

## Abitur + Klassenarbeits- Vorbereitung (Sd)

Ihr Notendurchschnitt aus den Halbjahren 11<sub>1</sub>, 11<sub>2</sub> und 12<sub>1</sub> bildet die sogenannte Anmeldenote, die eine Prognose für Ihr Abschneiden im Abitur ist. Deshalb wird (ab Klasse 11) jede Arbeit, die ich mit Ihnen schreibe, etwa Abiturniveau sowie einen Pflicht und einen Wahlteil haben. Zur Vorbereitung auf eine Klausur sollten Sie **dringend** alte Abituraufgaben rechnen. Aber

# K e i n e P a n i k !

Abituraufgaben finden Sie z.B. hier! Die Lösungen finden Sie unter [AbiErg.slt.biz](http://AbiErg.slt.biz).  
Es folgen weitere 10 Gründe diese Abiturvorbereitung zu verwenden:

- 1) Sie beantwortet die Frage: **'Was sollte ich nach welcher Unterrichtseinheit können?'**;
- 2) Sie enthält das Formeldokument mit Verweisen  
Den **Plan, 0 NP zu verhindern** finden Sie jetzt im Abschnitt 15/1.1.11
- 3) Zu den meisten Aufgaben gibt es Basisaufgaben (BAg) zur Vorübung
- 4) Sie enthält nicht nur die Abituraufgaben + Musteraufgaben der letzten drei Jahre sondern auch Aufgaben des IQB Pools; inklusive Schwierigkeitsgrad als Index
- 5) Mit Englisch-Mathe Vokabeln (für IFC + Studium)
- 6) Die Abivorbereitung ist gratis; Download unter [Abitur.slt.biz](http://Abitur.slt.biz)
- 7) Mit einer Vorbereitung auf das mündliche Basiskurs-Abitur (Abs. 984/16.8)
- 8) Nicht Basiskurs geeignete Aufgaben und Abschnitte sind in der Regel durch Index  $LK$  oder durch (Nur LK) gekennzeichnet
- 9) Sie enthält eine Operatorenliste, das WTR Curriculum und die inhaltsbezogenen Kompetenzen für den LK (mit Aufgaben-Verweisen)
- 10) Sie enthält auch eine komplette chronologische Formelsammlung der Klassen 8-12

Fast alle Aufgaben haben Indizes Beispiel  $c_2$ ), die sich (normalerweise) auf den LK beziehen.

1+2 bedeutet Basisniveau (Bereich 'ausreichend'); 3+4=Könnerniveau (Bereich 'gut').

Ohne Gewähr: Für  $\geq 5$  NP sollten Sie im BK das Niveau 2; im LK das Niveau 2-3 beherrschen.

Alle Seiten der Abivorbereitung sind: 1057, 949-1018, 377-380, 2-16

### Wettbewerbe:

Mitte November: Informatik Biber, Kl 8-12;

Anfang Dezember: Mathe im Advent, Kl 8-10;

Ende Februar: Pangea, Kl 8-12;

Ende Oktober: Landeswettbewerb, Kl 9+10;

1. Dezember - März: Bundeswettbewerb, Kl 10-12;

Anfang Februar: Mathe ohne Grenzen, Kl 9+10;

3. Do im März: Mathe Känguru, Kl 8-12;

Die Filme finden Sie auf den Kanälen **'Mathe Schmid'** oder **'Schmid happens'**.

Mein Buch und auch die Lösungsvorschläge finden Sie auf meinem Internetauftritt: [Sd.SLT.biz](http://Sd.SLT.biz) bei den jeweiligen Klassen. User Schueler, Pass erfragen Sie unter [Sd@SLT.biz](mailto:Sd@SLT.biz). Dort erhalten Sie auch ein Token für die online-Version von Hurra Mathe: Mobile Mathe.

Alle meine Projekte finden Sie unter [mathe.slt.biz](http://mathe.slt.biz).

12 <sub>4</sub>	10.5	Geometrie	Schnittwinkel und Abstände	271
$M+1$	3.1	Algebra	Komplexe Zahlen	49
$M+2$	6.3.11	Analysis	Die Regel von de l'Hospital	170
$M+3$	7.1.18	Integrale	Regeln der Integralrechnung	184
$M+4$	8.2	Dgln	Taylor und Differenzialgleichungen	202
M-AG <sub>1</sub>	4.4	Folgen	Vollständige Induktion ( $M+0$ )	66
M-AG <sub>2</sub>	4.5	divers	Vorbereitung auf Wettbewerbe	67
BA 2 <sub>8</sub>	12.4	Wth	beinahe Binomialverteilungen	342
BA 3 <sub>2</sub>	13.3	Wth	Statistik	358

## 1 Einleitung

## Willkommen!

Mathematik macht Spaß + glücklich!      Mathematik steckt in mir (und Dir) und muss heraus.  
Bedenke aber: Beglückenderer, als Mathematik zu machen, ist es, Mathematik zu lehren.

**Zum Geleit:** *Hurra Mathematik* besteht aus zwei Teilen: Einem Schulteil, der im Großen und Ganzen aus Aufgaben (oft notiert als Seite/Aufgabennummer) besteht und einem Hochschulteil welcher den Stoff noch einmal auf höherem Niveau wiedergibt. Der Unterrichtsteil zeigt meinen Unterricht der Klassen 8-12. Die erwarteten Schülerlösungen zu fast allen Aufgaben finden Sie auf meiner Internetseite [sd.slt.biz](http://sd.slt.biz). User: Schueler. Das Passwort kann bei mir erfragt werden. Bitte beachten Sie dabei die Version; die Aufgabennummern können sich laufend ändern. Sollte bei einer Aufgabe eine Längeneinheit fehlen, so ist für diese *cm* zu wählen. Der Platz im Buch ist knapp, deshalb bitte ich die dichte Darstellung zu entschuldigen. Eine übersichtlichere Version (Thx Alice .. mit gleichen AgNr + anderen Seitenzahlen) oder einen Zugang (Token) zur Online-Version 'Mobile Mathe' mit Aufgaben, LöVo + Filmlinks gibt es auf Anfrage.

**Der Bezug zu den eingeführten Lehrwerken:** Als ich mich wieder einmal über die Bücher der Mittelstufe beschwert habe, sagte mein Kollege Froberg: 'Wieso? Mit diesen Büchern können die Schüler sehr gut *zu Hause* lernen'. Es dauerte etwas, bis ich begriff, dass die Bücher zur Eigenarbeit gedacht sind und nicht (unbedingt) zum Unterrichten. Deshalb arbeiten wir in der Schule allein mit *Hurra Mathematik* und die Schüler sollen zu Hause den Unterrichtsstoff mit den Schulbüchern weiter vertiefen. Den Bezug zu den eingeführten Schulbüchern finden Sie am Anfang vieler Abschnitte:

Klasse 8,9:	Neue Wege 4,5, 2007	(=NW4, NW5),
Klasse 8,9,10:	Lambacher Schweizer 8,9,10, 2017	(=LS8 .. LS10),
Klasse 10:	Elemente der Mathematik 6, 2009	(=EM6),
oder Klasse 10:	Lambacher Schweizer 11, 1998	(=LS11),
Klassen 10-12:	Lambacher Schweizer Kursstufe, 'Jahr'	(=KS <sub>Jahr</sub> ),



Was macht Lewandowski den ganzen Tag? Und hat er das nötig?

Folgende Taschenrechner sind Basis der LöVo des Buches: GTR: Texas TI 83; **WTR:** Casio fx-87DEX

**Binnendifferenzierung (BD):** (thx Trl) BD bezeichnet die individuelle Förderung Einzelner innerhalb einer Lerngruppe. BD kann nur im offenen Unterricht wirkungsvoll praktiziert werden. Also ist es beim lehrerzentrierten Unterricht sinnvoll, diese in die Hausaufgaben zu verlegen. Deshalb finden Sie bei fast allen Aufgaben Indizes, Bsp: c<sub>2</sub>). Die Nr. sagt etwas über deren Niveaustufe aus: 1+2=Basisniveau (bis Note 3-4; 6 NP), 3+4=Könnerniveau (bis Note 1-2, 12 NP), 5(+6)=Profiniiveau. Bitte beachten Sie dabei, dass für die Niveaustufe nicht nur relevant ist, *was* gefragt wird, sondern auch *wann* es gefragt wird. Die Minimalanforderungen sind immer auf Niveau 1-2. Sonderniveau sind *a*=Algorithmus, *b*=Beispiel, *e*=Einführung, *L*=nur LK, *r*=Regel, und *w*=Wiederholung (Niveau *b* und *r* müssen als HA ins Regelheft (s.u.) übertragen werden). Eine Niveaunkretisierung bei Einführungsaufgaben ist schwierig, denn die Agstellungen sind eher leicht, es wird aber ein Transfer erwartet. Ag mit Index *T* bauen teilweise aufeinander auf und sollen noch auf weitere Ergebnisse führen.

**Das Regelheft:** (thx Lor, Wg) Sie sollten ein Regelheft (als Hausheft) führen. Im Regelheft sollten alle wichtigen Formeln, sowie Regeln und Algorithmen des Unterrichtes kompakt, evtl. mit einem Beispiel, notiert sein. Sollte eine Aufgabe (idR Lückentext) den Niveauindex *r* haben, so schreiben

Sie die ausgefüllte Variante als Hausaufgabe in Ihr Regelheft ab. Eine Aufgabe mit Index 'b' sollte im Unterricht gerechnet werden; die Lösung dieser Aufgabe (eventuell mit Aufgabentext) gehört zu einer Regel und ist ebenfalls ins Regelheft zu übertragen. Außerdem sollten Sie in das Regelheft alle Formeln der Formelsammlung abschreiben, die während des Unterrichtes besprochen wurden. Im Gegensatz zum Regelheft ist das Schulheft ein Arbeitsheft und darf (soll) auch falsche Ansätze oder Durchgestrichenes enthalten. Hausaufgaben und Übungsaufgaben gehören ins Schulheft.

**Hausaufgabe** sind grundsätzlich alle im Unterricht ausgelassenen Aufgaben. Faustregel: Ein Schüler mit Note  $n$  sollte (mindestens)  $n$  Aufgaben (pro Unterrichtsstunde) als Hausaufgabe machen (auch wenn dies nicht kontrolliert wird). Eine Aufgabe mit Markierung  $\boxed{f_2}$  wird kontrolliert und muss von jedem Schüler als HA präsentabel vorbereitet werden. Ag mit  $\textcircled{a}_2$  (auch (f) (U) oder Index 'f') sind gefilmt worden (Youtube Kanäle Mathe Schmid + Schmid happens). Während des Filmens ist die Mitarbeit freiwillig und es werden keine mündlichen Noten gemacht. Zu allen Aufgaben gibt es Lösungsvorschläge im Netz; diese sollten aber erst konsultiert werden, wenn Sie einige Zeit erfolglos versucht haben, die Aufgabe zu bearbeiten. Damit entfällt auch die Ausrede: 'Ich konnte die Hausaufgabe nicht machen, weil ich diese nicht verstanden habe'. Sollten Sie (trotz auswendig gelernter Formeln) einmal eine Aufgabe (Ihres Niveaus) nicht herausbekommen, gehen Sie wie folgt vor:

- 1) Schreiben Sie die Lösungsvorschläge ab.
- 2) Mailen Sie an Sd@slt.biz die Aufgabe - ich versuche dann die LöVo zu ergänzen; (goto 1).
- 3) Erwirken Sie über den Kurssprecher im Unterricht eine Besprechung der Aufgabe (bis Niveau 3). Bitte melden Sie mathematische Fehler und auch Rechtschreibfehler sofort (per Mail).

Was wir zu Schülern sagen...



Im Falle des **Onlineunterrichts** beginnen wir zur gleichen Zeit wie beim Präsenzunterricht unter stream.slt.biz. Den Plan des Tages finden Sie dann unter 'Klasse'.slt.biz. Ein Thema besteht aus einem Film, einer Aufgabe, die in Kleingruppen (Breakoutrooms Raum  $n$ .slt.biz) bearbeitet werden soll und einer anschließenden Besprechung (in der Regel mit Aufzeichnung). Alle Projekte finden Sie unter mathe.slt.biz Bitte geben Sie die HA (LöVo online) spätestens 48 Stunden vor den Meetings eigenhändig handschriftlich als jpg mit dem Datei-Namen [Klasse]-[Nummer]-[Name].jpg per Mail ab. Als Schüler der Klasse 10k gibt Max Müller die HA des Meetings Nr 3 die Datei namens 10k\_03\_Mueller.jpg ab. Bei Studenten entfällt die Klasse. Bitte schauen Sie sich alle Filme auch die ohne HA bis zum Ende an und kommentieren Sie diese (wenn erwartet) mit Ihrem Kürzel (VorNac, hier MaxMuel).

**Notentransparenz:** Im Regelfall schreibe ich pro Halbjahr 1 bis 3 Tests (diese zählen einfach → Heft) und 2 KA (diese zählen doppelt). Wer wiederholt bei einem Test oder einer KA oder bei der letzten KA fehlt, muss damit rechnen, diese (oder diesen) während der nächsten Unterrichtsstunde nachschreiben zu müssen. Die mündliche Leistung werte ich wie einen Test. Mit der letzten Arbeit jedes Halbjahres können Sie einen Papier-Streifen mit Ihren bisherigen Leistungen erhalten. Das Erstellen dieses Streifen kann den Datenschutz leicht verletzen. Bitte melden Sie rechtzeitig, wenn Sie sich vor diesen Daten schützen wollen also keinen Streifen wünschen. Wenn Sie einen Streifen haben, können Sie sich in meiner Sprechstunde (nicht im Unterricht - zusammen mit Ihrer besten Freundin) zur erteilten Note äußern. Wenn alle KA/Tests mitgeschrieben wurden, kann die Note eventuell durch einen Vortrag bzw. GFS aufgewertet werden. Goto 381/3a+4a.

**Zwillingsaufgaben** (markiert durch einen Index Z) kommen verstärkt ab der Version 6.8 vor und sind Textaufgaben, die neben der eigentlichen Mathematik noch ein kleines Rätsel beinhalten. Gesucht ist meist eine Person (oft mit einem verfremdeten Namen oder anderem Geschlecht), eine Erzählung oder ein Ereignis; die Lösung wird im Unterricht nicht besprochen und kann in den LöVo auf Sd.SLT.biz nachgeschlagen werden. Aufgaben mit Index 'g' haben einen geschichtlichen Bezug. Goto 16/1.3

**Is nich gibts nicht:** Grundsätzlich findet jeder Unterricht (auch das Tutorium) statt, selbst wenn auf dem Vertretungsplan 'Entfall' steht. In der Regel werde ich dann von einem Schüler vertreten (SZU), der mit Ihnen Übungsaufgaben oder KA Besprechungen macht.



Ein **Hauptfach** definiert sich u.a. dadurch, dass Sie zur Nacharbeit (zu Hause) etwa die Zeit benötigen, die Sie das Fach in Schule haben (für Mathematik sind dies also etwa 4-5 Schulstunden). Dazu gehört das Rechnen der Hausaufgaben (das waren die im Unterricht ausgelassenen Aufgaben), das Auswendiglernen der Formeln und (als Abivorbereitung) das Rechnen alter Abituraufgaben. Optimalerweise tun Sie dies zu festen Zeiten in der Woche (Stundenplan; gleichverteilt, nicht blockweise) und in Gruppen (wenn Sie nicht zusammen arbeiten, beaufsichtigen Sie sich wenigstens gegenseitig).

## 1.1 Formelsammlung

Matheformeln auswendig lernen - ist in Mathe nicht viel mehr das Verständnis entscheidend? Man muss doch nicht wissen wie's geht sondern nur wissen wo's steht. **NEIN!** Entscheidend ist, dass man überhaupt weiß, wofür es eine Formel gibt und durch die Formeln Zusammenhänge erst klar werden. Wissen Sie, was die Formel  $a^2 + b^2 = |a + ib|^2$  bedeutet? Nein? Aber Sie wissen, dass diese Formel von Formel 29 abstammt, und damit haben Sie schon einen Großteil verstanden. Und Formeln geben Ihnen die Sicherheit in einer Prüfung das Richtige zu tun. Übrigens: Bei einer Sprache verzichten Sie auch nicht aufs Vokabeln lernen, wenn Sie doch ein Wörterbuch haben ☺).

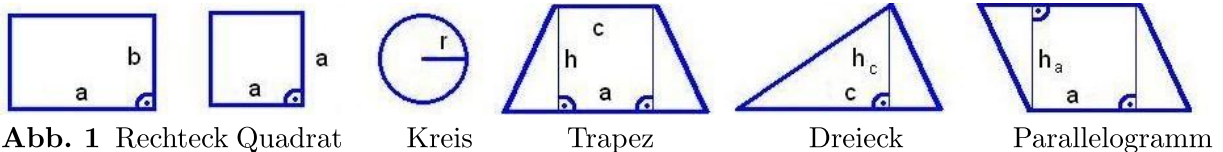
Bitte beachten Sie, dass sowohl die Formelsammlung als auch die Minimalanforderungen (am Ende jeder Unterrichtseinheit) nur als Basis für die weiteren Kapitel zu verstehen sind. Eine KA Vorbereitung sollte weit mehr beinhalten. Besonders relevant zur KA Vorbereitung (für den Reproduktionsteil) sind Aufgaben mit der Markierung (KA<sub>X</sub>) ( $X \in \{ 'B'asis, 'l'okal, 'G'lobal, 'Z'entral \}$ ; optional bis zur Markierung ( $\overline{KA}$ )). Und denken Sie immer dran: Wenn Sie in einer KA nur Falsches hinschreiben, gibt es 0 Punkte, wenn Sie aber nichts hinschreiben, werden es auch nicht mehr (falsch  $\geq$  nichts).

Folgende Formeln sind unbedingt auswendig zu lernen; (W) bedeutet dabei 'wichtig'; (A) 'auswendig'; (Z) 'zentral'. Zentrale Formeln sind praktisch Voraussetzung für jede Unterrichtseinheit. Die Formelsammlung ist nicht unbedingt vollständig. Weitere Formeln dürfen gerne auch gelernt werden. Taucht im Aufgabentext der Hinweis (**Formel 1**) auf, so wird die Formel 1 an dieser Stelle eingeführt. Weitere Erwähnungen sind mit F1 gekennzeichnet. Vielen Dank an Familie Tressel und allen Formelsammlern für die Mithilfe.

### 1.1.1 Formelsammlung bis Klasse 7

**Merkwürdig** wenn Sie das Wort hören, denken Sie an sonderbar skurril - im eigentlichen Sinne bedeutet es aber es ist würdig, es sich zu merken. Wenn Sie Information mit einem durchaus merkwürdigen Bild kombinieren, so können Sie sich diese oft viel besser merken. Ziel ist es, jede Formel mit einem merkwürdigen erklärenden Bild zu versehen. Vorschläge sind willkommen (zB Formel 10).

- (A) Die ersten 20 Quadratzahlen sind: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400;  $25^2 = 625$ ; Kubikzahlen:  $2^3 = 8, 3^3 = 27, 4^3 = 64, 5^3 = 125$ .  
(A) Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl  $>1$ , die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist. Die ersten acht Primzahlen sind 2,3,5,7,11,13,17,19.
- (A) Ein Term ist immer nach der Verknüpfung benannt, die als letztes ausgeführt wird.
- (Z) Seien  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , dann gilt das Kommutativgesetz  $a+b = b+a$ ,  $a \cdot b = b \cdot a$ , das Assoziativgesetz  $a + (b + c) = (a + b) + c$ ,  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$  und das Distributivgesetz  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ;



- (A, Ag 55/135) (Vermehrter / verminderter Grundwert) Ein Bestand wächst mit  $p$  Prozent pro Zeitschritt, dann gilt für den Wachstumsfaktor  $q$ :  $q = 1 + \frac{p}{100}$ .

5. FD 3: (A) Flächenberechnung von Dreiecken, Vierecken und Kreisen:

Kreis:	$A = \pi \cdot r^2, U = 2 \cdot \pi \cdot r$	
Quadrat:	$A = a^2,$	
Rechteck:	$A = a \cdot b$	Länge mal Breite,
Parallelogramm:	$A = g \cdot h$	Grundseite mal Höhe,
Dreieck:	$A = \frac{c \cdot h_c}{2}$	Grundseite mal Höhe durch zwei,
Trapez:	$A = \frac{a+c}{2} \cdot h$	mit $a  c$ und Höhe $h$ .

6. (W) Der Schwerpunkt  $S$  eines Dreiecks teilt die Schwerlinie im Verhältnis 2:1.  
 7. (W)  $a \cdot b = \text{ggT}(a, b) \cdot \text{kgV}(a, b) = \text{größter gemeinsamer Teiler} \cdot \text{kleinstes gemeinsames Vielfaches}$ .  
 8. (W) 'Der kleine Gauß:'  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n^2+n}{2}$ ;  
 9. (Z) Die Steigung  $m$  einer Geraden durch  $P(x_1; y_1)$  und  $Q(x_2; y_2)$  mit  $x_1 \neq x_2$  berechnen wir mit

$$\text{Zwei-Punkte-Formel (ZPF): } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

*Angela Merkel [m] fährt auf ihren Ski [=] den Berg hoch gegen ein Haus, dass zu Bruch geht. Im oberen Stockwerk der Ruine [Bruch] wirft ein Sektglas, dass mit Schwanenblut [y<sub>2</sub>] gefüllt ist einen Speer [-] auf ein anderes Sektglas und trifft dessen Kerze [y<sub>1</sub>]. Im unteren Stockwerk wird ein Andreaskreuz vom Schwanenblut [x<sub>2</sub>] betropft der Speer [-] fällt auf ein anderes Andreaskreuz, welches die mit Glück die Kerze auffängt [x<sub>1</sub>].*

10. (Z) Die Gleichung einer Geraden mit der Steigung  $m$  durch  $P(x_1; y_1)$  ist

$$\text{Punkt-Steigungs-Form (PSF): } y = m \cdot (x - x_1) + y_1.$$

*Ein Sektglas [y] steht auf zwei Skiern [=] und fährt einen Berg hinauf. Oben steht Angela Merkel [m] mit einem roten Muttermal [.] am Bein. Sie öffnet eine Türe [ ( ) und man sieht eine Straßenkreuzung [x]. Ein Speer [-] fliegt mitten in eine andere Kreuzung hinein und trifft dort eine Kerze [x<sub>1</sub>]. Vom Luftzug wird die Türe wieder zugeschlagen [ ) ]. Draußen findet eine Party statt auf der Spaten [+] tanzt. Alle Partygäste haben in der rechten Hand ein Sektglas und in der linken Hand eine Kerze [y<sub>1</sub>].*

Die  $x$ -Achse hat die Gleichungsdarstellung  $y = 0$ , die  $y$ -Achse:  $x = 0$ .

### 1.1.2 Formelsammlung Klasse 8

11. (Z, Ag 20/4, FD 2) **Binomische Formeln:** i)  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ; ii)  $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ;  
 iii)  $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$ ; (W, Ag 20/5)  $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
12. (Z, Ag 21/10) Bei Äquivalenzumformungen sind die Multiplikation mit 0 sowie die Division durch 0 und durch  $x$  (Tipp: Ausklammern + F14) verboten.
13. (W, Abs 228/9.1.8, FD 9) **Satz des Thales:** Genau die Dreiecke in einem Halbkreis sind rechtwinklig. **Umfangswinkelsatz:** (auf dem Themenfriedhof) Jeder Umfangswinkel ist halb so groß wie der Mittelpunktswinkel. Also sind alle Umfangswinkel auf einer Seite gleich groß.
14. (Z, Ag 22/15) Satz vom Nullprodukt: Sei  $a \cdot b = 0$ , dann ist  $a = 0$  oder  $b = 0$ .
15. (A, Ag 28/37) Sei  $n \geq 0$ ,  $\sqrt{n}$  ist diejenige positive Zahl, die quadriert =  $n$  ergibt.  
 $x^2 = n$  wird von  $x = \pm\sqrt{n}$  gelöst. Damit ist  $(\sqrt{n})^2 = n$  und für  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $\sqrt{x^2} = |x|$ .  
 (A, Ag 29/45) Seien  $a, b \geq 0, n > 0$  dann gilt: i)  $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ; ii)  $\sqrt{\frac{a}{n}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{n}}$ ;
16. (W, Ag 89/216) Für den Scheitel  $S(x_s; y_s)$  einer Parabel  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) gilt:  $x_s = -\frac{b}{2a}$ .  
 Die Scheitelform der Parabel ist:  $y = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$ .

17. (A, Ag 313/790) Es werden  $k$  aus  $n$  Kugeln mit Berücksichtigung der Reihenfolge gezogen. Mit Zurücklegen ergeben sich  $n^k$  mögliche Ergebnisse, ohne Zurücklegen  $\frac{n!}{(n-k)!}$ . Die Anzahl der Permutationen von  $n$  Elemente ist  $n!$ .
18. (A, Ag 317/798) Gegeben sei ein mehrstufiges Zufallsexperiment mit zugehörigem Baum.

**Die Pfadregel:**

In einem mehrstufigen Zufallsexperiment erhält man die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses, indem man die Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades multipliziert: Die 'Malrichtung' ist von links nach rechts.

**Der spezielle Additionssatz:**

Die einzelnen Ergebnisse eines Ereignisses dürfen addiert werden: Die 'Plusrichtung' ist von oben nach unten.

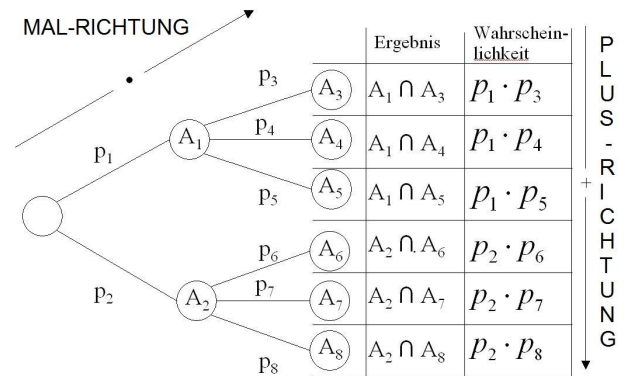


Abb. 2 Pfadregel

19. (Z, Ag 31/57, FD 6) Mitternachtsformel: Seien  $a \neq 0$ ,  $D := b^2 - 4ac \geq 0$  (Diskriminante) dann

$$\text{gilt} \quad ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

(W, Ag 32/60) Wenn  $D > 0$  ist, hat  $ax^2 + bx + c = 0$  zwei (verschiedene) Lösungen, bei  $D = 0$  hat sie (genau) eine Lösung und bei  $D < 0$  hat sie keine Lösung.

20. (A, Ag 32/62) **Linearfaktorzerlegung:** Hat  $p(x) = ax^2 + bx + c$  die Nullstellen  $x_1$  und  $x_2$ , dann ist  $p(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ ;  
 (W, Ag 33/66) **Satz von Vieta:**  $x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \Leftrightarrow p = -(x_1 + x_2), q = x_1 \cdot x_2$ .

21. (A, Ag 231/560, FD 1) Der (zweite) Strahlensatz: Seien  $Z, A, B$  und  $Z, A', B'$  je auf einer Geraden (oder kollinear),  $A'A \parallel B'B$ , dann gilt:  $k = \frac{ZA'}{ZA} = \frac{ZB'}{ZB} = \frac{A'B'}{AB}$ .  $k$  ist dabei der Streckfaktor der zentrischen Streckung, die das  $\Delta ZAB$  auf das  $\Delta ZA'B'$  abbildet.

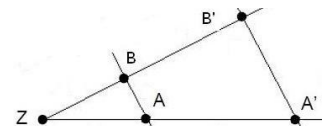


Abb. 3 Strahlensatzfig.

22. (W, Abs 230/9.2.4) Bei einer zentrischen Streckung mit Streckfaktor  $k$  wird aus einer Fläche mit dem Inhalt  $A$  eine Fläche mit dem Inhalt  $k^2 \cdot A$  (aus einem Körper mit Volumen  $V$  ein Körper mit Volumen  $k^3 \cdot V$ ).

**1.1.3 Formelsammlung Klasse 9**

23. (A, Abs 36/2.3.2, FD 5) Seien  $a, b > 0, n, m \in \mathbb{R}$ , dann gilt:  
 1 PG  $a^n \cdot a^m = a^{n+m}; \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m};$       2 PG  $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n; \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n};$   
 3 PG  $(a^n)^m = a^{n \cdot m}; (a^n)^m = (a^m)^n;$       4 PG  $a^{-n} = \frac{1}{a^n};$   
 5 PG  $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a};$       6 PG  $a^n \cdot b^m$  kann nicht zusammengefasst werden

24. (A, Ag 37/94) Die Gleichung  $x^n = a$  hat für ungerades  $n$  genau eine Lösung  $x = \sqrt[n]{a}$ ; falls  $n$  gerade ist, so hat die Gleichung für  $a < 0$  keine Lösung, für  $a > 0$  gilt  $x = \pm \sqrt[n]{a}$  und für  $a = 0$  ist  $x = 0$ .

25. (W, Abs 225/9.1) Wenn zwei Dreiecke in  
 (sss) allen drei Seiten  
 (sws) zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel  
 (wsw) einer Seite und den zwei anliegenden Winkeln  
 (Ssw) zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel  
 übereinstimmen, dann sind sie kongruent (deckungsgleich).

Jede der oben angegebenen Kombinationen legt ein Dreieck in Form und Größe eindeutig fest (thx Cf).

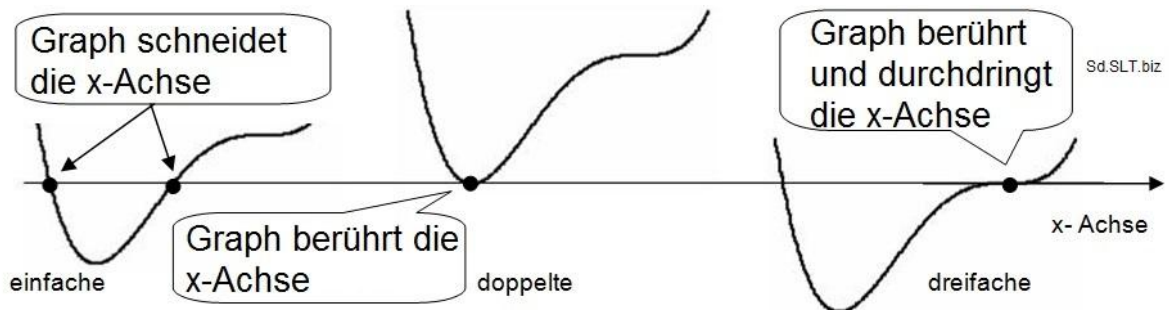
26. (A, Abs 39/2.4.1) Seien  $a, b > 0$ ,  $a \neq 1$ , dann gilt  $a^x = b \Leftrightarrow x = \frac{\log b}{\log a} (= \frac{\ln b}{\ln a}) = \log_a(b)$ .  
 Insbesondere ist  $\log(10^c) = c$  (für alle  $c \in \mathbb{R}$ ) und  $10^{\log(c)} = c$  (nur für  $c > 0$ ) (thx Trs).  
 (W) Spezielle Werte:  $\log(1) = 0$ ,  $\log(10) = 1$ ,  $\log(100) = 2$ ,  $\log(1000) = 3$ , usw.  
 (\*) Limites:  $\log(0) = -\infty$ ,  $\log(\infty) = \infty$ , (Klasse 11:  $\ln(e) = 1$ ).
27. (A, Abs 40/2.4.2, FD 5) Seien  $a, b > 0$ ,  $n \in \mathbb{R}$ , dann gilt:  
 1 LogG  $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$ ;  $\log(\frac{a}{b}) = \log(a) - \log(b)$ ;  
 2 LogG  $\log(a^n) = n \cdot \log(a)$ ; 3 LogG  $\log(a + b)$  kann iA nicht vereinfacht werden.
28. (A, Ag 234/581, FD 21)  $y = m_1 \cdot x + c_1$  und  $y = m_2 \cdot x + c_2$  sind orthogonal  $\Leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$ .
29. (Z, Ag 235/585, FD 8) Der Satz von Pythagoras: Im rechtwinkligen Dreieck  $A, B, C$  mit  $\gamma = 90^\circ$  gilt  $a^2 + b^2 = c^2$  oder die Summe der Kathetenquadrate ist gleich dem Hypotenusenquadrat.  
 (W, auch Ag 238/602) Die Zahlen (3;4;5) (und entsprechende Vielfache) bilden ein pythagoreisches Tripel, d.h. es gibt ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seitenlängen 3; 4 und 5. Es hat die weiteren Winkel  $36.87^\circ$  und  $53.13^\circ$ . Die Zahlen 1;2;2;3 bilden ein pythagoreisches Quadrupel, d.h.  $1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$  oder ein Quader mit den Seitenlängen 1;2;2 hat Diagonale 3.
30. (W, Ag 236/590) Die Diagonale  $d$  eines Quadrates mit der Seitenlänge  $a$  ist  $d = a\sqrt{2}$ .  
 Die Höhe  $h$  eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge  $a$  ist  $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ .
31. (A, Ag 236/594) Die Pkte  $P_1(x_1; y_1)$  und  $P_2(x_2; y_2)$  haben den Abstand  $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ .  
 (W, Ag 236/596) Jeder Punkt  $P(x; y)$  eines Kreises  $K$  um  $M(m_1; m_2)$  mit Radius  $r$  erfüllt  
 die Gleichung  $(x - m_1)^2 + (y - m_2)^2 = r^2$  oder  $x^2 + y^2 = r^2$  falls  $M(0; 0)$ .
32. (A, Ag 238/602) Die Diagonale  $d$  eines Rechtecks mit den Seitenlängen  $a$  und  $b$  ist  $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ .  
 Die Raumdiagonale  $d_R$  eines Quaders (Seitenlängen  $a, b, c$ ) ist  $d_R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ .
33. (W, Ag 95/238)  $f(\bar{f}(x)) = \bar{f}(f(x)) = x$  bzw.  $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$  (falls  $f^{-1}(x)$  existiert).
34. (Z, Ag 240/614, FD 7) Im rechtwinkligen Dreieck gilt (Regel: GAGA HühnerHof AG)  
 $\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ ;  $\cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$ ;  $\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$ ;  
 Nach dem Satz des Pythagoras gilt  $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ .
35. (W, Ag 241/618) (auch Ag 108/282) Winkel - spezielle Werte:
- |                |                           |                             |                       |                       |                           |                |           |                       |                       |               |            |
|----------------|---------------------------|-----------------------------|-----------------------|-----------------------|---------------------------|----------------|-----------|-----------------------|-----------------------|---------------|------------|
| $\alpha$       | $0^\circ$                 | $30^\circ$                  | $45^\circ$            | $60^\circ$            | $90^\circ$                | $\alpha$       | $0^\circ$ | $30^\circ$            | $45^\circ$            | $60^\circ$    | $90^\circ$ |
| $\sin(\alpha)$ | $\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$ | $\frac{1}{2}\sqrt{1} = 0.5$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$ | $\cos(\alpha)$ | 1         | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0          |
36. (W, Ag 242/620) (auch Ag 112/291) Sinus und Kosinus sind  $360^\circ$  periodisch:  
 Für alle  $k \in \mathbb{Z}$  gilt  $\sin(\alpha) = \sin(\alpha + k \cdot 360^\circ)$  und  $\cos(\alpha) = \cos(\alpha + k \cdot 360^\circ)$ .  
 Eine Gleichung der Form  $\sin(x) = a$  wird von  $x_1 = \arcsin(a)$  und  $x_2 = 180^\circ - x_1$  gelöst.  
 Eine Gleichung der Form  $\cos(x) = a$  wird von  $x_1 = \arccos(a)$  und  $x_2 = 360^\circ - x_1$   
 In diesem Abschnitt sind  $A, B$  beliebige Ereignisse.
37. (W, Ag 320/806) Additionssatz:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .
38. (W, Ag 321/809, FD 26) Eine Zufallsgröße  $\mathcal{X}$  ist ein Wkraum mit reellen Ergebnissen; hier  $x_1, \dots, x_n$ . Erwartungswert  $\mu = x_1 \cdot P(\mathcal{X} = x_1) + x_2 \cdot P(\mathcal{X} = x_2) + x_3 \cdot P(\mathcal{X} = x_3)$ .  
 Varianz:  $(x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + (x_3 - \mu)^2 \cdot p_3$ ; Standardabweichung  $\sigma = \sqrt{V(\mathcal{X})}$ .

39. (W, Ag 324/818, FD 24) Def. bedingte Wk:  $P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$   
 (W, Ag 326/820)  $A$  und  $B$  sind unabhängig  $\Leftrightarrow P_B(A) = P(A)$  oder  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ .
40. (W, Ag 328/826) Man muss mindestens  $\lceil \frac{\log(1-p)}{\log(1-p_0)} \rceil$  mal ein Experiment mit Erfolgswk  $p$  durchführen um mit einer Wk von mind.  $p_0$  ein Mal oder öfter erfolgreich zu sein.
41. (A, Ag 243/633) Die Fläche  $A$  eines Kreissektors mit Öffnungswinkel  $\alpha$  ist  $A = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$ , die Bogenlänge  $b$  ist  $b = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$ .
42. (A, Ag 245/640) Für Prismen und zylinderförmige Körper (Säulen) mit Grundfläche  $G$  gilt  $V = G \cdot h$ , für kegelförmige Körper gilt  $V = \frac{G \cdot h}{3}$ . Für Kugeln gilt  $V = \frac{4\pi}{3} r^3$ ;  $O = 4\pi \cdot r^2$ .

**1.1.4 Formelsammlung Klasse 10 teilweise vorgelesen unter <http://fs10.slt.biz>**

43. (A, Ag 100/252)  $f(x - a)$  bedeutet 'statt  $x$  schreibe  $(x - a)$ '.  
 Beispiel:  $f(x) = 2x^2 - 4x \rightarrow f(x - a) = 2(x - a)^2 - 4(x - a)$ .  
 (W, Ag 100/252) Wenn das Schaubild von  $f$  um  $a$  nach rechts und um  $b$  nach oben verschoben werden soll, so hat der resultierende Graph die Funktionsdarstellung  $y = f(x - a) + b$ .  
 (W, Ag 100/254) Soll  $K_f$  an der  $x$ -Achse gespiegelt werden, so gilt  $f_{neu}(x) = -f(x)$ ; wenn  $K_f$  an der  $y$ -Achse gespiegelt wird, so gilt  $f_{neu}(x) = f(-x)$ ;
44. (A, Ag 102/260) Die Vielfachheit von Nullstellen (siehe Abb. 4). Einfache Nullstellen  $x_0$  treten als Linearfaktor  $(x - x_0)^1$  doppelte Nst als  $(x - x_0)^2$  und dreifache Nst als  $(x - x_0)^3$  in der Linearfaktorzerlegung auf.
45. (W, Ag 104/267) **Fundamentalsatz** der Algebra: Eine ganzrationale Funktion  $n$ -ten Grades hat höchstens  $n$  Nullstellen. Eine ganzrat. Fktn ungeraden Grades hat mindestens eine Nullstelle.

