{n-k}\} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n |\ \vec{x} = \vec{x}_{sp} + \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j\vec{b}_j\}$$

Diese Lösungsstruktur finden Sie auch bei Lösungsmengen von Differentialgleichungen.

11.3 Determinante und Cramerregel (BA 1_5)

11.3.1 Definition: Streichmatrix

Sei $\underline{A}$ eine $n \times n$ Matrix ($n \in \mathbb{N}; n > 1$). Wir streichen die i-te Zeile und die j-te Spalte und nennen die resultierende Matrix $\underline{S}_{ij}$ eine **Streichmatrix** von $\underline{A}$.

Beispiel: Sei $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ dann ist $\underline{S}_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 9 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

11.3.2 Definition: Determinante

Sei $\underline{A}$ eine $n \times n$ Matrix ($n \in \mathbb{N}^+$). Wir definieren die Determinante det: $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ rekursiv durch: $\det(\underline{A}) = \underline{A}$ falls $n = 1$; $\underline{A}$ ist in diesem Falle eine reelle Zahl. Im Falle $n > 1$ definieren wir (z meint Zeile; s meint Spalte):

$$\det(\underline{A}) = \sum_{z=1}^{n} (-1)^{z+s} \cdot a_{zs} \cdot \det(\underline{S}_{zs})$$

Es sieht so aus, als wäre die Determinante abhängig von s − der Laplacesche Entwicklungssatz (der hier nicht bewiesen wird) zeigt aber, dass dies nicht der Fall ist.

Die Determinante entspricht dem orientierten Volumen des des Spats (n-dimensionales Parallelogramm), welches von den Spaltenvektoren von $\underline{A}$ erzeugt wird. Das gleiche (orientierte) Volumen hat natürlich auch der Spat der Zeilenvektoren. Die Reihenfolge der Vektoren erzeugt das Vorzeichen.

Beispiel: Sei $n = 2$, wir wählen beliebig $s = 1$, dann gilt:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \det(\underline{S}_{11}) + (-1)^{2+1} \cdot a_{21} \cdot \det(\underline{S}_{12}) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Beachten Sie dabei, dass $\underline{S}_{11} = a_{22}$ und $\underline{S}_{21} = a_{12}$ ist. Die so berechnete Determinante entspricht genau der Determinante zweier zweidimensionaler Vektoren. Sei nun $s = 2$, dann gilt:

$$\det(\underline{A}) = (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \det(\underline{S}_{12}) + (-1)^{2+2} \cdot a_{22} \cdot \det(\underline{S}_{22}) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Tatsächlich ist das Ergebnis für $s = 1$ und $s = 2$ identisch.

11.3.3 Satz: Der Laplacesche Entwicklungssatz

Sei $\underline{A}$ eine $n \times n$ Matrix ($n \in \mathbb{N}^+$). Die Determinante ist unabhängig von der Wahl der Spalte s. Wird eine Spalte fest gewählt, dann nennt man die Determinante 'nach Spalte s entwickelt'. Auch die Zeilenentwicklung ist erlaubt und es gilt:

$$\det(\underline{A}) \quad = \quad \sum_{z=1}^{n} (-1)^{z+s} \cdot a_{zs} \cdot \det(\underline{S}_{zs}) \quad = \quad \sum_{s=1}^{n} (-1)^{z+s} \cdot a_{zs} \cdot \det(\underline{S}_{zs}).$$

Das jeweilige Vorzeichen eines Summanden ($(-1)^{z+s}$) kann wie bei einem Schachbrettmuster abgelesen werden, je nachdem, wo der Koeffizient a_{zs} steht:

$$\underline{A} \quad = \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \end{pmatrix} \qquad (-1)^{z+s} \text{ erzeugt das Schachbrett } \begin{pmatrix} + & - & + & \ldots \\ - & + & - & \ldots \\ + & - & + & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \end{pmatrix}.$$

11.3.4 Satz: Die Entwicklung nach Sarrus

Sei $\underline{A} \in \mathbb{R}^{3\times3}$. Wir betrachten zuerst das Spatprodukt der Spaltenvektoren $\vec{s}_1, \vec{s}_2$ und $\vec{s}_3$:

$$\det(\vec{s}_1\, \vec{s}_2\, \vec{s}_3) = \left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \right) \odot \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22} \\ a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32} \\ a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \quad a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{21}\, a_{32}\, a_{13} + a_{31}\, a_{12}\, a_{23} - a_{31}\, a_{22}\, a_{13} - a_{21}\, a_{12}\, a_{33} - a_{11}\, a_{32}\, a_{23}.$$

Jetzt entwickeln wir $\underline{A}$ nach der ersten Spalte:

$$\det(\underline{A}) = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \det(\underline{S}_{11}) + (-1)^{1+2} \cdot a_{21} \cdot \det(\underline{S}_{21}) + (-1)^{1+3} \cdot a_{31} \cdot \det(\underline{S}_{31})$$

$$= a_{11} \cdot (a_{22}\, a_{33} - a_{32}\, a_{23}) - a_{21} \cdot (a_{12}\, a_{33} - a_{32}\, a_{13}) + a_{31} \cdot (a_{12}\, a_{23} - a_{22}\, a_{13}).$$

Dies entspricht genau dem Spatprodukt $\det(\vec{s}_1\, \vec{s}_2\, \vec{s}_3)$.

11.3.5 Beispiel: Die Entwicklung nach Sarrus geht nicht im 4- Dimensionalen

$$\text{Sei } \underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

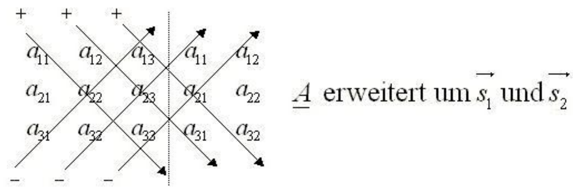


Abb. 180 *Die Entwicklung nach Sarrus*

Wir entwickeln nach der Spalte $s = 2$:

$$\det(\underline{A}) = (-1)^{2+2} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} = -63.$$

Sarrus (4-dim) würde $-18 + 6 - 24 = -36$ ergeben, aber $-63 \neq -36$.

11.3.6 Satz: Die Entwicklung einer Dreiecksmatrix

Sei $\underline{A}_{n \times n}$ eine Dreiecksmatrix, dann kann $\det(\underline{A})$ berechnet werden durch:
$\det(\underline{A}) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot .. \cdot a_{nn}$.

Beispiel: Sei $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(\underline{A}) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-3) = -18$

11.3.7 Satz: Auswirkung von EZU und T auf die Determinante

Wie wirken sich EZU auf die Determinante aus?

Multiplikation einer Zeile mit einem Faktor $\alpha \neq 0$	$\det(A') = \alpha \cdot \det(A)$
Addition des beliebigen Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile	$\det(A') = \det(A)$
Vertauschen zweier Zeilen	$\det(A') = -\det(A)$

Weiterhin gilt $\det(\underline{A}) = \det(\underline{A}^T)$. Dies bedeutet, dass bei der Determinantenrechnung auch elementare Spaltenumformungen (ESU) erlaubt sind.

Definition: Eine Matrix $\underline{A}$ heißt **regulär** $\Leftrightarrow \det(\underline{A}) \neq 0$.
In diesem Fall gilt: $\det(\underline{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\underline{A})}$.

Für $n \times n$ Matrizen $\underline{A}$ und $\underline{B}$ gilt: $\det(\underline{A} \cdot \underline{B}) = \det(\underline{A}) \cdot \det(\underline{B})$ und damit $\det(\underline{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\underline{A})}$.
Für '+' gilt diese Regel nicht: $1 = \det(\underline{1}_2) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$.