**Satz der Linearfaktorzerlegung:**  $p(x) = 0 \Leftrightarrow p(x)$  ist durch  $(x - x_0)$  teilbar.



**Abb. 4** Vielfachheit von Nullstellen

46. (A, Ag 105/273) Formel der speziellen Symmetrie: Sei  $f$  eine Funktion, mit Schaubild  $K_f$ .  
 $K_f$  ist achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse  $\Leftrightarrow f(-x) = f(x)$ ; (gerade Funktion);  
 $K_f$  ist punktsymmetrisch zum Ursprung  $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$ ; (ungerade Funktion).
47. (A, Ag 330/12.3.1, FD 25)  $0! = 1, 1! = 1, 2! = 1 \cdot 2 = 2, 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ .  
 Das  $n$ -Tupel  $\underbrace{E, \dots, E}_k \underbrace{\bar{E}, \dots, \bar{E}}_{n-k}$  kann auf  $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$  Weisen angeordnet werden.  
 Das Tupel  $\underbrace{1, \dots, 1}_{n_1} \underbrace{2, \dots, 2}_{n_2} \underbrace{3, \dots, 3}_{n_3} \underbrace{4, \dots, 4}_{n_4}$  kann auf  $\frac{(n_1+n_2+n_3+n_4)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot n_4!}$  Weisen angeordnet werden.
48. (W, Ag 333/843) Wir ziehen  $k$  aus  $n$  Kugeln, dann gilt für die Anzahl der möglichen

Permutationen: (das Quadrat)	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen (Tupel)
mit Berücksichtigung der Anordnung (Baum)	$n^k$	$\frac{n!}{(n-k)!}$
ohne Berücksichtigung der Anordnung	$\binom{n-1+k}{k}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$



49. (W, Ag 335/849) Ein Experiment mit den Ergebnissen Erfolg und Misserfolg und gleichbleibender Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$  heißt Bernoulliexperiment. Dieses wird  $n$  mal durchgeführt. Sei  $\mathcal{X}$  die Anzahl der Erfolge, dann gilt die Formel von Bernoulli:  $P(\mathcal{X} = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$  [= binompdf( $n, p, k$ )].  $\mathcal{X}$  heißt dann  $B_{n,p}$ -verteilt oder  $\mathcal{X} \sim B_{n,p}$ .
50. (A, Ag 337/853) Sei  $\mathcal{X} \sim B_{n,p}$ , d.g.:  $P(\mathcal{X} \geq k) = 1 - P(\mathcal{X} \leq k-1)$  [=  $1 - \text{binomcdf}(n, p, k-1)$ ].
51. (A, Ag 339/856, FD 26) Sei  $\mathcal{X} \sim B_{n,p}$ , dann gilt: Der Erwartungswert von  $\mathcal{X}$  ist  $E(\mathcal{X}) = \mu = n \cdot p$ ,  $V(\mathcal{X}) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$  ist die Varianz und  $\sigma(\mathcal{X}) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$  ist die Standardabweichung.
52. (W, Ag 340/858) Sei  $\mathcal{X} \sim B_{n,p}$ , dann gilt:  $P(\mathcal{X} \leq k) \approx \Phi\left(\frac{k - n \cdot p + 0.5}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right)$ .
53. (W, Ag 137/324)  $\infty \notin \mathbf{R}$ , sei  $a \in \mathbf{R}$   $a \pm \infty = \pm\infty$ ,  $\frac{a}{\infty} = 0$ ,  $a \cdot \infty = \begin{cases} \infty & (a > 0) \\ \text{undefiniert} & (a = 0) \\ -\infty & (a < 0) \end{cases}$ ; undefiniert sind  $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty$
54. (W, Ag 139/329) Die mittlere Geschwindigkeit (Änderungsrate) oder **Sekantensteigung** einer Weg/Zeitfunktion  $f$  zwischen  $x_0$  und  $x_1$  ist  $\bar{v} = m = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$  (**Differenzenquotient**). (FD 13) Die Momentangeschwindigkeit (**Tangentensteigung**) einer Weg/Zeitfunktion  $f$  ist  $v(x_0) = m(x_0) = f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - (f(x_0))}{h} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$  (**Differenzialquotient**).
55. (W, Ag 140/338) Eine Funktion  $f(x)$  hat an der Stelle  $x_0$  den Steigungswinkel ihrer Tangente:  $\alpha = \tan^{-1}(f'(x_0))$  bzw. falls  $f(x) = mx + c$  gilt  $\alpha = \tan^{-1}(m)$ .
56. (Z, Ag 139/332, FD 14) Die Potenzregel der Ableitung:  $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ , für alle  $n \in \mathbf{R}$ .
57. (A, Ag 139/334, FD 15) Die Linearität der Ableitung:  $(r \cdot f(x) + s \cdot g(x))' = r \cdot f'(x) + s \cdot g'(x)$ .
58. (A, Abs 140/6.1.7) Tangente in  $B(u/f(u))$  (allgemeine Tggleichung):  $y = (f'(u))(x - u) + f(u)$ ; Normale:  $y = \frac{-1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u)$ . **Faustregel:** Ist  $P(a; b)$  ein Punkt der Funktion, so setze  $u = a$ , sonst (externer Punkt) setze  $x = a$  und  $y = b$ ; im Zweifelsfalle setze  $u = a$ .
59. (W, Abs 108/5.4.2, FD 12) Umrechnung (Bogenmaß  $\leftrightarrow$  Gradmaß):  $\frac{\alpha}{360} = \frac{x}{2\pi}$ .

$x$	$0 \hat{=} 0^\circ$	$\frac{\pi}{6} \hat{=} 30^\circ$	$\frac{\pi}{4} \hat{=} 45^\circ$	$\frac{\pi}{3} \hat{=} 60^\circ$	$\frac{\pi}{2} \hat{=} 90^\circ$	$\pi \hat{=} 180^\circ$	$\frac{3\pi}{2} \hat{=} 270^\circ$	$2\pi \hat{=} 360^\circ$
$\sin(x)$	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = 0.5$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$	0	-1	0
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

60. (A, Abs 109/5.4.3, FD 11)  $\sin(-x) = -\sin(x)$ , d.h.  $\sin(x)$  ist punktsymmetrisch zum Ursprung;  $\cos(-x) = \cos(x)$ , d.h.  $\cos(x)$  ist achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse.
61. (A, Ag 110/288)  $f(x) = a \sin(b(x - c)) + d$  hat Periode  $p = \frac{2\pi}{b}$ .  $K_f$  entsteht aus  $K_{\sin(x)}$  durch Streckung mit dem Faktor  $a$  in  $y$ -Richtung und mit dem Faktor  $\frac{1}{b}$  in  $x$ -Richtung sowie einer Verschiebung um  $(c; d)$  Regel: Erst strecken, dann verschieben.
62. (W, Ag 113/295) Von  $f(x) = a \sin(b(x - c)) + d$  sind zwei aufeinanderfolgende Extrema  $T(x_{\min}, y_{\min})$  und  $H(x_{\max}, y_{\max})$  gegeben, dann gilt:  
 $a = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2}$ ;  $c = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2}$ ;  $d = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2}$ ;  $p = 2 \cdot (x_{\max} - x_{\min})$ ;
63. (A, Ag 114/297, FD 14)  $(\sin(x))' = \cos(x)$ ,  $(\cos(x))' = -\sin(x)$ ,  $(\sin(bx + c))' = b \cos(bx + c)$ .
64. (A, Ag 249/653) Seien  $A(a_1|a_2|a_3)$  und  $B(b_1|b_2|b_3)$ , dann ist  $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$  (Ende - Anfang).

65. (A, Abs 417/14.15.16) **Die Parallelogrammgesetze:**

(1 PaG) Für die Mitte  $M$  von  $A$  und  $B$  gilt  $\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$ ;

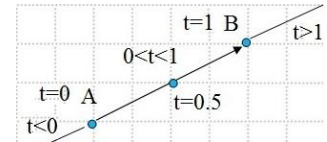
(2 PaG)  $A, B, C, D$  ist ein Parallelogramm  $\Rightarrow \vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{OD}$ ;

(3 PaG) Für jede Spiegelung gilt: Sei  $A'$  der an einem Gebilde  $G$  (Punkt, Gerade, Ebene) gespiegelte Punkt von  $A$ , dann ist  $\vec{OA'} = 2\vec{OL} - \vec{OA}$ , wobei  $L$  der Lotfußpunkt von  $A$  auf  $G$  ist.

(4 PaG) Für den Schwerpunkt  $S$  eines Dreiecks  $A, B, C$  gilt  $\vec{OS} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3}$ ; (einer Dreieckspyramide  $A, B, C, D$  gilt  $\vec{OS} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}}{4}$ ); dies sind Verallgemeinerungen vom (1 PaG).

Nur bei den Parallelogrammgesetzen dürfen sinnvollerweise Ortsvektoren (Punkte) addiert werden.

66. (A, Ag 253/669) Die Gerade durch  $A$  und  $B$  in Parameterform ist  $\vec{OX} = \vec{OA} + t \cdot (\vec{OB} - \vec{OA})$ , ( $t \in \mathbb{R}$ ). Für  $t = 0$  ist  $\vec{x} = \vec{OA}$ , für  $t = 1$  ist  $\vec{x} = \vec{OB}$ , für  $t = 0.5$  zeigt  $\vec{OX}$  auf die Mitte von  $A$  und  $B$ . Falls  $t < 0$  ist, liegt  $X$  'links' von  $A$ ; falls  $0 < t < 1$  ist, liegt  $X$  'zwischen'  $A$  und  $B$  und falls  $t > 1$  ist, liegt  $X$  'rechts' von  $B$ .



**Abb. 5** Skalierung  $x_3$ -Achse:  $\vec{OX} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ;

(A) Die  $x_1$ -Achse ist  $\vec{OX} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ;  $x_2$ -Achse:  $\vec{OX} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ;

67. (W, Ag 254/674) ('Der Baum:') Seien  $g_1 : \vec{OX} = \vec{OP}_1 + t \cdot \vec{r}_1$  und  $g_2 : \vec{OX} = \vec{OP}_2 + t \cdot \vec{r}_2$ .

Es gilt:  $\vec{r}_1 \parallel \vec{r}_2 \Leftrightarrow g_1 \parallel g_2$ , wenn zusätzlich das LGS  $\vec{OP}_1 = \vec{OP}_2 + t \cdot \vec{r}_1$  lösbar ist, so ist  $g_1 = g_2$ , ansonsten sind  $g_1$  und  $g_2$  echt parallel.

Falls  $\vec{r}_1 \not\parallel \vec{r}_2$  so ist  $g_1 \not\parallel g_2$ , wenn zusätzlich das LGS  $\vec{OP}_1 + s \cdot \vec{r}_1 = \vec{OP}_2 + t \cdot \vec{r}_2$  lösbar ist, so schneiden sich  $g_1$  und  $g_2$  ansonsten sind  $g_1$  und  $g_2$  windschief.

68. (W, Ag 257/685, 273/756) Ein Objekt bewegt sich vom Punkt  $P$  aus geradlinig in Richtung  $\vec{r}$  mit konstanter Geschwindigkeit  $v$ , so befindet es sich zum Zeitpunkt  $t$  bei  $\vec{OX} = \vec{OP} + t \cdot \frac{v}{|\vec{r}|} \cdot \vec{r}$ .

**Bogenlängenparametrisierung:**  $\vec{OX} = \vec{OP} + \frac{d}{|\vec{r}|} \cdot \vec{r}$ .  $X$  hat von  $P$  den (orientierten) Abstand  $d$ .

69. (A, Ag 145/357)  $f$  ist bei  $x_0$  (lokal) extremal  $\Leftrightarrow f'(x)$  wechselt bei  $x_0$  das Vorzeichen  $\Rightarrow f'(x_0) = 0$ ; VZW  $+$   $\rightarrow$   $-$  bedeutet Maximum; VZW  $-$   $\rightarrow$   $+$  bedeutet Minimum. Signalwort maximal (minimal) bedeutet: 'Ableiten und die Ableitung =0 setzen'.

70. (A 6.2.4)  $f''(x_0) < 0$  und  $f'(x_0) = 0 \Rightarrow H(x_0; f(x_0))$  ist Hochpunkt;  $[f''(x_0) > 0$  usw. ... Tiefpunkt].

$f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$  ist eine hinreichende Bedingung für Extremwert,  $f'(x_0) = 0$  ist eine notwendige Bedingung:  $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0 \Rightarrow E(x_0; f(x_0)) \Rightarrow f'(x_0) = 0$ .

71. (A, Ag 148/369)  $W(x_0; f(x_0))$  ist ein Wendepunkt  $\Leftrightarrow$  VZW von  $f''(x)$  bei  $x_0 \Rightarrow f''(x_0) = 0$ ;

72. (W, Ag 151/381) Sei  $f$  differenzierbar auf  $(a; b)$  mit  $f'(x) > 0$  (für alle  $x \in (a; b)$ ), dann ist  $f$  streng monoton wachsend ( $f'(x) > 0 \Rightarrow f$  smw); smf analog. Im Abitur gibt es nur strenge Monotonie! Innere Extrempunkte zerstören die strenge Monotonie; Terrassen(Sattel)punkte hingegen nicht. Monotoniebereiche: Zwischen einem Minimum und einem Maximum ist  $f$  smw und umgekehrt. Streng monotone Funktionen sind umkehrbar (injektiv).

**1.1.5 Formelsammlung Klasse 11**

73. (Z, Ag 160/409, FD 14)  $(e^x)' = e^x$ ,  $(e^{ax+b})' = a \cdot e^{ax+b}$  und (A, Ag 163/424)  $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ .

74. (A, Ag 160/411) Seien  $a, b > 0; a \neq 1$ , dann gilt  $a^x = b \Leftrightarrow x = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$ ;  $e^{\ln b} = b; \ln(e^b) = b$ ;

(W)  $[\ln(0) = -\infty,] \ln(1) = 0, \ln(2) \approx 0.693, \ln(e) = 1 [, \ln(\infty) = \infty]$ .

75. (A, Ag 161/413, FD 18)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$  (waagrechte Asymptote  $y = 0$ ),  
 $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ ;  $e^x > 0$ ,  $e^{-x} > 0$ .
76. (A, Ag 161/415, FD 15) Die Kettenregel:  $(f(g(x)))' = g'(x) \cdot f'(g)$  oder  $\frac{df}{dx} = \frac{dg}{dx} \cdot \frac{df}{dg}$   
 $\Leftrightarrow (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ . Beachten Sie, dass bei  $f'(g)$  nach  $g$  abgeleitet wird.  
 Die innere Funktion  $g(x)$  ist immer das, was zuerst berechnet wird.  
 Bsp:  $(e^{x^2})'$  sagt  $g(x) = x^2$ ,  $f(g) = e^g$ ,  $(e^{x^2})' = 2x \cdot e^g = 2x \cdot e^{x^2}$ ;  
 $(a^x)' = (e^{x \ln(a)})' = \ln(a) \cdot e^{x \ln(a)} = \ln(a) \cdot a^x$  ( $a > 0$ ).
77. (A, Ag 162/419, FD 15) Die Produktregel:  $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$ .
78. (Kl. 11, Ag 164/427) Quotientenregel:  $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$ .
79. (W, Ag 174/454, FD 16) Der Hauptsatz der Differenzial und Integralrechnung:  
 'Ableiten ist das Gegenteil vom Integrieren' oder  $\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = (F_a(x))' = f(x)$ .
80. (W, Ag 175/455, FD 17)  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =$  (orientierte) Fläche begrenzt von  $K_f$  und den Geraden  $x = a$ ,  $x = b$  und  $y = 0$ .
81. (A, Ag 176/460) Potenzregel:  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$  bzw.  $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)} + c$ , falls  $n \neq -1$ ;  
 (A, Ag 183/496) für  $n = -1$  gilt:  $\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$ .  
 (A, Ag 176/461) Die Linearität des Integrals:  $\int (r \cdot f(x) + s \cdot g(x)) dx = r \cdot \int f(x) dx + s \cdot \int g(x) dx$ .
82. (A, Ag 178/473) Lineare Substitution: Sei  $F'(x) = f(x)$ , dann gilt für  $a \neq 0$ :  
 $\int f(ax+b) dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$ ; **Bsp:**  $\int \sin(ax+b) dx = \frac{-\cos(ax+b)}{a} + c$ ;  $\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c$ ;
83. (W, Ag 181/487, FD 19) Rotiert der Graph einer Funktion  $f$  um die  $x$ -Achse, so gilt für das Volumen des entstehenden Rotationskörpers im Intervall  $[a; b]$ :  $V = V_a(b) = \pi \cdot \int_a^b f^2(t) dt$ .
84. (W, Ag 182/493) Der Mittelwert  $m$  einer Funktion  $f$  auf  $[a, b]$  ist  $m = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$ .
85. (A, Ag 256/683, FD 22) Das Skalarprodukt:  $\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$ ;  $\vec{a} \circ \vec{a} = |\vec{a}|^2$ .  
 $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}} = \sqrt{(\vec{a})^2}$ . Multipliziere zwei Vektoren **nie** komponentenweise.  
 Normierter Vektor: Sei  $\vec{a} \neq \vec{0}$  dann zeigt  $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$  in Richtung  $\vec{a}$  und hat Länge 1.
86. (Z, Ag 258/692) Für den von  $\vec{a} \neq \vec{0}$  und  $\vec{b} \neq \vec{0}$  eingeschlossenen Winkel  $\gamma$  gilt:  $\cos(\gamma) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ .  
 Insbesondere gilt  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 0$ . Hinweis: Teile **nie** durch einen Vektor!
87. (Kl. 11, Ag 260/700) Sei  $\vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b}$ , dann ist deren Winkelhalbierende:  $\vec{w} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ .
88. (W, Abs 353/13.2.1) Sei  $F$  eine Verteilungsfunktion einer Zufallsgrößen  $\mathcal{X}$  mit Dichte  $f$ , dann gilt:  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ ,  $P(a < \mathcal{X} \leq b) = F(b) - F(a)$ ,  $\lim_{n \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x) = 1$ ,  
 $F(x)$  ist monoton wachsend und  $F$  ist rechtsseitig stetig.  $\mu = E(\mathcal{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t) dt$ ;  
 (nur HM III)  $\sigma = \sqrt{V(\mathcal{X})} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (t - \mu)^2 \cdot f(t) dt}$ ;
89. (W, Abs 356/13.2.2, FD 26) Sei  $\mathcal{X} \sim N(0; 1) \Rightarrow \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ ;  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$ . Sei  
 $\mathcal{X} \sim N(\mu, \sigma)$  (normalverteilt), dann gilt: Dichte =  $\varphi(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ ;  $P(\mathcal{X} \leq k) = \Phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)$ ,  
 $P(a \leq \mathcal{X} \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$ ,  $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$  und  $\Phi^{-1}(1 - \alpha_0) = -\Phi^{-1}(\alpha_0)$ .
- Sigmaregel:** (FD 27) Mit Wk 68% hat ein Wert höchstens Abstand  $\sigma$  vom Erwartungswert  $\mu$ , mit Wk 95% Abstand  $2\sigma$  und mit Wk 99% Abstand  $3\sigma$ .

### 1.1.6 Formelsammlung Klasse 12

90. (W, Ag 261/705, FD 23) Die Ebene durch (drei) nicht kollineare Punkte  $A, B$  und  $C$  in Parameterform ist  $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC} = \vec{a} + r \cdot \vec{s}_1 + t \cdot \vec{s}_2$  ( $r, t \in \mathbb{R}$ ).

Es gibt (mindestens) drei Darstellungsformen der Ebene:

- Die Parameterform (s.o.) wenn aus drei Punkten eine Ebene berechnet werden soll;
- Die Punktnormalenform  $(\vec{x} - \vec{p}) \circ \vec{n} = 0$  ( $\vec{n}$  heißt Normalenvektor, bei Verfahren Abs. 10.5.8);
- die Koordinatenform  $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = e$  (sonst immer gut).

Es gilt  $\vec{n} \perp \vec{s}_1$  und  $\vec{n} \perp \vec{s}_2$ ; Ein möglicher Normalenvektor  $\vec{n}$  kann durch  $\vec{s}_1 \times \vec{s}_2$  berechnet werden.

91. (A 255/678+264/716) Die Koordinatenebenen sind:  $x_1x_2$ -Ebene:  $x_3 = 0$ ;  $x_1x_3$ -Ebene:  $x_2 = 0$ ;  $x_2x_3$  Ebene:  $x_1 = 0$ . Die Ebene  $x_1 + x_3 = 1$  ist echt parallel zur  $x_2$ -Achse.

92. (A, Ag 266/725) Seien  $\vec{a}, \vec{b}$  dreidimensional, dann definieren wir  $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$  (Vektor- oder Kreuzprodukt).

Sei  $E : \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \vec{s}_1 + t \cdot \vec{s}_2$  eine Ebene (in Parameterform mit  $\vec{s}_1, \vec{s}_2$  l.u.). Berechne  $\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2$ ; setze  $P$  in die Koordinatenform  $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = e$  ein und berechne so  $e$ .

93. (A, Abs 266/10.4.1) Seien  $\vec{a}, \vec{b}$  dreidimensional, dann gilt: i)  $\vec{a} \perp (\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$ ;  
ii)  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}$  und  $\vec{b}$  sind parallel (linear abhängig);  
iii)  $|\vec{a} \times \vec{b}|$  = die Fläche des von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Parallelogramms.  
iv) Die Fläche eines Dreiecks  $A, B, C$  ist  $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$ .

94. (A, Ag 268/732) Seien  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  dreidimensional, dann gilt:  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$  ist das (orientierte) Volumen, des von  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  aufgespannten Spates (räumliches Parallelogramm). Dabei ist  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} > 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  bilden ein Rechtssystem;  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  sind linear abhängig.

Das Volumen  $V$  einer Pyramide mit Spitze  $S$  und

parallelogrammförmiger Grundfläche  $A, B, C, D$  ist:  $V = \frac{1}{3} |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \circ \overrightarrow{AS}|$ .

dreieckiger Grundfläche  $A, B, C$ , ist:  $V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \circ \overrightarrow{AS}|$ .

95. In den Formeln 95-97 sind  $g_i : \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP}_i + t \cdot \vec{r}_i$  (Geraden) und  $E_i : (\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OQ}_i) \circ \vec{n}_i = 0$

(Ebenen).  $\sphericalangle(g_1, g_2) = \cos^{-1} \left( \left| \frac{\vec{r}_1 \circ \vec{r}_2}{|\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2|} \right| \right)$ ,  $\sphericalangle(E_1, E_2) = \cos^{-1} \left( \left| \frac{\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \right| \right)$ ,

(W, Ag 271/742)  $\sphericalangle(E_1, g_1) = \sin^{-1} \left( \left| \frac{\vec{n}_1 \circ \vec{r}_1}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{r}_1|} \right| \right)$ . aber  $\sphericalangle(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \cos^{-1} \left( \frac{\vec{v}_1 \circ \vec{v}_2}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|} \right)$ .

$g \perp E \Leftrightarrow \vec{r} \parallel \vec{n}$ ;  $g \parallel E \Leftrightarrow \vec{r} \perp \vec{n}$ ;  $E_1 \parallel E_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$ ;  $E_1 \perp E_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ .

96. (A, Ag 272/752) Sei  $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = e$  eine Ebene, dann ist deren Abstandsform (HNF):

$d = \left| \frac{n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 - e}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \right|$  oder  $d_{\text{orient}} = \frac{n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 - e}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$  (Orientierung in Richtung von  $\vec{n}$ ).

97. (W, Ag 273/754) Der Abstand windschiefer Geraden ist  $d = \left| (\overrightarrow{OP}_2 - \overrightarrow{OP}_1) \circ \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|} \right|$ .

### 1.1.7 Formeln des Themenfriedhofs, die früher auswendig zu lernen waren

98. (Kl. 9, Ag 234/578) Sei  $A, B, C$  ein rechtwinkliges Dreieck,  $q = c_a$  und  $p = c_b$  die Hypotenusenabschnitte, dann gilt:  $h^2 = p \cdot q$  Höhensatz  $a^2 = c \cdot p$ ,  $b^2 = c \cdot q$  Kathetensätze.

99. (Kl. 9, Abs 242/9.4.5) Sei  $A, B, C$  ein allgemeines Dreieck,  $R$  dessen Umkreisradius, dann gilt

$$\text{Sinussatz: } \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2R \quad \text{Kosinussatz: } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

Damit ist der Kosinussatz eine Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras.

100. (Kl. 9+10, Ag 108/280) Die Additionstheoreme lauten:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta) \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

101. (Kl. 9+10, Ag 328/824 + 59/149) Geometrische Summe:  $1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ .  
Für  $|q| < 1$  geht  $q^{n+1} \rightarrow 0$ : Damit gilt:  $1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1-q}$  (geometrische Reihe).  
3. binomische Formel:  $(a-b) \cdot (a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + a^{n-3}b^3 + \dots + ab^{n-1} + b^n) = a^{n+1} - b^{n+1}$ .
102. (Kl. 10, Ag 106/276 + 107/278) Formel der allgemeinen Symmetrie:  
 $K_f$  ist achsensymmetrisch + zur Achse  $x = a \Leftrightarrow f(a-t) = f(a+t)$ ;  
 $K_f$  ist punktsymmetrisch zum Punkt  $(a; b) \Leftrightarrow f(a-t) + f(a+t) = 2b$ ; ( $t$  hebt sich weg).
103. (Kl. 8+11, Ag 21/9 + 258/690)  $\det \left( \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \hat{=}$  der (orientierten) Fläche des von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Parallelogramms.
104. (A, Abs 200/8.1) Ein exponentielles Wachstum wird durch die Funktion  $f(x) = y = c \cdot e^{kx}$  beschrieben. Es genügt der Dgl  $y' = k \cdot y$ . Ein beschränktes Wachstum (mit Schranke  $S$ ) wird durch die Funktion  $y = S - c \cdot e^{kx}$  beschrieben. Es genügt der Dgl  $y' = k \cdot S - k \cdot y \Leftrightarrow y' = k \cdot (S - y)$ .

### 1.1.8 Formeln von $M_+$ oder aus HM

105. (A  $\rightarrow$  3.1.2, S. 50) Komplexe Zahlen: **Die vierte Binomische Formel:**  $(a+ib) \cdot (a-ib) = a^2 + b^2$ ;  
 $|z| = |a+ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ;  $\tan(\varphi) = \frac{b}{a}$ ; **Eulerformel:**  $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$ ;  
 $e^{2\pi i} = e^{2k\pi i} = 1$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ . **Moivreformel:**  $z^n = r \cdot e^{i\varphi} \Leftrightarrow z = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}$   $k = 0..n-1$ .
106. (A 202/8.2.1) Für  $x \in \mathbb{R}$  gilt:  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ;  $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ;  $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}$ ;  
für  $|x| < 1$  gilt:  $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ;  $-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ ;
107. (A 184/503) Partielle Integration: Seien  $u, v, f, g$  diffbar, dann gilt:  $\int u'v dx = uv - \int uv' dx$ ;  
Substitutionsregel der Integration:  $\int f(g) \cdot dg = \int f(g(x)) \cdot g'(x) \cdot dx$  oder  $dg = g'(x) \cdot dx$ .
108. Sei  $\underline{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  eine  $2 \times 2$  Matrix mit  $\det(\underline{A}) = ad - bc \neq 0$ , dann gilt  $\underline{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ .
109. ( $\rightarrow$  12.4, S. 342) Es werden  $n$  aus  $N$  Kugeln ohne Zurücklegen gezogen;  $M$  der  $N$  Kugeln sind Erfolge. Sei  $\mathcal{X}$  die Anzahl der gezogenen Erfolge, dann ist  $P(\mathcal{X} = k) = \binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k} : \binom{N}{n}$ ;  $E = \frac{n \cdot M}{N}$ .
110. (W) (360/13.3.2) Seien  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  Zufallsgrößen,  $|\mathcal{X}| = n$ ,  $P(\mathcal{X} = x_i) = p_i$ , ( $i = 1..n$ ),  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  
 $\mu = E(\mathcal{X}) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$ ; Standardabweichung:  $\sigma = \sigma(\mathcal{X}) = \sqrt{V(\mathcal{X})} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot p_i}$   
 $E(\mathcal{X} + \mathcal{Y}) = E(\mathcal{X}) + E(\mathcal{Y})$ ,  $E(a\mathcal{X} + b) = a \cdot E(\mathcal{X}) + b$ ,  $V(\mathcal{X}) = E(\mathcal{X}^2) - (E(\mathcal{X}))^2$ ,  
 $V(a\mathcal{X} + b) = a^2 \cdot V(\mathcal{X})$ ,  $\chi^2 = \sum \frac{(n_o - n_e)^2}{n_e}$   
Falls  $\mathcal{X}$  und  $\mathcal{Y}$  unabhängig sind, gilt  $E(\mathcal{X} \cdot \mathcal{Y}) = E(\mathcal{X}) \cdot E(\mathcal{Y})$ ,  $V(\mathcal{X} + \mathcal{Y}) = V(\mathcal{X}) + V(\mathcal{Y})$ .  
Eine **Stichprobenverteilung**  $\bar{\mathcal{X}} = \frac{\mathcal{X}_1 + \dots + \mathcal{X}_n}{n}$  ( $\mathcal{X}_i$  identisch verteilt mit Erwartungswert  $\mu$  und Standardabweichung  $\sigma$ ) ist näherungsweise  $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$  verteilt ( $\sigma(\bar{\mathcal{X}}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ).
111. (A) (367/930) **Satz von Schwarz:** Sei  $z = f(x, y)$  diffbar, dann gilt  $\frac{d}{dx}(\frac{d}{dy}(f)) = \frac{d}{dy}(\frac{d}{dx}(f))$ .  
Die Hessematrix ist symmetrisch.
112. (L) (367/932, 368/933 und 368/934) Sei  $P_i(x_i; y_i)$  ( $i = 1..n$ ) eine Punktwolke.  
Die RGP optimierte Regressionsgerade berechnen wir mit folgendem LGS:  
 $m \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$   
 $m \cdot \sum_{i=1}^n x_i + c \cdot n = \sum_{i=1}^n y_i$   
Kovarianz:  $Cov(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{n}$ ; Korrelationskoeffizient  $r_{x,y} := \frac{Cov(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}{\sigma(\mathcal{X}) \cdot \sigma(\mathcal{Y})}$ ;
113. **Lambertsche W-Funktion:**  $W(x)$  ist die UKF von  $xe^x$ ;  $e^x + ax = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a} - W(\frac{e^{b/a}}{a})$  ( $a, b > 0$ ).

114. **(Vorbereitung auf Wettbewerbe)** Wichtige Zahlen sind:  $e \approx 2.718$ ,  $\pi \approx 3.1416$ ,  $\sqrt{2} \approx 1.414$ ,  $\sqrt{3} \approx 1.732$ ,  $\sqrt{5} \approx 2.236$ ,  $\sqrt{10} \approx 3.162$ ,  $\ln(2) \approx 0.693$ ,  $\sin^{-1}(0.6) \approx 36.87^\circ$ ,  $\sin^{-1}(0.8) \approx 53.13^\circ$ . Ein  $n$ -Eck hat  $\frac{n}{2}(n - 3)$  Diagonalen. Wichtige Zahlenfolgen sind:

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	natürliche Zahlen $\cup \{0\}$
$\sum_{i=1}^n$	0	1	3	6	10	15	21	28	Dreieckszahlen
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5040	Fakultäten
$\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$	1	1	2	3	5	8	13	21	Fibonacci-Zahlen

**1.1.9 Fehlercodes und Abkürzungen**

Folgende Fehlercodes verwende ich in der Regel bei der Korrektur von Arbeiten.

<u>Kürzel</u>	<u>Erklärung</u>	<u>Punktabzug</u>
$R, Vz, PvS, ug$	Rechenfehler, Vorzeichen, Punkt vor Strich, ungenau	manchmal
$uw / ub / D / !$	unvollständig / unbrauchbar / Denkfehler / schlimmer Fehler	normal ja
<i>Alg</i> = Algorithmus; <i>Arg</i> = Argumentation; <i>AS</i> = Antwortsatz; <i>EH</i> =Einheit; <i>Erg</i> =Ergebnis; <i>Int</i> =Interpretation; <i>MA</i> = mathematischer Ansatz; <i>Rg</i> = Rechnung; <i>Tg</i> =Tangente sind Zusätze z.B. bei <i>uw</i>		
<i>Deshalb</i>	Deshalb bringe ich Ihnen es anders bei	ja
<i>Ad, FS, S, SF, Sw</i>	Ausdruck, Fachsprache, Schreibfehler, Schreibweise	nein
<i>Agtxt / f / uk</i>	Aufgabentext - in der Aufgabe steht etwas anderes / falsch / unklar	meistens
<i>folgeschwer</i>	auch <i>fatal</i> R oder SF mit problemändernden Folgen	ja
$\checkmark / (\checkmark)$	richtig / mit falschem Wert richtig weitergerechnet	nein
<i>PRWT</i>	die Produktregel (der Ableitung) gilt auch im Wahlteil	ja
<i>Algebra!</i>	die Algebra der Mittelstufe ist mangelhaft	normal ja
<i>GTR</i>	GTR Befehle sind (im Abitur) nicht zugelassen	nein
'I hope so'	hier wurde der Aufgabentext vom Schüler falsch (oder eben anders) interpretiert, was aber leider möglich war	nein
naja	falsche oder dürftige Ausdrucksweise, vermutlich richtig gedacht	nein
<i>wdh, kü, un</i>	<b>Hinweise:</b> wiederholen, kürzen, unnötig, $\ddot{U}$ = Übertrag (aktuelle Punktzahl)	

Die volle Punktzahl ohne Korrekturzeichen bedeutet meist, dass alles richtig ist.

<b>Abkürzungen:</b>	Abs= Abschnitt,	Ag = Aufgabe oft als Seite/Nummer,
as = achsensymmetrisch,	BAG= Basisaufgabe,	BD = Binnendifferenzierung,
ber = berechnen, best=bestimmen,	beschr = beschreiben,	BFS = Banachscher Fixpunktsatz,
<i>DHBW</i> = kein Stoff der DHBW	Dgl = Differenzialgleichung,	diffbar = differenzierbar,
ExAg = Extremwertaufgaben,	exp = exponentielles,	Fkt = Funktion,
GTR = grafischer Taschenrechner,	HA = Hausaufgabe,	HP = Hochpunkt,
ihlDglmkK = inhomogene lineare Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten,		
HgV = hypergeometrische Vert.	ia = im allgemeinen,	idR = in der Regel,
KA=Klassenarbeit,	KF = Koordinatenform,	kü = kürzen
LFZ = Linearfaktorzerlegung,	LGS = lineares Gleichungssystem,	l.a. (l.u.) linear(un)abhängig
LöVo = Lösungsvorschläge	mBdA (oBdA) = mit (ohne) Berücksichtigung der Anordnung	
mEn = meines Erachtens nach,	MNF = Mitternachtsformel,	mf = monoton fallend,
MK = Mathe Känguru	Ne = Nenner,	<b>Nst</b> = Nullstelle,
oZ = ohne Zurücklegen,	PFZ = Primfaktorzerlegung,	Pkt = Punkt,
PNF = Punktnormalenform,	PF = Parameterform	ps = punktsymmetrisch,
PSF = Punktsteigungsform,	sA= senkrechte Asymptote,	smw = streng monoton wachsend,
Twwz = teilweise Wurzelziehen	SvN = Satz vom Nullprodukt,	SvP = Satz von Pythagoras,
TdV = Trennung der Variablen,	Tg = Tangente,	<b>TP</b> = Tiefpunkt,
trig = trigonometrische,	UE = Unterrichtseinheit,	UKF = Umkehrfunktion,
VdK = Variation der Konst.	Vert = Verteilung	Vorber= Vorbereitung
VZW = Vorzeichenwechsel	waA= waagrechte Asymptote	Wk= Wahrscheinlichkeit

WP=Wendepunkt

Wt = Wachstum

Wth =Wahrscheinlichkeitstheorie

Zä = Zähler **Zch** = Zeichnung

ZPF = Zweipunkteformel

ZG=Zufallsgröße.

**1.1.10 Die Vorbereitung zwischen den Schuljahren**

Wie soll ich mich auf das nächste Schuljahr vorbereiten? Was soll ich in den Sommerferien wiederholen? Diese Fragen versuche ich in diesem Abschnitt zu beantworten. Zu einer guten Vorbereitung gehört auch die Wiederholung (Beherrschung) der bis zu diesem Zeitpunkt bekannten Formeln.

**Vorbereitung auf Klasse 9:** 19/2, 21/11, 30/51 89/216, 96/242f, 318/800, später 24/27 und 33/64.

**Klasse 10:** 33/64, 89/216 ab f, 95/239, 96/242f, 243/630, 330/833, später 91/220 und 241/618.

**Vorbereitung auf Klasse 11 (GK + LK)** 106/275, 116/305, 144/354, 158/406, 258/688, 342/865, danach 95/239, 141/343, 146/361, 148/370, 255/676, 341/12.3.11, LK: 154/393.

**Vorbereitung** auf den SemKu bzw. auf HM2 für den Abs. 'Die Normalverteilung' 353/13.2 96/242, 110/289, 156/397, ((I\*) 163/421, Abs. 187/7.4), 318/800, nur SemKu: 321/809 + 342/865.

**Klasse 12:** 255/676, (255/677, 257/686), 258/688, 258/691, 258/692f, 259/696, 342/865, 341/12.3.11.

**Vorbereitung auf das Ingenieurstudium**

Sie möchten sich auf ein MINT Studium vorbereiten? Dann ist dieses Buch für Sie genau richtig. Aus dem Schulteil empfehle ich Ihnen besonders folgende Abschnitte:

Klasse 9: Ungleichungen (Abs: 2.2.7), Anwendungen des Umfangswinkelsatzes (Abs: 9.2.11 nur M+I), der Kosinussatz (Abs: 9.4.6), Kugeln (Abs: 9.6.4), Restklassenringe (Abs: 2.4.5, nur M+I);

Klasse 10: das komplette Wachstum (Abs: 4.2), Linearfaktorzerlegung (Abs: 5.3.11), Symmetrie + Additionstheoreme (Abs: 5.4.3), trigonometrische Gleichungen (Abs: 5.4.6), der Monotoniesatz (Abs: 6.2.6, nur M+I; ja, diesen unterrichte ich in Klasse 10 tatsächlich!);

Klasse 11: Folgen (Abs: 4.3), implizites Differenzieren (Abs: 6.3.6, oder wie haben Sie bewiesen, dass  $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ ?), die komplette Integralrechnung (Abs: 7.1) - beachten Sie hierbei, dass die schweren Themen (Abs: 7.4 und 7.5) kein Schulstoff mehr sind, Beweise mit Vektoren (Abs: 10.2.4, nur M+I);

Klasse 12 inkl. Vertiefungskurs: Komplexe Zahlen (Abs: 3.1), die Regel von de l'Hospital (Abs: 6.3.11), Taylor und Dgln (Abs: 8.2), das Spatprodukt (Abs: 10.4), die HNF (Abs: 10.5.5).

Falls Sie Mathe, Informatik oder Wirtschaft studieren möchten, sollten Sie auch die komplette Wahrscheinlichkeitstheorie Abs. 12.1 bis 13.2.2 wiederholen.

Vorber **HM1:** 125f, 128g, 130j, 418, 420, 428, 443, 500, 503 a,b,d, 688, 723, 733, 761, 770b, 774, 781g, 779f.

Vorber **HM2:** 518, 526g, 527gh, 528e, 531e, 533e, 534e, 819, 825, 833, 860f, 865, 871, 875.