Vorsicht: $\det(r \cdot \underline{A}) = r^n \cdot \det(\underline{A})$, weil alle Elemente mit r multipliziert werden. Die Multiplikation mit einem Skalar entspricht also n Multiplikationen mit einer Zeile (EZU).

11.3.8 Satz: Die Cramersche Regel

Sei $\underline{A}$ eine invertierbare 3×3 Matrix ($n \in \mathbb{N}^+$). Gesucht ist die Lösung des LGS $\underline{A}\vec{x} = \vec{e}$. Wenn wir x_1 allgemein ausrechnen, erhalten wir:

$$x_1 = \frac{a_{22} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23}}{\det(\underline{A})} = \frac{\det\left(\vec{e} \; \vec{s}_2 \; \vec{s}_3\right)}{\det(\underline{A})}.$$

Diese Regel kann verallgemeinert werden: Sei $\underline{A}$ eine reguläre $n \times n$ Matrix. Gesucht ist die Lösung des LGS $\underline{A}\vec{x} = \vec{b}$, dann gilt für $1 \leq i \leq n$:

$$x_i = \frac{\det\left(\vec{s}_1 \; .. \; \vec{s}_{i-1} \; \vec{b} \; \vec{s}_{i+1} \; .. \; \vec{s}_n\right)}{\det(\underline{A})} = \frac{1}{\det(\underline{A})} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1\,i-1} & b_1 & a_{1\,i+1} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & ... & a_{2\,i-1} & b_2 & a_{2\,i+1} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{n\,i-1} & b_n & a_{n\,i+1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Diese Regel heißt die **Cramersche Regel**.

11.3.9 Satz: Die adjunkte Matrix

Sei $\underline{A}$ eine reguläre $n \times n$ Matrix. $\underline{A} \cdot \vec{e}_j$ ergibt gerade $\vec{s}_j$ für $1 \le j \le n$. Diese Eigenschaft wollen wir uns zunutze machen. Betrachten wir wieder das LGS $\underline{A}\vec{x} = \vec{e}_1 \Leftrightarrow \vec{x} = \underline{A}^{-1}\vec{e}_1$. Damit entspricht die Lösung des LGS der ersten Spalte von $\underline{A}^{-1}$. Sei $\underline{C} = \underline{A}^{-1}$, $\underline{S}_{ij}$ die Streichmatrizen von $\underline{A}$, dann gilt nach Cramer

$$x_1 = c_{11} = \frac{\det(\vec{e}_1 \vec{s}_2 \; .. \; \vec{s}_n)}{\det(\underline{A})} = \frac{\det(\underline{S}_{11})}{\det(\underline{A})}$$

$$x_2 = c_{21} = -\frac{\det(\underline{S}_{12})}{\det(\underline{A})} \qquad x_3 = c_{31} = +\frac{\det(\underline{S}_{13})}{\det(\underline{A})}$$

Verallgemeinert gilt: $$c_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \frac{\det(\underline{S}_{ji})}{\det(\underline{A})}.$$

Beachten Sie dabei, dass die Reihenfolge der Indizes bei c_{ij} und bei S_{ji} vertauscht ist.

Die Matrix $$\text{adj}(\underline{A}) = \begin{pmatrix} \det(\underline{S}_{11}) & -\det(\underline{S}_{12}) & ... & (-1)^{n+1} \det(\underline{S}_{n1}) \\ -\det(\underline{S}_{21}) & \det(\underline{S}_{22}) & ... & (-1)^{n+2} \det(\underline{S}_{n2}) \\ ... & ... & ... & ... \\ (-1)^{n+1} \det(\underline{S}_{n1}) & (-1)^{n+2} \det(\underline{S}_{n2}) & ... & \det(\underline{S}_{nn}) \end{pmatrix}$$

heißt die zu $\underline{A}$ **adjunkte** Matrix adj($\underline{A}$).

Nach Konstruktion gilt $$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\underline{A})} \cdot (\text{adj}(\underline{A}))^T$$

Manchmal (z. B. in Wikipedia 2008) wird adj($\underline{A}$) schon transponiert definiert.

Beispiele: Sei $\underline{A}$ zweidimensional, dann ist

$$\text{adj}(\underline{A}) = \begin{pmatrix} \det(S_{11}) & -\det(S_{12}) \\ -\det(S_{21}) & \det(S_{22}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} = \det(\underline{A}) \cdot \left(\underline{A}^{-1}\right)^T.$$

Sei $\underline{A}$ dreidimensional, dann ist $$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\underline{A})} \begin{pmatrix} \det(S_{11}) & -\det(S_{21}) & \det(S_{31}) \\ -\det(S_{12}) & \det(S_{22}) & -\det(S_{32}) \\ \det(S_{13}) & -\det(S_{23}) & \det(S_{33}) \end{pmatrix}.$$

11.4 Lineare Transformationen (MV)

11.4.1 Definition: Lineare Transformation

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^n \to R^m$ mit der Eigenschaft, dass $f(\alpha\vec{x} + \vec{z}) = \alpha f(\vec{x}) + f(\vec{z})$, dann heißt f **lineare Transformation**. Bei bijektiven LT ist das Bild einer Geraden ($\alpha\vec{x} + \vec{z}$; hier ist also $\vec{z}$ der Aufpunkt und $\vec{x}$ der Richtungsvektor) wieder eine Gerade (mit Aufpunkt $f(\vec{z})$ und Richtungsvektor $f(\vec{x})$); bijektive LT sind also geradentreu. Im $\mathbb{R}^n$ gilt tatsächlich, dass jede geradentreue Abbildung mit $f(\vec{0}) = \vec{0}$ eine LT ist.

Beispiel: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix}$, dann ist f eine LT.

Beweis: $$f(\alpha\vec{x} + \vec{z}) = \begin{pmatrix} (\alpha x_1 + z_1) - (\alpha x_2 + z_2) \\ 2(\alpha x_1 + z_1) + (\alpha x_2 + z_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x_1 - x_2) + (z_1 - z_2) \\ \alpha(2x_1 + x_2) + (2z_1 + z_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha(x_1 - x_2) \\ \alpha(2x_1 + x_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 - z_2 \\ 2z_1 + z_2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 - z_2 \\ 2z_1 + z_2 \end{pmatrix} = \alpha f(\vec{x}) + f(\vec{z}).$$

Betrachten wir nun die Bilder der Einheitsvektoren: $f\binom{1}{0} = \binom{1-0}{2\cdot 1+0} = \binom{1}{2}$, $f\binom{0}{1} = \binom{0-1}{2\cdot 0+1} = \binom{-1}{1}$.

Allgemein gilt: $$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \binom{1\cdot x_1 - 1\cdot x_2}{2\cdot x_1 + 1\cdot x_2} = x_1 \cdot \binom{1}{2} + x_2 \cdot \binom{-1}{1} = x_1 \cdot f(\vec{e_1}) + x_2 \cdot f(\vec{e_2}).$$

28. **Prognoseintervall und Konfidenzintervall (nicht abirelevant in BW):** FS: –, Abs –.

    Für eine binomialverteilte Zufallsgröße gilt näherungsweise:

    (i) Prognoseintervall: $\left[p - c \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}; p + c \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\right]$

    (ii) Die Gleichung $|h - p| = c \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$ liefert die beiden Grenzen eines Konfidenzintervalls für den Wert von p.

29. **Signifikanztest:** FS: –, Abs 427/14.17.5.

    Wird die Nullhypothese irrtümlich abgelehnt, so bezeichnet man dies als Fehler erster Art. Das Signifikanzniveau ist der Wert, den die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art nicht überschreiten soll.

    Wird die Nullhypothese irrtümlich nicht abgelehnt, so bezeichnet man dies als Fehler zweiter Art.