Vorber **HM3:** 305, 878, 896, 904, 905e, 909d, 918d, 919b, 13.3.4, 13.3.5, 931, 932, 934e.

**1.1.11 Der Versuch eines 1 NP Plans für LK und BK (ohne Garantie)**

Das Abi ist sicher, nur es besteht die Gefahr 0 NP im Mathe-LK-Abi zu schreiben? Dann ist dieser Abschnitt für Sie! Wenn Sie folgende Aufgaben (Themen) beherrschen sollte 1 NP (oder mehr) drin sein. Grundsätzlich empfehle ich die Minimalanforderungen am Ende vieler Kapitel.

Analysis: 144/354; 170/441; 179/480; 179/481; 106/275; 116/305; 120/322<sub>LK</sub>; 158/406; 183/500;

Geometrie: (241/617<sub>LK</sub>); 258/688; 259/696; 265/723; 270/739<sub>LK</sub>; 275/761; 280/776;

Wahrscheinlichkeit: 330/833<sub>LK</sub>; 342/865; 352/896<sub>LK</sub>; 358/911;

**1.2 Der Themenfriedhof (GFS)**

Dieser Abschnitt soll an die Themen einnern, die zu meiner Zeit noch Schulstoff waren und inzwischen ersatzlos aus dem Lehrplan gestrichen wurden - (sie nennen es 'entrümpeln'). Ich vermisse Euch alle!

**2016:** Folgen + Differentialgleichungen, beschränktes Wachstum;

**2012:** zweiseitiger Hypothesentest, schiefe Asymptoten und Näherungskurven, LGS mit Parameter, rechnerischer Nachweis der linearen Abhängigkeit, die Sehnentrapezregel, **K**epler-Fass-Regel (Simpsonregel), Polynomdivision, vollständige Induktion;

**2011:**  $\varepsilon, n_0$ - Definition der **K**onvergenz,  $\varepsilon, \delta$ -Definition der **S**tetigkeit, logistisches Wachstum;

**2004:** äußere nicht lineare **S**ubstitutionsregel der Integration, **p**artielle Integration, lineare Optimierung, Kreisgleichungen, Kugelgleichungen, Additionstheoreme, Sinussatz, Kosinussatz, Boolesche Algebra, Schalteralgebra, Körper und Gruppentheorie auch zyklische Gruppen, **S**chubspiegelungen, **D**rehstreckungen inkl. Konstruktion eines Drehstreckzentrums, **E**llipsen inkl. Gärtnerkonstruktion und Krümmungskreisconstruction, affine Abbildungen, affine Koordinatensysteme, **E**igenwerte und Eigenvektoren, Invariantes Rechtwinkelpaar, Nichtdiagonalisierbarkeit von Scherstreckungen, Hauptachsentransformation auch von Kegelschnitten, Konstruktionen bei Achsenaffinitäten, **a**llgemeine Skalarprodukte, Die **C**antorschen Diagonalverfahren, Die **R**ussellsche Antinomie, **I**nnere Substitution der Integration, **R**otationskörper um die  $y$ -Achse, Diskussion von Wurzel und Betragsfunktionen, Aussagenlogik inkl. Isomorphie zur Mengenlehre, Zahlensysteme, Aufbau eines Zahlenbereiches mit den Peanoaxiomen, Satz von Bolzano-Weierstraß (Weierstraß'sches Halbierungsverfahren), geometrische Summe, geometrische und die **h**armonische Reihe, Potenzmengen, Mengenlehre, Determinante;

**Bemerkung:** 2012 war in BW der flächendeckende Übergang von G9 auf G8 und dieser sollte eigentlich keinen Stoff kosten. Die Einführung des LK 2019 brachte (eigentlich) keinen neuen Stoff.

### 1.3 Vorworte

#### 1.3.1 Vorwort zur Version 7.0 (2019): mobile Mathe

Hurra Mathe gibt es ab V 7 (Probezeit 2018: V6.9) als online Version mobile Mathe und wurde von Pascal Köstler entwickelt (vielen Dank). Gezeigt werden Aufgabe, Lösung und zugehörige Videos. Jetzt kann Hurra Mathe überall hin mitgenommen werden und ist auch im Unterricht Tablet-fähig.

#### 1.3.2 Vorwort zur Version 6.7 (2016): Die Mathematik ist ein Rosamunde-Pilcher-Film

Welche Filme schauen Sie am liebsten? Einen, bei dem am Ende der Held nicht seine Angebetete bekommt, gar stirbt und die Welt in Schutt und Asche liegt? Nein! Deshalb braucht auch jede Mathematikaufgabe ein Happy End. Mein neues Ziel ist es, dass bei allen Aufgaben 'schöne' Ergebnisse (was auch immer das sein mag) herauskommen, auch wenn das mit der Realität nur selten etwas zu tun hat. Es ist wichtig dem Schüler ein gutes Gefühl zu vermitteln. Die Beschreibung der Wirklichkeit ist nicht unsere Aufgabe, sondern die der anwendenden Wissenschaften. Der Mathematik-Unterricht ist wie ein Rosamunde-Pilcher Film: Die Probleme scheinen anfangs unlösbar, am Ende werden alle (manchmal noch mehr) gelöst, und nie geglaubte Verwandtschaften treten zu Tage. Bei Winkelaufgaben (und bei Ag mit  $(\overline{RP})$ ) kann dies leider kaum gelingen, deshalb sind diese von diesem Umbau ausgenommen.

#### 1.3.3 Vorwort zur Version 6.5 (2014)

Mathematik hat viel mit Freude und Spaß zu tun, manchmal ist sie auch ein Bisschen selbstironisch. Deshalb habe ich von Anfang an in *Hurra Mathematik* mehr oder weniger passende Cartoons (Zeichnungen: Anna Herp) eingebaut. In diesen werde ich als schlanker Dozent mit wildem Haar (manchmal mit Brille) und Kittel (oder Hemd, das nicht in der Hose steckt), dargestellt. Oftmals treffen hier die heile Welt des Mathematikers und die unverständliche reale Welt schonungslos aufeinander, was nicht immer ohne Blessuren endet. Nachdem ich festgestellt habe, dass sich die Cartoons beinahe einer



## 14 Anekdoten

### 14.1 Erziehungs- und Bildungsauftrag

#### 14.1.1 Gleichwertige Feststellung von Schülerleistungen (oder ganze Familie schafft)

Ich freue mich über Ihr Interesse an einer GFS im Fach Mathematik. Besonders empfehlenswert ist eine GFS für Schüler, die auf der Kippe stehen, oder die in Mathematik zu kämpfen haben. Voraussetzung für eine GFS ist, dass alle Klassenarbeiten mitgeschrieben (oder nachgeschrieben) wurden.

1) Ich nehme nur GFS in Form einer Unterrichtsstunde (45') entgegen. Wenn die Zeugnisnote 'ausreichend' angestrebt wird, ohne dass eine Klassenarbeit mit 'ausreichend' oder besser erreicht wurde, gehört zur GFS auch eine mündliche Prüfung, die zu 50% in die Gesamtnote einfließt. Eine schriftliche Ausarbeitung muss nicht gemacht werden. Bitte schieben Sie die GFS nicht zu sehr nach hinten.

2) Das Thema der GFS muss folgenden Kriterien genügen:

- Ich muss es verstehen (+ die Klasse muss es verstehen können).
- Es darf noch nicht im Unterricht behandelt worden sein.
- Es muss (genügend) mathematischen Gehalt haben.

Somit sind 'Geschichte der Mathematik' oder Wiederholungen normalerweise nicht GFS-fähig. Die GFS sollte (mindestens) ein eigenes Beispiel (also nicht aus meinem Buch) enthalten.

3) Im Allgemeinen hat jede GFS zwei Vortreffen und (wenn gewünscht) ein Nachtreffen: Beim ersten Vortreffen sollten Sie sich ins Thema eingearbeitet haben und eine Unterrichtsstunde im Großen und Ganzen geplant haben. Das Vortreffen sollte spätestens 1 Woche vor dem GFS-Termin stattfinden. Beim zweiten Vortreffen sollten Sie meine Änderungswünsche eingearbeitet haben.

Bitte halten Sie sich an vereinbarte Termine - Termintreue wird mit bewertet.

Der größte Feind der Qualität ist die Eile



4) Eine Unterrichtsstunde besteht in der Regel aus (vielen Dank an Frau Straub)

- einer Problemdarstellung (wichtig: Wecken Sie ein Problembewusstsein beim Schüler) ( $\approx 5$  min),
- einer Problemlösung am Beispiel (oft wird Teil a gelöst) ( $\approx 10$  min),
- einer Verallgemeinerung ( $\approx 5$  min),
- einer Formulierung als Satz (mit Voraussetzung) - arbeiten Sie dies als **Höhepunkt** heraus ( $\approx 5'$ ),
- dem Beweis (dieser kann auch in der Herleitung b), c) stecken) ( $\approx 10$  min),
- Beispiele und Übungsaufgaben; eine Aufgabe dauert ca 5 Minuten, ( $\approx 10$  min).

**Bemerkung für Referendare:** Der vorgestellte Unterrichtsaufbau ist nur als Richtlinie zu sehen. Beachten Sie, dass Sie kurze Zeit für Hausaufgaben einplanen. Überhaupt ist ein guter Unterricht das Ergebnis eines guten **Zeitmanagements**. Es ist wichtig, dass Sie lernen Ihren eigenen Stil zu finden und zu unterrichten und bleiben Sie sich treu, sonst enden Sie als schlechte Kopie. Wenn Sie bei mir hospitieren, machen Sie bitte ein Stundenprotokoll und planen Sie danach Zeit für Fragen + Kritik ein.

5) Die GFS sollte frei (und nicht abgelesen) gehalten werden. Bitte schreiben Sie Wichtiges wie Definitionen und Sätze an und sagen Sie diese nicht nur. Verwenden Sie gerne auch Folien, vor allem an Stellen, an welchen Sie unsicher sind; aber: Sagen Sie etwas dazu und legen Sie die Folie nicht nur auf. Wichtige Teile (oft 4 e) sollten von Ihnen im Unterricht vorgerechnet werden. Es ist kein guter Stil, Folien aufzulegen und 'abschreiben' zu sagen (und sonst nichts); auch angeschriebene Lösungen sollten erklärt und nicht nur reproduziert werden.

6) Sprechen Sie wenn möglich zum Publikum nicht zu schnell und nicht zu leise und schreiben Sie Arbeitsaufträge an. Und reden Sie nicht wenn andere reden (Ruhe einfordern). Vergewissern Sie sich (eventuell durch Rückfragen), ob etwas beim Zuhörer angekommen ist. Stellen Sie gegebenenfalls Querverweise her. Sollten Sie mein Buch verwenden (oder der Klasse Fragen stellen) sollten Sie die Antwort nicht gleich nach der Fragestellung geben, sondern der Klasse erst Zeit zur Besinnung geben. Bauen Sie etwas 'Spannung' auf und geben Sie die Ergebnisse nicht sofort preis ('überlegt euch, wie das geht'), die Zuhörer sollen die Möglichkeit haben, selbst auf das Ergebnis zu kommen (siehe entdeckendes Lernen). Bitte geben Sie bei Übungsaufgaben nicht nur das Ergebnis, sondern auch noch dessen Rechenweg an.

7) Machen Sie in jedem Falle **Probenvorträge** - am besten mit interessiertem Publikum. Fragend

entwickelnder Unterricht ist erwünscht (aber nicht notwendig). Achten Sie auch auf angemessene Zeit bei den Arbeitsphasen; vor allem gegen Ende sollten diese nicht zu lang sein.

**8)** Wichtig: Stellen Sie Kontakt zu den Schülern her. Der Klassenprimus ist ein guter Indikator dafür, ob überhaupt etwas angekommen ist. Sie dürfen (und sollen) gerne durch das Klassenzimmer gehen. Vermeiden Sie lange 'Privatgespräche'; entscheiden Sie, ob eine persönliche Frage individuellen oder allgemeinen Charakter hat und bringen Sie die Frage gegebenenfalls ins Plenum. Bereiten Sie genügend Übungsaufgaben (eventuell auf Folie) vor.

Zum **Outfit** nur soviel: Es sollte evtl. ein Bisschen besser als normal sein. Bitte tragen Sie keine Kleidung mit fragwürdigem Aufdruck (z.B. Totenkopf) (und bei mündlichen Prüfungen keine Turnschuhe).

### 14.1.2 Leitfaden für mündliche Prüfungen (im Abitur)

(Thx J. Schölkopf + L. Bonfert, 2016) Bei einer mündlichen Prüfung (mP) gibt es 4 Beteiligte: **1)** der Prüfling (= Sie), **2)** der Prüfer (= Sd), **3)** der Protokollant (= ?/Mz) und **4)** der Vorsitzende (das ist hier in der Probeprüfung der ganze Rest der Klasse). Als Protokollant notieren Sie die Fragen von Sd und dessen Bemerkungen; NICHT die Antworten des Prüflings.



Ein Merz und eine Seele

Die mP in Mathe besteht aus einem 10' Präsentationsteil und einem 10' Prüfungsteil. Beim Präsentationsteil erhalten Sie eine Aufgabe (oft mit einer Schar), die Sie 20' vorbereiten. Diesen Vortrag halten Sie meistens mit Ihren Aufzeichnungen unter der Dokumentenkamera, nicht an der Tafel.

Beispielaufgabe Analysis: Gegeben sei die Kurvenschar  $f_t(x) = \frac{x-t}{x^2-4}$  ( $t \in \mathbf{R}$ ). a) Berechnen Sie den maximalen Definitionsbereich ID von  $f_t(x)$ . b) Skizzieren Sie  $K_{f_1}$  und  $K_{f_3}$  und erläutern Sie die Wirkung von  $t$ . c) Berechnen Sie die Asymptoten abhängig von  $t$ . d) Für welches  $t$  ist  $K_{f_t}$  symmetrisch? e) Sei  $a \neq b$ . Weisen Sie nach, dass sich  $K_{f_a}$  und  $K_{f_b}$  nicht schneiden.

Geo: **a)** Ber. Sie die Gerade  $g$ , durch  $A(1; 5; -1)$  und  $B(1; 7; 0)$ . **b)** Ber. Sie den Abstand von  $P(3; 4; 7)$  zu  $g$ . **c)** Spiegeln Sie  $P$  an  $g$ . **d)** Beschreiben Sie möglichst viele Verfahren, mit deren Hilfe Sie den Abstand von einer Gerade zu einem Punkt berechnen können. LöVo siehe 271/746 und Abs. 10.5.2.

**Prüfungsteil:** Eine mP ist nicht ganz das, was sie zu sein scheint. Grundsätzlich geht es in einer mP darum, dass Sie + Sd *gemeinsam* den Vorsitzenden von einer möglichst guten Note überzeugen. Eine mP müssen Sie sich wie einen Tanz vorstellen, bei dem Sie gut mit Sd harmonieren müssen:

- 1) Versuchen Sie der Prüfung + der Mathematik positiv gegenüber zu treten (Körpersprache + Mimik!). Stehen Sie aufrecht; die Füße sollten etwa unter den Schultern sein.
- 2) Tun Sie immer, was Sd sagt (Sd führt, wie beim Tanzen). Gehen Sie vom Wohlwollen des Prüfers aus und verärgern (oder unterbrechen) Sie weder ihn noch den Vorsitzenden. Lächeln ist erwünscht / Lachen nicht. Putzen Sie bitte nur nach Aufforderung die Tafel.
- 3) Versuchen Sie keine Rückfragen zu stellen. Beachten Sie auch, dass bei Aussagesätzen die Stimme nach unten geht. Folgendes sollten Sie nonverbal kommunizieren: Sie schauen zur Tafel = Sie überlegen (lange Denkphasen verbessern die Note nicht); Sie schauen Sd an = Sie wissen nicht, wie es weiter geht. Zeigen Sie nicht körperlich, dass Sie nicht weiterwissen (Hand / Kopfhaltung!). Meiden Sie Konjunktive und Worte wie 'vielleicht' oder 'ach so'. Schütteln Sie nicht den Kopf.
- 4) Auf eine allgemeine Frage dürfen Sie auch mit einem Beispiel oder einer Zeichnung antworten. Empfehlung: Erst die Kurve, dann das Achsenkreuz zeichnen und sagen Sie etwas zu dem, was Sie schreiben (es ist eine mündliche Prüfung; führen Sie aber keine Selbstgespräche). Wenn Sie nichts mehr an die Tafel schreiben, sollten Sie mir immer zeigen, was Sie geschrieben haben (= ein Schritt zur Seite). Schreiben Sie ruhig eine Formel an, die Sie verwenden.
- 5) Je mehr Sie wissen und auch präsentieren, desto tiefer kann Sd gehen, je mehr Sie Sd fragend anschauen, desto seichter bleibt die Prüfung (sanfte Initiative Ihrerseits ist möglich). Besonders wichtig ist es hierbei, die Formelsammlung und Definitionen auswendig zu können. Outfit: Siehe GFS.

6) Bei einer mündlichen Prüfung können Sie normalerweise ihre Anmeldenote erwarten, aber nur, wenn Sie vorbereitet sind. Dazu empfehle ich neben dem Auswendiglernen der Formeln (vor allem ab Klasse 10) aus der Formelsammlung, das Rechnen vieler Pflichtaufgaben bzw. der Minimalanforderungen + nennen Sie mir bitte vorher die Note(n), die Sie benötigen.

7) Antworten Sie immer auf ja/nein Fragen. Wenn Sd fragt: 'Sind Sie sich sicher?' Bedeutet dies eventuell nein (also falsch); Sd fragt weiter bedeutet entweder alles ok oder das Gegenteil. Sd ist desinteressiert / abwesend bedeutet meistens 'alles richtig'.

Ich mache nicht nur leere  
Versprechungen; ich halte  
mich auch daran (Stoiber)



Eine 'Wieso'-Frage kann auch ein Hinweis auf einen Fehler sein.

**Beispiele** für Prüfungen. Texte in eckigen Klammern gehören nicht zum Aufgabentext sondern sind Hinweise für den Prüfer. (\*) = Prüfung noch uv

1. **a)** Definieren Sie Momentangeschwindigkeit (MG) [F 54, 139/329]. **b)** Erklären Sie, wie aus der mittleren Änderungsrate die MG entsteht. **c)** Führen Sie den Grenzübergang (GÜ) bei der Funktion  $f(x) = x^2$  durch. **d)** Wie lautet der äquivalente mathematische Begriff? **e)** Zeigen Sie mit Hilfe eines GÜ, dass  $(a^x)' = k \cdot a^x$  + definieren Sie so eine irrationale Zahl [Ag 160/409].
2. **a)** Was ist eine allgemeine Sinusfunktion  $[y = a \sin(b(x-c)) + d]$ , **b)** Erklären Sie die Koeffizienten  $a-d$ . [Ag 110/288] **c)** Lösen Sie die Gleichung  $\sin(x) = 0$ .  $[x = k\pi]$ , **d)**  $\sin(x) = \frac{1}{2}$ . [Ag 112/291] **e)** Wie wirkt sich der Parameter  $b$  aus? [Streckung in  $x$  Richtung  $\frac{1}{b}$ ] **f)** Warum erst strecken, dann verschieben? [Verschobene  $x$ -Achse wird weggestreckt]
3. **a)** Ist  $f(x) = 2x$  streng monoton wachsend (smw)? [Ja] **b)** Geben Sie weitere Bsp von smw Fkt an und weisen Sie diese nach. **c)** Definieren Sie smw?  $[x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)]$  **d)** Welche Punkte enthält eine smw Funktion nicht? [Extrempkt] **e)** Wie lautet der Monotoniesatz?  $[f'(x) > 0 \text{ auf } [a; b] \Rightarrow f \text{ smw}]$  **f)** Zeigen Sie, dass nur ' $\Rightarrow$ ' gilt  $[x^3]$ .
4. **a)** Leiten Sie  $\ln(x)$  ab. **b)** Beweisen Sie  $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ . **c,d)** Berechnen Sie  $(a^x)'$ ,  $(\log_a)'$ . Für welche  $a$  gilt ihre Formel?  $[(a^x)' = \ln(a)a^x, a > 0; (\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln(a)}, a > 0, a \neq 1]$ .  
**e)** Was wäre  $y = \log_1(x)$ ?  $[1^y = x \not\leftarrow \text{für } x \neq 1]$
5. **a)** Der Graph von  $f(x) = 0.5x - 1$  rotiere im Intervall  $[1;2]$  um die  $x$ -Achse. Berechnen Sie dessen Volumen.  $[\frac{13\pi}{3}]$  **b)** Um welchen Körper handelt es sich? [Kegelstumpf] **c)** Wie lautet die Kegelstumpfvolumenformel der Mittelstufe?  $[V = \pi(r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2) \cdot h]$  **d)** Beweisen Sie diese Formel mit Integralrechnung.  $[r_2^3 - r_1^3 = (r_2 - r_1) \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2)]$
6. **a)** Berechnen Sie  $\int_0^1 x^{-0.5} dx$  [2]. **b)** Was ist ein uneigentliches Integral? **c)** Welche uneigentlichen Integrale gibt es noch? [gegen unendlich] **d)** Für welche  $r$  ist  $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^r dx$  endlich?  $[r < -1]$
7. **a)** Geben Sie ein Beispiel für ein exponentielles Wachstum an. **b)** Was ist allgemein ein exponentielles Wachstum [rekursiv/Differentialgleichung (Dgl)]? **c)** Was ist eine Dgl? **d)** Nennen Sie eine Dgl und lösen Sie diese. **e)** Erklären Sie bei der Dgl  $y' = S - ce^{-kt}$  die Bedeutung der Variablen  $S, k, c$ . **f)** Leiten Sie aus dem rek Bildungsgesetz die Dgl des beschr Wt her.
8. **a)** Sei  $A(1|2|3)$ ,  $B(3|2|1)$ ,  $C(2|2|2)$ ,  $D(4|2|0)$ . Welche Lage haben die Geraden  $g_{AB}$  und  $g_{CD}$ ? [id] **b)** Erklären Sie allgemein, wie man die Lage zweier Geraden bestimmt. [F 67] **c)** Alle Punkte haben die gleiche  $x_2$ -Koordinate. Warum können die Geraden nicht windschief sein?  $[A..D \text{ liegen in der Ebene } x_2 = 2, \text{ ws Geraden liegen nie in einer Ebene}]$
9. **a)** Sind  $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  linear abhängig? [Ja] **b)** Definieren Sie lineare Abhängigkeit. **c)** Geben Sie Bsp für zwei l.a. Vektoren an. **d)** Was kann man zum  $\vec{0}$  sagen?  $[\vec{0} \text{ ist immer l.a.}]$  **e)** Wie ist l.a. für 3 Vektoren definiert?  $[(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0]$
10. **a)** Welche Lage haben die Gerade  $g$  durch  $A(0|1|-1)$  und  $B(2|-1|0)$  und  $E : x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$ ?  $[g \subset E]$  **b)** Erklären Sie allgemein, wie man die Lage von einer Geraden und einer Ebene bestimmt. [Ag 264/714] **c)** Wann ist  $g \perp E$ ?  $[\vec{r}_g \text{ und } \vec{n}_E \text{ sind l.a.}]$

11. **a)** Welche Lage haben die Ebenen  $E$  durch  $A(0|1|-1)$ ,  $B(2|-1|0)$  und  $C(2|0|-1)$  und  $F: x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$ ? [id] **b)** Erklären Sie allgemein, wie man die Lage zweier Ebenen bestimmt. [Ag 265/721] **c)** Wo gibt es windschiefe Ebenen? [4 dim]
12. **a)** Spiegeln Sie  $P(2|-1)$  am Punkt  $L(1|1)$ . [(0|3)] **b)** Erklären Sie, wie man allg. bei einer Punktspiegelung einen Spiegelpunkt berechnet. [F 65] **c)** Sei  $E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$ . Spiegeln Sie  $Q(1|2|2)$  an  $E$  [ $L(0|0|0), Q'(-1|-2|-2)$ ]. **d)** Erklären Sie allgemein, wie man einen Punkt (bzw. eine Gerade) an einer Ebene spiegelt. [Ag 272/751]
13. (\*) **a)** Es wird ein Mal gewürfelt. Sei  $A$  das Ereignis 'Zahl gerade' und  $B$ : 'Zahl  $> 3$ '. Berechnen Sie  $P(A \cup B)$  mit Hilfe des Additionssatzes. **b)** Erklären Sie den Additionssatz mit Hilfe eines Diagramms. **c)** Gibt es einen Additionssatz für  $P(A \cup B \cup C)$ ? **d)** Wie lautet dieser?
14. **a)** Was ist ein Benoullixperiment (BE)? [Ag 335/849] **b)** Geben Sie ein Bsp. für ein BE an. **c)** Was ist eine Bernoullikette? **d)** Wie lautet die Formel von Bernoulli (FvB) und was berechnet man mit dieser? **e)** Erklären Sie jeden Faktor der FvB. [Ag 335/849]
15. Mit Abb. 337/202 **a)** Was ist eine Hypothese? [Ag 346/876] **b)**  $H_0: p = 0.5$  soll gegen die Hypothese  $H_1: p = 0.3$  mit  $n = 10$  Versuchen getestet werden.  $H_0$  soll bei weniger als 3 Treffern abgelehnt werden. Geben Sie  $\alpha$  und  $\beta$  an. [ $\alpha \approx 0.174, \beta \approx 0.617$ ] **c)** Der Test soll so verändert werden, dass  $\alpha \leq 0.05$  ist. Geben Sie  $Abl$  an. [ $Abl = \{0; 1\}$ ]

### 14.1.3 Lesen eines Aufgabentextes (Thx an Dr. Tanja Schmid)

Wie lese ich einen Agtext richtig? Lesekompetenz ist ein schwieriges Thema und sicher nur individuell lösbar. Trotzdem möchte ich versuchen hier ein paar Hinweise zu geben. Vgl auch 380/14.1.4 (2).

- 1) Wie lautet das Thema und welche wichtigen Formeln oder Definitionen gehören dazu?
- 2) Text überfliegen um Merkmale wie wichtige Textteile zu erkennen: Erste vorläufige Thesen über den Textinhalt formulieren. Vorhersagen über den Text treffen und kontinuierlich evaluieren.
- 3) Schüsselsätze herausschreiben; Signalworte unterstreichen.
- 4) Was wird von mir verlangt? Geben Sie die Inhalte in eigenen Worten wieder. Gibt es ähnliche Ag?
- 5) Text selektiv und mehrfach lesen; trotz Verstehensschwierigkeiten weiterlesen.
- 6) Inhalte gezielt bildlich vorstellen; gedanklich (oder physisch) ausführen, was der Text rät.
- 7) Fehlende Information vorwissensbasiert auffüllen.
- 8) Gezielt nach Informationen mit Neuigkeitswert suchen.
- 9) Diesen Plan an vielen Klassenarbeitsaufgaben durchspielen.

### 14.1.4 Mein pädagogisches Handbuch

Wer das folgende Kapitel nicht mit dem nötigen Augenzwinkern lesen kann, sollte sich umso genauer über seinen Inhalt Gedanken machen. Frei nach Mr. Spock gilt: Die einfache Pädagogik ist oft die beste.

1. Mathe macht glücklich – deshalb entsteht bei einem Schüler der Mathe macht ein zufriedenes Lächeln (und nicht ein Lachen). Nichtlächelnde Schüler machen demzufolge nicht mit.
2. **a)** Goethe sagt: 'Im Anfang war die Tat' oder in der Mathematik gilt: 'Erst tun, dann denken'. Einige Schüler sind davon überzeugt, dass das ausschließliche Bestarren eines weißen Blattes Papier lösungsförderlich ist. *Sie* nennen es 'Denken' – ich nenne es aber 'Warten' und das problemlösende Warten werde ich nicht als Lösungsansatz. Stattdessen kann nach dem Lesen ( $\rightarrow$  Abs. 14.1.3) eines Aufgabentextes meistens folgendes getan werden:

- 1) Finden von Signalwörtern (unterstreichen im Text)
- 2) Auffinden von Formeln oder Ideen, die mit den Signalwörtern unmittelbar in Zusammenhang stehen.
- 3) Erstellen einer Zeichnung (Wth: Baum) oder einer Wertetabelle.



Cartoon 69

## 16 Abiturvorbereitung

### Inhaltsverzeichnis:

16.1	Operatoren aus dem Bildungsplan 2016	949
16.3	Das WTR Curriculum von Herrn Bittermann	955
16.4	Inhaltsbezogene Kompetenzen für das Abitur des LK	957
16.5	Die Abituraufgaben 2023, 2022 + 2021	958
16.6	Musteraufgaben für das Abitur 2021+23	977
16.7	Stochastik-Abiturteile vor 2019 komplett auf Niveau Klasse 10	981
16.8	Die mündliche Prüfung des Basiskurses (GK)	984
16.9	Aufgaben aus dem IQB-Pool (Aufgaben: IQB21.slt.biz)	992
16.9.7	Funktionen aus dem Analysisteil des Leistungskurses	1007
16.9.8	Aufgaben aus dem Mathe Känguru ohne WTR	1007
16.11	Wegen Platzmangels aussortierte Abiture	1019

Die LoeVo aus Kap 16 finden Sie unter <http://www.slt.biz/Unterricht/Kapitel16.htm>

Zwar darf ich mit Ihnen keine Absprachen treffen, aber von der Weitergabe meiner bisherigen Wahlen hat niemand etwas gesagt. Deshalb hier der Abschnitt 'Wie habe ich gewählt?'

2023: 1 1 2 2, 2022: 2 1 2 1, 2021: 2 2 2 2, 2020: 1 1 1, 2019: 2 1 1, 2018: 1 2 2, 2017: 1 1 1,  
2016: 2 1, 2015: 2 1, 2014: 1 2, 2013: 1 2, 2012: 3 2, 2011: 3 2, 2010: 3 1;

### 16.1 Operatoren aus dem Bildungsplan 2016

Die Bemerkungen in eckigen Klammern [ ] sind Zusätze von mir.

In den Standards für inhaltsbezogene Kompetenzen werden Operatoren (handlungsleitende Verben [Imperative]) verwendet. Standards legen fest, welche Anforderungen die Schülerinnen und Schüler in der Regel erfüllen. Zusammen mit der Zuordnung zu einem der drei Anforderungsbereiche (AFB) dienen Operatoren einer Präzisierung. Dies sichert das Erreichen des vorgesehenen Niveaus und die angemessene Interpretationen der Standards.

#### 16.1.1 Beschreibung der drei Anforderungsbereiche

**AFB I** umfasst das Wiedergeben von Sachverhalten und Kenntnissen sowie das Anwenden und Beschreiben geübter Arbeitstechniken und Verfahren [Reproduktion: Aufgabenniveau 1 und teilweise 2].

**AFB II** umfasst das selbstständige Verarbeiten und Darstellen bekannter Sachverhalte in einem durch Übung bekannten Zusammenhang und das selbstständige Übertragen des Gelernten auf vergleichbare, neue Sachverhalte [Reproduktion und teilweise Transfer: Aufgabenniveau 2-3].

**AFB III** umfasst das Verarbeiten komplexer Sachverhalte mit selbstständiger Auswahl geeigneter Arbeitstechniken mit dem Ziel, zu selbstständigen Lösungen, Gestaltungen oder Deutungen, Folgerungen, Verallgemeinerungen, Begründungen und Wertungen zu gelangen und das eigene Vorgehen zu reflektieren [Transfer: Aufgabenniveau 3-5].

#### 16.1.2 Zuordnung zu Anforderungsbereichen

Die Zuordnung eines Operators ist im Einzelfall auch vom Kontext von Aufgabenstellungen und ihrer unterrichtlichen Einordnung abhängig. Im Folgenden werden die Operatoren dem überwiegend in Betracht kommenden Anforderungsbereich zugeordnet. Verben der mathematischen Fachsprache Handlungsleitende Verben wie rechnen, multiplizieren, lösen, differenzieren, zeichnen, messen, erweitern, kürzen, umwandeln, vergrößern, abschätzen, schließen, konstruieren, Darstellungen wechseln oder ineinander überführen werden hier nicht beschrieben. Ihre Bedeutung ist fachsprachlich definiert, die Zuordnung zu einem Anforderungsbereich ist dem Kontext zu entnehmen.

Operatoren	Beschreibung	AFB
<b>angeben, nennen</b>	Ergebnisse numerisch oder verbal formulieren, ohne Darstellung des Lösungsweges und ohne Begründungen	I
<b>anwenden, durchführen</b>	nach bekannten Regeln oder Anweisungen von einer Aufgabenstellung zu einem definierten Ziel gelangen	II
<b>auswerten</b>	Daten, Einzelergebnisse oder sonstige Sachverhalte zu einer abschließenden, begründeten Gesamtaussage zusammenführen	II
<b>begründen</b>	eine Aussage, einen Sachverhalt durch Berechnungen, nach gültigen Schlussregeln, durch Herleitungen oder inhaltliche Argumentation verifizieren oder falsifizieren	III
<b>berechnen</b>	Ergebnisse von einem Ansatz oder einer Formel ausgehend durch Rechenoperationen gewinnen. Die Argumentation mit Hilfe einer Zeichnung genügt nicht. [Die Ergebnisse sind ausreichend vereinfachter Form anzugeben.]	I [-III]
<b>beschreiben, formulieren</b>	einen Sachverhalt oder ein Verfahren in vollständigen Sätzen unter Verwendung der Fachsprache mit eigenen Worten wiedergeben (hier sind auch Einschränkungen möglich: 'Beschreiben Sie in Stichworten') beziehungsweise in einer vorgeschriebenen Form darstellen (zum Beispiel: 'Beschreiben Sie als Term')	II
<b>bestimmen, erschließen</b>	Lösungen, Lösungswege beziehungsweise Zusammenhänge auf der Basis von Vorkenntnissen oder Verfahren finden und darstellen. Die Argumentation mit Hilfe einer Zeichnung kann genügen.	II
<b>beurteilen, bewerten</b>	einen Sachverhalt nach fachwissenschaftlichen oder fachmethodischen Kriterien, persönlichem oder gesellschaftlichem Wertebezug begründet einschätzen und ein selbstständiges Urteil formulieren	III
<b>beweisen, [zeigen]</b>	Aussagen unter Verwendung von bekannten mathematischen Sätzen, logischen Schlüssen und Äquivalenzumformungen und unter Beachtung formaler Kriterien verifizieren	III
<b>darstellen</b>	mathematische Objekte in einer fachlich üblichen oder in einer vorgeschriebenen Form wiedergeben graphisch darstellen: Anfertigen einer zeichengenauen, graphischen Darstellung auf der Basis der genauen Wiedergabe wesentlicher Punkte beziehungsweise maßgetreues oder maßstäbliches zeichnerisches Darstellen eines Objekts	I
<b>deuten, interpretieren</b>	Sachverhalte, Phänomene, Strukturen oder Ergebnisse in eine andere mathematische Sichtweise umdeuten oder rückübersetzen auf das ursprüngliche Problem	II
<b>entnehmen</b>	aus vorgegebenen Darstellungen Daten zur Beantwortung von Fragen oder zur Weiterbearbeitung aufbereiten	II
<b>erkennen</b>	Muster ohne ausführliche Begründung feststellen beziehungsweise feststellen, dass in einer Situation bestimmte fachliche Definitionen zutreffen	I
<b>erklären, erläutern</b>	Sachverhalte auf der Grundlage von Vorkenntnissen so darlegen und veranschaulichen, dass sie verständlich werden	II
<b>identifizieren</b>	mathematische Objekte und die zugehörigen Fachbegriffe begründet miteinander verbinden	I
<b>nutzen, umgehen mit, verwenden</b>	Fachbegriffe, Regeln, mathematische Sätze, Zusammenhänge oder Verfahren auf einen anderen Sachverhalt beziehen	II
<b>skizzieren</b>	die wesentlichen Eigenschaften eines Objekts graphisch vereinfacht darstellen	II
<b>überprüfen</b>	durch Anwendung mathematischer Regeln oder Kenntnisse in einer ergebnisoffenen Situation einen vorgegebenen Sachverhalt verifizieren oder falsifizieren	III

<b>untersuchen</b>	Sachverhalte, Probleme, Fragestellungen nach bestimmten, fachlich üblichen beziehungsweise sinnvollen Kriterien zielorientiert erkunden. [Betrachten (berechnen) Sie alle möglichen Fälle]	II
<b>vergleichen</b>	Gemeinsamkeiten und Unterschiede herausarbeiten	II
<b>zuordnen</b>	einen begründeten Zusammenhang zwischen Objekten oder Darstellungen herstellen	II

### 16.1.3 Anforderungen an Schülerlösungen und deren Dokumentation

Von den Schülerinnen und Schülern wird eine saubere und nachvollziehbare Dokumentation erwartet, dazu gehören insbesondere:

- 1) durch Verbalisierung des Vorgehens und Ergebnissätze strukturierte Darstellung
- 2) angemessener sprachlicher Ausdruck, insbesondere korrekte Fachsprache
- 3) Definition neu eingeführter Bezeichnungen (insbesondere von Zufallsgrößen)
- 4) keine Angaben über Tastenfolgen von WTR-Eingaben

Wird in einer Aufgabenstellung ein 'exakter Wert' gefordert, dann ist damit ein mathematisch exakter Ausdruck (z.B.  $\frac{6}{7}$ ,  $\ln(2)$ ,  $\frac{\sqrt{2}}{\pi}$ ,) gemeint, nicht eine gerundete Dezimalzahl.

## 16.2 Das Formeldokument

'Wer intelligent genug ist, das Formeldokument verwenden zu können, braucht es nicht'; *Sd.*

Im Abitur ist das Formeldokument (FD) nur für den Notfall gedacht. Normalerweise sollten Sie alle Formeln des Formeldokumentes sowieso auswendig beherrschen.

- (1) Die Darstellung des FD ist stark reduziert. Oft fehlen die Definition oder Einschränkung der Variablen:
  - Bsp a: Im Dreieck gilt:  $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$  ohne zu erklären, was  $g$  und  $h$  ist.
  - Bsp b:  $\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$ ; es fehlt: Seien  $a, b, c > 0$ ,  $a \neq 1$ .
- (2) Manche Inhalte beginnen mit 'Folgende Aussagen sind äquivalent'. Dabei entspricht oft die erste Aussage der 'Begrifflichkeit' (Definition); die weiteren Aussagen entsprechen mathematischen Inhalten (Formeln oft in Prosa) dazu.
- (3) Die Notation ist teilweise neu (anders, gewöhnungsbedürftig). Unter anderem werden Variablen umbenannt. **Bsp:**  $u^2 + v^2 = w^2$ .
- (4) Mein Unterricht ist teilweise anders fokussiert: Im Unterricht verwenden wir die  $a, b, c$ -Formel; im FD steht die  $p, q$ -Formel (die Sie gerne auch verwenden dürfen).

Das vorliegende FD ist komprimiert und enthält Nummern und Verweise (FS = Formelsammlung (ab Seite 4); Ag = Aufgabe; Abs = Abschnitt). Zur Vorbereitung und in Klassenarbeiten müssen Sie das Original <http://FD.slt.biz> verwenden.

### 16.2.1 Grundlagen

1. **Ähnlichkeit zweier Dreiecke:** etwa FS 6/21, Ag 230/558.

Die folgenden Aussagen zu zwei Dreiecken sind äquivalent:

- (1) Die Dreiecke sind ähnlich.
- (2) Die Größen der Winkel des einen Dreiecks stimmen mit den Größen der Winkel des anderen Dreiecks überein.