16.3 Auszug aus dem WTR Curriculum von Herrn Bittermann

16.3.1 Basisfunktionen bis Klasse 8

Tausender-Trennung ein-/ausschalten
Im Setup-Menü: [SHIFT] [MENU] [▼] [▼] [2]

```
1000er-Trennung?
1:Ein
2:Aus
```

--> **Werte speichern**
gespeicherte Werte abrufen und löschen.
Zahl 13 unter A speichern, Speicher anzeigen und löschen:

[1] [3] [STO] [(–)] [=]
[SHIFT] [STO]
[SHIFT] [9] [2] [=] [AC]

```
13→A
                13
```

```
A=13    B=0
C=0     D=0
E=0     F=0
M=0     x=0
y=0
```

```
Zurücksetzen?
1:Setupdaten
2:Speicher
3:Alle initialis.
```

--> **Setup-Einstellungen**
Einstellung der Präferenzen Bruch oder Dezimalzahl als Ergebnis
[SHIFT] [MENU] [1]
Option 1: Ausgabe als Zahl in math. Schreibweise
Option 2: Ausgabe als Dezimalzahl
Option 3 und 4: Eingabe ohne math. Schreibweise – nicht zu empfehlen!

```
1:Math --> Math
2:Math --> Dezim.
3:Lin. --> Linear
4:Lin. --> Dezim.
```

--> Es kann immer zwischen den Anzeigen umgeschaltet werden mit der Taste [S⇔D]. (Schmid - Taste)

Einstellung des Bruchergebnisses als Bruch oder gemischte Zahl.
Empfehlung: als Bruch.
[SHIFT] [MENU] [▼] [1]

```
1:ab/c
2:d/c
```

16.3.2 Wertetabellen von Funktionen (ab Ag 87/208)

--> Im Setup-Menü kann man festlegen, ob die Wertetabelle für eine oder zwei Funktionen angezeigt wird. [SHIFT] [MENU] [▼] [4]

```
1:f(x)
2:f(x),g(x)
```

Eingabe der Wertetabelle:
[MENU] [6] [x] [x²] [=] [2] [x] [=]
Eingabe von Start- und Endwert incl. Schrittweite.
Man kann jetzt direkt in der Wertetabelle einzelne Argumente ändern (überschreiben). Es wird sofort der neue Funktionswert berechnet.

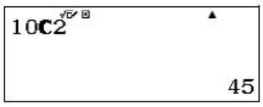
```
Tabellenbereich
 Start:1
 Ende :5
 Inkre:1
```

Mit der Taste [AC] kommt man zurück zur Eingabe der Funktionsgleichung.

Aus der Wertetabelle heraus kommt man mit [SHIFT] [OPTN] zur Anzeige des QR-Codes, den man z.B. mit einem Smartphone auslesen kann. Die Schaubilder werden angezeigt.

16.3.3 Berechnung von Binomialkoeffizienten (ab Ag 331/836)

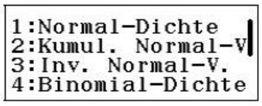
--> Binomialkoeffizienten können direkt berechnet werden, $\binom{10}{2}$ wird mit nCr im WTR eingegeben:
[1] [0] [SHIFT] [÷] [2] [=]

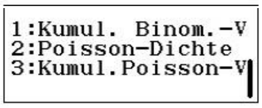


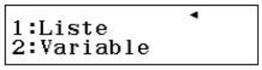
16.3.4 Die Binomialverteilung (ab Ag 336/852)

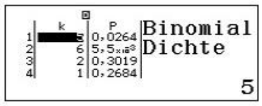
--> Einstellung des richtigen Menü-Eintrages:
[MENU] [4]

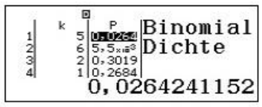
Menüpunkt [4] führt zur Binomialverteilung, geht man ins Menü der nächsten Seite, kommt man zur kumulierten Binomialverteilung.
Zur Eingabe der Werte für k, n und p geht man zu Eintrag „2:Variable“.
Es können die Werte eingegeben werden. [=] führt wieder zurück zur Eingabe neuer Werte.
Will man eine Übersicht mehrerer Werte für k und/oder p, so geht man zu „1:Liste“. Es können Werte für k eingegeben werden. [=] führt weiter zur Eingabe der Werte für n und p.
Es können die Werte für k auch direkt in der Tabelle geändert werden.
Geht man mit den Pfeiltasten auf das Ergebnis für P, kann man dieses auch z.B. unter A speichern:
[▶] [STO] [(−)]





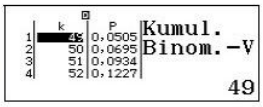


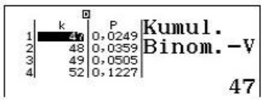




16.3.5 Testen von Hypothesen (ab Ag 348/880)

Beispiel: Die Nullhypothese H_0: $p \geq 0{,}3$ soll mit einem Stichprobenumfang von n = 200 auf einem Signifikanzniveau von 5% getestet werden. Bestimmen Sie die Entscheidungsregel.
Hier liegt ein linksseitiger Test vor. X ist die Anzahl der Treffer der Stichprobe und im Extremfall binomialverteilt mit n=200 und p=0,3.
Es muss gelten: $P(X \leq k) < 0{,}05$. Gesucht ist der größte Wert für k, der diese Bedingung erfüllt.
Der Erwartungswert von X ist $E(X)=200 \cdot 0{,}3=60$, also muss k kleiner als 60 sein.
Die Wahrscheinlichkeiten sind noch zu hoch. Direkt in der Tabelle können die Werte für k korrigiert werden. Bestätigung mit [=] führt zur Eingabe von n und p. [=] auch hier berechnet die Werte neu.
Somit ist der Ablehnungsbereich der Nullhypothese von 0 bis 48, im Bereich von 49 bis 200 kann die Nullhypothese nicht abgelehnt werden.



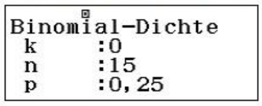


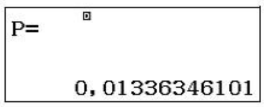
16.3.6 Binomialverteilung: n bestimmen / Mimimi Aufgaben (ab Ag 341/861)

Beispiel: Wie oft muss man das Glücksrad mindestens drehen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über 99% mindestens einmal die Farbe Blau zu bekommen?

Wahrscheinlichkeit für Blau beträgt ¼.
Es ist zu berechnen:
$P(X \geq 1) > 0{,}99 \Leftrightarrow P(X=0) < 0{,}01$

P ist zu groß. Durch [=] Ändern des Wertes für n.
Für n=17 erhält man 0,0075





Winkeleinheit wechseln: Im Setup-Menü: [SHIFT] [MENU] [▼] [▼] [3] 1=Gradmaß 2=Bogenmaß

16.4 Inhaltsbezogene Kompetenzen für das Abitur des LK

Im LK-Abitur rechne ich ua (thx Hmb) mit den Themen Extremwertag, Tangenten von außerhalb, Vektorbeweis + LGS mit Parameter.