(3) Die Verhältnisse der Seitenlängen des einen Dreiecks stimmen mit den Verhältnissen der Seitenlängen des anderen Dreiecks überein.

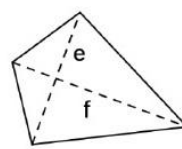
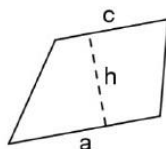
2. **Binomische Formeln:** FS 5/11; Ag 20/4.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \quad (a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2;$$

3. **Maße von Figuren:** FS 5/5, Ag 243/633.

Dreieck: $A = \frac{1}{2}g \cdot h;$	Parallelogramm: $A = g \cdot h;$	Trapez: $A = \frac{a+c}{2} \cdot h;$	Drachenviereck: $A = \frac{1}{2}e \cdot f;$	Kreis $A = \pi r^2; U = 2\pi r;$
---	-------------------------------------	---	--	-------------------------------------

Ein Parallelogramm mit vier gleich langen Seiten wird als Raute bezeichnet.



4. **Maße von Körpern:** FS 8/42, Abs 245/9.6.2;

Prisma: $V = A_G \cdot h;$	Pyramide: $V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h;$	Zylinder: $V = A_G \cdot h;$ für gerade Zylinder $A_O = 2 \cdot A_G + 2\pi \cdot r \cdot h;$	Kegel $V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h;$ für gerade Kegel $A_O = A_G + \pi \cdot r \cdot m;$
-------------------------------	---	---	---

( $m$ : Abstand der Spitze [des Kegels] vom Rand der Grundfläche)

5. **Potenzen und Logarithmen:** FS: 6/23, Abs 36/2.3.2 + FS 7/27, Abs 39/2.4.1.

$$a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r \quad a^r \cdot a^s = a^{r+s}; \quad (a^r)^s = a^{r \cdot s}; \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r; \quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}; \quad a^{-r} = \frac{1}{a^r};$$

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c) \quad \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c) \quad \log_a(b^r) = r \cdot \log_a(b)$$

6. **Quadratische Gleichung:** FS: 6/19, Abs 31/2.2.6.

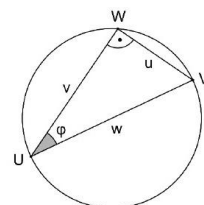
$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{sind die Lösungen der Gleichung } x^2 + px + q = 0.$$

7. **Rechtwinkliges Dreieck:** FS: 7/34, Ag 240/614.

$$(1) \sin(\varphi) = \frac{u}{w};$$

$$(2) \cos(\varphi) = \frac{v}{w};$$

$$(3) \tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \frac{u}{v};$$



8. **Satz des Pythagoras:** FS: 7/29, Ag 235/585.

Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, dann gilt für die Längen  $u$  und  $v$  der beiden Katheten und die Länge  $w$  der Hypotenuse  $u^2 + v^2 = w^2$ .

Wenn für die Längen  $u$ ,  $v$  und  $w$  der Seiten eines Dreiecks  $u^2 + v^2 = w^2$  gilt, dann hat dieses Dreieck einen rechten Winkel, der der Seite mit der Länge  $w$  gegenüber liegt.

9. **Satz des Thales:** FS: 5/13, Abs 228/9.1.8.

Wenn ein Dreieck beim Eckpunkt  $W$  einen rechten Winkel hat, dann liegt  $W$  auf dem Kreis, der den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite als Mittelpunkt hat und durch die beiden anderen Eckpunkte verläuft.

Wenn der Eckpunkt  $W$  eines Dreiecks auf dem Kreis liegt, der den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite als Mittelpunkt hat und durch die beiden anderen Eckpunkte verläuft, dann hat dieses Dreieck bei  $W$  einen rechten Winkel.

10. **Symbole in Verbindung mit Mengen:** FS: -, Ag 99/249 + Ag 312/12.1.



$$\begin{array}{lll} \mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}; & \mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R} | x > 0\}; & [a; b] = \{x \in \mathbf{R} | a \leq x \leq b\}; \\ \mathbf{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}; & \mathbf{R}_0^+ = \{x \in \mathbf{R} | x \geq 0\}; & ]a; b[ = \{x \in \mathbf{R} | a < x < b\}; \\ A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\} & A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\} & A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\} \end{array}$$

11. **Trigonometrie:** FS: 9/60, Abs 109/5.4.3.

$$\begin{array}{lll} \sin(-\varphi) = -\sin(\varphi); & \sin(\varphi - 90^\circ) = -\cos(\varphi); & \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1; \\ \cos(-\varphi) = \cos(\varphi); & \cos(\varphi - 90^\circ) = \sin(\varphi); & \end{array}$$

12. **Winkelmaße:** FS: 9/59, Abs 108/5.4.2.

Beträgt die Größe eines Winkels im Gradmaß  $360^\circ$ , so beträgt sie im Bogenmaß  $2\pi$ .

### 16.2.2 Analysis

13. **Ableitung:** FS: 9/54, Abs 138/6.1.3.

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

14. **Ableitungen ausgewählter Funktionen:**

FS: 9/56, Ag 139/332; FS: 9/63, Ag 114/297; FS: 10/73, Ag 160/409 + 163/424.

Term der Funktion	$x^r$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$e^x$	$\ln(x)$	$x \ln(x) - x$
Term der Ableitungsfunktion	$r \cdot x^{r-1}$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$e^x$	$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$

15. **Ableitungsregeln:** FS: 9/57, Ag 139/334; FS: 11/76, Ag 161/415; FS: 11/77, Ag 162/419.

Term der Funktion	$k \cdot u(x)$	$u(x) + v(x)$	$u(x) \cdot v(x)$	$u(v(x))$
Term der Ableitungsfunktion	$k \cdot u'(x)$	$u'(x) + v'(x)$	$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$	$u'(v(x)) \cdot v'(x)$

16. **Ableitung von Integralfunktionen:** FS: 11/79, Ag 174/454.

Für  $I(x) = \int_a^x f(t) dt$  gilt  $I'(x) = f(x)$ .

17. **Bestimmtes Integral:** FS: 11/80, Ag 175/455.

Ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ , so gilt  $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ .

18. **Grenzwerte:** FS: 11/75, Ag 161/413.

Ist  $p(x)$  ein Polynom, so gilt  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0$ .

Ist  $p(x)$  ein nicht konstantes Polynom, so gilt  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{p(x)} = 0$ .

Ist  $p(x)$  ein Polynom ohne konstanten Summanden, so gilt  $\lim_{x \rightarrow 0} p(x) \cdot \ln(x) = 0$ .

19. **Rotationskörper:** FS: 11/83, Ag 181/487.

$$V = \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

20. **Schneiden und Berühren zweier Funktionsgraphen:** FS: –, Ag 142/346

Die Graphen zweier Funktionen  $f$  und  $g$  schneiden sich in einem Punkt genau dann, wenn sie diesen Punkt gemeinsam haben.

Die Graphen zweier Funktionen  $f$  und  $g$  berühren sich in einem Punkt genau dann, wenn sie diesen Punkt gemeinsam und dort die gleiche Steigung haben.

21. **Zueinander senkrechte Geraden:** FS: 7/28, Ag 234/581.

Zwei Geraden mit den Steigungen  $m_1$  und  $m_2$  sind genau dann senkrecht zueinander, wenn  $m_1 \cdot m_2 = -1$  gilt.

### 16.2.3 Analytische Geometrie / Lineare Algebra

22. **Skalarprodukt:** FS: 11/85, Ag 256/683.

$$a \circ b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$a \circ b = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

$$\vec{a} \circ \vec{a} = |\vec{a}|^2.$$

23. **Ebenen:** FS: 12/90, Ag 261/705.

(i) Parameterform:  $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$

(ii) Koordinatenform:  $n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + k = 0$

(iii) Normalenform:  $\vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0$

### 16.2.4 Stochastik

24. **Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit:**

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

FS: 8/39, Ag 324/818 + Ag 326/820.

Die folgenden Aussagen zu Ereignissen  $A$  und  $B$  sind äquivalent:

(i)  $A$  und  $B$  sind stochastisch unabhängig.

(ii)  $P_B(A) = P(A)$

(iii)  $P_A(B) = P(B)$

25. **Binomialkoeffizient:** FS: 8/47, Abs 330/12.3.1.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

26. **Zufallsgrößen:** FS: 7/38, Ag 321/809; FS 9/51, Ag 339/856; FS: 11/89, Abs 356/13.2.2.

(i) Für eine Zufallsgröße  $\mathcal{X}$  mit den Werten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  gilt:

(a) Erwartungswert:  $E(\mathcal{X}) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(\mathcal{X} = x_i)$

(b) Varianz:  $Var(\mathcal{X}) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(\mathcal{X}))^2 \cdot P(\mathcal{X} = x_i)$

(c) Standardabweichung:  $\sqrt{Var(\mathcal{X})}$

(ii) Für eine binomialverteilte Zufallsgröße  $\mathcal{X}$  gilt:

(a)  $P_p^n(\mathcal{X} = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

(b) Erwartungswert:  $\mu = n \cdot p$

(c) Standardabweichung:  $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

(iii) Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsgröße:  $\varphi(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

27. **Sigma-Regeln:** FS: 11/89, Abs 356/13.2.2.

Ist  $\mathcal{X}$  eine normalverteilte Zufallsgröße, so gilt:

(i)  $P(\mu - \sigma \leq \mathcal{X} \leq \mu + \sigma) \approx 68.3\%$

(ii)  $P(\mu - 1.64\sigma \leq \mathcal{X} \leq \mu + 1.64\sigma) \approx 90.0\%$

(iii)  $P(\mu - 1.96\sigma \leq \mathcal{X} \leq \mu + 1.96\sigma) \approx 95.0\%$

(iv)  $P(\mu - 2\sigma \leq \mathcal{X} \leq \mu + 2\sigma) \approx 95.4\%$

(v)  $P(\mu - 2.58\sigma \leq \mathcal{X} \leq \mu + 2.58\sigma) \approx 99.0\%$

(vi)  $P(\mu - 3\sigma \leq \mathcal{X} \leq \mu + 3\sigma) \approx 99.7\%$

28. **Prognoseintervall und Konfidenzintervall (nicht abirelevant in BW):** FS: –, Abs –.

Für eine binomialverteilte Zufallsgröße gilt näherungsweise:

(i) Prognoseintervall:  $\left[ p - c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}; p + c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \right]$

(ii) Die Gleichung  $|h - p| = c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$  liefert die beiden Grenzen eines Konfidenzintervalls für den Wert von  $p$ .

29. **Signifikanztest:** FS: –, Abs 427/14.17.5.

Wird die Nullhypothese irrtümlich abgelehnt, so bezeichnet man dies als Fehler erster Art. Das Signifikanzniveau ist der Wert, den die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art nicht überschreiten soll.

Wird die Nullhypothese irrtümlich nicht abgelehnt, so bezeichnet man dies als Fehler zweiter Art.

16.3 Auszug aus dem WTR Curriculum von Herrn Bittermann

16.3.1 Basisfunktionen bis Klasse 8

**Tausender-Trennung ein-/ausschalten**

Im Setup-Menü: **SHIFT** **MENU** **▼** **▼** **2**

1000er-Trennung?  
1:Ein  
2:Aus

--> **Werte speichern**

gespeicherte Werte abrufen und löschen.

Zahl 13 unter A speichern, Speicher anzeigen und löschen:

**1** **3** **STO** **(-)** **=**

13→A  
13

A=13 B=0  
C=0 D=0  
E=0 F=0  
H=0 X=0  
Y=0

**SHIFT** **STO**

Zurücksetzen?  
1:Setupdaten  
2:Speicher  
3:Alle initialis.

**SHIFT** **9** **2** **=** **AC**

--> **Setup-Einstellungen**

Einstellung der Präferenzen Bruch oder Dezimalzahl als Ergebnis

**SHIFT** **MENU** **1**

Option 1: Ausgabe als Zahl in math. Schreibweise

Option 2: Ausgabe als Dezimalzahl

Option 3 und 4: Eingabe ohne math. Schreibweise – nicht zu empfehlen!

1:Math --> Math  
2:Math --> Dezim.  
3:Lin. --> Linear  
4:Lin. --> Dezim.

--> Es kann immer zwischen den Anzeigen umgeschaltet werden mit der Taste **S+D**. (Schmid - Taste)

Einstellung des Bruchergebnisses als Bruch oder gemischte Zahl.

Empfehlung: als Bruch.

**SHIFT** **MENU** **▼** **1**

1:ab/c  
2:d/c

16.3.2 Wertetabellen von Funktionen (ab Ag 87/208)

--> Im Setup-Menü kann man festlegen, ob die Wertetabelle für eine oder zwei Funktionen angezeigt wird. **SHIFT** **MENU** **▼** **4**

Eingabe der Wertetabelle:

**MENU** **6** **X** **X<sup>2</sup>** **=** **2** **X** **=**

Eingabe von Start- und Endwert incl. Schrittweite.

Man kann jetzt direkt in der Wertetabelle einzelne Argumente ändern (überschreiben). Es wird sofort der neue Funktionswert berechnet.

Mit der Taste **AC** kommt man zurück zur Eingabe der Funktionsgleichung.

Aus der Wertetabelle heraus kommt man mit **SHIFT** **OPTN** zur Anzeige des QR-Codes, den man z.B. mit einem Smartphone auslesen kann. Die Schaubilder werden angezeigt.

1:f(x)  
2:f(x),g(x)

Tabellenbereich  
Start:1  
Ende:5  
Inkre:1

### 16.3.3 Berechnung von Binomialkoeffizienten (ab Ag 331/836)

--> Binomialkoeffizienten können direkt berechnet werden,

$\binom{10}{2}$  wird mit nCr im WTR eingegeben:

**1** **0** **SHIFT** **÷** **2** **=**



### 16.3.4 Die Binomialverteilung (ab Ag 336/852)

--> Einstellung des richtigen Menü-Eintrages:

**MENU** **4**

Menüpunkt **4** führt zur Binomialverteilung, geht man ins Menü der nächsten Seite, kommt man zur kumulierten Binomialverteilung.

Zur Eingabe der Werte für k, n und p geht man zu Eintrag „2:Variable“.

Es können die Werte eingegeben werden. **=** führt wieder zurück zur Eingabe neuer Werte.

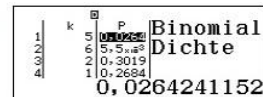
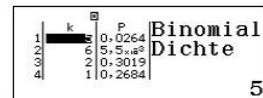
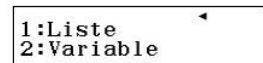
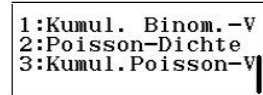
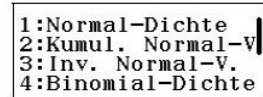
Will man eine Übersicht mehrerer Werte für k und/oder p, so geht man zu

„1:Liste“. Es können Werte für k eingegeben werden. **=** führt weiter zur Eingabe der Werte für n und p.

Es können die Werte für k auch direkt in der Tabelle geändert werden.

Geht man mit den Pfeiltasten auf das Ergebnis für P, kann man dieses auch z.B. unter A speichern:

**▶** **STO** **(-)**



### 16.3.5 Testen von Hypothesen (ab Ag 348/880)

Beispiel: Die Nullhypothese  $H_0: p \geq 0,3$  soll mit einem Stichprobenumfang von  $n = 200$  auf einem Signifikanzniveau von 5% getestet werden. Bestimmen Sie die Entscheidungsregel.

Hier liegt ein linksseitiger Test vor.  $X$  ist die Anzahl der Treffer der Stichprobe und im Extremfall binomialverteilt mit  $n=200$  und  $p=0,3$ .

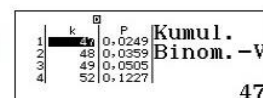
Es muss gelten:  $P(X \leq k) < 0,05$ . Gesucht ist der größte Wert für  $k$ , der diese Bedingung erfüllt. Der Erwartungswert von  $X$  ist  $E(X)=200 \cdot 0,3=60$ , also muss  $k$  kleiner als 60 sein.

Die Wahrscheinlichkeiten sind noch zu hoch. Direkt in der Tabelle können

die Werte für  $k$  korrigiert werden. Bestätigung mit **=** führt zur Eingabe von

$n$  und  $p$ . **=** auch hier berechnet die Werte neu.

Somit ist der Ablehnungsbereich der Nullhypothese von 0 bis 48, im Bereich von 49 bis 200 kann die Nullhypothese nicht abgelehnt werden.



### 16.3.6 Binomialverteilung: n bestimmen / Mimimi Aufgaben (ab Ag 341/861)

Beispiel: Wie oft muss man das Glücksrad mindestens drehen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über 99% mindestens einmal die Farbe Blau zu bekommen?

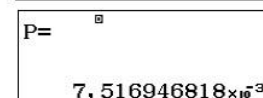
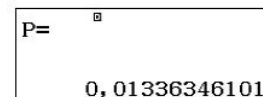
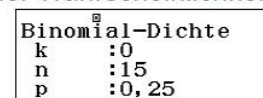
Wahrscheinlichkeit für Blau beträgt  $\frac{1}{4}$ .

Es ist zu berechnen:

$$P(X \geq 1) > 0,99 \Leftrightarrow P(X=0) < 0,01$$

$P$  ist zu groß. Durch **=** Ändern des Wertes für  $n$ .

Für  $n=17$  erhält man 0,0075



Dieses Werk ist lizenziert unter einer CC BY NC SA 4.0 International Lizenz.

Winkelinheit wechseln: Im Setup-Menü: **SHIFT** **MENU** **▼** **▼** **3**

1=Gradmaß 2=Bogenmaß

## 16.4 Inhaltsbezogene Kompetenzen für das Abitur des LK

Im LK-Abitur rechne ich ua (thx Hmb) mit den Themen Extremwertag, Tangenten von außerhalb, Vektorbeweis + LGS mit Parameter.

### 16.4.1 Algebra: (Voraussetzung)

Faktorisierung durch Ausklammern	Ag. 19/2	Abs. 38/2.3.5	Kl. 8
Anwendung einer binomischen Formel 'rückwärts'	Ag. 20/6	Abs. 38/2.3.5	Kl. 8
Substitution	Abs. 38/2.3.5		Kl. 8
Lineare Gleichungen (z.B. $ax = x + 3$ )	Ag. 22/17 -	23/19	Kl. 8
Quadratische Gleichungen	Ag. 32/58	32/60	Kl. 8
Potenzgleichungen mit natürlichen Exponenten	Ag. 37/94		Kl. 9
Exponentialgleichungen (mit beliebiger Basis)	Ag. 39/107	Ag. 160/411	Kl. 9+11
Wurzelgleichungen	Abs. 35/2.2.8		Kl. 8+9
Bruchgleichungen	Ag. 33/68		Kl. 8+9
Trigonometrische Gleichungen	Ag. 112/293		Kl. 10
Betragsgleichungen	Ag. 36/77		Kl. 8
Lösen von Ungleichungen	Abs. 34/2.2.7		Kl. 8
Lineare Gleichungssysteme (auch mit Parameter)	Abs. 252/10.1.7	276/10.6	Kl. 8-11
nicht: Mehrfaches Quadrieren (bei mehreren Wurzeltermen), Bruchgleichungen, mit mehreren Linearfaktoren im Nenner, Angabe aller Lösungen bei trigonometrischen Gleichungen, Auflösung einer Ungleichung durch Äquivalenzumformungen, (LGS mit Parameter 'links')			

### 16.4.2 Analysis: (Im Wahlteil 20 VP)

#### **Kenntnis grundlegender Funktionstypen und ihrer charakteristischen Eigenschaften:**

Potenzfunktionen und ganzrationale Funktionen	Abs. 95/5.2.7,	96/5.3	Kl. 9+10
trigonometrische Funktionen	Abs. 108/5.4		Kl. 10
einfache gebrochen-rationale Funktionen	Abs. 116/5.5		Kl. 11
natürliche (und allgemeine neu '24) Exponentialfkt	Abs. 159/6.3		Kl. 11
einfache Wurzel, ln und Umkehr-Funktionen	Abs. 92/5.2,	164/6.3.7	Kl. 9+11
Bei Umkehrfunktionen speziell Definitionsbereich und Wertebereich, Graph und Funktionsterm			

#### **Wirkung von Parametern, insbesondere:**

Verschiebungen in $x$ - und $y$ -Richtung	Abs. 93/5.2.3,	123/5.6.7	Kl. 8-10
Streckungen in $x$ - und $y$ -Richtung	Abs. 87/210	110/5.4.4	Kl. 8-10
Spiegelungen an $x$ - bzw. $y$ -Achse	Abs. 100/5.3.6		Kl. 8-10

#### **Zusammengesetzte Funktionen: Summen, Differenzen:**

einfache Produkte, Quotienten einfache Verkettungen	Abs. 92/5.2.1,	161/6.3.3	Kl. 9-11
---	----------------	-----------	----------

#### **Bestimmung von Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften:**

Interpolation; 'Steckbriefaufgaben'	Abs. 155/6.2.10,	277/10.6.2	Kl. 10+11
Funktionenschar, (Ortslinien fehlt ab 2024)	Abs. 97/5.3.2,	156/6.2.11	Kl. 10
{höhere} Ableitung (e: {higher order} derivative)	Abs. 140/6.1.7,	159/6.3	Kl. 10
Änderungsrate	Abs. 62/4.2.5,	200/8.1.1	Kl. 10-11
Ableitungsfunktion, Tangente und Normale	Abs. 140/6.1.7,		Kl. 10

#### **Ableitungsregeln:**

Potenzregel, Summen- und Faktorregel	Abs. 139/6.1.5	139/6.1.6	Kl. 10
Kettenregel, Produktregel	Abs. 161/6.3.3	162/6.3.5	Kl. 11

#### **Untersuchung von Funktionen (quasi madness) und Graphen, insbesondere:**

Definitions- und Wertemenge	Abs. 93/5.2.3,	98/5.3.4	Kl. 9-10
Nullstellen, elementare Symmetrie	Abs. 101/5.3.8	105/5.3.12	Kl. 10
Grenzverhalten, senkrechte und waagerechte Asymptoten	Abs. 100/5.3.7	116/5.5	Kl. 10+11
Monotonie, Krümmungsverhalten	Abs. 146/6.2.4,	150/6.2.6	Kl. 10
Extrempunkte, Wendepunkte	Abs. 145/6.2		Kl. 10

**Anwendung der Differenzialrechnung, insbesondere:**

Extremwertbestimmungen, auch mit Nebenbedingungen Abs. 90/5.1.3, 149/6.2.5 Kl. 10

**Stammfunktionen:**

Summenregel, Faktorregel, lineare Substitution Abs. 176/7.1.8, 178/7.1.10 Kl. 11

Integralfkt, Hauptsatz der Differential- und Integralrg Abs. 174/7.1.5 175/7.1.6 Kl. 11

**Anwendungen der Integralrechnung:**

Berechnung von Flächeninhalten Abs. 178/7.1.11, 179/7.1.12 Kl. 11

(nicht ab 24) Ber. unbegrenzter Flächen + Mittelwerte Abs. 180/7.1.13 182/7.1.15 Kl. 11

rekonstruierter Bestand, Volumen von Rotationskörpern Abs. 176/7.1.9 181/7.1.14 Kl. 11

nicht: Folgen (Abs. 58/4.2), Iterationen (zB Newton), Differenzialgleichungen (Abs. 200/8.1)

**16.4.3 Analytische Geometrie: (Im Wahlteil 10 VP)**

Vektor, Ortsvektor, Betrag Abs. 251/10.1.4, 249/10.1.2 Kl. 10

Linearkombination, Geraden Abs. 252/10.1.8, 253/10.1.9 Kl. 10

Ebenen (Parameter-, Koordinaten-, Normalenform), Abs. 261/10.3 Kl. 12

Geraden- und Ebenenscharen Ag. 255/677, 267/727 Kl. 10+12

Lagebeziehungen Abs: 254/10.1.11, 263/10.3.4, 265/10.3.6 Kl. 10+12

Skalarprodukt, Orthogonalität, Vektorprodukt Abs. 258/10.2, 266/10.4 Kl. 10+11

Spiegelungen Abstands- und Winkelberechnungen Abs. 251/10.1.5, 271/10.5 Kl. 10+12

Abstand windschiefer Geraden Abs. 273/10.5.6 Kl. 10+11

Flächen- und Volumenberechnungen Abs. 266/10.4 Kl. 12

**zeichnerische Darstellung von Objekten im Raum:**

Schrägbilder, Spurpunkte, Spurgeraden Abs. 249/10.1.1, 264/10.3.5 Kl. 10+12

**Anwendung der analytischen Geometrie:**

Beschreibung von Bewegungen im Raum Abs: 257/10.1.14, 273/10.5.7 Kl. 10+12

nicht ab 2024: Beweise mit Hilfe von Vektoren Abs. 261/10.2.4 Kl. 11

nicht: Verfahren des geschlossenen Vektorzugs (Abs. 269/10.4.6)

**16.4.4 Stochastik: (Im Wahlteil 10 VP)**

Wahrscheinlichkeitsverteilung Abs. 316/12.1.4 Kl. 8+9

mehrstufige Zufallsexperimente, Bäume, Pfadregeln Abs. 317/12.1.5 Kl. 8+9

Erwartungswert, Neu: Standardabweichung, Varianz Abs. 321/12.2.2 Kl. 9

nicht ab 2024: stetige Zufallsgröße, Dichtefunktion Abs. 353/13.2.1 Kl. 11

Formel von Bernoulli, Binomialverteilung Abs. 335/12.3.5 - 336/12.3.6 Kl. 10

Erwartungswert, Standardabweichung Histogramme Abs. 339/12.3.7, 339/12.3.8 Kl. 10

**Testen von Hypothesen mithilfe der Binomialverteilung**

ein- und zweiseitiger Test Abs. 346/13.1.1 - 350/13.1.4 Kl. 11

Fehler 1. und 2. Art Abs. 346/13.1.1, 351/13.1.5 Kl. 11

Normalverteilung (Dichte,  $\mu, \sigma$ , Glockenkurve) Abs. 353/13.2 Kl. 11

**16.5 Die Abituraufgaben '21-'23, Filme: <http://Abi23.slt.biz>****16.5.1 Pflichtteil Abitur 2023, Aufgabensätze 1+2 (jede Aufgabe ergibt 2.5 VP)**

Was sollte ich vom Abitur 2023 nach welcher Unterrichtseinheit können?

**Kl. 10:** P1.2a, P1.3a, P1.6, P2.1, P2.4, P2.5, P2.6, A1.2, A2.1\{b<sub>ii</sub>\}, A2.2, C1abcg;

**UE 11<sub>2</sub>:** A1.1\{e\}; **UE 11<sub>3</sub>:** P1.1, P1.2b, P1.3b, P2.2, P2.3, A1.1e;

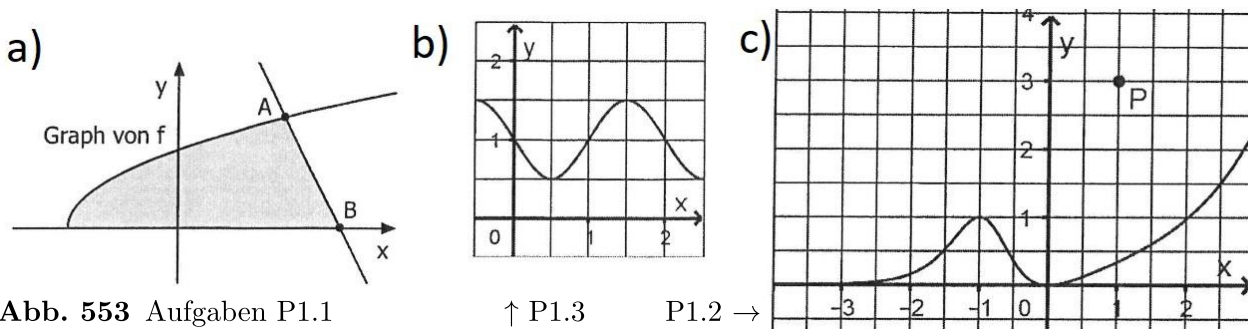
**UE 12<sub>1</sub>:** P1.4, P1.5, P1.3b, B1be, B2a, B2ef; **UE 12<sub>4</sub>:** P1.4, P1.5, P1.3b, B1, B2;

**UE 11<sub>7</sub>:** C2; **UE 11<sub>8</sub>:** C1def;

**Aufgabe P1.1** (Nach Abs. 182/7.1.15 (Kl. 11). Abb 959/553a zeigt den Graphen der Funktion  $f$  mit  $f(x) = \sqrt{x+2}$  und die Gerade durch die Punkte  $A(2|2)$  und  $B(3|0)$ .

a<sub>1</sub>) (0.5 VP) Geben Sie die maximale Definitionsmenge der Funktion  $f$  an. (BAg 164/430)

b<sub>2</sub>) (2 VP) Bestimmen Sie den Inhalt der markierten Fläche. (BAg 179/481)



**Abb. 553** Aufgaben P1.1

↑ P1.3      P1.2 →

**Aufgabe P1.2** Abb 959/553c zeigt den Graphen der in  $\mathbb{R}$  definierten Funktion  $f$ , dessen einzige Extrempunkte  $A(-1|1)$  und  $B(0|0)$  sind, sowie den Punkt  $P$ .

a<sub>2-3</sub>) (Nach Abs 145/6.2, Kl.10) (1 VP) Geben Sie die Koordinaten des Tiefpunkts des Graphen der in  $\mathbb{R}$  definierten Funktion  $g$  mit  $g(x) = -f(x-3)$  an. (BAg 100/253)

b<sub>2-3</sub>) (Nach Abs 182/7.1.15, Kl.11) (1.5 VP) Der Graph einer Stammfunktion von  $f$  verläuft durch  $P$ . Skizzieren Sie diesen Graphen in der Abb 959/553c. (BAg 154/393)

**Aufgabe P1.3** (Nach Abs 182/7.1.15) Abb 959/553b zeigt den Graphen einer in  $\mathbb{R}$  definierten Fkt  $f$ .

a<sub>1</sub>) (Nach Abs 145/6.2, Kl.10) (1 VP) Beurteilen Sie die folgende Aussage: 'Für jeden Wert von  $x$  mit  $0 < x < 2$  ist die Steigung des Graphen von  $f$  kleiner als 3.'

(BAg 154/393)

b<sub>4</sub>) (1.5VP) Mit dem Term  $\pi \cdot \int_0^2 (f(x))^2 dx$  kann das Volumen eines Körpers berechnet werden. Begründen Sie, dass dieses Volumen größer als  $\pi \cdot 0.5^2 + \pi \cdot 1^2$  ist. (BAg 181/487)

**Aufgabe P 1.4** (Nach Abs 261/10.3) Gegeben ist die Gerade  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  mit  $t \in \mathbb{R}$ .

a<sub>1</sub>) (1 VP) Zeigen Sie, dass  $g$  in der Ebene  $E: x_1 + x_2 + x_3 = 2$  liegt. (BAg 263/713)

b<sub>2-3</sub>) (1.5 VP) Gegeben ist außerdem die Schar der Geraden  $h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$  mit  $s \in \mathbb{R}$  und  $a \in \mathbb{R}$ . Weisen Sie nach, dass  $g$  und  $h_a$  für jeden Wert von  $a$  windschief sind. (BAg 255/677)

**Aufgabe P1.5** (Nach Abs 261/10.3) Gegeben sind die Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } r, s \in \mathbb{R}.$$

a<sub>1</sub>) (0.5 VP) Begründen Sie, dass  $g$  und  $h$  nicht identisch sind. (BAg 254/675)

b<sub>3</sub>) (2 VP) Die Gerade  $g$  soll durch Spiegelung an einer Ebene auf die Gerade  $h$  abgebildet werden. Bestimmen Sie eine Gleichung einer geeigneten Ebene und erläutern Sie Ihr Vorgehen. (BAg 260/700)

**Aufgabe P1.6** (Nach Abs 321/12.2.2, Kl.9) In einem Behälter befinden sich fünf Kugeln, auf denen jeweils eine Zahl steht. Auf drei der Kugeln steht die Zahl 2, auf zwei der Kugeln die negative Zahl  $a$ . Zweimal nacheinander wird eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt.

a<sub>1</sub>) (0.5 VP) Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term  $2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}$  berechnet werden kann. (BAg 318/799)

b<sub>2-3</sub>) (2 VP) Die Zufallsgröße  $\mathcal{X}$  gibt das Produkt der Zahlen an, die auf den beiden entnommenen Kugeln stehen. Der Erwartungswert von  $\mathcal{X}$  ist 4. Bestimmen Sie den Wert von  $a$ . (BAg 321/809)

**Aufgabe P2.1** (Nach Abs 145/6.2, Kl.10) Eine in  $\mathbb{R}$  definierte ganzrationale, nicht lineare Funktion  $f$  mit erster Ableitungsfunktion  $f'$  und zweiter Ableitungsfunktion  $f''$  hat folgende Eigenschaften:

(I)  $f$  hat bei  $x_1$  eine Nullstelle.      (II) Es gilt  $f'(x_2) = 0$  und  $f''(x_2) \neq 0$ .

(III)  $f'$  hat ein Minimum an der Stelle  $x_3$ . Abb 960/554b zeigt die Positionen von  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$ .

a<sub>2</sub>) (1 VP) Begründen Sie, dass der Grad von  $f$  mindestens 3 ist. (BAg 157/405)c

b<sub>3</sub>) (1.5 VP) Skizzieren Sie in Abb 960/554b einen möglichen Graphen von  $f$ . (BAg 154/393)

**Aufgabe P2.2** (Nach Abs 182/7.1.15) Gegeben ist die in  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $f$  mit  $f(x) = -x^2 + 2ax$ ,  $a \in ]1; +\infty[$ . Die Nullstellen von  $f$  sind 0 und  $2a$ . **a<sub>2</sub>)** (1 VP) Zeigen Sie, dass das Flächenstück, das der Graph von  $f$  mit der  $x$ -Achse einschließt, den Inhalt  $\frac{4}{3}a^3$  hat. (BAg 179/478)  
**b<sub>3</sub>)** (1.5 VP) Der Hochpunkt des Graphen von  $f$  liegt auf einer Seite eines Quadrats; zwei Seiten dieses Quadrats liegen auf den Koordinatenachsen (vgl. Abb 960/554a). Der Flächeninhalt des Quadrats stimmt mit dem Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von  $f$  mit der  $x$ -Achse einschließt, überein. Bestimmen Sie den Wert von  $a$ . (BAg 157/404)

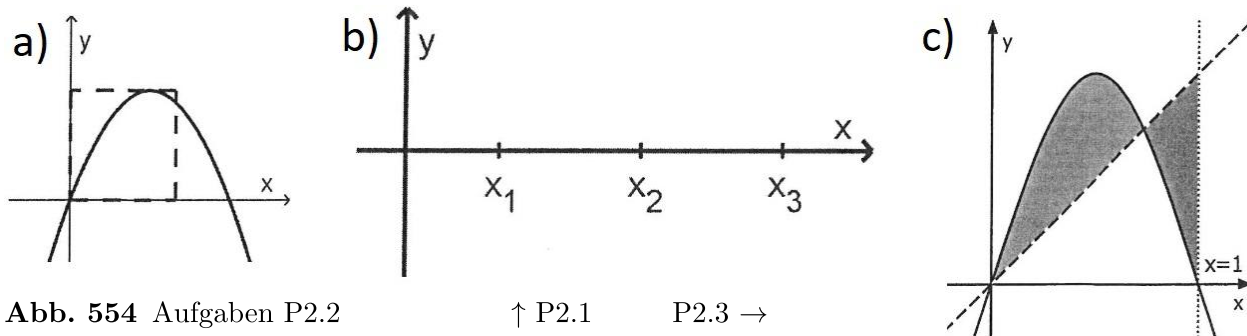


Abb. 554 Aufgaben P2.2

↑ P2.1      P2.3 →

**Aufgabe P2.3** (Nach Abs 182/7.1.15, Kl.11) In Abb 960/554c sind der Graph der Funktion  $f$  mit  $f(x) = \sin(\pi x)$  sowie eine Ursprungsgerade  $g$  mit der Steigung  $m$  abgebildet. **a<sub>2</sub>)** (1 VP) Bestimmen Sie einen Term der Stammfunktion von  $f$ , deren Graph den Ursprung enthält. (BAg 178/475)  
**b<sub>3</sub>)** (1.5 VP) Berechnen Sie den Wert von  $m$ , für den die Inhalte der beiden markierten Flächen gleich groß sind. (BAg 179/481)

**Aufgabe P2.4** (Nach Abs 249/10.1, Kl.10) Gegeben sind die Punkte  $A(3|5|5)$  und  $B(1|1|1)$  sowie die Geraden  $g$  und  $h$ , die sich in  $B$  schneiden.

Die Gerade  $g$  hat den Richtungsvektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ , die Gerade  $h$  den Richtungsvektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**a<sub>1</sub>)** (0.5 VP) Weisen Sie nach, dass  $A$  auf  $g$  liegt. (BAg 253/670)  
**b<sub>2-3</sub>)** (2 VP) Bestimmen Sie die Koordinaten zweier Punkte  $C$  und  $D$  so, dass  $C$  auf  $h$  liegt und das Viereck  $ABCD$  eine Raute ist. (BAg 256/684)

**Aufgabe P2.5** (Nach Abs 326/12.2.5, Kl.9) Ein Glücksrad besteht aus zwei Sektoren, die mit den Zahlen 2 bzw. 3 beschriftet sind. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einmaligem Drehen die Zahl 2 erzielt wird, beträgt  $p$ . Bei einem Spiel dreht eine Person das Glücksrad genau so oft, bis die Summe der erzielten Zahlen 5, 6 oder 7 beträgt. Bei der Summe 6 gewinnt die Person das Spiel, sonst verliert sie. **a<sub>1</sub>)** (1 VP) Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar. (BAg 318/799)  
**b<sub>3</sub>)** (1.5 VP) Die beiden folgenden Ereignisse sind stochastisch unabhängig:  $E$ : 'Beim ersten Drehen des Glücksrads wird die Zahl 2 erzielt.'  $G$ : 'Die Person gewinnt das Spiel.' Ermitteln Sie eine Gleichung, die die Variable  $p$  enthält und die Berechnung des Werts von  $p$  ermöglicht. (BAg 327/823)

**Aufgabe P2.6** (Nach Abs 317/12.1.5, Kl.8) In einen leeren Behälter werden drei Kugeln gelegt. Dabei wird die Farbe jeder Kugel durch Werfen eines Würfels festgelegt, dessen Seiten mit den Zahlen 1 bis 6 durchnummeriert sind: Wird die '1' oder die '2' erzielt, wird eine gelbe Kugel gewählt, sonst eine schwarze. **a<sub>1-2</sub>)** (1 VP) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich nun mindestens zwei schwarze Kugeln im Behälter befinden,  $\frac{20}{27}$  beträgt.  
**b<sub>2</sub>)** (1.5 VP) Aus dem Behälter werden zwei der drei Kugeln zufällig entnommen. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide entnommenen Kugeln schwarz sind. (BAg 318/799)

### 16.5.2 Wahlteil Abitur 2023

**Aufgabe A1.1** (Nach Abs 159/6.3, Kl.11) Für jedes  $t \in \mathbb{R}_0^+$  ist  $G_t$  der Graph der Funktion  $f_t$  mit  $f_t(x) = (1 - tx^2) \cdot e^{-2x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**a<sub>1</sub>) i)** (0.5 VP) Zeigen Sie, dass der Schnittpunkt von  $G_t$  mit der  $y$ -Achse unabhängig von  $t$  ist.



- ii) (1 VP) Entscheiden Sie, welcher der in Abb 961/555c) abgebildeten Graphen  $G_{10}$  darstellt, und begründen Sie Ihre Entscheidung. (BAg 160/410)
- b<sub>2</sub>) i) (1 VP) Begründen Sie, dass  $f_0$  umkehrbar ist. ii) (1.5 VP) Ermitteln Sie einen Term der Umkehrfunktion von  $f_0$  und geben Sie die Definitionsmenge dieser Umkehrfunktion an. (BAg 164/431)
- c<sub>2</sub>) Betrachtet wird die Tangente an  $G_0$  im Punkt  $B(0.5|f_0(0.5))$ . i) (1 VP) Bestimmen Sie die Größe des Schnittwinkels dieser Tangente mit der  $x$ -Achse. (BAg 141/343)
- ii) (1.5 VP) Diese Tangente begrenzt mit den Koordinatenachsen ein rechtwinkliges Dreieck. Berechnen Sie die Längen der Katheten dieses Dreiecks exakt. (BAg 144/353)
- iii<sub>3</sub>) (1.5 VP) Bei Rotation dieses Dreiecks um die  $x$ - bzw.  $y$ -Achse entsteht jeweils ein Körper. Interpretieren Sie in diesem Zusammenhang folgende Ungleichung geometrisch:  $\frac{2\pi}{3e} > \frac{4\pi}{3e^2}$ . (BAg 181/489)
- d<sub>2-3</sub>) (2 VP) Für einen bestimmten Wert von  $t$  besitzt der Graph  $G_t$  zwei Schnittpunkte mit der  $x$ -Achse, die voneinander den Abstand 8 haben. Berechnen Sie diesen Wert von  $t$ . (BAg 157/404)
- e<sub>2</sub>) (Nach Abs 182/7.1.15, Kl.11) (2.5 VP) Die Funktion  $H$  mit  $H(x) = -(x^2 + x + \frac{1}{2}) \cdot e^{-2x}$  ist eine Stammfunktion von  $h$  mit  $h(x) = f_t(x) - f_{t+2}(x)$ . Die Graphen  $G_t$  und  $G_{t+2}$  besitzen für  $x > 0$  keine gemeinsamen Punkte und schließen mit der  $y$ -Achse eine nach rechts unbegrenzte Fläche ein. Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche. (BAg 180/486)
- f<sub>2</sub>) (2.5 VP) Für jedes  $t > 0$  hat der Graph  $G_t$  zwei Extrempunkte  $P_t$  und  $Q_t$ . Begründen Sie, dass der Mittelpunkt der Strecke  $P_t, Q_t$  auf der Gerade mit der Gleichung  $x = \frac{1}{2}$  liegt. (BAg 157/404)

**Aufgabe A1.2** (Nach Abs 145/6.2, Kl.10) Gegeben ist eine Schar von Funktionen  $f_k$  mit  $k > 0$ , deren Ableitungsfunktionen  $f'_k$  folgende Gleichung besitzen:  $f'_k(x) = -\frac{1}{k^2}(x - k)(x + 3k)$ . a<sub>2</sub>) (2 VP) Jeder Graph der Schar besitzt einen Wendepunkt. Betrachtet werden die Tangenten in diesen Wendepunkten. Zeigen Sie, dass alle diese Wendetangenten parallel zueinander sind. (BAg 148/370 + 179/482)

b<sub>2-3</sub>) (2 VP) Jeder Graph der Schar hat einen Extrempunkt im ersten Quadranten. Alle diese Extrempunkte liegen auf der ersten Winkelhalbierenden. Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von  $f_k$ . (BAg 157/404)

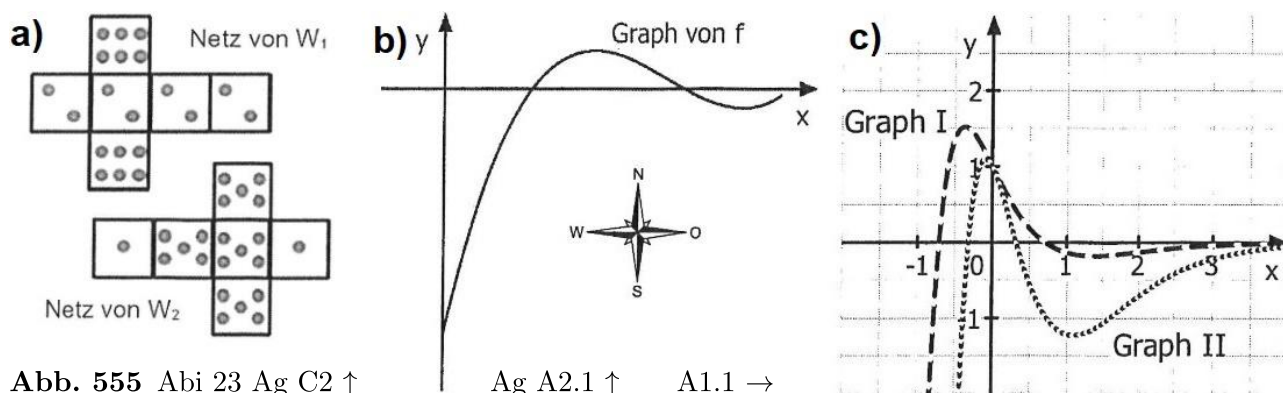


Abb. 555 Abi 23 Ag C2 ↑ Ag A2.1 ↑ A1.1 →

- Aufgabe A2.1** (Nach Abs 145/6.2, Kl.10) Abb. 961/555b stellt die Planskizze einer Landstraße dar. Der Verlauf dieser Landstraße wird durch den Graphen der Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{27}{8}x^2 + 9x - \frac{13}{2}$  für  $0 \leq x \leq \frac{9}{2}$  beschrieben. Die positive  $y$ -Achse beschreibt dabei die Himmelsrichtung Norden, die positive  $x$ -Achse die Himmelsrichtung Osten. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Kilometer in der Realität.
- a) i<sub>1</sub>) (2.5 VP) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts  $P$ , der den nördlichsten Punkt der Landstraße darstellt. (BAg 145/356)
  - ii<sub>1-2</sub>) (1 VP) An der Stelle  $x_0 = 3$  wechselt das Vorzeichen der Funktion  $f''$  vom Negativen ins Positive. Beschreiben Sie, was dies für den Verlauf der Landstraße bedeutet. (Teilergebnis:  $P(2|1)$ ) (BAg 147/365)
  - b<sub>1-2</sub>) i) (2 VP) Ein Teil des Graphen der Funktion  $g$  mit  $g(x) = -\frac{27}{8}x^2 - \frac{75}{8}x - \frac{13}{2}$  stellt einen Fahrradweg dar, der zwei Punkte der Landstraße verbindet. Diese beiden Punkte werden durch  $A(a|f(a))$  und  $B(b|f(b))$  mit  $a < b$  dargestellt. Bestimmen Sie die Koordinaten von  $A$  und  $B$ . (Teilergebnis:  $a=0, b=1$ ) (BAg 32/61 + 101/258)
  - ii) (2.5 VP) (Nach Abs 182/7.1.15, Kl.11) Berechnen Sie  $\int_0^1 (g(x) - f(x))dx$  und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. (BAg 179/480)

Im Folgenden wird auch der Höhenverlauf der Landstraße betrachtet. Stellt  $R(r|f(r))$  einen Punkt auf der Landstraße dar, so gilt für seine Höhe  $h(r) : h(r) = u(f(r))$  mit  $u(x) = 2 - \frac{1}{500} \cdot (x - 1)^2$

( $h(r)$  in Kilometer über der Meereshöhe).

- c) i<sub>1</sub>) (1.5 VP) Zeigen Sie, dass der westlichste Punkt der Landstraße auf einer Höhe von etwa 1890 Meter liegt. ii<sub>1-2</sub>) (1.5 VP) Begründen Sie, dass kein Punkt der Landstraße höher als 2000 Meter liegt. iii<sub>2</sub>) (1.5 VP) Der am höchsten gelegene Punkt auf der Landstraße wird durch den Punkt  $S$  auf dem Graphen von  $f$  dargestellt. Bestimmen Sie die Koordinaten von  $S$ .  
 d<sub>2</sub>) (2 VP) Zum Abfluss von Regenwasser sind die durch  $P(2|1)$  und  $Q(0|f(0))$  dargestellten Punkte auf der Landstraße durch ein geradlinig verlaufendes Rohr verbunden. Berechnen Sie das Gefälle dieses Rohrs.

**Aufgabe A2.2** (Nach Abs 145/6.2, Kl.10) Für jedes  $a \in \mathbb{R}$  ist eine Funktion  $f_a$  gegeben durch  $f_a(x) = \sin\left(\frac{\pi}{a^2+1} \cdot x\right)$ . Die zugehörigen Graphen werden mit  $G_a$  bezeichnet.

- a<sub>1-2</sub>) (1.5 VP) Berechnen Sie die Größe des Steigungswinkels der Tangente an  $G_0$  im Ursprung.  
 b<sub>1-2</sub>) (1 VP) Bestimmen Sie denjenigen Wert von  $a$ , für den die Periode von  $f_a$  minimal wird.  
 c<sub>3</sub>) (3 VP) Die Tangente an  $G_a$  an der Stelle  $x_0 = 0$  und die Tangente an  $G_a$  an der kleinsten positiven Nullstelle von  $f_a$  schließen mit der  $x$ -Achse ein Dreieck ein. Bestimmen Sie alle Werte von  $a$ , für die der Inhalt dieses Dreiecks  $2.5\pi$  beträgt.

**Aufgabe B1** (Nach Abs 271/10.5) Auf einem ebenen, horizontalen Gelände steht ein 15 m hoher Mast, an dem drei rechteckige Werbeflächen befestigt sind. In Abb 963/556c ist eine der Werbeflächen grau dargestellt. Der Mast ist zylinderförmig und hat einen Durchmesser von 80 cm; er verläuft ebenso wie die seitlichen Kanten der Werbeflächen vertikal. In einem Koordinatensystem wird das Gelände durch die  $x_1x_2$ -Ebene beschrieben; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Wirklichkeit. Der Mittelpunkt der Grundfläche des Masts wird durch den Koordinatenursprung dargestellt. Die Punkte  $A(5|-2|11)$ ,  $E(-2|5|15)$  und  $F(-2|-2|15)$  stellen Eckpunkte der Werbeflächen dar.

- a<sub>1-2</sub>) i) (1 VP) Bestimmen Sie den Flächeninhalt der grau dargestellten Werbefläche.  
 ii) (1 VP) Prüfen Sie, ob die beiden anderen Werbeflächen einen rechten Winkel einschließen.  
 b<sub>1-2</sub>) (Nach Abs 261/10.3) Die grau dargestellte Werbefläche liegt im Modell in einer Ebene, deren Gleichung in der Form  $ax_1 + ax_2 = b$  dargestellt werden kann. Ermitteln Sie passende Werte von  $a$  und  $b$ .  
 c<sub>2-3</sub>) Begründen Sie, dass der Abstand der grau dargestellten Werbefläche zum Mast mit dem Abstand des Mittelpunkts der oberen Kante dieser Werbefläche zum Mast übereinstimmt.

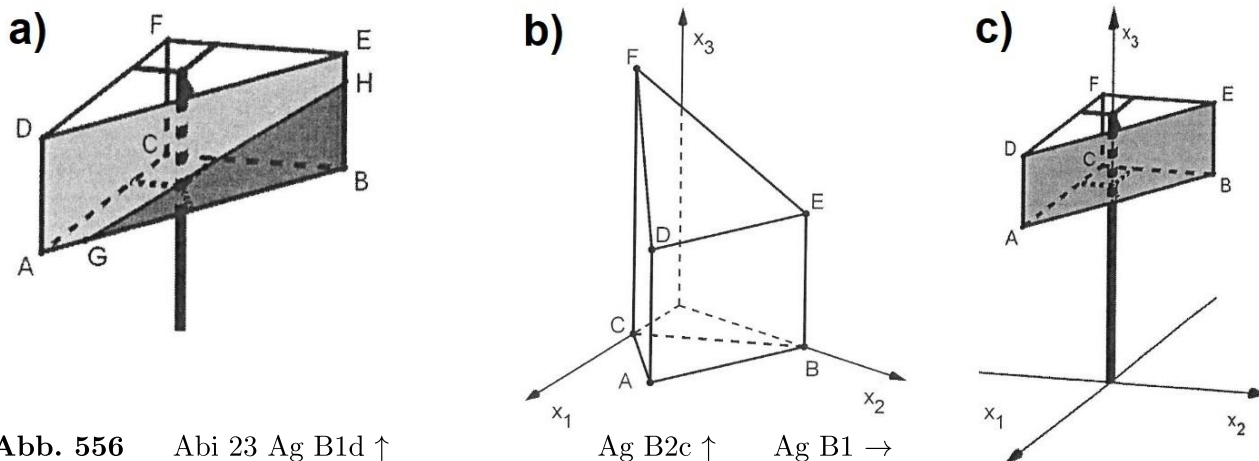
Auf dem Gelände befindet sich ein Sportplatz. Von dort aus blickt ein Kind zur grau dargestellten Werbefläche. Die Sicht des Kindes wird durch eine Mauer eingeschränkt. Die obere Kante der Mauer wird im Modell durch die Strecke zwischen den Punkten  $P(20|-5|3)$  und  $Q(20|25|3)$  dargestellt. Der Punkt, von dem der Blick des Kindes ausgeht, wird durch  $K(24|15|11)$  beschrieben. Das Kind kann denjenigen Teil der Werbefläche, der durch das Dreieck  $GBH$  mit  $G(4|-1|11)$  dargestellt wird, nicht sehen (siehe Abb 963/556a).

- d) i<sub>2</sub>) Eine Sichtlinie verläuft im Modell von  $K$  zu  $G$ . Berechnen Sie die Größe des Winkels dieser Sichtlinie gegenüber der Horizontalen. ii<sub>3</sub>) Beschreiben Sie, wie man die Koordinaten von  $H$  rechnerisch bestimmen könnte.  
 e<sub>1-2</sub>) (Nach Abs 261/10.3) Auf dem Sportplatz wird ein Fußball geschossen. Die Flugbahn des Balls wird im Modell durch Punkte der Form  $R_t(32 - 8t | 5 | -5t^2 + 6.5t + 0.3)$  mit  $t \in \mathbb{R}^+$  beschrieben. Dabei ist  $t$  die seit dem Schuss vergangene Zeit in Sekunden. Der Ball bewegt sich im Modell in der Ebene  $L$ . i) (1 VP) Beschreiben Sie die besondere Lage von  $L$  im Koordinatensystem und geben Sie eine Gleichung dieser Ebene an. ii) (2 VP) Untersuchen Sie, ob der Ball die Mauer trifft, bevor er den Boden (Ebene  $x_3 = 0$ ) berührt.

**Aufgabe B2** (Nach Abs 271/10.5) Abb 963/556b zeigt den Körper  $ABCDEF$  mit  $A(6|3|0)$ ,  $B(0|6|0)$ ,  $C(3|0|0)$ ,  $D(6|3|6)$ ,  $E(0|6|6)$  und  $F(3|0|12)$ .

- a<sub>1</sub>) (Nach Abs 261/10.3) Die Punkte  $D$ ,  $E$  und  $F$  liegen in der Ebene  $L$ . Ermitteln Sie eine Gleichung von  $L$  in Koordinatenform. (Teilergebnis:  $L : 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 42$ )  
 b<sub>1</sub>) Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den  $L$  mit der  $x_1x_2$ -Ebene einschließt.  
 c<sub>2</sub>) (Nach Abs 261/10.3) Der Flächeninhalt des Dreiecks  $ABC$  kann mit dem Term  $6 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6$  berechnet werden. i) (1.5VP) Veranschaulichen Sie diese Tatsache durch geeignete Eintragungen in Abb 963/556b. ii) (1.5 VP) Berechnen Sie das Volumen des Körpers  $ABCDEF$ .

$d_{3-4}$ ) (Nach Abs 261/10.3) Die Ebene  $N_k$  enthält die  $x_3$ -Achse und den Punkt  $P_k(1 - k|k|0)$  mit  $k \in ]0; 1[$ . Welche Kanten des Körpers von  $N_k$  geschnitten werden, ist abhängig von  $k$ . Durchläuft  $k$  alle Werte zwischen 0 und 1, so gibt es Bereiche  $]a; b[$ , für die  $N_k$  für alle Werte von  $k \in ]a; b[$  jeweils die gleichen Kanten des Körpers schneidet. Bestimmen Sie den größten dieser Bereiche und geben Sie die zugehörigen Kanten an.



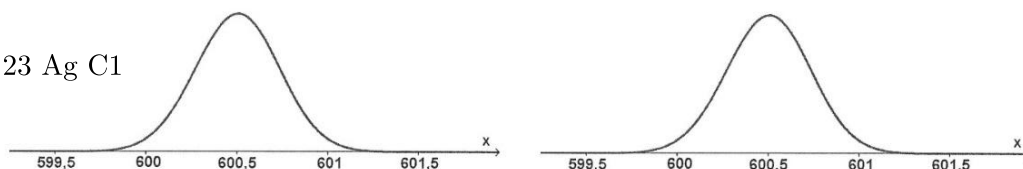
**Abb. 556** Abi 23 Ag B1d ↑

$e_{2-3}$ ) (Nach Abs 258/10.2, Kl.11)) Auf der Kante  $AD$  liegt der Punkt  $Q$ , auf der Kante  $BE$  der Punkt  $R(0|6|2)$ . Das Dreieck  $FQR$  hat in  $Q$  einen rechten Winkel. Bestimmen Sie die  $x_3$ -Koordinate von  $Q$ .  
 $f_{3-4}$ ) (Nach Abs 261/10.3) Der Körper wird so um die Gerade  $AB$  gedreht, dass der mit  $D$  bezeichnete Eckpunkt nach der Drehung in der  $x_1x_2$ -Ebene liegt und dabei eine positive  $x_2$ -Koordinate hat. Die folgenden Rechnungen liefern die Lösung einer Aufgabe im Zusammenhang mit der beschriebenen Drehung:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \Leftrightarrow t = 0.8, \text{ d.h. } S(4.8|3.6|0) \quad \vec{OT} = \vec{OS} + |\vec{CS}| \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung und geben Sie die Bedeutung von  $S$  an.

**Abb. 557** Abi 23 Ag C1



**Aufgabe C1** (Nach Abs 330/12.3, Kl.10) Ein Unternehmen stellt Olivenöl her und füllt es in Flaschen ab. Laut Aufdruck beträgt die Füllmenge jeder Flasche 600 ml. Die Flaschen werden in Kartons verpackt; jeder Karton enthält zwölf Flaschen. Ein Karton gilt als fehlerhaft, wenn mehr als eine Flasche weniger als 600 ml Öl enthält. Für jede Flasche beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie weniger als 600 ml Öl enthält, 1.5 %.

a<sub>2</sub>) (1.5 VP) Die Rechnung  $0.985^{12} \approx 83.4\%$  stellt im Sachzusammenhang die Lösung einer Aufgabe dar. Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung und erläutern Sie den Ansatz der Rechnung.

b<sub>2</sub>) (1.5 VP) An einen Supermarkt wird regelmäßig die gleiche Anzahl von Flaschen geliefert. Dabei enthalten im Mittel mehr als 780 Flaschen mindestens 600 ml Öl. Ermitteln Sie, wie viele Flaschen mindestens geliefert werden.

c<sub>3</sub>) (2 VP) Ein Supermarkt erhält eine Lieferung von 150 Kartons. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 3 % der Kartons fehlerhaft sind.

(Nach Abs 353/13.2) Die Füllmenge der Flaschen soll als normalverteilt mit einem Erwartungswert von 600.5ml und einer Standardabweichung von 0.23ml angenommen werden.

d<sub>1</sub>) Eine Flasche wird zufällig ausgewählt. Ermitteln Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:

A: (0.5 VP) 'Die Flasche enthält mehr als 601 ml Öl.'

B: (1 VP) 'Die Füllmenge der Flasche weicht höchstens um 0.5 ml vom Erwartungswert ab.'

e<sub>2</sub>) (1 VP) Die Füllmenge einer Flasche ist nie negativ. Die Normalverteilung, die zur Beschreibung

der Füllmenge der Flaschen verwendet wird, ist jedoch auch für negative reelle Zahlen definiert und nimmt dabei ausschließlich positive Werte an. Begründen Sie, dass die Verwendung der Normalverteilung dennoch sinnvoll ist.

f) (3 VP) Das Unternehmen möchte die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Flasche weniger als 600 ml Öl enthält, verringern. Für die nötige Änderung der Maschine, die die Flaschen befüllt, gibt es zwei Vorschläge:

*Vorschlag 1:* Die eingestellte Füllmenge von 600.5 ml wird erhöht.

*Vorschlag 2:* Die Genauigkeit, mit der die eingestellte Füllmenge von 600.5 ml erreicht wird, wird erhöht.

Abb 963/557a und b zeigen jeweils den Graphen der Dichtefunktion, die vor der Änderung der Maschine die Füllmenge der Flaschen beschreibt.

i<sub>2</sub>) Skizzieren Sie in Abb 557a den Graphen einer Dichtefunktion, die sich aus dem Vorschlag 1 ergeben könnte, und in der Abb 557b den Graphen einer Dichtefunktion, die zum Vorschlag 2 passt.

ii<sub>3</sub>) Begründen Sie für jeden Vorschlag mithilfe des skizzierten Graphen, dass damit das Ziel des Unternehmens erreicht wird.

g<sub>2-3</sub>) (Nach Abs 317/12.1.5, Kl.8) (2 VP) Jede Flasche wird mit einem Anhänger versehen. Die Anhänger gibt es mit  $n$  verschiedenen Motiven. Für jede Flasche wird eines dieser Motive zufällig ausgewählt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei  $n$  zufällig ausgewählten Flaschen alle Motive verschieden sind, ist kleiner als 1 %. Ermitteln Sie den kleinsten möglichen Wert von  $n$ .

**Aufgabe C2** (Nach Abs 328/12.2.6, Kl.9) Michael und Torsten spielen mit den beiden Würfeln, deren Netze in Abb 961/555a abgebildet sind, folgendes Spiel: Michael würfelt mit dem Würfel  $W_1$ , Torsten würfelt mit dem Würfel  $W_2$ . Der Spieler mit der höheren Augenzahl gewinnt.

a<sub>1</sub>) (2 VP) i) Geben Sie alle möglichen Würfelresultate an, bei denen Michael das Spiel gewinnt.

ii) Begründen Sie, dass Michaels Gewinnwahrscheinlichkeit  $\frac{5}{9}$  beträgt.

b<sub>1</sub>) (Nach Abs 330/12.3, Kl.10) (2 VP) Michael und Torsten spielen 30 Spiele. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse: A: 'Michael gewinnt mindestens 13, aber höchstens 20 Spiele.' B: 'Torsten gewinnt mehr Spiele als Michael.'

c<sub>2-3</sub>) (2 VP) Es werden  $n$  Spiele gespielt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Michael dabei nur das letzte Spiel gewinnt, soll weniger als 5% betragen. Bestimmen Sie den kleinst möglichen Wert von  $n$ .

d<sub>2-3</sub>) (2.5 VP) Das Spiel wird folgendermaßen verändert: Vor dem Würfeln wird ein Glücksrad mit einem grünen und einem roten Sektor einmal gedreht. Wenn dabei grün erscheint, dann behalten Michael und Torsten ihre Würfel; erscheint rot, dann tauschen sie die Würfel. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Michael bei diesem Spiel eine höhere Zahl als Torsten würfelt  $\frac{7}{15}$ , beträgt. Bestimmen Sie für den grünen Sektor die Größe des Mittelpunktswinkels.

(Nach Abs 346/13.1) Torsten hat den Verdacht, dass beim Würfel  $W_2$  die Wahrscheinlichkeit für die Augenzahl 5 nicht  $\frac{2}{3}$  beträgt. Daher wird ein einseitiger Hypothesentest mit 500 Würfeln auf dem Signifikanzniveau  $s$  durchgeführt. Dabei ergibt sich die Entscheidungsregel, dass die Nullhypothese genau dann abgelehnt wird, wenn weniger als 318-mal die Augenzahl 5 erzielt wird.

e) i<sub>2</sub>) (0.5 VP) Formulieren Sie die zugehörige Nullhypothese.

ii<sub>3</sub>) Bestimmen Sie alle ganzzahligen Prozentwerte, die für  $s$  in Frage kommen.

f<sub>2</sub>) i) (1 VP) Formulieren Sie den Fehler zweiter Art im Sachzusammenhang.

ii) (1 VP) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art unter der Annahme, dass beim Würfel  $W_2$  die Augenzahl 5 mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 % erzielt wird.

### 16.5.3 Pflichtteil Abitur 2022, Aufgabensätze 1+2 (jede Aufgabe ergibt 2.5 VP)

Was sollte ich vom Abitur 2022 nach welcher Unterrichtseinheit können?

**Kl. 10:** P1.3, P1.4, P1.7, P1.8, P2.3, P2.4, P2.7, P2.8, A1.1\{c\}; A1.2; C1a; C2a+b

**UE 11<sub>2</sub>:** P 2.1;

**UE 11<sub>3</sub>:** P1.2, P2.2, A1.1c, A2.1; **UE 11<sub>4</sub>:** A 2.2;

**UE 12<sub>4</sub>:** P1.5, P1.6, P2.5, P2.6, B1, B2; **UE 11<sub>7</sub>:** C 2.1c, C2.2;

**UE 11<sub>8</sub>** C1

**Aufgabe P 1.1:** Nach Abs. 182/7.1.15 (Kl. 11) Filme:<http://Abi22.slt.biz>.

Abb. 966/558a zeigt die Graphen der Funktionen  $f$  mit  $f(x) = 4 - \frac{4}{x^2}$  und  $g$  mit  $g(x) = 15 - 3x^2$ ,

$x > 0$ , sowie die Gerade mit der Gleichung  $x = 1$ , (BAg 179/481).

a<sub>1</sub>) Zeigen Sie, dass sich die Graphen von  $f$  und  $g$  an der Stelle  $x_0 = 2$  schneiden. (0.5 VP)

b<sub>2</sub>) Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche. (2 VP)

**Aufgabe P 1.2:** Nach Abs. 182/7.1.15 (Kl. 11). Betrachtet werden die in  $\mathbb{R}$  definierten Funktionen  $f$  und  $F$ , wobei  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  ist. Abb. 966/558c) zeigt den Graphen  $G_F$  von  $F$ , BAg: 179/482.

a<sub>1-2</sub>) Bestimmen Sie den Wert des Integrals  $\int_1^7 f(x)dx$ . (1 VP)

b<sub>1-2</sub>) Bestimmen Sie den Funktionswert von  $f$  an der Stelle  $x_0 = 1$ . Veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen in Abb. 966/558c). (1.5 VP)

**Aufgabe P 1.3:** Kann mit Stoff Klasse 10 (nach Abs. 145/6.2) gelöst werden. Gegeben sind die in  $\mathbb{R}$  definierten ganzrationalen Funktionen  $f_k$  mit  $f_k(x) = x^4 + (2 - k) \cdot x^3 - k \cdot x^2$  mit  $k \in \mathbb{R}$ .

a<sub>1</sub>) Begründen Sie, dass der Graph von  $f_2$  symmetrisch bezüglich der  $y$ -Achse ist. (0.5 VP), (BAg 106/274).

b<sub>2</sub>) Es gibt einen Wert von  $k$ , für den  $x_w = 1$  eine Wendestelle von  $f_k$  ist. Berechnen Sie diesen Wert von  $k$ . (2 VP), (BAg 148/368).

**Aufgabe P 1.4:** Lösbar nach Klasse 10, Abs. 145/6.2<sub>2-3</sub>). Ermitteln Sie eine Gleichung derjenigen quadratischen Funktion  $g$ , die die beiden folgenden Eigenschaften hat:

(I) Der Graph von  $g$  schneidet die Gerade mit der Gleichung  $y = -x + 1$  im Punkt  $P(0|1)$  unter einem rechten Winkel.

(II) Die  $x$ - und die  $y$ -Koordinate des Extrempunkts des Graphen von  $g$  stimmen überein. (2.5 VP), (BAg 155/395).

**Aufgabe P 1.5:** Nach Abs. 272/10.5.5. Gegeben sind die Gerade  $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$ , und die Ebene  $E : 3x_1 - x_3 = -2$ .

a<sub>1</sub>) Begründen Sie, dass  $g$  orthogonal zu  $E$  ist. (0.5 VP), (BAg 271/743).

b<sub>3-4</sub>) Die Gerade  $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$ , hat mit  $E$  keinen gemeinsamen Punkt (BAg 271/745).

Es gibt Geraden, die in  $E$  liegen und parallel zu  $h$  verlaufen. Bestimmen Sie eine Gleichung derjenigen dieser Geraden, die von  $h$  den kleinsten Abstand hat. (2 VP)

**Aufgabe P 1.6:** Nach Abs. 272/10.5.5. Wird der Punkt  $P(1|2|3)$  an der Ebene  $E$  gespiegelt, so ergibt sich der Punkt  $Q(7|2|11)$ .

a<sub>2-3</sub>) Bestimmen Sie eine Gleichung von  $E$  in Koordinatenform. (1.5 VP), (BAg 274/759b).

b<sub>3</sub>) Auf der Gerade durch  $P$  und  $Q$  liegen die Punkte  $R$  und  $S$  symmetrisch bezüglich  $E$ ; dabei liegt  $R$  bezüglich  $E$  auf der gleichen Seite wie  $P$ . Der Abstand von  $R$  und  $S$  ist doppelt so groß wie der Abstand von  $P$  und  $Q$ . Bestimmen Sie die Koordinaten von  $R$ . (1 VP), (BAg 253/670).

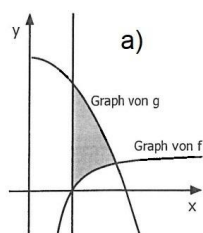
**Aufgabe P 1.7:** Lösbar nach Klasse 10, Abs. 340/12.3.9. Die Zufallsgröße  $\mathcal{X}$  ist binomialverteilt mit den Parametern  $n$  und  $p = 0.5$ . Sie hat den Erwartungswert  $\mu = 18$ , (BAg 339/856).

a<sub>1-2</sub>) Bestimmen Sie den Wert von  $n$  und die Standardabweichung von  $\mathcal{X}$ . (1.5 VP), (BAg 340/858).

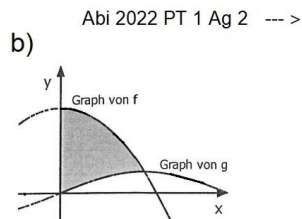
b<sub>2</sub>) Entscheiden Sie, ob  $P(\mathcal{X} = 14) < P(\mathcal{X} = 22)$  ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung. (1 VP), (BAg 337/853).

**Aufgabe P 1.8:** <sub>4</sub>) Lösbar nach Klasse 10 (eigentlich Kl. 9), Abs. 145/6.2 (bzw. 321/12.2.2). Für ein Spiel wird ein Behälter mit 100 Kugeln gefüllt. Dafür stehen rote und blaue Kugeln zur Verfügung. Vor jedem Spiel legt der Spieler die Anzahl der blauen Kugeln im Behälter fest. Anschließend wird dem Behälter eine Kugel zufällig entnommen. Ist diese Kugel rot, so wird dem Spieler die festgelegte Anzahl

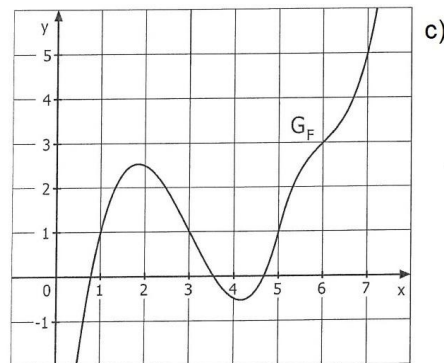
blauer Kugeln in Cent ausgezahlt; ist die Kugel blau, so beträgt die Auszahlung 10 Cent. Ermitteln Sie, wie der Spieler die Anzahl blauer Kugeln für ein Spiel festlegen muss, damit der Erwartungswert der Auszahlung möglichst groß ist. (2.5 VP), (BAg 321/809).



Abi 2022 PT 1 Ag 1



Abi 2022 PT 2 Ag 2



**Abb. 558** Aufgaben PT 1.1, PT 2.2, PT 1.2

**Aufgabe P 2.1:** <sub>1-2</sub>) Nach Abs. 159/6.3 (Kl. 11). Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = e^{0.5x^2}$ . Bestimmen Sie den Wert der zweiten Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x_0 = 0$ . (2.5 VP), (BAg 162/420).

**Aufgabe P 2.2:** Nach Abs. 182/7.1.15 (Kl. 11). Abgebildet sind die Graphen der Funktionen  $f$  und  $g$  mit  $f(x) = 4 - 3x^2$  und  $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ , BAg: 179/481.

a<sub>1</sub>) Zeigen Sie, dass sich die beiden Graphen an der Stelle  $x_0 = 1$  schneiden. (0.5 VP)

b<sub>2</sub>) Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche. (2 VP)

**Aufgabe P 2.3:** <sub>3</sub>) Lösbar nach Klasse 10, Abs. 145/6.2. Der Graph  $G_f$  der Funktion  $f$  besitzt den Tiefpunkt  $T(1|-2)$ . Der Graph der Funktion  $g$  mit  $g(x) = \frac{1}{9}x^3 - 3x$  entsteht, indem  $G_f$  um  $a$  Einheiten nach rechts und um  $b$  Einheiten nach unten verschoben wird. Bestimmen Sie die Werte von  $a$  und  $b$ . (2.5 VP), (BAg 100/253 und 147/365g).

**Aufgabe P 2.4:** <sub>3</sub>) Lösbar nach Klasse 10, Abs. 145/6.2. Die Graphen einer Schar ganzrationaler Funktionen dritten Grades berühren die  $x$ -Achse im Punkt  $(0|0)$ . Jeder Graph der Schar besitzt die Extremstelle  $x_0 = -2$ . Untersuchen Sie, ob alle Graphen der Schar den Punkt  $P(-3|0)$  gemeinsam haben. (2.5 VP), (BAg 97/246 und 155/395).

**Aufgabe P 2.5:** Nach Abs. 261/10.3. Gegeben sind die Ebene  $E : 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12$  und für jedes  $a \in \mathbb{R}$  eine Gerade  $g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ .

a<sub>1-2</sub>) Bestimmen Sie den Wert von  $a$ , für den die Gerade  $g_a$  parallel zu  $E$  ist. (1 VP), (BAg 271/743e).

b<sub>2</sub>) Für jedes  $a \in \mathbb{R}$  ist  $P_a$  der Schnittpunkt von  $g_a$  mit der  $x_1x_3$ -Ebene. Bestimmen Sie den Wert von  $a$ , für den  $P_a$  in  $E$  liegt. (1.5 VP), (BAg 255/678, 262/707e).

**Aufgabe P 2.6:** Nach Abs. 271/10.5. Gegeben sind die parallelen Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \text{ und } h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

a<sub>2</sub>) Der Punkt  $A(4|-3|0)$  liegt auf  $g$ . Weisen Sie nach, dass  $A$  derjenige Punkt auf  $g$  ist, der vom Punkt  $B(0|-1|4)$  den kleinsten Abstand hat. (1 VP), (BAg 271/747b).

b<sub>2-3</sub>) Die Gerade  $h$  ist die Bildgerade von  $g$  bei einer Spiegelung an der Ebene  $E$ . Ermitteln Sie eine Gleichung von  $E$ . (1.5 VP), (BAg 274/759b).

**Aufgabe P 2.7:** Lösbar nach Klasse 10, Abs. 340/12.3.9. Ein Glücksrad besteht aus einem gelben, einem blauen und einem roten Sektor. Wird das Glücksrad einmal gedreht, erscheint der gelbe Sektor mit der Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{3}$  und der rote Sektor mit der Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$ .

a<sub>1</sub>) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei zweimaligem Drehen der blaue Sektor zweimal erscheint. (1 VP), (BAg 334/845).

b<sub>1-2</sub>) Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment und ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit sich mit dem Term  $(\frac{1}{3})^5 + 5 \cdot (\frac{1}{3})^4 \cdot \frac{2}{3}$  berechnen lässt (1.5 VP), (BAg 336/852 + 322/812).

**Aufgabe P 2.8:** Lösbar nach Klasse 10, Abs. 340/12.3.9. Gegeben sind die im Folgenden beschriebenen Zufallsgrößen  $\mathcal{X}$  und  $\mathcal{Y}$ :

( $\mathcal{X}$ ) Ein Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert sind, wird zweimal geworfen.  $\mathcal{X}$  gibt die Summe der dabei gewürfelten Zahlen an.

( $\mathcal{Y}$ ) Aus einem Behälter mit 60 schwarzen und 40 weißen Kugeln wird zwölfmal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt.  $\mathcal{Y}$  gibt die Anzahl der entnommenen schwarzen Kugeln an.

a<sub>1-2</sub>) Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit  $P(\mathcal{X} = 4)$  mit der Wahrscheinlichkeit  $P(\mathcal{X} = 10)$  übereinstimmt. (1 VP), (BAg 334/846).

b<sub>2-3</sub>) Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von  $\mathcal{X}$  und  $\mathcal{Y}$  werden jeweils durch eines der folgenden Diagramme I, II und III dargestellt (Abb. 967/559). Ordnen Sie  $\mathcal{X}$  und  $\mathcal{Y}$  jeweils dem passenden Diagramm zu und begründen Sie Ihre Zuordnung. (1.5 VP), (BAg 339/857).

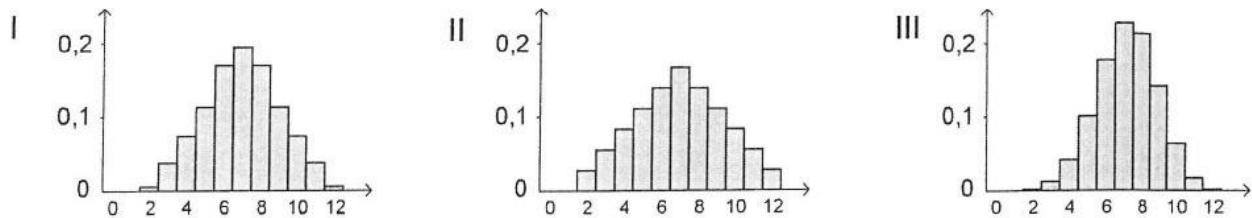


Abb. 559 Abbildung zur Aufgabe PT 2.8

#### 16.5.4 Wahlteil Abitur 2022 Filme: <http://Abi22.slt.biz>

**Aufgabe A 1.1:** Ohne den Teil c ist die Aufgabe nach Klasse 10, Abs. 145/6.2 lösbar.

Abb. 968/560 a) zeigt den Graphen  $G_f$  der Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ .

a<sub>1-2</sub>) Berechnen Sie die Nullstellen von  $f$ . (1.5 VP), (BAg 32/61 bzw. 101/258).

Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes  $W$  von  $G_f$ . (1.5 VP), (BAg 148/369 ab e).