16.4.1 Algebra: (Voraussetzung)

Faktorisierung durch Ausklammern	Ag. 19/2	Abs. 38/2.3.5	Kl. 8
Anwendung einer binomischen Formel 'rückwärts'	Ag. 20/6	Abs. 38/2.3.5	Kl. 8
Substitution	Abs. 38/2.3.5		Kl. 8
Lineare Gleichungen (z.B. $ax = x + 3$)	Ag. 22/17 -	23/19	Kl. 8
Quadratische Gleichungen	Ag. 32/58	32/60	Kl. 8
Potenzgleichungen mit natürlichen Exponenten	Ag. 37/94		Kl. 9
Exponentialgleichungen (mit beliebiger Basis)	Ag. 39/107	Ag. 160/411	Kl. 9+11
Wurzelgleichungen	Abs. 35/2.2.8		Kl. 8+9
Bruchgleichungen	Ag. 33/68		Kl. 8+9
Trigonometrische Gleichungen	Ag. 112/293		Kl. 10
Betragsgleichungen	Ag. 36/77		Kl. 8
Lösen von Ungleichungen	Abs. 34/2.2.7		Kl. 8
Lineare Gleichungssysteme (auch mit Parameter)	Abs. 252/10.1.7	276/10.6	Kl. 8-11

nicht: Mehrfaches Quadrieren (bei mehreren Wurzeltermen), Bruchgleichungen, mit mehreren Linearfaktoren im Nenner, Angabe aller Lösungen bei trigonometrischen Gleichungen, Auflösung einer Ungleichung durch Äquivalenzumformungen, (LGS mit Parameter 'links')

16.4.2 Analysis: (Im Wahlteil 20 VP)

Kenntnis grundlegender Funktionstypen und ihrer charakteristischen Eigenschaften:			
Potenzfunktionen und ganzrationale Funktionen	Abs. 95/5.2.7,	96/5.3	Kl. 9+10
trigonometrische Funktionen	Abs. 108/5.4		Kl. 10
einfache gebrochen-rationale Funktionen	Abs. 116/5.5		Kl. 11
natürliche (und allgemeine neu '24) Exponentialfkt	Abs. 159/6.3		Kl. 11
einfache Wurzel, ln und Umkehr-Funktionen	Abs. 92/5.2,	164/6.3.7	Kl. 9+11
Bei Umkehrfunktionen speziell Definitions und Wertebereich, Graph und Funktionsterm			
Wirkung von Parametern, insbesondere:			
Verschiebungen in x- und y-Richtung	Abs. 93/5.2.3,	123/5.6.7	Kl. 8-10
Streckungen in x- und y-Richtung	Abs. 87/210	110/5.4.4	Kl. 8-10
Spiegelungen an x- bzw. y-Achse	Abs. 100/5.3.6		Kl. 8-10
Zusammengesetzte Funktionen: Summen, Differenzen:			
einfache Produkte, Quotienten einfache Verkettungen	Abs. 92/5.2.1,	161/6.3.3	Kl. 9-11
Bestimmung von Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften:			
Interpolation; 'Steckbriefaufgaben'	Abs. 155/6.2.10,	277/10.6.2	Kl. 10+11
Funktionenscharen, (Ortslinien fehlt ab 2024)	Abs. 97/5.3.2,	156/6.2.11	Kl. 10
{höhere} Ableitung (e: {*higher order*} *derivative*)	Abs. 140/6.1.7,	159/6.3	Kl. 10
Änderungsrate	Abs. 62/4.2.5,	200/8.1.1	Kl. 10-11
Ableitungsfunktion, Tangente und Normale	Abs. 140/6.1.7,		Kl. 10
Ableitungsregeln:			
Potenzregel, Summen- und Faktorregel	Abs. 139/6.1.5	139/6.1.6	Kl. 10
Kettenregel, Produktregel	Abs. 161/6.3.3	162/6.3.5	Kl. 11
Untersuchung von Funktionen (quasi madness) und Graphen, insbesondere:			
Definitions- und Wertemenge	Abs. 93/5.2.3,	98/5.3.4	Kl. 9-10
Nullstellen, elementare Symmetrie	Abs. 101/5.3.8	105/5.3.12	Kl. 10
Grenzverhalten, senkrechte und waagerechte Asymptoten	Abs. 100/5.3.7	116/5.5	Kl. 10+11
Monotonie, Krümmungsverhalten	Abs. 146/6.2.4,	150/6.2.6	Kl. 10
Extrempunkte, Wendepunkte	Abs. 145/6.2		Kl. 10