Die Gerade  $t_1$  ist die Tangente an  $G_f$  in  $W$ . Zeigen Sie, dass  $y = -4x + 8$  eine Gleichung von  $t_1$  ist. (1 VP), (BAg 148/370).

b<sub>1-2</sub>) Die Gerade  $t_2$  ist die Tangente an  $G_f$  im Ursprung 0. Die Geraden  $t_1$  und  $t_2$  schneiden sich im Punkt  $Q$ . Ber. Sie für das Dreieck  $OWQ$  die Weite des Innenwinkels bei  $Q$ . (2 VP), (BAg 141/343)

Für ein  $u > 0$  ist die Tangente an  $G_f$  im Punkt  $B(u|f(u))$  parallel zu  $t_2$ . Bestimmen Sie den Wert von  $u$ . (1.5 VP), (BAg 141/341).

c<sub>2</sub>) Erst nach Abs. 179/7.1.12 bearbeiten.

Die Funktion  $I_0$  mit  $I_0(x) = \int_0^x f(t)dt$  besitzt im Intervall  $[0; 4]$  ihren maximalen Wert an der Stelle  $x_0$ . Geben Sie  $x_0$  an und begründen Sie Ihre Angabe. (1.5 VP), (BAg 154/393).

d<sub>2-3</sub>) Für die Funktion  $h$  mit  $h(x) = x^3 - 4x$  gilt  $f(x) = h(x - 2)$ . Erläutern Sie, welche Symmetrieeigenschaft daraus für  $G_f$  folgt. (1.5 VP), (BAg 100/253 + 105/273).

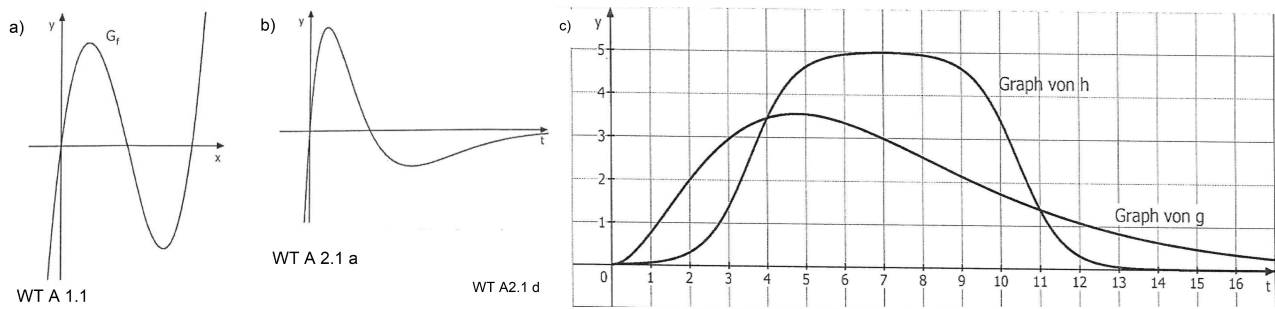
e<sub>4</sub>) Der Graph  $G_{f^*}$  entsteht durch Spiegelung des Graphen  $G_f$  an der Geraden mit der Gleichung  $x = a$ . Die Tangente an  $G_{f^*}$  im Wendepunkt von  $G_{f^*}$  schneidet die  $y$ -Achse im Punkt  $S(0|16)$ . Bestimmen Sie den Wert von  $a$ . (2.5 VP), (BAg 100/254).

**Aufgabe A 1.2:** Nach Klasse 10, Abs. 145/6.2 lösbar. Für jedes  $a > 0$  ist die Funktion  $f_a$  gegeben durch  $f_a(x) = a \cdot \sin(a\pi x)$ . Die zugehörigen Graphen werden mit  $G_a$  bezeichnet. Der Punkt  $H_a(\frac{1}{2a}|a)$  ist ein Hochpunkt von  $G_a$ .

a<sub>1-2</sub>) Geben Sie die Periode von  $f_a$  an. (0.5 VP), (BAG 110/288). Der Punkt  $H_a$  bildet mit den beiden von  $H_a$  am wenigsten weit entfernten Tiefpunkten von  $G_a$  ein Dreieck. Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt dieses Dreiecks unabhängig von  $a$  ist. (2 VP), (BAG 91/220 + 149/372).

b<sub>2</sub>) Ermitteln Sie den Wert von  $a$ , für den  $H_a$  vom Ursprung den Abstand 1 hat. (2 VP), (BAG 236/594).

c<sub>2</sub>) Bestimmen Sie eine Gleichung der Kurve  $K$ , auf der alle Punkte  $H_a$  liegen. (1 VP), (BAG 156/399). Auf  $K$  gibt es einen Punkt  $H_a$ , in dem die Tangente an  $K$  parallel zur Geraden mit der Gleichung  $y = -2x$  ist. Bestimmen Sie den Wert von  $a$ . (1.5 VP), (BAG 141/341).



**Abb. 560** Abbildung zum Wahlteil Analysis 2022 Aufgabe A 1.1 und A 2.1

**Aufgabe A 2.1:** Erst nach Abs. 179/7.1.12 bearbeiten. Abb. 968/560b zeigt den Graphen der Funktion  $f$  mit  $f(t) = (2t - t^2) \cdot e^{-t}$ , die für  $0 < t \leq 10$  die momentane Änderungsrate des Wasservolumens in einem Becken beschreibt ( $t$  in Stunden nach Beobachtungsbeginn,  $f(t)$  in  $\frac{m^3}{h}$ ) (BAG 167/433).

a<sub>1-2</sub>) Geben Sie die momentane Änderungsrate des Wasservolumens eine Stunde nach Beobachtungsbeginn an. (0.5 VP)

Begründen Sie, dass das Wasservolumen in den ersten beiden Stunden nach Beobachtungsbeginn niemals abnimmt. (1.5 VP), (BAG 163/421e).

Die momentane Änderungsrate des Wasservolumens besitzt ein Minimum. Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem dieses Minimum angenommen wird. (2.5 VP), (BAG 163/421), (Teilerg.  $t_{min} = 2 + \sqrt{2}$ ).

b<sub>2-3</sub>) Die Funktion  $F$  mit  $F(t) = t^2 \cdot e^{-t}$  ist eine Stammfunktion von  $f$ . Zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn enthält das Becken  $6 m^3$  Wasser. Ermitteln Sie das Wasservolumen, das sich zu Beobachtungsbeginn im Becken befand. (1.5 VP), (BAG 177/469).

Es gibt einen 45-Minuten-Zeitraum, in welchem das Wasservolumen um genau  $1 m^3$  zunimmt. Geben Sie eine Gleichung an, deren Lösung den Beginn dieses Zeitraums darstellt. (1 VP), (BAG 182/495).

c<sub>4</sub>) Über eine Schaltuhr kann ein Zeitpunkt  $t_0$  gewählt werden, so dass die momentane Änderungsrate des Wasservolumens nur bis  $t_0$  durch die Funktion  $f$  beschrieben wird und danach konstant auf dem Wert  $f(t_0)$  bleibt. Zeigen Sie, dass  $t_0$  nicht so gewählt werden kann, dass das Becken sieben Stunden nach Beobachtungsbeginn leer ist. (2 VP)

d<sub>2</sub>) Für ein anderes Becken beschreiben die Funktion  $g$  die momentane Zuflussrate und die Funktion  $h$  die momentane Abflussrate des Wassers in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  ( $0 < t < 17$ ,  $t$  in Stunden nach Beobachtungsbeginn,  $g(t)$  und  $h(t)$  in Kubikmeter pro Stunde). Abb. 968/560c zeigt die Graphen der beiden Funktionen  $g$  und  $h$ . (BAG 120/321).

Geben Sie den Zeitraum an, in dem das Wasservolumen in diesem Becken abnimmt. (0.5 VP)

Das abfließende Wasser wird in einem quaderförmigen Tank mit der Grundfläche  $12m^2$  gesammelt. Dieser ist zu Beginn leer. Untersuchen Sie, ob das Wasser im Tank höher als  $5 m$  steigt. (2 VP)

Entscheiden Sie, ob das Becken zu Beginn leer war, und begründen Sie Ihre Entscheidung. (1.5 VP)

**Aufgabe A 2.2:** Nach Abs. 116/5.5. Für jede reelle Zahl  $a \neq 0$  ist eine Funktion  $k_a$  gegeben durch  $k_a(x) = \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2}$ .  $G_a$  ist der Graph von  $k_a$ , (BAG 120/319).

a<sub>2</sub>) Geben Sie Gleichungen der Asymptoten des Graphen  $G_a$  an. (1 VP), (BAG 117/307 + 308)

Weisen Sie nach, dass für die Ableitung  $k'_a$  von  $k_a$  gilt:  $k'_a(x) = \frac{2a-x}{x^3}$ . (1.5 VP), (BAG 164/428).



Zeigen Sie, dass jeder Graph  $G_a$  genau einen Extrempunkt besitzt, und untersuchen Sie, für welche Werte von  $a$  ein Hochpunkt vorliegt. (2.5 VP), (BAg 164/429).

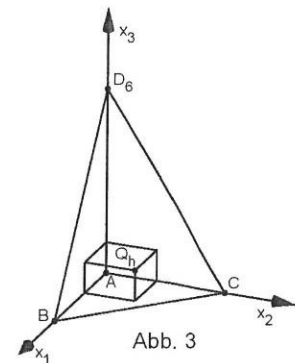
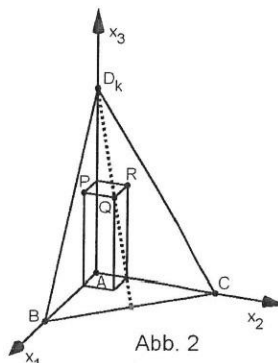
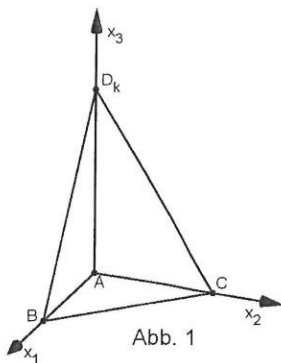
b<sub>2</sub>) Jeder Graph  $G_a$  besitzt einen Punkt  $P_a$  mit der folgenden Eigenschaft: Die Tangente im Punkt  $P_a$  an  $G_a$  verläuft durch den Ursprung. Bestimmen Sie die  $x$ -Koordinate von  $P_a$ . (2 VP), (BAg 142/345).

**Aufgabe B 1:** Nach Abs. 271/10.5. Für  $k \in \mathbb{R}$  mit  $0 < k \leq 6$  werden die Pyramiden  $ABCD_k$  mit  $A(0|0|0)$ ,  $B(4|0|0)$ ,  $C(0|4|0)$  und  $D_k(0|0|k)$  betrachtet (vgl. Abb. 969/561 1). a<sub>1</sub>) Begründen Sie, dass das Dreieck  $BCD_k$  gleichschenkelig ist. (1 VP), (BAg 259/696).

Der Mittelpunkt der Strecke  $BC$  ist  $M(2|2|0)$ .  $\overrightarrow{MD_k} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ k \end{pmatrix}$  ist die Länge einer Höhe des Dreiecks  $BCD_k$ . Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks  $BCD_k$ . (1VP), (BAg 268/731).

Für jeden Wert von  $k$  liegt die Seitenfläche  $BCD_k$  in der Ebene  $L_k : kx_1 + kx_2 + 4x_3 = 4k$ .

b<sub>2</sub>) Ermitteln Sie denjenigen Wert von  $k$ , für den die Größe des Winkels, unter dem die  $x_3$ -Achse die Ebene  $L_k$  schneidet,  $30^\circ$  beträgt. (2.5 VP), (BAg 271/742).



**Abb. 561** Abbildung zum Wahlteil Geometrie 2022 Aufgabe B1

c) 1-2) Zusätzlich zu den Pyramiden wird der in der Abb. 969/561 2 gezeigte Quader betrachtet. Die Punkte  $A$  und  $Q(1|1|3)$  sind Eckpunkte des Quaders, die Seitenflächen des Quaders sind parallel zu den Koordinatenebenen. Für  $k = 6$  enthält die Seitenfläche  $BCD_k$  der Pyramide den Eckpunkt  $Q$  des Quaders. Für kleinere Werte von  $k$  schneidet die Seitenfläche  $BCD_k$  den Quader in einem Vieleck. Für einen Wert von  $k$  verläuft die Seitenfläche  $BCD_k$  durch die Eckpunkte  $P$  und  $R$  des Quaders. Bestimmen Sie diesen Wert von  $k$ . Teilergebnis:  $k = 4$ , (1.5 VP), (BAg 262/707).

5) Geben Sie in Abhängigkeit von  $k$  die Anzahl der Eckpunkte des Vielecks an, in dem die Seitenfläche  $BCD_k$  den Quader schneidet. (2 VP)

d<sub>3</sub>) Nun wird die Pyramide  $ABCD_6$ , d.h. diejenige für  $k = 6$ , betrachtet. Dieser Pyramide werden Quader einbeschrieben (vgl. Abb. 969/561 3). Die Grundflächen der Quader liegen in der  $x_1x_2$ -Ebene, haben den Eckpunkt  $A$  gemeinsam und sind quadratisch. Die Höhe  $h$  der Quader durchläuft alle reellen Werte mit  $0 < h < 6$ . Für jeden Wert von  $h$  liegt der Eckpunkt  $Q_h$  in der Seitenfläche  $BCD_6$  der Pyramide. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punkts  $Q_h$ . (2 VP)

**Aufgabe B 2:** Nach Abs. 271/10.5. Gegeben sind die Geradenschar

$$g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} \text{ und die Gerade } h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}.$$

a<sub>1-2</sub>) Beschreiben Sie die besondere Lage der Gerade  $h$  im Koordinatensystem. (0.5 VP), (BAg 264/717). Zeigen Sie, dass die Gerade  $h$  zur Schar  $g_a$  gehört. (1 VP), (BAg 255/677).

Alle Geraden der Schar  $g_a$  liegen in einer Ebene  $E$ . Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene  $E$ . (2 VP), (BAg 272/753 d), (Teilergebnis:  $E : x_2 + 3x_3 = -6$ ).

b<sub>2-3</sub>) Bestimmen Sie denjenigen Wert von  $a$ , für den  $g_a$  die  $x_2$ -Achse schneidet. (1.5 VP), (BAg 264/717). Es gibt zwei Geraden der Schar  $g_a$ , die die Gerade  $h$  im Winkel  $45^\circ$  schneiden. Ermitteln Sie die zugehörigen Werte von  $a$ . (2.5 VP), (BAg 271/740).

$c_{3-4}$ ) Bestimmen Sie eine Gleichung einer Gerade, die von allen Geraden der Schar  $g_a$  den Abstand  $\sqrt{40}$  besitzt und zu allen Geraden der Schar  $g_a$  windschief verläuft. (2.5 VP), (BAg 257/685+274/757)

**Aufgabe C 1:** Nach Abs. 353/13.2. Ein Onlineshop bietet Patronen mit schwarzer Tinte und Patronen mit farbiger Tinte an.

a<sub>1</sub>) (Schon mit Stoff Klasse 10 lösbar). Erfahrungsgemäß beträgt der Verkaufsanteil der Patronen mit schwarzer Tinte 65 %. Betrachtet wird eine zufällige Auswahl von 100 verkauften Patronen. Es wird davon ausgegangen, dass dabei die Anzahl der Patronen mit schwarzer Tinte binomialverteilt ist. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: 'Genau 66 der verkauften Patronen sind mit schwarzer Tinte gefüllt.' (0.5 VP), (BAg 336/852).

B: 'Die Anzahl der verkauften Patronen mit schwarzer Tinte weicht um mehr als 10 % vom Erwartungswert dieser Anzahl ab.' (1.5 VP), (BAg 339/856).

b<sub>2</sub>) Im Folgenden werden nur Patronen betrachtet, die mit schwarzer Tinte gefüllt sind. Die Füllmenge einer solchen Patrone wird als normalverteilt mit dem Erwartungswert 8 ml und der Standardabweichung 0.04 ml angenommen. Eines der beiden Schaubilder aus Abb. 970/562 zeigt den Graphen der zugehörigen Dichtefunktion.

Geben Sie die Abbildung an, die den Graphen der zugehörigen Dichtefunktion nicht zeigt, und begründen Sie Ihre Angabe. (1 VP), (BAg 357/909).

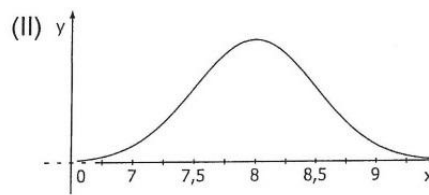
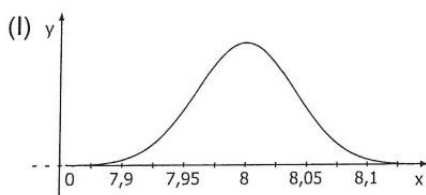
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Patrone weniger als 7.95 ml Tinte enthält. (0.5 VP), (BAg 358/911).

Betrachtet wird das Ereignis, das eine zufällig ausgewählte Patrone zwischen 7.98 ml und 8.04 ml Tinte enthält. Geben Sie ein anderes Ereignis im Sachzusammenhang an, welches exakt dieselbe Wahrscheinlichkeit hat. (1 VP), (BAg 358/911)

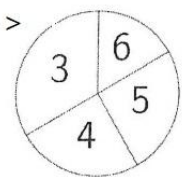
$c_{2-3}$ ) Bestimmen Sie das kleinste Intervall  $[a; b]$ , so dass die Füllmenge einer zufällig ausgewählten Patrone mit einer Wahrscheinlichkeit von 92% in  $[a; b]$  liegt. (2 VP), (BAg 356/908).

$c_{2-3}$ ) Betrachtet wird die für  $x \geq 0$  definierte Funktion  $f$  mit  $f(x) = 0.25 \cdot e^{-0.25x}$ . Weisen Sie nach, dass  $f$  eine Dichtefunktion über ihrem Definitionsbereich ist. (2 VP), (BAg 355/903j + 905d).

Die Zeitdauer in Stunden zwischen dem Eingang einer Bestellung im Onlineshop und dem Versand der Ware kann modellhaft durch eine stetige Zufallsgröße mit der Dichtefunktion  $f$  beschrieben werden. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 85% wird eine Ware innerhalb von  $t$  Stunden nach Eingang der Bestellung versandt. Bestimmen Sie den Wert von  $t$ . (1.5 VP), (BAg 355/903).



Zu C2 -->



**Abb. 562** Abbildung zu den Aufgaben C1 und C2

**Aufgabe C 2:** Teile a+b lösbar nach Kl. 10. Beim einmaligen Drehen des abgebildeten Glücksrads erhält man eine von vier möglichen Punktzahlen. Die Tabelle gibt für jede Pktzahl die zugehörige Wahrscheinlichkeit an.

Punktzahl	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

a<sub>1-2</sub>) Zehn Personen drehen das Glücksrad jeweils einmal. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: 'Genau zwei Personen erzielen jeweils die Punktzahl 4.' (0.5 VP), (BAg 336/852).

B: 'Mindestens drei Personen erzielen jeweils eine Punktzahl, die kleiner als 5 ist.' (1.5 VP), (BAg 337/853).

C: 'Die Summe der erzielten Punktzahlen aller zehn Personen ist höchstens 31.' (2 VP), (BAg 336/852).

b) Mehrere Spieler verwenden das Glücksrad bei einem Spiel mit folgenden Regeln:

(I) Jeder Spieler dreht das Glücksrad einmal.

(II) Der Spieler mit der größten erzielten Punktzahl gewinnt.

(III) Erzielen mehrere Spieler diese größte Punktzahl, so gewinnt derjenige von ihnen, der als letzter gedreht hat.

$1_{-2}$ ) Achim ist der erste Spieler und erzielt die Punktzahl 5. Beschreiben Sie, bei welchem weiteren Spielverlauf Achim gewinnt. (1 VP)

$2_{-3}$ ) Die Wahrscheinlichkeit, dass Achim das Spiel gewinnt, ist kleiner als 2%. Bestimmen Sie die Mindestanzahl der Spieler. (2 VP), (BAG 328/826).

$c_{2-3}$ ) Nach Abs 346/13.1: Ein Spieler vermutet, dass die Wahrscheinlichkeit für die Punktzahl 3 bei dem vorliegenden Glücksrad nicht  $\frac{1}{3}$  ist. Daher soll ein einseitiger Hypothesentest mit einer Stichprobe von 100 Drehungen auf einem Signifikanzniveau von 5% durchgeführt werden. Dabei soll möglichst vermieden werden, dass irrtümlich von einer zu hohen Wahrscheinlichkeit für die Punktzahl 3 ausgegangen wird. Der Spieler entscheidet sich für die folgende Nullhypothese: 'Die Wahrscheinlichkeit für die Punktzahl 3 beträgt höchstens  $\frac{1}{3}$ .' Beurteilen Sie, ob dieser Test der genannten Zielsetzung entspricht. (1 VP), (BAG 347/879).

Formulieren Sie den Fehler zweiter Art im Sachzusammenhang (1 VP), (BAG 351/889). Beim durchgeführten Test ergibt sich der Ablehnungsbereich  $A = \{42, \dots, 100\}$ . Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art unter der Annahme, dass die Wahrscheinlichkeit für die Punktzahl 3 tatsächlich 40% beträgt. (1 VP), (BAG 351/890).

### 16.5.5 Pflichtteil Abitur 2021, Aufgabensätze 1+2 (jede Aufgabe ergibt 2.5 VP)

Was sollte ich vom Abitur 2022 nach welcher Unterrichtseinheit können?

**Kl. 10:** P1.7, P1.8, P2.1, P2.3, P2.7, P2.8, A1.1a-c, A1.2, A2.2\{ $a_2$ \}, C1.2d+e, C2.1;

**UE 11<sub>2</sub>:** P1.1, A2.1\{ $b_2$ \}; **UE 11<sub>3</sub>:** P1.2, P1.4, P2.2, P2.4, A2.1 $b_2$ , A2.2 $a_2$ ; **UE 11<sub>4</sub>:** P1.3;

**UE 12<sub>4</sub>:** P1.5, P1.6, P2.5, P2.6, B1, B2; **UE 11<sub>7</sub>:** C2.1c, C2.2; **UE 11<sub>8</sub>:** C1.1a-c;

**Aufgabe 1.1:** Erst nach Abs. 166/6.3.9 aus Kl. 11 bearbeiten. (Basisaufgabe: (BAG:) 141/340)

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = e^{-2x+1} + 1$ . Abbildung 971/563b zeigt den Graphen  $G_f$  sowie die Tangente an  $G_f$  an der Stelle  $x = \frac{1}{2}$ .

a<sub>1</sub>) (1 VP) Weisen Sie nach, dass diese Tangente an  $G_f$  die Steigung  $-2$  hat.

b<sub>2</sub>) (1.5 VP) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das diese Tangente mit den Koordinatenachsen einschließt.

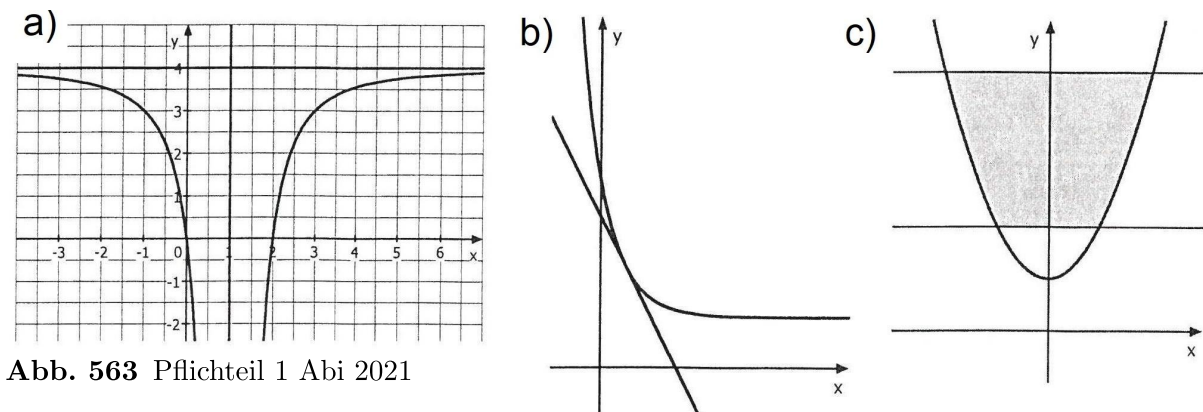


Abb. 563 Pflichtteil 1 Abi 2021

**Aufgabe 1.2:** ) Erst nach Abs. 182/7.1.15 aus Kl. 11 bearbeiten. (BAG: 179/481)

Abb. 971/563c zeigt den Graphen der Funktion  $f$  mit  $f(x) = 1 + x^2$  sowie die Geraden  $g: y = 2$  und  $h: y = 5$ . Bestimmen Sie den Inhalt der markierten Fläche.

**Aufgabe 1.3:** Erst nach Abs. 116/5.5 aus Kl. 11 bearbeiten. (BAg: 118/313; nur LK)

Gegeben sind die Funktionen  $f$  und  $g$  mit  $f(x) = a + \frac{b}{x^2+c}$  und  $g(x) = a + \frac{b}{(x+c)^2}$ . Abb. 971/563a zeigt die Graphen einer der beiden Funktionen sowie seiner Asymptoten.

a<sub>2</sub>) (1 VP) Begründen Sie, dass es sich bei dem abgebildeten Graphen nicht um den Graphen von  $f$  handeln kann. b<sub>2</sub>) (1.5 VP) Bestimmen Sie für die Funktion  $g$  die Werte  $a, b$  und  $c$ .

**Aufgabe 1.4:** Erst nach Abs. 182/7.1.15 aus Kl. 11 bearbeiten. (BAg: 179/482)

Abb. 972/564b zeigt den Graphen der Funktion  $f$ . Die Funktion  $g$  ist gegeben durch  $g(x) = f(x) + 5x$ . Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

(1<sub>2</sub>) (1 VP) Jede Stammfunktion von  $f$  besitzt im Intervall  $[0.5; 4]$  genau ein lokales Minimum.

(2<sub>4</sub>) (1.5 VP) Die Funktion  $g$  ist im Intervall  $[1; 6]$  streng monoton wachsend.

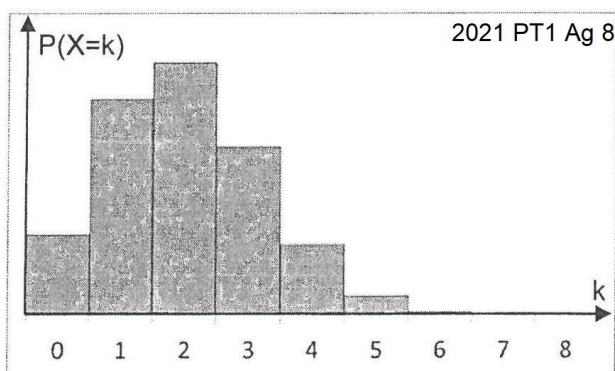
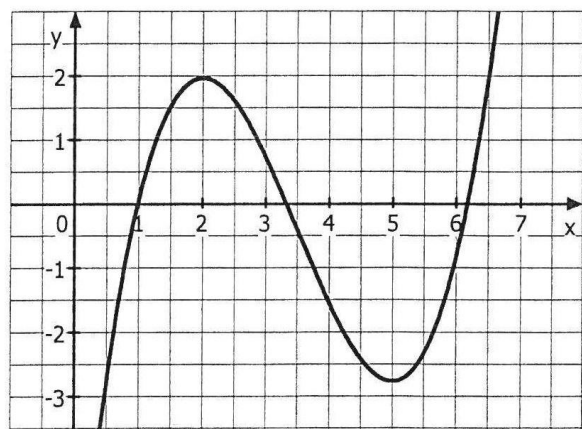


Abb. 564 Abitur 2021:

2021 PT1 Ag 8  
2021 PT1 Ag 4



**Aufgabe 1.5:** Erst nach Abs. 261/10.3 aus Kl. 12 bearbeiten. (BAg: 264/717, 265/722, 280/773)

Gegeben sind die Ebenen  $E$  und  $F$  sowie die Ebenenschar  $G_r$  ( $r \in \mathbb{R}$ ):

$$\begin{array}{l} E: \quad x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 6 \\ F: \quad 2x_1 - x_2 - x_3 = 6 \\ G_r: \quad \quad 9x_2 + 3x_3 = r + 11 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{a}_1) \text{ (1 VP) Stellen Sie } G_7 \text{ in einem Koordinatensystem dar.} \\ \text{b}_3) \text{ (1.5 VP; nur LK) Für einen Wert von } r \text{ besitzen} \\ \quad E, F \text{ und } G_r \text{ eine gemeinsame Schnittgerade?} \end{array}$$

**Aufgabe 1.6:** Erst nach Abs. 271/10.5 aus Kl. 12 bearbeiten. (BAg: 256/683, 271/747)

Gegeben sind der Punkt  $P(-1|1|-1)$  und die Gerade  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ . Der Punkt

$Q(3|3|3)$  liegt auf der Geraden  $g$ .

a<sub>2</sub>) (1 VP) Zeigen Sie, dass  $Q$  derjenige Punkt auf  $g$  ist, der zu  $P$  den kleinsten Abstand hat.

b<sub>3</sub>) (1.5 VP) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes  $R$  auf der Geraden  $g$ , für den das Dreieck  $PQR$  den Flächeninhalt 27 hat.

**Aufgabe 1.7:** kann mit Stoff Klasse 8 (nach Abs. 312/12.1) gelöst werden. (BAg: 319/801)

a<sub>2</sub>) In einer Urne befinden sich vier schwarze und eine unbekannte Anzahl weißer Kugeln. Aus der Urne werden nacheinander zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Die Wahrscheinlichkeit, dabei zwei schwarze Kugeln zu ziehen, ist doppelt so groß wie die Wahrscheinlichkeit, zwei Kugeln unterschiedlicher Farbe zu ziehen. Bestimmen Sie die Gesamtzahl der Kugeln in der Urne.

**Aufgabe 1.8:** kann mit Stoff Klasse 10 (nach Abs. 335/12.3.5) gelöst werden. (BAg: 335/849)

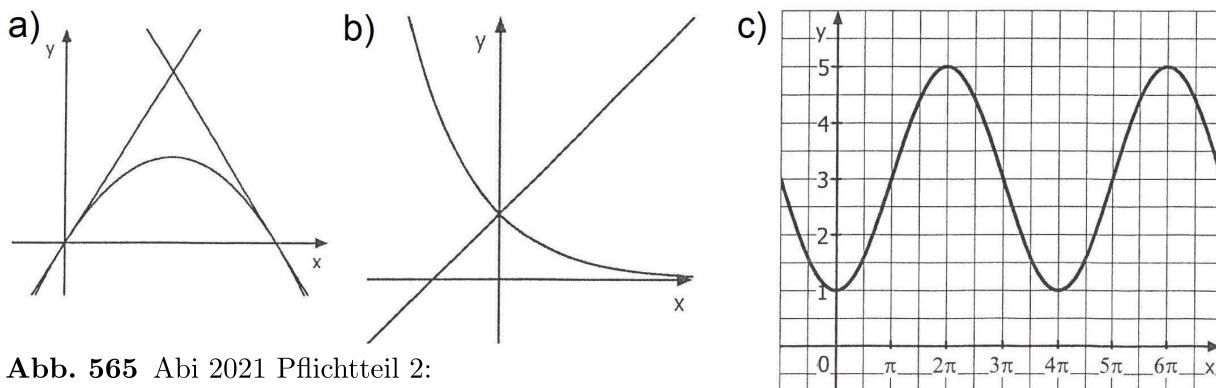
a<sub>2</sub>) Abbildung 972/564a stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße  $\mathcal{X}$  dar. Begründen Sie, dass  $P(\mathcal{X} = 2) < 0.5$  gilt. b<sub>3</sub>) Für eine binomialverteilte Zufallsgröße  $\mathcal{Y}$  mit den Parametern

$n = 8$  und  $0 < p < 1$  gilt  $P(\mathcal{Y} = 1) = 2 \cdot P(\mathcal{Y} = 0)$ . Berechnen Sie den Wert von  $p$ .

**Aufgabe 2.1:** kann mit Stoff Klasse 10 gelöst werden. (BAg: 141/340)

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = 4x - x^2$ . Abb. 973/565a zeigt ihren Graphen  $G_f$  sowie die Tangenten an  $G_f$  in den Schnittpunkten mit der  $x$ -Achse.

- a<sub>1</sub>) Weisen Sie nach: Die Tangente an  $G_f$  an der Stelle  $x = 0$  hat die Steigung 4.
- b<sub>2</sub>) Die beiden Tangenten schneiden sich in einem Punkt  $S$ . Berechnen Sie den Abstand des Punkts  $S$  vom Ursprung.



**Abb. 565** Abi 2021 Pflichtteil 2:

**Aufgabe 2.2:** Erst nach Abs. 182/7.1.15 aus Kl. 11 bearbeiten. (BAg: 176/467 c; nur LK)

- a<sub>2</sub>) Die Abbildung 973/565b zeigt die Graphen der Funktionen  $f$  und  $g$  mit  $f(x) = e^{-x}$  und  $g(x) = x + 1$ , deren Schnittpunkt auf der  $y$ -Achse liegt. Die Graphen begrenzen mit der  $x$ -Achse und der Geraden  $x = u$  ( $u > 0$ ) eine Fläche. Diese Fläche wird von der  $y$ -Achse in zwei inhaltsgleiche Teilflächen geteilt. Berechnen Sie den Wert von  $u$ .

**Aufgabe 2.3:** kann mit Stoff Klasse 10 gelöst werden. (BAg: 111/290)

- a<sub>1</sub>) Abb. 973/565c zeigt den Graphen einer trigonometrischen Fktn. Best. Sie einen möglichen Fktsterm.

**Aufgabe 2.4:** Erst nach Abs. 182/7.1.15 aus Kl. 11 bearbeiten. (BAg: 179/482; nur LK)

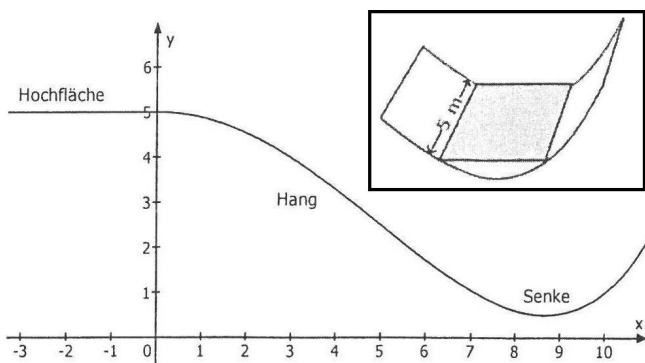
Die Abbildung 973/566b zeigt den Graph der Funktion  $f$ .

- a<sub>2</sub>) Begründen Sie, dass die Ableitungsfunktion  $f'$  im Intervall  $[5; 8]$  nicht monoton ist. b<sub>4</sub>) Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen der Integralfunktion  $J_2(x)$  mit  $J_2(x) = \int_2^x f(t)dt$  für  $2 \leq x \leq 9$ .

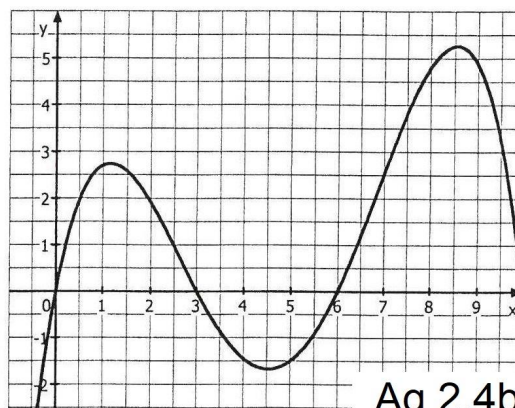
**Aufgabe 2.5:** Erst nach Abs. 261/10.3 aus Kl. 12 bearbeiten. (BAg: 263/713)

Gegeben sind die Punkte  $A(6|4 - 1)$  und  $B(0| - 5|2)$  sowie die Ebene  $E : 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 6$ .

- a<sub>1</sub>) Die Gerade durch  $A$  und  $B$  schneidet  $E$  im Punkt  $S$ . Bestimmen Sie die Koordinaten von  $S$ .
- b<sub>2</sub>) Untersuchen Sie, ob der Punkt  $S$  auf der Strecke  $AB$  liegt. (mit Order 66 Niveau 1)



**Abb. 566** Abitur 2021 WT + PT 2.4



**Ag 2.4b**

**Aufgabe 2.6:** Erst nach Abs. 271/10.5 aus Kl. 12 bearbeiten. (BAg: 264/717, 271/747)

Gegeben ist die Ebene  $E : 3x_2 - 4x_3 = 2$ .

a<sub>2</sub>) Beschreiben Sie die besondere Lage von  $E$  im Koordinatensystem (**Formel 91**) !.

b<sub>3</sub>) (Nur LK) Die Ebene  $F$  ist orthogonal zu  $E$  und hat zur  $x_1$ -Achse den Abstand 2. Bestimmen Sie eine mögliche Koordinatengleichung von  $F$ .

**Aufgabe 2.7:** kann mit Stoff Klasse 8 (nach Abs. 312/12.1) gelöst werden. (BAg: 319/801)

Ein Verein erhält eine Lieferung gebrauchter Computer und Bildschirme. Von den 10 Computern und 15 Bildschirmen funktionieren jeweils drei Geräte nicht. Jemand wählt zufällig einen Computer und einen Bildschirm aus.

a<sub>1</sub>) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide ausgewählten Geräte funktionieren.

b<sub>2</sub>) Nach Inbetriebnahme der zwei ausgewählten Geräte stellt sich heraus, dass beide Geräte funktionieren. Anschließend wählt jemand aus den übrigen Geräten der Lieferung zwei Computer aus. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens einer der beiden zuletzt ausgewählten Computer funktioniert.

**Aufgabe 2.8:** kann mit Stoff Klasse 10 (nach Abs. 335/12.3.5) gelöst werden. (BAg: 335/849)

Ein idealer Würfel wird 20-mal geworfen. Betrachtet wird die Anzahl der gewürfelten Sechsen. Gegeben sind drei Terme: I:  $\left(\frac{1}{6}\right)^{11} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9$ ; II:  $\binom{20}{11} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{11} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9$ ; III:  $1 - \binom{20}{9} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{11}$ .

a<sub>1</sub>) Geben Sie an, mit welchem der drei Terme die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses 'Es wird genau 11-mal eine Sechse gewürfelt.' berechnet werden kann.

b<sub>2</sub>) Formulieren Sie für jeden der beiden verbleibenden Terme ein Ereignis im Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem jeweiligen Term berechnet werden kann.

### 16.5.6 Wahlteil Abitur 2021 Filme: <http://Abi21.slt.biz>

**Aufgabe A 1.1:** Die Teile a-c können mit Stoff Klasse 10 (BAg: 147/365 e, 148/370 + 149/374 b), der Teil d kann erst nach Abs. 182/7.1.15 (BAg: 179/480) gelöst werden.

Das Gelände eines Abenteuerspielplatzes besteht aus einer Hochfläche, an der sich ein Hang mit einer Senke anschließt. Die Profillinie des Geländes wird für  $-3 \leq x \leq 0$  durch die Gerade mit der Gleichung  $a = 5$  und für  $0 \leq x \leq 11$  durch den Graphen der Funktion  $f$  mit  $f(x) = 0.0008x^4 - 0.12x^2 + 5$  beschrieben. Abb. 973/566a zeigt diese Profillinie (1 LE entspricht 1m).

a<sub>2</sub>) Berechnen Sie die Koordinaten des tiefsten Punkts der Profillinie (2 VP). Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Hang zwischen Hochfläche und Senke an der Stelle  $x = 5$  am steilsten abfällt und dort ein Gefälle von 80% hat (2 VP). Zeigen Sie, dass die Profillinie beim Übergang von der Hochfläche zum Hang knickfrei ist (1 VP). (Teilergebnis: Der tiefste Punkt hat die  $y$ -Koordinate 0.5).

b<sub>3</sub>)<sub>LK</sub> Zwischen zwei Befestigungspunkten, die im Modell durch  $P(5|f(5))$  und  $Q(10|f(10))$  dargestellt werden, wird ein Seil straff gespannt. Ber. Sie die Länge des Seils (2 VP). Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man die maximale vertikale Höhe des Seils über dem Gelände berechnen kann (1.5 VP).

c<sub>3</sub>)<sub>LK</sub> Auf der Hochfläche, einen Meter vom Übergang zum Hang entfernt, steht ein vertikaler Lichtmast, von dem aus das gesamte Gelände ausgeleuchtet werden kann. Berechnen Sie die Mindestlänge dieses Lichtmasts (2.5 VP).

d<sub>2-3</sub>) Bei einem Umbau soll die Senke auf 5m Länge so mit Sand aufgefüllt werden, dass eine horizontale rechteckige Fläche entsteht, die 0.5m oberhalb des tiefsten Punkts der Senke liegt. Berechnen Sie das Volumen des dafür benötigten Sandes (3.5 VP).

**Aufgabe A 1.2<sub>LK</sub>:** (Nach Klasse 10; BAg 93/230) In Abb. 975/567a sind die Graphen  $G_u$  und  $G_v$  zweier Fktn  $u$  und  $v$  abgebildet. Die Funktion  $f$  ist gegeben durch  $f(x) = v(u(x))$ . <sub>2</sub>) Bestimmen Sie  $f(-1)$ . (1 VP) <sub>3</sub>) Ermitteln Sie die Anzahl der Nullstellen von  $f$  im abgebildeten Bereich (1.5 VP).

**Aufgabe A 1.3<sub>LK</sub>:** <sub>3</sub>) (Nach Abs.159/6.3; BAg: 163/426 + 163/423b) Die Funktion  $w$  ist auf  $\mathbb{R}$  definiert und zweimal differenzierbar. Für die Funktion  $g$  gilt  $g(x) = e^{w(x)} - 2$ . Zeigen Sie: Wenn  $x_0$

eine Wendestelle von  $w$  und von  $g$  ist, dann hat der Graph von  $w$  bei  $x_0$  eine waagrechte Tangente (3 VP).

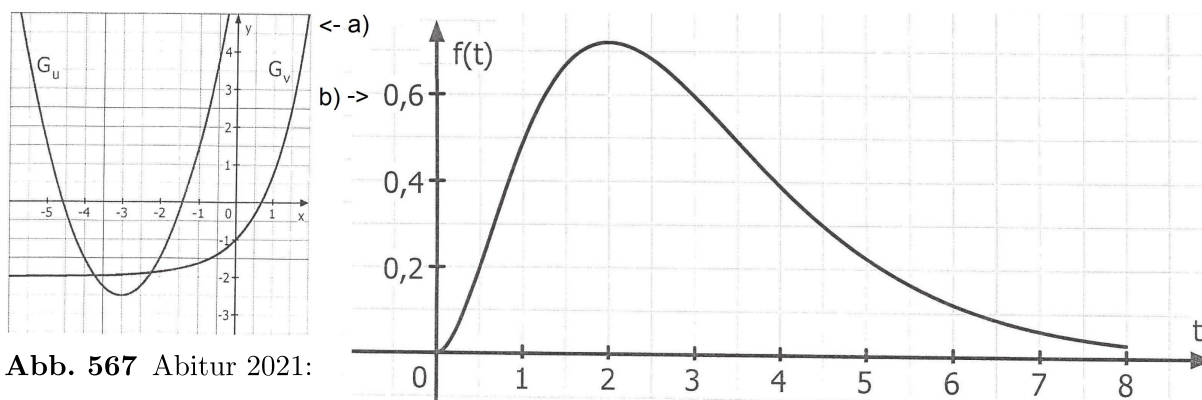


Abb. 567 Abitur 2021:

**Aufgabe A 2.1:** (Nach Abs.159/6.3; BAbs: 167/6.3.10) Die Funktion  $f$  beschreibt für  $0 \leq t \leq 8$  modellhaft die Wachstumsgeschwindigkeit eines Apfelbaums, der zu Beobachtungsbeginn  $0.8m$  hoch ist ( $t$  in Jahren nach Beobachtungsbeginn,  $f(t)$  in Meter pro Jahr). **a<sub>i 1</sub>**) Abb. 975/567b (Anlage) zeigt den Graphen  $G_f$  von  $f$ . Bestimmen Sie die Länge des Zeitraums, in dem die Wachstumsgeschwindigkeit des Apfelbaums größer als  $0.5$  Meter pro Jahr ist (1 VP). **a<sub>ii 2</sub>**) (Nach Abs.182/7.1.15; BAbs 176/7.1.9) Bestimmen Sie die Höhe des Apfelbaums zwei Jahre nach Beobachtungsbeginn (2 VP).

Die Wachstumsgeschwindigkeit eines Birnbaums, der zu Beobachtungsbeginn  $1.2 m$  hoch ist, wird für  $0 \leq t \leq 8$  modellhaft beschrieben durch die Funktion  $g$  mit  $g(t) = t^2 \cdot e^{-t}$ ; ( $t$  in Jahren nach Beobachtungsbeginn,  $g(t)$  in Meter pro Jahr). Für die Ableitungen der Funktion  $g$  gilt:  
 $g'(t) = 2t \cdot e^{-t} - t^2 \cdot e^{-t}$ ;  $g''(t) = 2 \cdot e^{-t} - 4t \cdot e^{-t} + t^2 \cdot e^{-t}$ .

**b<sub>i 2</sub>**) (BAG: 163/421d+e) Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Wachstumsgeschwindigkeit des Birnbaums am größten ist, und geben Sie diese Wachstumsgeschwindigkeit an (2 VP). Begründen Sie, dass der Birnbaum ab diesem Zeitpunkt weiterhin wächst, die Wachstumsgeschwindigkeit jedoch ständig abnimmt (2 VP). **b<sub>ii 3</sub>**) (Nur LK, nach Abs.182/7.1.15; BAbs: 182/7.1.15) Formulieren Sie eine Frage im Sachzusammenhang, die auf die Gleichung  $\frac{1}{5} \cdot \int_x^{x+5} g(t)dt = 0.3$  führt (1.5 VP).

**c<sub>3</sub>LK** (BAG: 167/433d) Zeigen Sie, dass für  $0 \leq t \leq 8$  die Funktion  $h$  mit  $h(t) = (-t^2 - 2t - 2) \cdot e^{-t} + 3.2$  die Höhe des Birnbaums beschreibt ( $t$  in Jahren nach Beobachtungsbeginn,  $h(t)$  in Meter) (2 VP).

**d<sub>3</sub>LK** (BAG 160/411e) Durch die Zugabe eines Düngers wird das Wachstum von Birnbäumen beeinflusst. Die Höhe eines gedüngten Birnbaums wird durch die Funktion  $k$  beschrieben mit  $k(t) = -2.3 \cdot e^{-t} + 3.5$  ( $t \geq 0$  in Jahren nach Beobachtungsbeginn,  $k(t)$  in Meter). Die Höhe eines ungedüngten Birnbaums wird weiterhin durch die Funktion  $h$  beschrieben. Beide Birnbäume haben zu Beobachtungsbeginn dieselbe Höhe. Berechnen Sie den Zeitpunkt, bis zu dem die Wachstumsgeschwindigkeit des gedüngten Birnbaums größer ist als die des ungedüngten Birnbaums. Untersuchen Sie rechnerisch, welcher der beiden Bäume zuerst eine Höhe von  $3.1 m$  erreicht (1.5 VP).

**Aufgabe A 2.2LK:** (außer Teil **a<sub>ii</sub>** Stoff Klasse 10) Für jedes  $t > 0$  ist eine Funktion  $f_t$  gegeben durch  $f_t(x) = -4x^3 + 12tx^2$ . **a<sub>i 2</sub>**) (BAG 144/353f) Bestimmen Sie die Nullstellen von  $f_t$  (1 VP).

**a<sub>ii 3</sub>**) (Nach Abs.182/7.1.15; BAG 179/478) Der Graph von  $f_t$  schließt mit der  $x$ -Achse eine Fläche mit dem Inhalt  $A_t$  ein. Ermitteln Sie denjenigen Wert von  $t$ , für den  $A_t = \frac{16}{3}$  gilt (2.5 VP).

**b<sub>3</sub>**) (BAG 142/345) Für  $t = \frac{2}{3}$  gibt es Tangenten an den Graphen von  $f_t$ , die den Punkt  $S(3|0)$  enthalten. Berechnen Sie die  $x$ -Koordinaten der zugehörigen Berührungspunkte (2.5 VP).

**Aufgabe B 1:** (Erst nach Abs. 271/10.5) Gegeben ist eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Die Eckpunkte der Grundfläche sind  $A(-3|-3|0)$ ,  $B(3|-3|0)$ ,  $C(3|3|0)$  und  $D$ , die Spitze ist  $S(0|0|6)$ . Die Ebene  $E$  enthält die Punkte  $A$ ,  $B$  und  $S$ . (Teilergebnis:  $E : -2x_2 + x_3 = 6$ ).

**a<sub>i 1</sub>**) (BAG 249/652) Stellen Sie die Pyramide in einem geeigneten Koordinatensystem dar (1 VP).

**a<sub>ii 1-2</sub>**) (BAG 263/711) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene  $E$  (2 VP).

**a<sub>iii 2-3</sub>**) (Nur LK, BAG 268/731c,d) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt der Pyramide (2 VP).

**b<sub>3</sub>**) (BAg 272/753) Innerhalb der Pyramide gibt es einen Punkt  $P$ , dessen Abstand von der Grundfläche der Pyramide  $\sqrt{5}$ -mal so groß ist wie sein Abstand zu den Seitenflächen. Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes (2.5 VP).

**c<sub>3</sub>**)<sub>LK</sub> (BAg 259/696) Betrachtet wird für jedes  $a > 0$  die gerade Pyramide mit folgenden Eigenschaften:

(I)  $A(-a|-a|0)$ ,  $B(a|-a|0)$ ,  $C(a|a|0)$  und  $D$  sind die Eckpunkte der quadratischen Grundfläche.

(II) Die  $x_3$ -Koordinate der Spitze  $S$  ist positiv.

(III) Die Höhe der Pyramide stimmt mit der Kantenlänge der Grundfläche überein.

$M_1$  ist die Kantenmitte von  $AB$ ,  $M_2$  die Kantenmitte von  $DS$ .

Zeigen Sie: Die Strecke  $M_1M_2$  ist orthogonal zur Kante  $DS$  (2.5 VP).

**Aufgabe B 2:** (Erst nach Abs. 271/10.5) Eine Firma stellt Gewächshäuser her. Die Ecken der Grundfläche dieser Gewächshäuser können modellhaft durch die Punkte  $A(8|0|0)$ ,  $B(8|7|0)$ ,  $C(0|7|0)$  und  $D(0|0|0)$  beschrieben werden. In diesen Ecken stehen senkrecht zur Grundfläche Pfosten, die das Dach des Gewächshauses tragen (alle Koordinatenangaben in Meter).

**a)** Bei einem dieser Gewächshäuser können die Ecken der Dachfläche durch die Punkte  $E(8|0|4)$ ,  $F(8|7|5)$ ,  $G(0|7|5)$  und  $H(0|0|4)$  beschrieben werden. **a<sub>i</sub>**) (BAg 249/652) Stellen Sie dieses Gewächshaus in einem geeigneten Koordinatensystem dar (1 VP). **a<sub>ii</sub>**) (BAg 245/641) Berechnen Sie den Rauminhalt dieses Gewächshauses (1.5 VP). **a<sub>iii</sub>**) (BAg 263/711) Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, die die Lage der Dachfläche beschreibt (2 VP).

**b<sub>LK</sub>**) Die Firma bietet die Gewächshäuser mit unterschiedlichen Neigungen der Dachfläche an. Sei  $a \geq 0$ ; die Lage jeder dieser Dachflächen kann durch eine Ebene beschrieben werden, die zur Schar  $E_a: ax_2 - 7x_3 = 7a - 35$  gehört. **b<sub>i</sub>**) (BAg 271/741) Berechnen Sie den Wert von  $a$ , für den die Neigung der Dachfläche  $30^\circ$  beträgt (2 VP). **b<sub>ii</sub>**) (BAg 267/727) Es gibt eine Gerade  $g$ , die in allen Ebenen der Ebenenschar liegt. Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Geraden  $g$  (1.5 VP).

**b<sub>iii</sub>**) (BAg 265/724c) Untersuchen Sie, für welche Werte von  $a$  im gesamten Gewächshaus eine Mindesthöhe von  $2m$  gegeben ist (2 VP).

**Aufgabe C1.1:** (Erster Teil: Nach Abs. 356/13.2.2; BAg 356/908) Ein Unternehmen füllt Honig in Gläser mit der Aufschrift 250g ab. Die Füllmenge  $\mathcal{X}$  eines Glases wird als normalverteilt angenommen mit dem Erwartungswert  $\mu = 252$  und der Standardabweichung  $\sigma = 2$  (alle Angaben in  $g$ ).

**a** Ein Glas wird zufällig ausgewählt. **a<sub>i</sub>**) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass weniger als 250g Honig in diesem Glas sind (0.5 VP). **a<sub>ii</sub>**) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Füllmenge dieses Glases um höchstens 2% von 250g abweicht (1.5 VP). **b<sub>3</sub>**)<sub>LK</sub> Gesucht ist ein Wert  $a \neq 245$  mit  $P(a \leq \mathcal{X} \leq a + 5) = P(245 \leq \mathcal{X} \leq 250)$ . Begründen Sie, dass es solch einen Wert von  $a$  gibt und geben Sie diesen Wert an (1.5 VP). **c<sub>4</sub>**)<sub>LK</sub> Bei einer neuen Abfüllanlage beträgt die Standardabweichung der Füllmenge 1g. Bei ihr kann man durch einen Regler den Erwartungswert der Füllmenge mit einer Genauigkeit von 0.1g einstellen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes Glas weniger als 250g enthält, soll höchstens 15% betragen. Ermitteln Sie, auf welchen Wert der Erwartungswert der Füllmenge mindestens eingestellt werden muss (1.5 VP).

(Zweiter Teil: Niveau Klasse 10) Bei einer Sonderaktion wird jedes fünfte Glas auf der Deckelinnenseite mit einem, von außen nicht sichtbaren Gutschein versehen.

**d)** (BAg 342/865) Lena kauft während der Sonderaktion sechs Gläser und stellt sie in einer Reihe auf. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

1)  $A$ : 'Genau drei dieser Gläser enthalten jeweils einen Gutschein' (0.5 VP).

2)  $B$ : 'Die beiden ersten Gläser enthalten jeweils einen Gutschein' (1 VP).

3)  $C$ : 'In genau zwei Gläsern befindet sich jeweils ein Gutschein und diese Gläser stehen nicht unmittelbar nebeneinander' (1.5 VP).

**e<sub>4</sub>**) (BAg 340/860) Die Gläser werden in Kartons abgepackt und an Lebensmittelgeschäfte ausgeliefert. Jeder Karton enthält 30 Gläser. Ein Kunde nimmt 3 Gläser aus dem Karton und hofft, mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50% mindestens einen Gutschein zu erhalten. Ermitteln Sie die Anzahl der Gläser mit Gutschein, die sich dafür mindestens in dem Karton befinden müssen (2 VP).



**Aufgabe C 2.1:** a) + b) sind Niveau Klasse 10: Bei einem Glücksrad gibt es drei farbige Sektoren. Beim einmaligen Drehen beträgt die Wahrscheinlichkeit für rot 60%, für blau 30% und für grün 10%.

a) (BAg 342/865) Das Glücksrad wird 20-mal gedreht. Bestimmen Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:  $\begin{matrix} 1) & \text{A:} & (0.5 \text{ VP}) & \text{'Genau 15-mal erscheint rot.'} \\ 3) & \text{B:} & (2 \text{ VP}) & \text{'Bei den ersten zehn Drehungen erscheint genau zweimal blau, insgesamt erscheint höchstens fünfmal blau'}. \end{matrix}$

b<sub>3</sub>) (2.5 VP; BAg 323/813) Bei einem Glücksspiel darf man für einen Einsatz von 6 € das Glücksrad zweimal drehen. Wenn dabei genau einmal rot erscheint, dann erhält man einen bestimmten Auszahlungsbetrag. Wenn zweimal rot erscheint, dann erhält man das Siebenfache dieses Auszahlungsbetrags. Andernfalls erfolgt keine Auszahlung. Das Spiel ist fair. Bestimmen Sie den Auszahlungsbetrag für den Fall, dass genau einmal rot erscheint.

c<sub>4</sub>)<sub>LK</sub> (Nach Abs 346/13.1; BAg 347/879) Jemand vermutet, dass die Wk für rot tatsächlich geringer als 60% ist. Deshalb soll ein Hypothesentest durchgeführt werden. Dabei soll möglichst vermieden werden, dass irrtümlich von einer zu hohen Wahrscheinlichkeit für rot ausgegangen wird. Formulieren Sie eine Nullhypothese  $H_0$ , die dieser Zielsetzung entspricht, und begründen Sie Ihre Wahl (1.5 VP).

**Aufgabe C 2.2:** (Nur LK, nach Abs. 346/13.1; BAg 352/896)  $\begin{matrix} 3) \end{matrix}$  Bei einem Spielautomaten wird vermutet, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit  $p$  größer als 10% ist. Die Vermutung wird mit Hilfe eines Hypothesentests mit dem Stichprobenumfang von  $n = 200$  und einem Signifikanzniveau von 5% getestet. Als Nullhypothese wird  $H_0 : p \geq 0.1$  gewählt. Formulieren Sie die Entscheidungsregel. (2.5 VP) Tatsächlich gilt  $p = 0.08$ . Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art. (1 VP)

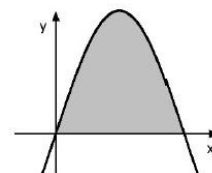
## 16.6 Musteraufgaben für das LK-Abitur 2021+2023

Was aus dem Musterabitur sollte ich nach welcher Unterrichtseinheit können?

**Kl. 10:** 977/16.6.1 P3,7; 980/16.6.4 C1abc, 981/16.6.5 C2ab; **UE 11<sub>2</sub>:** 980/16.6.4 A2.1;  
**UE 11<sub>3</sub>:** P1,2,4,9; A1.1c,d,e; **UE 12<sub>1</sub>:** P5; **UE 12<sub>4</sub>:** P6; 980/16.6.3 B;  
**UE 11<sub>7</sub>:** C1de; **UE 11<sub>8</sub>:** P8, C2de; .

### 16.6.1 Plichteil - 20 VP

**Aufgabe 1)**  $\begin{matrix} 2) \end{matrix}$  Erst nach Abs. 179/7.1.12 aus Kl. 11 (2.5 VP).  
 (BAg: 178/474 + 179/481) Abgebildet ist der Graph der Funktion  $f$  mit  $f(x) = 3 \cdot \sin(2x)$ . Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.



**Aufgabe 2)** Erst nach Abs. 182/7.1.15 aus Kl. 11 (2.5 VP).

An einer Messstation wurde über einen Zeitraum von 10 Std die Anzahl der Pollen pro  $m^3$  Luft ermittelt. Dabei kann die Anzahl der Pollen pro Kubikmeter zum Zeitpunkt  $t$  (in Std nach Beginn der Messung) durch die Gleichung  $n(t) = t^2 - 60t + 500$  mit  $t \in \mathbb{R}; 0 \leq t \leq 10$ , beschrieben werden.

a<sub>2</sub>) (BAg 138/328) Bestimmen Sie die mittlere Änderung der Anzahl der Pollen pro Kubikmeter und Stunde während der ersten beiden Stunden der Messung.

b<sub>2</sub>) (BAg 141/341) Ermitteln Sie den Zeitpunkt nach Beginn der Messung, zu dem die momentane zeitliche Änderung der Anzahl der Pollen pro Kubikmeter und Stunde  $-30$  beträgt.

**Aufgabe 3)** Kann mit dem Stoff Klasse 10 bearbeitet werden (2.5 VP).

Die Abbildung 568 a) zeigt den Graphen  $G_f$  der in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  definierten Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{4}{x^2}$ .  $G_f$  ist symmetrisch bezüglich der  $y$ -Achse.

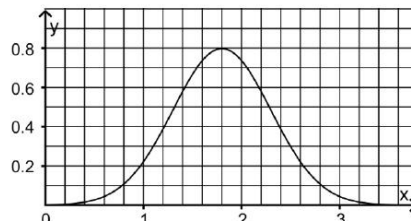
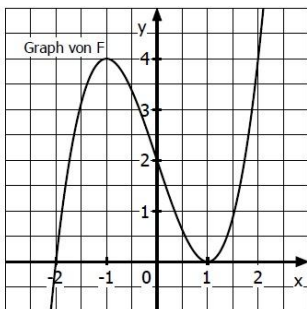
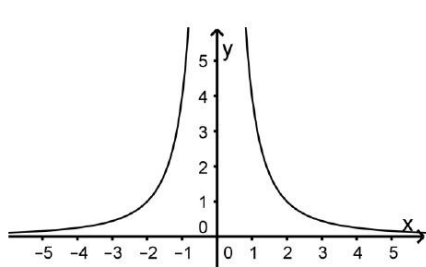
a<sub>3</sub>) Die Gerade, die parallel zur  $x$ -Achse durch den Punkt  $P(0|p)$  verläuft, schneidet  $G_f$  in zwei Punkten. Der Abstand dieser beiden Schnittpunkte ist 1. Berechnen Sie den Wert von  $p$ .

b<sub>2</sub>) (Basisformel 9/58) Die Koordinatenachsen schließen mit der Tangente an  $G_f$  in einem Punkt  $Q(u|f(u))$  mit  $u \geq 0$  ein gleichschenkliges Dreieck ein. Berechnen Sie die Koordinaten von  $Q$ .

**Aufgabe 4)** Erst nach Abs. 182/7.1.15 aus Kl. 11 (2.5 VP).

(BAG: 179/482) Abbildung 978/568 b) zeigt den Graphen einer Stammfunktion  $F$  einer Funktion  $f$ . Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

- (1<sub>2</sub>)  $f'$  besitzt im Bereich  $-1 \leq x \leq 1$  eine Nullstelle.      (2<sub>3</sub>)  $f(F(-2)) > 0$



**Abb. 568** a) zu Aufgabe 3;

b) zu Aufgabe 4;

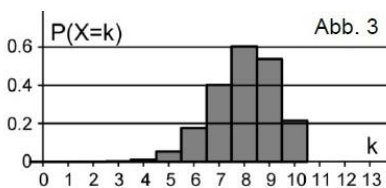
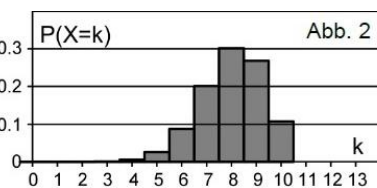
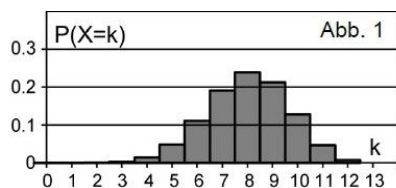
c) zu Aufgabe 8;

**Aufgabe 5)** Erst nach Abs. 261/10.3 aus Kl. 12 berechnen (2.5 VP).

Gegeben sind die Geraden  $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $r \in \mathbb{R}$  und  $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $s \in \mathbb{R}$ .

a<sub>2</sub>) (BAG: 254/672 + 259/697) Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von  $g$  und  $h$  an. Zeigen Sie, dass  $g$  und  $h$  senkrecht zueinander verlaufen. ↓ (BAG: 263/711)

b<sub>3</sub>) Die Ebene  $E$  enthält die Geraden  $g$  und  $h$ . Bestimmen Sie eine Gleichung von  $E$  in Koordinatenform.



**Aufgabe 6)** Erst nach Abs. 266/10.4 aus Kl. 12 (2.5 VP).

Das Dreieck  $\Delta(A, B, C)$  mit den Punkten  $A(3|3|3)$ ,  $B(6|7|3)$  und  $C(2|10|3)$  ist im Punkt  $B$  rechtwinklig und liegt in der Ebene mit der Gleichung  $x_3 = 3$ .

a<sub>2</sub>) (BAG: 268/731) Weisen Sie nach, dass das Dreieck  $\Delta(A, B, C)$  den Flächeninhalt  $\frac{25}{2}$  (FE) besitzt.

b<sub>2</sub>) (BAG: 269/733) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punkts  $D$  so, dass das Volumen der Pyramide  $A, B, C, D$  gleich 25 ist.

**Aufgabe 7)** Kann mit dem Stoff Klasse 10 bearbeitet werden (2.5 VP) (BAG 339/857).

a<sub>2</sub>) Die Zufallsgröße  $\mathcal{X}$  ist binomialverteilt mit  $n = 10$  und  $p = 0,8$ . Eine der nachfolgenden Abbildungen stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $\mathcal{X}$  dar. Geben Sie die beiden Abbildungen an, die die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $\mathcal{X}$  nicht darstellen. Begründen Sie Ihre Angabe.

b<sub>2</sub>) Betrachtet wird die binomialverteilte Zufallsgröße  $\mathcal{Y}$  mit den Parametern  $n$  und  $p$ . Es gilt:

- (1) Der Erwartungswert von  $\mathcal{Y}$  ist 8. (2) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $\mathcal{Y}$  ist symmetrisch.

Ermitteln Sie den Wert von  $n$ .

**Aufgabe 8)** (BAG 357/909) Erst nach Abs. 353/13.2 (nur SemQ oder LK) aus Kl. 11 / 12 (2.5 VP).

Die Abb.978/568 c) zeigt den Graphen der Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsgröße  $\mathcal{X}$ .

a<sub>1</sub>) Geben Sie den Erwartungswert von  $\mathcal{X}$  an.

b<sub>1-2</sub>) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit (Wk) dafür an, dass  $\mathcal{X}$  den Wert 2.4 annimmt.

c<sub>2</sub>) Bestimmen Sie [etwa] die Wk dafür, dass  $\mathcal{X}$  einen Wert aus dem Intervall  $[1; 1.4]$  annimmt.

**16.6.2 Wahlteil Analysis Basisabschnitte 114/5.4.9 + 118/5.5.4 + 167/6.3.10 + 176/7.1.9**

**Aufgabe 1.1** Nur LK, die Teile a) + b) sind schon zu Beginn Klasse 11 lösbar.

Abb. 979/569 zeigt den Graphen einer Funktion  $f$ , die für  $0 \leq t \leq 15$  das Volumen des Wassers in einem Becken in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Dabei ist  $t$  die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und  $f(t)$  das Volumen in Kubikmetern.

a) (5 VP) <sub>1)</sub> Geben Sie das Volumen des Wassers fünf Stunden nach Beobachtungsbeginn an. <sub>2)</sub> Geben Sie den Zeitraum an, in dem das Volumen mindestens 350 Kubikmeter beträgt. <sub>3)</sub> Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate des Wasservolumens zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn. <sub>4)</sub> (BAG: 101/256 + 106/274) Begründen Sie, dass die Funktionsgleichung von  $f$  weder die Form I noch die Form II hat: **I**  $y = -0.3t^4 + at^2 + 100$ ,  $a \in \mathbb{R}$  **II**  $y = 8.5t^3 + 3.7t^2 + bt + 100$ ,  $b \in \mathbb{R}$

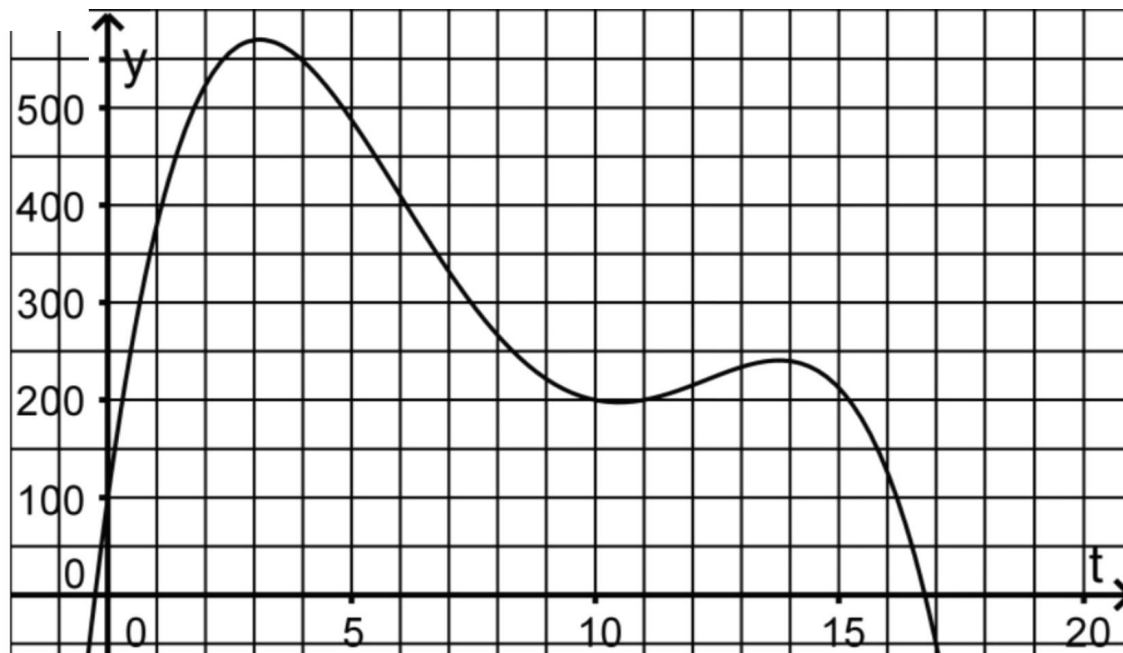
b<sub>2-3</sub>) (3.5 VP) Die 15 Stunden nach Beobachtungsbeginn vorliegende momentane Änderungsrate des Wasservolumens bleibt bis zu dem Zeitpunkt erhalten, zu dem das Becken kein Wasser mehr enthält. Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man diesen Zeitpunkt grafisch bestimmen kann. Interpretieren Sie die Gleichung  $f(t+6) = f(t) - 350$  im Sachzusammenhang. Geben Sie eine Lösung der Gleichung an.

**Ab hier erst nach Abs. 182/7.1.15 aus Kl. 11 zu bearbeiten**

Für ein anderes Becken wird die momentane Änderungsrate des Volumens des enthaltenen Wassers für  $0 \leq t \leq 15$  durch die Funktion  $g$  mit  $g(t) = 0.4 \cdot (2t^3 - 39t^2 + 180t)$  beschrieben. Dabei ist  $t$  die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und  $g(t)$  die Änderungsrate in  $\frac{m^3}{h}$ . Die Funktion  $G$  mit  $G(t) = 0.2 \cdot (2t^4 + 26t^3 + 180t^2)$  ist eine Stammfunktion von  $g$ .

c) (4.5 VP) (BAG 146/361+150/380) <sub>1)</sub> Berechnen Sie für den beschriebenen Zeitraum denjenigen Zeitpunkt, zu dem die momentane Änderungsrate des Wasservolumens maximal ist. <sub>2)</sub> Ermitteln Sie rechnerisch den Zeitraum, in dem das Volumen des Wassers abnimmt.

d<sub>1</sub>) (4.5 VP) (BAG 175/457) Drei Stunden nach Beobachtungsbeginn sind im Becken 350 Kubikmeter Wasser enthalten. Bestimmen Sie das Volumen des Wassers zu Beobachtungsbeginn. Untersuchen Sie rechnerisch, ob es nach Beobachtungsbeginn einen Zeitpunkt gibt, zu dem das Wasservolumen ebenso groß ist wie zu Beobachtungsbeginn.



**Abb. 569** Schaubild Wahlteil Analysis

**Wahlteil Analysis Aufgabe 1.2** (Nur LK, 2.5 VP) Erst nach Abs. 166/6.3.9 aus Kl. 11.

(Partneraufgabe 144/353) Zeigen Sie: Wenn der Graph einer differenzierbaren Funktion  $f$  die  $x$ -Achse in einem Punkt  $P$  berührt, dann gilt dies auch für den Graphen der Funktion  $g$  mit  $g(x) = e^{f(x)} - 1$ .

**16.6.3 Wahlteil Analytische Geo. Basisabs. 258/10.1.15 + 272/10.5.5 + 274/10.5.8****Aufgabe B 1.1** Erst nach Abs. 271/10.5 aus Kl. 12.

a) (4 VP) (BAG 259/696 + 263/711) Gegeben sind die Punkte  $A(6|1|0)$ ,  $B(4|5|-4)$  und  $C(-2|8|2)$ .  
 1) Zeigen Sie, dass das Dreieck  $\Delta(A, B, C)$  bei  $B$  einen rechten Winkel besitzt. Die drei Punkte liegen in einer Ebene  $E$ .  
 1-2) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von  $E$ .  
 1) Es gibt einen Punkt  $D$ , für den das Viereck  $A, B, C, D$  ein Rechteck ist. Ermitteln Sie die Koordinaten von  $D$ .

b) (Nur LK; 3.5 VP; BAG 264/717 + 272/753) Gegeben ist die Ebenenschar  $E_k$ :  
 $kx_1 + kx_2 + x_3 = 14$ ; ( $k \in \mathbb{R}$ ).  
 1-2) Beschreiben Sie die besondere Lage der Ebene  $E_0$  im Koordinatensystem.  
 2-3) Bestimmen Sie die Ebenen der Schar, von denen der Pkt  $R(1|1|4)$  den Abstand 2 hat.

**Aufgabe B 1.2** Nur LK, bis 2022; erst nach dem Basisabschnitt 261/10.2.4 aus Kl. 12 (2.5 VP).

3-4) Beweisen Sie: Wenn in einem Parallelogramm die Diagonalen gleich lang sind, so ist es ein Rechteck.

**16.6.4 Wahlteil Stochastik - 10 VP****(Basisabschnitt 341/12.3.11)****Aufgabe C1:** Die Teile a) - c) sind schon zu Beginn Klasse 11 lösbar.

Die Tabelle zeigt die prozentualen Anteile von Haushalten unterschiedlicher Größe an der Gesamtzahl der Haushalte im Jahr 2013 in Deutschland.

1-Personen-Haushalte	40.5%
2-Personen-Haushalte	34.5%
3-Personen-Haushalte	12.5%
4-Personen-Haushalte	9.2%
Haushalte mit mindestens 5 Personen	3.3%

a) (2.5 VP) (BAG 337/854) Für eine Umfrage im Jahr 2013 sollten 100 Haushalte zufällig ausgewählt werden. Bestimmen Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:

1) A: 'Es wurden genau vierzig 1-Personen-Haushalte ausgewählt.'

2) B: 'Unter den ersten zehn ausgewählten Haushalten war kein 4-Personen-Haushalt und unter den restlichen neunzig Haushalten waren höchstens fünf 4-Personen-Haushalte.'

b<sub>2</sub>) (1.5 VP) (BAG: BAG 337/854) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in drei im Jahr 2013 zufällig ausgewählten Haushalten insgesamt genau fünf Personen lebten.

c<sub>3</sub>) (2 VP) (Nur LK; Basisabschnitt 340/12.3.10) Ermitteln Sie, wie viele Haushalte man im Jahr 2013 mindestens hätte zufällig auswählen müssen, damit darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mehr als zwanzig 2-Personen-Haushalte sind.

**Ab hier nur LK und erst nach Abs. 346/13.1 aus Kl. 11 oder 12 zu bearbeiten**

d<sub>4</sub>)<sub>LK</sub> (1.5 VP) (BAG: 346/878) Im Jahr 2014 wurde vermutet, dass der tatsächliche Anteil der 1-Personen-Haushalte größer als im Jahr 2013 ist. Um einen Anhaltspunkt dafür zu gewinnen, ob diese Vermutung zutrifft, sollte auf der Grundlage einer Stichprobe von 500 Haushalten und einem Signifikanzniveau von 5 % ein Hypothesentest durchgeführt werden. Dabei sollte möglichst vermieden werden, dass irrtümlich von einem zu hohen Anteil der 1-Personen-Haushalte ausgegangen wird. Formulieren Sie eine Nullhypothese, die dieser Zielsetzung entspricht, und begründen Sie Ihre Wahl.

e<sub>3</sub>)<sub>LK</sub> (2.5 VP) (BAG: 352/896) Man bezweifelt, dass der Anteil der 2-Personen-Haushalte heute immer noch 34.5 % beträgt. Dies ( $H_0$ : Abs. 948/15.13.3) soll mit einem Stichprobenumfang  $n = 500$  auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden. Dabei ergibt sich der Ablehnungsbereich  $A = \{0, \dots, 154\}$  und die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art beträgt 25 %. Formulieren Sie den Fehler 2. Art im Sachzusammenhang. Zeigen Sie, dass der wahre Anteil der 2-Personen-Haushalte nicht 30 % betragen kann.

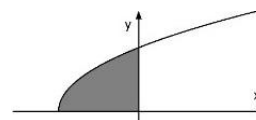
**16.6.5 Neue Musteraufgaben für das Abi 2023 (nur LK) (Basisabschnitte 341/12.3.11)**

**Aufgabe 9:** ) Erst nach Abs. 179/7.1.12 aus Kl. 11 (2.5 VP).

(BAg: 178/474 + 179/481) Abgebildet ist der Graph der Funktion  $f$  mit

Abgebildet ist der Graph der Funktion  $f$  mit  $f(x) = \sqrt{4x + 16}$ .

Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.



**Aufgabe C2:** In Deutschland liegt bei 1 % der Bevölkerung eine Glutenunverträglichkeit vor. Die betroffenen Personen reagieren auf den Verzehr von bestimmten Getreidesorten mit körperlichen Beschwerden. Ob eine Glutenunverträglichkeit vorliegt oder nicht, kann mithilfe eines Schnelltests diagnostiziert werden. Zeigt das Ergebnis dieses Tests die Glutenunverträglichkeit an, so bezeichnet man es als positiv. Liegt bei einer Person eine Glutenunverträglichkeit vor, so ist das Testergebnis mit einer Wahrscheinlichkeit von 98 % positiv. Liegt bei einer Person keine Glutenunverträglichkeit vor, so beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Testergebnis dennoch positiv ist, 4 %. Bei einer Person, die aus der Bevölkerung Deutschlands zufällig ausgewählt wurde, wird der Test durchgeführt.

a<sub>2-3</sub>) (ab Klasse 9) BAg 325/819 Erstellen Sie zu dem beschriebenen Sachzusammenhang ein beschriftetes Baumdiagramm. Ermitteln Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit: A: 'Bei der Person liegt eine Glutenunverträglichkeit vor und das Testergebnis ist positiv.' B: 'Das Testergebnis ist negativ.' Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Glutenunverträglichkeit vorliegt, wenn das Testergebnis positiv ist. (4.5 VP)

b<sub>1</sub>) (BAg 341/863, ab Klasse 10) Im Rahmen einer Studie werden aus der Bevölkerung Deutschlands 20000 Personen zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße  $\mathcal{X}$  gibt die Anzahl der ausgewählten Personen an, bei denen eine Glutenunverträglichkeit vorliegt. Berechnen Sie in einem geeigneten Modell die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der ausgewählten Personen, bei denen eine Glutenunverträglichkeit vorliegt, um mehr als 10 % vom Erwartungswert von  $\mathcal{X}$  abweicht. (2 VP)

Der Test wird mithilfe eines Teststreifens durchgeführt, auf dem ein Indikator aufgebracht ist. Ist die Indikatormenge auf einem Teststreifen kleiner als 15 mg, so ist dieser unbrauchbar. Der Hersteller der Teststreifen verfolgt das Ziel, dass höchstens 10 % der hergestellten Teststreifen unbrauchbar sind, und führt deshalb regelmäßig eine Qualitätskontrolle durch. Dazu wird der laufenden Produktion eine Stichprobe von 100 Teststreifen entnommen. Nur wenn sich darunter mindestens 16 unbrauchbare Teststreifen befinden, entscheidet man sich dafür, das Herstellungsverfahren zu verbessern.

c<sub>4</sub>) (BAg 347/879 + 351/889) Beschreiben Sie, welche Fehlentscheidungen bei dieser Qualitätskontrolle auftreten können. Der Hersteller entschließt sich, die Kontrolle künftig mit einer größeren Stichprobe von 200 Teststreifen durchzuführen. Die Wahrscheinlichkeit für eine unnötige Verbesserung des Herstellungsverfahrens soll sich durch diese Änderung jedoch nicht erhöhen. Ermitteln Sie, wie groß die Anzahl unbrauchbarer Teststreifen, ab der man sich dafür entscheidet, das Herstellungsverfahren zu verbessern, nun mindestens sein muss. (4 VP)

d<sub>2-3</sub>) (BAg 352/896) Die Indikatormenge auf den Teststreifen ist normalverteilt. Vor einer Verbesserung des Herstellungsverfahrens hatte der Erwartungswert 20 mg und die Standardabweichung 4.0 mg betragen. Durch die Verbesserung konnte die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Teststreifen aufgrund der Indikatormenge unbrauchbar ist, halbiert werden. Der Erwartungswert für die Indikatormenge blieb dabei unverändert. Bestimmen Sie die geänderte Standardabweichung (auf eine Dezimale gerundet). (2 VP)

**16.7 Stochastik-Abiteile vor 2019 auf Niveau Kl. 10 (GK Niveau)**

Alle Aufgaben von Abs 16.7 sind verfilmt; diese Filme mit LöVo finden Sie auf <http://stochastik.SLT.biz>

**16.7.1 Abitur 2018 Wahlteil C1.1 Teil a (1.5 VP)**

Ein Unternehmen stellt Kunststoffteile her. Erfahrungsgemäß sind 4% der hergestellten Teile fehlerhaft. Die Anzahl fehlerhafter Teile unter zufällig ausgewählten kann als binomialverteilt angenommen werden.

a<sub>1</sub>) 800 Kunststoffteile werden zufällig ausgewählt. Berechnen Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:

A: 'Genau 30 der Teile sind fehlerhaft.'

B: 'Mindestens 5% der Teile sind fehlerhaft.'

### 16.7.2 Abitur 2018 Wahlteil C1.2 Teil a (2 VP)

Für ein Spiel wird ein Glücksrad verwendet, das drei Sektoren in den Farben rot, grün und blau hat. Für einen Einsatz von 5 Euro darf ein Spieler das Glücksrad dreimal drehen. Erzielt der Spieler dreimal die gleiche Farbe, werden ihm 10 Euro ausgezahlt. Erzielt er drei verschiedene Farben, wird ein anderer Betrag ausgezahlt. In allen anderen Fällen erfolgt keine Auszahlung. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dreimal die gleiche Farbe erzielt wird, ist  $\frac{1}{6}$ . Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass drei verschiedene Farben erzielt werden, beträgt ebenfalls  $\frac{1}{6}$ .

a<sub>3</sub>) Bei einem Spiel ist zu erwarten, dass sich die Einsätze der Spieler und die Auszahlungen auf lange Sicht ausgleichen. Berechnen Sie den Betrag, der ausgezahlt wird, wenn drei verschiedene Farben erscheinen.

### 16.7.3 Abitur 2018 Wahlteil C2 Teile a und b (3+3 VP)

Ein Affe sitzt vor einer Tastatur, deren Tasten mit den Ziffern 1, 2, 3 und 4 sowie mit den Buchstaben A, B, C, D, E und F beschriftet sind. Zunächst wird angenommen, dass der Affe zufällig auf die Tasten tippt. Die Tastatureingaben werden aufgezeichnet.

a) Es werden die ersten fünf Tastaturanschläge des Affen betrachtet. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:

1) A: 'Der Affe tippt nur auf Tasten mit Ziffern.'

1) B: 'Der Affe tippt höchstens dreimal eine Ziffer.'

2) C: 'Die vom Affen getippte Zeichenfolge enthält die Buchstaben A F F E direkt hintereinander.'

b) Nun werden Versuchsreihen mit jeweils 20 Tastaturanschlägen durchgeführt. 1) Wie viele Buchstaben pro Versuchsreihe kann man dabei auf lange Sicht im Mittel erwarten? 2) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Versuchsreihe die Anzahl der getippten Buchstabentasten um höchstens 20% von diesem erwarteten Wert abweicht.

### 16.7.4 Abitur 2017 Wahlteil C1 Teile a und c (3+2.5 VP)

Die Tabelle zeigt die prozentualen Anteile einiger Farben der in Deutschland fahrenden Autos:

Farbe	silber oder grau	schwarz	weiß
Anteil	29.9%	28.8%	15.1%

Diese Anteile werden im Folgenden als Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der jeweiligen Autofarben verwendet. Zwei Kinder beobachten vorbeifahrende Autos und achten auf deren Farbe.

a) Zunächst beobachten die beiden Kinder 80 Autos.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

1-2) A: 'Genau 22 Autos sind silber oder grau.'

1) B: 'Mindestens 33 Autos sind schwarz.'

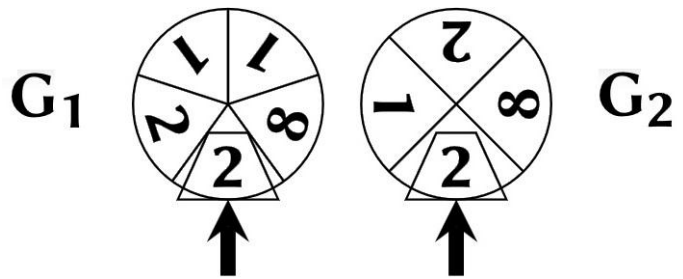
3) C: 'Unter den ersten zehn Autos sind mindestens drei, die keine der in der Tabelle angegebenen Farben haben, und von den anderen 70 Autos sind höchstens 20 schwarz.'

c<sub>2-3</sub>) Das eine Kind bietet dem anderen folgendes Spiel an:

'Wenn von den nächsten vier Autos mindestens drei hintereinander nicht schwarz sind, bekommst du von mir ein Gummibärchen, ansonsten bekomme ich eines von dir'. Untersuchen Sie, ob dieses Spiel fair ist.

**16.7.5 Abitur 2017 Wahlteil C2 (3+2+2+3 VP)**

Bei dem dargestellten Glücksspielautomaten sind zwei Glücksräder  $G_1$  und  $G_2$  mit fünf bzw. vier gleich großen Kreissektoren angebracht. Bei jedem Spiel werden sie in Drehung versetzt und laufen dann unabhängig voneinander aus. Schließlich bleiben sie so stehen, dass von jedem Rad genau eine Zahl im Rahmen angezeigt wird.



Der Spieleinsatz beträgt 2€. Sind die beiden

angezeigten Zahlen gleich, so wird deren Summe in Euro ausgezahlt; andernfalls wird nichts ausgezahlt. Der Hauptgewinn besteht also darin, dass 16€ ausgezahlt werden.

a) Ein Spieler spielt zehn Mal. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

- 1-2) A: 'Das Glücksrad  $G_1$  zeigt genau fünf Mal die Zahl 1.'
- 2) B: 'Beim ersten Spiel beträgt die Summe der beiden angezeigten Zahlen 10.'
- 2) C: 'Der Spieler erhält mindestens einmal den Hauptgewinn.'

b<sub>2</sub>) Mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% soll in mindestens einem Spiel der Hauptgewinn erzielt werden. Berechnen Sie, wie oft man dazu mindestens spielen muss.

c<sub>2</sub>) Berechnen Sie, wie viel der Betreiber auf lange Sicht durchschnittlich pro Spiel verdient.

d<sub>4</sub>) Der Betreiber möchte erreichen, dass bei zehn Spielen die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Hauptgewinn maximal 25% beträgt. Dazu möchte er beim Glücksrad  $G_2$  den Mittelpunktswinkel des Kreissektors verändern, der mit der Zahl 8 beschriftet ist. Berechnen Sie, wie weit der Mittelpunktswinkel dieses Kreissektors maximal gewählt werden darf.

**16.7.6 Abitur 2016 Wahlteil B2.2 (5 VP)**

Eine Tanzgruppe besteht aus 8 Anfängerpaaren und 4 Fortgeschrittenenpaaren. Aus der Erfahrung vergangener Jahre weiß man, dass Anfängerpaare mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % bei den abendlichen Tanzstunden anwesend sind, Fortgeschrittenenpaare mit einer Wahrscheinlichkeit von 75%. Man geht davon aus, dass die Entscheidungen der Tanzpaare über die Teilnahme an der Tanzstunde voneinander unabhängig sind.

1) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an einem Abend alle Fortgeschrittenenpaare anwesend sind.

2) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an einem Abend mindestens 6 Anfängerpaare und höchstens 3 Fortgeschrittenenpaare anwesend sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an einem Abend mindestens 11 Paare anwesend sind?

**16.7.7 Abitur 2015 Wahlteil B2.2 Teile a und b (1+3 VP)**

Bei einem Biathlonwettbewerb läuft ein Athlet eine 2.5 km lange Runde, dann schießt er liegend fünf Mal; anschließend läuft er eine zweite Runde und schießt stehend fünf Mal; nach einer dritten Runde erreicht er das Ziel. Für jeden Fehlschuss muss er direkt nach dem Schießen eine 200 m lange Strafrunde laufen. Aufgrund der bisherigen Schießleistungen geht der Trainer davon aus, dass der Athlet stehend mit 88% und liegend mit 93% Wahrscheinlichkeit trifft. Es wird vereinfachend davon ausgegangen, dass die Ergebnisse der einzelnen Schüsse voneinander unabhängig sind.

a<sub>1</sub>) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Athlet stehend bei fünf Schüssen genau vier Mal trifft. b<sub>2</sub>) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Athlet im gesamten Wettbewerb höchstens einmal eine Strafrunde laufen muss.

**16.7.8 Abitur 2014 Wahlteil B1.2 (4+3 VP)**

In einem Gefäß  $G_1$  sind 6 schwarze und 4 weiße Kugeln. In einem Gefäß  $G_2$  sind 3 schwarze und 7 weiße Kugeln.

a<sub>1</sub>) Aus dem Gefäß  $G_1$  wird 20 Mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 12 Mal eine schwarze Kugel gezogen wird. a<sub>2</sub>) Aus Gefäß  $G_2$  wird 8 Mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 2 schwarze Kugeln gezogen werden, und zwar bei zwei direkt aufeinander folgenden Zügen.

b<sub>3</sub>) Nun werden aus  $G_1$  zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen und in das Gefäß  $G_2$  gelegt. Anschließend wird eine Kugel aus  $G_2$  gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Kugel schwarz?

**16.7.9 Pflichtteile aus dem Abitur vor 2019 (Aufgabe 7)**

**Abitur 2018:** Zwei ideale Würfel werden gleichzeitig geworfen.

- a<sub>1-2</sub>) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei verschiedene Augenzahlen fallen.  
 b<sub>1</sub>) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man eine '1' und eine '2'?  
 c<sub>2</sub>) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigen die Würfel zwei aufeinanderfolgende Zahlen?

**Abitur 2017:** a<sub>2</sub>) In einer Urne liegen drei rote, zwei grüne und eine blaue Kugel. Es werden so lange nacheinander einzelne Kugeln gezogen und zur Seite gelegt, bis man eine rote Kugel erhält. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man höchstens drei Kugeln zieht.

**16.8 Die mündliche Prüfung des Basiskurses (GK)**

Vom Kultusministerium BW bzw. ZPG 7; thx Trs; Die Indizierung auf ist auf LK Niveau Zusätze von Sd sind mit (Sd:) gekennzeichnet um offene Aufgaben zu konkretisieren.

**16.8.1 Aufgabe 1: (Teil 1: Analysis, Teil 2: Geometrie ohne LöVo)**

**Teil 1: a+b nach Kl 10; c+d nach Abs 178/7.1.10:** Die Abbildungen zeigen die Graphen einer ganzrationalen Funktion  $f$ , einer trigonometrischen Funktion  $g$  und einer Exponentialfunktion  $h$ .

- a<sub>1</sub>) Ordnen Sie die Fktn  $f$ ,  $g$  und  $h$  den abgebildeten Graphen zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.  
 b<sub>2</sub>) Geben Sie für einen der abgebildeten Graphen einen möglichen Funktionsterm an. Erklären Sie, wie Sie dabei vorgegangen sind.  
 c<sub>2</sub>) Der Graph der Funktion in Abbildung II schließt mit der  $x$ -Achse eine Fläche ein. Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man den Inhalt dieser Fläche berechnen kann, und geben Sie einen entsprechenden Rechenausdruck an.

d<sub>2-3</sub>) Gegeben ist die Funktion  $i$  mit  $i(x) = -e^{-x}$ . Berechnen Sie  $a$  so, dass  $\int_0^a i(x) dx = -2$  gilt.

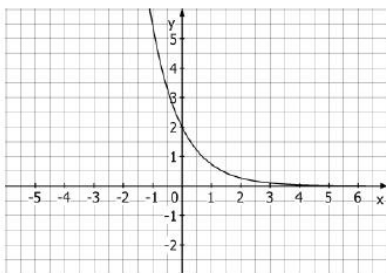


Abbildung I

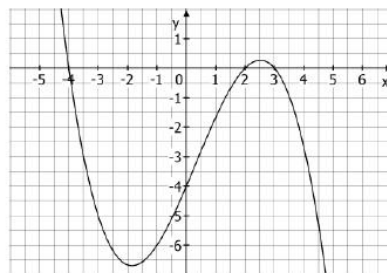


Abbildung II

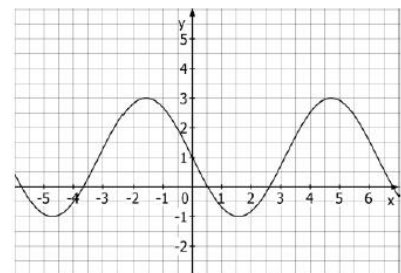


Abbildung III

a<sub>2-3</sub>) Bestimmen Sie eine nichtkonstante ganzrationale Funktion  $j$  und Werte für  $b$  und  $c$ , so dass gilt  $\int_b^c j(x) dx = -8$ .



**Teil 2: Nach Abs 271/10.5:** Eine senkrechte Pyramide mit quadratischer Grundfläche mit den Eckpunkten  $A(0; 0; 0)$ ,  $B(3; 0; 0)$ ,  $C(3; 3; 0)$  und  $D(0; 3; 0)$  hat die Höhe 4. Im Punkt (Sd:)  $L(0; 3; 5)$  befindet sich eine punktförmige Lichtquelle.

- a) (AFB I) **i<sub>1</sub>**) Skizzieren Sie den Sachverhalt. **ii<sub>1-2</sub>**) Geben Sie die Koordinaten von  $S$  an. **iii<sub>1</sub>**) Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide. **iv<sub>1-2</sub>**) Ermitteln Sie die Koordinatengleichung einer Seitenfläche.
- b) (Anforderungsbereich AFB II) **i<sub>1</sub>**) Weisen Sie die Gleichschenkligkeit eines Seitendreiecks nach. **ii<sub>2</sub>**) Beschreiben Sie ein Verfahren zur Bestimmung der Pyramidenoberfläche. **iii<sub>2</sub>**) Ermitteln Sie eine Formel zur Bestimmung des Winkels zwischen Grund- und einer Seitenfläche.
- c) (AFB III) **i<sub>2</sub>**) Bestimmen Sie mehrere Ebenengleichungen, so dass die Ebenen jeweils die Pyramide in zwei volumengleiche Teile zerlegen. **ii<sub>3</sub>**) Überprüfen Sie, ob der Punkt (Sd:)  $(1; 1; 1)$  im Pyramideninneren liegt oder nicht. **iii<sub>3</sub>**) Untersuchen Sie den Schattenwurf der Pyramide.

### 16.8.2 Aufgabe 2: (Teil 1: Analysis, Teil 2: Geometrie ohne LöVo)

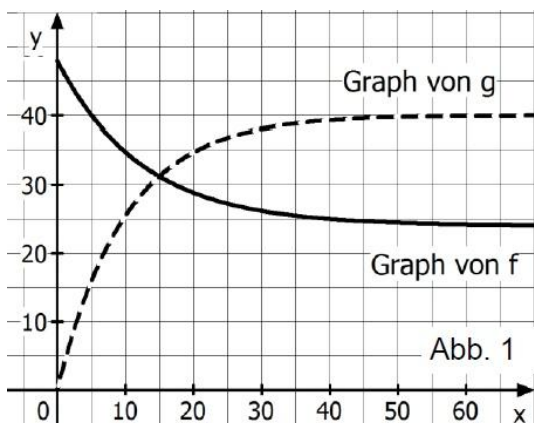
**Teil 1: Nach Abs 178/7.1.10:** Die Geschwindigkeit eines Autos auf einer Teststrecke wird beschrieben durch eine Funktion  $f$  mit  $f(x) = 24 + 24 \cdot e^{-0.08x}$  für  $0 \leq x \leq 60$ , ( $x$  in Sekunden,  $f(x)$  in Meter pro Sekunde).

- a<sub>1</sub>) Berechnen Sie  $f(0)$  und  $f'(0)$  und  $\int_0^{60} f(x)dx$ . Deuten Sie diese Werte im Sachzusammenhang.

Das Auto und ein Motorrad befinden sich zum Zeitpunkt  $x = 0$  nebeneinander und fahren in den nächsten 60 Sekunden in die gleiche Richtung. Abb 985/570 (1) zeigt den Graphen der Funktion  $f$  und den Graphen der Funktion  $g$ , die die Geschwindigkeit des Motorrads beschreibt.

- b<sub>2</sub>) Beschreiben Sie die Bewegungen des Autos und des Motorrads.

c<sub>3</sub>) Abb 985/570 (2) stellt für einen Ausschnitt der Fahrt den Abstand der beiden Fahrzeuge dar. Beschreiben Sie, wie man die  $x$ -Koordinate des Punktes  $H$  mithilfe von Abb. 1 ermitteln kann. Entscheiden Sie, ob die  $y$ -Koordinate von  $H$  größer als 500 ist, und Abb. 1 begründen Sie Ihre Entscheidung.



**Abb. 570** Mündliche Prüfung: Abb. 1

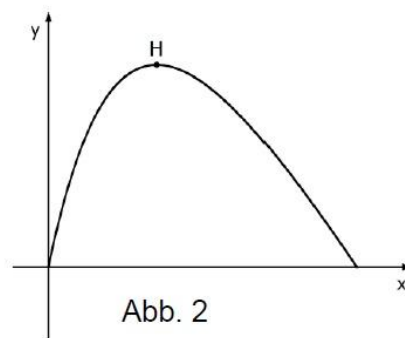


Abb. 2

- d<sub>3</sub>) Das Motorrad überholt das Auto zum Zeitpunkt  $x_0$ . Bestimmen Sie eine Gleichung, mit der man bei gegebenem Funktionsterm von  $g$  den Zeitpunkt  $x_0$  berechnen kann.

**Teil 2: Nach Abs 261/10.3:** Gegeben seien die Ebenen  $E : 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6$  und  $F : 2x_1 - x_2 = 6$ .

- a<sub>1</sub>) (AFB I) Veranschaulichen Sie die Lage der Ebene  $E$  mit Hilfe von Spurpunkten. (Sd:) Liegt  $P(1; -1; 1)$  in  $E$ ? Geben Sie den Normalenvektor von  $E$  an. **i<sub>1-2</sub>**) Welche besondere Lage hat  $F$ ?
- b) (AFB II) **i<sub>1-2</sub>**) Welche Beziehung besteht zwischen der Anzahl der Spurpunkten und der besonderen Lage einer Ebene? **i<sub>1</sub>**) Geben Sie eine vektorielle Darstellung (Sd: Parameterform) der Ebene  $E$  an und erläutern Sie die geometrische Bedeutung ihrer Bestandteile. **i<sub>1-2</sub>**) Ermitteln Sie den Abstand des Ursprungs zur Ebene  $E$ . **i<sub>1-2</sub>**) Bestimmen Sie eine Gleichung einer orthogonalen bzw. parallelen Ebene

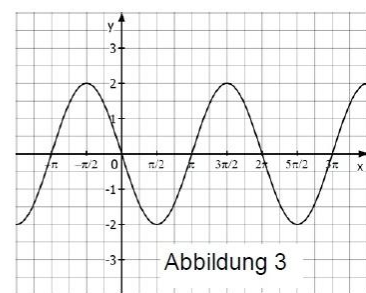
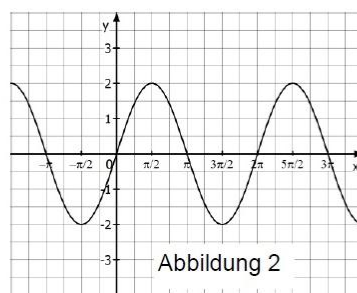
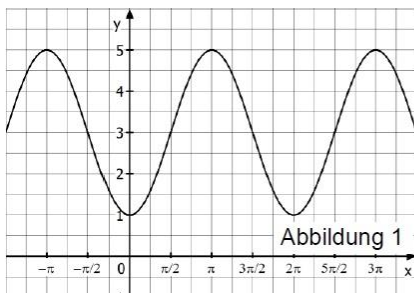
zu E. <sub>2</sub>) Spiegeln Sie die Gerade durch (Sd:)  $A(5; -3; 4)$  und  $B(2; -1; 5)$  an der Ebene E.  
(Sd:) LöVo:  $L_a(1; -1; 1)$ ,  $L_b(0; 0; 2)$ ;  $A'(-3; 1; -2)$ ,  $B'(-2; 1; -1)$ .

c) (AFB III) <sub>2-3</sub>) Erläutern Sie, welcher Ausschnitt der Parameterform von E aus Teil b für  $0 \leq r \leq 1$  und für  $0 \leq s \leq 1$  beschrieben wird. <sub>2</sub>) Bestimmen Sie gemeinsame Punkte der Ebenen E und F.

### 16.8.3 Aufgabe 3: (Teil 1: Analysis, Teil 2: Geometrie ohne LöVo)

**Teil 1: Teil a+d nach Kl 10. Teil b+c nach Abs 178/7.1.10:** Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = 2 \cdot \sin(x - \frac{\pi}{2}) + 3$ .

a<sub>1</sub>) Abbildung 1 zeigt den Graphen von  $f$ . Erläutern Sie, wie man den Graphen von  $f$  aus dem Graphen der Funktion  $g$  mit  $g(x) = \sin(x)$  erhält.



b<sub>2</sub>) Eine der Abbildungen 2 und 3 zeigt den Graphen von  $f'$ . Entscheiden Sie, in welcher der Abbildungen der Graph von  $f'$  dargestellt ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Begründen Sie ohne Rechnung, dass  $\int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = 0$  gilt.

c<sub>1-2</sub>) Berechnen Sie das Integral  $\int_0^{\pi} (5 - f(x)) dx$  und interpretieren Sie Ihr Ergebnis geometrisch.

d<sub>3</sub>) Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung. 'Eine trigonometrische Funktion ist durch die Angabe der Koordinaten eines beliebigen Hochpunktes und eines beliebigen Tiefpunktes ihres Graphen eindeutig bestimmt.'

**Teil 2: Teil a+b nach Kl 10. Teil c nach Abs 261/10.3:** Gegeben ist die Gerade

$$g \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und die Gerade } h \text{ durch } A(2|5|-2) \text{ und } B(6|2|-2).$$

a<sub>1</sub>) (AFB I) Ermitteln Sie eine Gleichung von  $h$ . Interpretieren Sie alle Bestandteile einer Geradengleichung geometrisch. Liegt (Sd:)  $C(-1|2|-1)$  auf  $g$ ? Geben Sie weitere Gleichungen von  $g$  an.

b<sub>2</sub>) (AFB II) Bestimmen Sie die gegenseitige Lage von  $g$  und  $h$ . Ermitteln Sie die Gleichung einer weiteren Geraden, welche parallel zu  $g$  ist und  $h$  schneidet. Bestimmen Sie Punkte auf der Geraden  $g$ , die vom Punkt  $P(1|-2|3)$  den Abstand 6 haben.

c) (AFB III) <sub>2</sub>) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene  $E$ , die  $g$  enthält und parallel zu  $h$  liegt.

<sub>2-3</sub>) Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden durch (Sd:)  $D(-3|3|1)$ , die  $g$  orthogonal schneidet.  
LöVo:  $L = C$ ,  $g_{DC}$ .

### 16.8.4 Aufgabe 4: (Teil 1: Analysis, Teil 2: Stochastik ohne LöVo)

**Teil 1: Nach Abs 178/7.1.10:** Die Abb. 987/571 zeigt den Graphen einer Funktion  $f$ .

a<sub>1</sub>) Bestimmen Sie  $f'(0)$ . b<sub>1</sub>) Ermitteln Sie  $\int_0^2 f(x) dx$ . c<sub>2</sub>)  $F$  ist eine Stammfunktion von  $f$ . Untersuchen Sie mit Hilfe des Graphen von  $f$ , ob der Graph von  $F$  im abgebildeten Bereich [Nullstellen], Hoch-, Tief- bzw. Wendepunkte besitzt. Geben Sie gegebenenfalls die entsprechenden Stellen an.

d<sub>2</sub>) Entscheiden Sie, welche der folgenden Funktionsgleichung zu  $f$  gehört:

$$f_1(x) = (x-2) \cdot e^{-x} \quad f_2(x) = (x-2) \cdot e^x, \quad f_3(x) = x \cdot e^x - 2. \quad \text{Begründen Sie Ihre Entscheidung.}$$

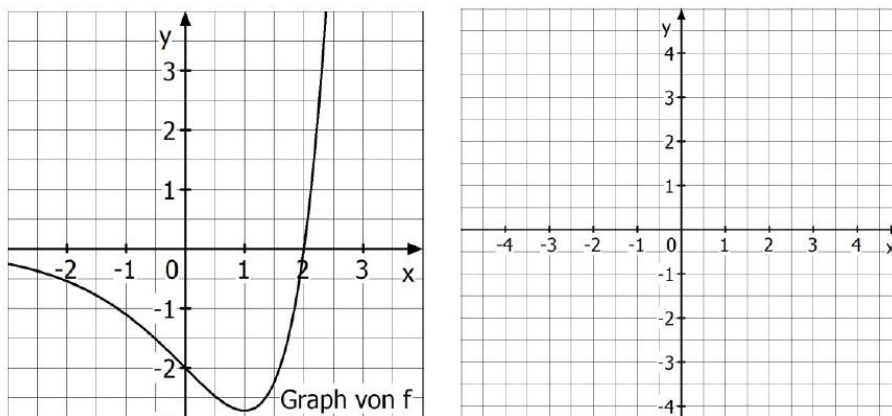


Abb. 571

e<sub>2-3</sub>) Der Graph der Funktion g mit  $g(x) = (x - 2)^2 \cdot e^x$  besitzt den Hochpunkt  $H(0|4)$ . Skizzieren Sie den Graphen von g in das beigefügte Koordinatensystem und erläutern Sie Ihr Vorgehen.

**Teil 2: Nach Abs 353/13.2:** Gegeben ist eine normalverteilte Zufallsgröße  $\mathcal{X}$  mit  $\mu = 20$  und  $\sigma = 4$ .

a) (AFB I) <sub>1</sub>) Skizzieren der Kurve zu dieser Zufallsgröße <sub>1</sub>) Erläutern Sie, wie  $P(\mathcal{X} \leq 21)$ ,  $P(\mathcal{X} = 21)$  und  $P(\mathcal{X} \geq 21)$  bestimmt werden kann. <sub>2</sub>) Geben Sie einen Sachkontext zu einer normalverteilten Zufallsvariablen an. <sub>1</sub>) Beschreiben Sie, wie sich die Kurve ändert, wenn  $\mu$  verändert wird.

b<sub>2</sub>) (AFB II) Beschreiben Sie, wie sich die Kurve ändert, wenn  $\sigma$  verändert wird Nennen und erläutern Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen Binomialverteilung und Normalverteilung.

c<sub>2-3</sub>) (AFB III) Ermitteln Sie eine diskret verteilte Zufallsgröße, deren Histogramm eine ähnliche Form wie die skizzierte Kurve hat.

**16.8.5 Aufgabe 5: (Teil 1: Analysis, Teil 2: Stochastik mit LöVo)**

**Teil 1: Nach Abs 178/7.1.10:** Die Funktion f beschreibt für  $t \geq 0$  die Wachstumsrate einer Pflanze. Die Zeit t wird dabei in Tagen und die Wachstumsrate  $f(t)$  in cm pro Tag angegeben. Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen von f.

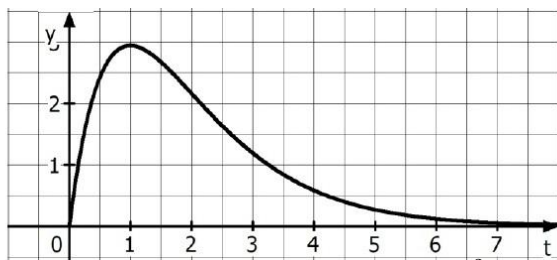
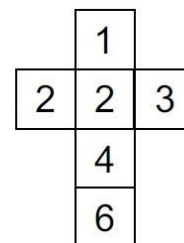


Abb. 572

Zum Teil 2 (Stochastik)

Das Netz des Würfels



a<sub>1</sub>) Bestimmen Sie anhand der Abbildung  $f'(2)$  und  $\int_0^2 f(t)dt$ .

b<sub>1-2</sub>) Bestimmen Sie die ungefähre Höhe der Pflanze nach dem zweiten Tag, wenn die Pflanze zu Beobachtungsbeginn 20 cm hoch war.

c<sub>2</sub>) Die Funktion f hat den Funktionsterm  $f(t) = 8t \cdot e^{-t}$ . Für die Ableitung f' von f gilt:  $f'(t) = (8 - 8t) \cdot e^{-t}$ . Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Wachstumsrate am stärksten abnimmt.

d<sub>3</sub>) F ist eine Stammfunktion von f. Formulieren Sie eine Fragestellung im Sachzusammenhang, die auf die Gleichung  $F(t + 1) = F(t) + 2.5$  führt. <sub>3-4</sub>) Beschreiben Sie, wie man mithilfe der Abbildung eine Lösung dieser Gleichung ermitteln kann.

**Teil 2: (mit LöVo) Nach Kl 10:** Gegeben ist das Netz eines Würfel (siehe Abb. 987/572).

a<sub>1</sub>) (AFB I) Die Zufallsgröße  $\mathcal{X}$  beschreibt die Augenzahl beim einmaligen Würfeln. Bestimmen Sie  $P(\mathcal{X} < 4)$ . Bestimmen Sie den Erwartungswert von  $\mathcal{X}$ .

b) (AFB II) <sub>2</sub>) Erläutern Sie die Bedeutung des Erwartungswerts. <sub>1-2</sub>) Beurteilen Sie, ob folgendes Spiel fair ist: Der Einsatz ist 1€; Beim Würfeln der Augenzahl 2: 3 €; sonst geht der Einsatz verloren. <sub>1-2</sub>)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit beim zweimaligen Würfeln für die Augensumme 8 zu erhalten.  
 1-2) Beschreiben Sie ein Zufallsexperiment mit diesem Würfel, das eine Bernoulli-Kette darstellt.

c) (AFB III) Beurteilen Sie die folgende Aussage: 2-3) 'Der Erwartungswert einer Zufallsgröße ist der Wert, der am wahrscheinlichsten ist.' 3) Beim 100-maligen Würfeln werden sechs Sechser geworfen. Beurteilen Sie die Aussage: 'Ich zweifle an, dass der Würfel ideal ist.'

### 16.8.6 Aufgabe 6: (Teil 1: Geometrie, Teil 2: Analysis ohne LöVo)

**Teil 1: Erst nach Abs 271/10.5:** a<sub>1-2</sub>) Beschreiben Sie, welche gegenseitige Lage eine Ebene und eine Gerade im Raum haben können und wie man diese bestimmen kann. Gegeben sind die Gerade

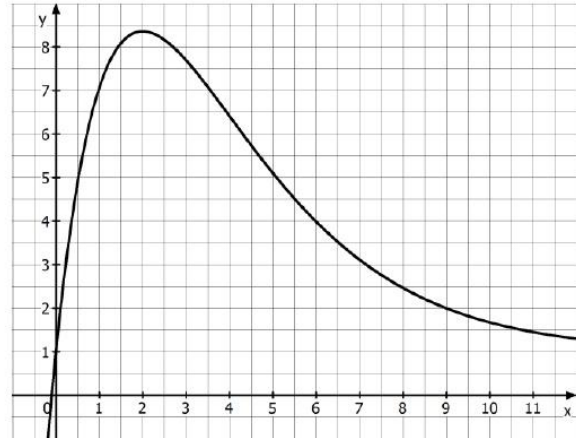
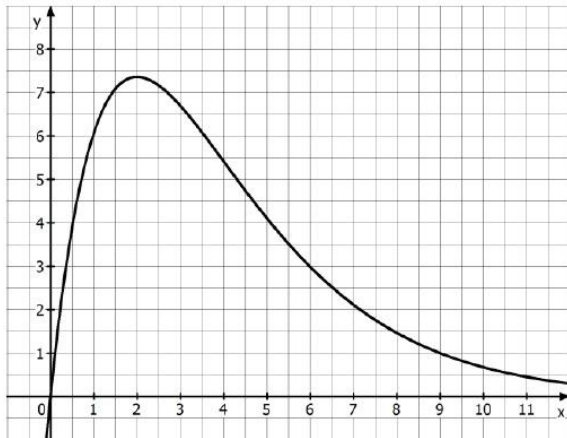
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R} \text{ und die Ebene } E : x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1.$$

b) 1-2) Zeigen Sie, dass  $g$  und  $E$  parallel sind. 2-3) Die Gerade  $h$  schneidet die Gerade  $g$  orthogonal in  $P(2|0|2)$  und verläuft parallel zur Ebene  $E$ . Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden  $h$ .

c<sub>2</sub>) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes, der von  $E$  den Abstand  $3 \cdot \sqrt{21}$  hat.

d<sub>2-3</sub>) Von allen Geraden, die in der Ebene  $E$  liegen und parallel zu  $g$  verlaufen, ist die Gerade  $j$  diejenige mit dem geringsten Abstand zur Geraden  $g$ . Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man eine Gleichung der Geraden  $j$  bestimmen kann.

**Teil 2: Erst nach Abs 178/7.1.10:** Die Funktion  $f$  mit  $f(x) = 10xe^{-0.5x}$  beschreibt für  $x \geq 0$  modellhaft die Schneefallrate in einem Skigebiet ( $x$  in Stunden nach 6 Uhr,  $f(x)$  in cm pro Stunde). Eine der Abbildungen zeigt den Graphen von  $f$ .



a<sub>1</sub>) (AFB I) Welches Schaubild zeigt  $K_f$ . Ermitteln Sie die Schneefallrate nach einer Stunde. Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem es am stärksten schneit (eine graphische Bestimmung ist erlaubt). Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem die Schneefallrate am stärksten abnimmt (nur graphisch).

b<sub>2</sub>) (AFB II) Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem es am stärksten schneit. Ermitteln Sie den Zuwachs an Schneehöhe in den ersten fünf Stunden (nur graphisch)

c<sub>2</sub>) (AFB III) Annahme: die Schneefallrate nimmt vom Zeitpunkt  $x = 4$  an konstant ab. Erläutern Sie, wie man rechnerisch den Zeitpunkt bestimmt, zu dem es dann aufhört zu schneien.

Annahme: Es taut gleichzeitig mit einer Rate von 2 cm pro Stunde.

3) Ermitteln Sie die Zeitspanne, in der die Schneehöhe zunimmt.

### 16.8.7 Aufgabe 7: (Teil 1: Geometrie, Teil 2: Analysis ohne LöVo)

**Teil 1: Erst nach Abs 261/10.3:** Die Punkte  $A(2|1|0)$  und  $B(4|0|2)$  liegen auf der Geraden  $g$ .

a<sub>1</sub>) Prüfen Sie, ob der Punkt  $C(0|2|-2)$  auf der Geraden  $g$  liegt.

b<sub>2</sub>) Zeigen Sie, dass die Gerade  $g$  in der Ebene  $E : x_1 + 2x_2 = 4$  liegt. Ermitteln Sie die Gleichung einer weiteren Ebene, die ebenfalls die Gerade  $g$  enthält.

c<sub>2-3</sub>) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes  $D$ , der auf der Geraden  $g$  liegt und vom Punkt  $A$  den Abstand 9 hat.

d<sub>3-4</sub>) Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man die Koordinaten eines Punktes  $P$  bestimmen kann, der mit den beiden Punkten  $A$  und  $B$  ein gleichseitiges Dreieck bildet.

**Teil 2: Erst nach Abs 178/7.1.10:** Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(t) = -2t^2 + 12t$ .

In dem Intervall, in welchem  $f(t) \geq 0$  ist, beschreibt  $f$  die momentane Zuflussrate von Wasser in ein Becken ( $t$  in Stunden;  $f(t)$  in Liter pro Stunde). Zu Beginn enthält das Becken 20 Liter Wasser.

a<sub>1</sub>) (AFB I) Ermitteln Sie die Nullstellen und die Extrempunkte des Graphen von  $f$ . Erstellen Sie eine Skizze des Graphen von  $f$ .

b) (AFB II) <sub>1-2</sub>) Ermitteln Sie das zugeflossene Wasservolumen in der ersten Stunde. Zusätzlich zum Zufluss sollen konstant 10 Liter pro Stunde abfließen. <sub>2-3</sub>) Bestimmen Sie graphisch die Zeitpunkte des minimalen und des maximalen Wasservolumens. <sub>2</sub>) Berechnen Sie das Wasservolumen nach 3 Stunden.

<sub>2</sub>) Beschreiben Sie das Wasservolumen in Abhängigkeit von der Zeit.

c<sub>3</sub>) (AFB III) Ab  $t = 4$  soll die konstante Abflussrate so geändert werden, dass das Becken zum Zeitpunkt  $t = 6$  leer ist. Erläutern Sie die Vorgehensweise zur Bestimmung der notwendigen konstanten Abflussrate.

### 16.8.8 Aufgabe 8: (Teil 1: Geometrie, Teil 2: Analysis ohne LöVo)

**Teil 1: Teil a+b nach Abs 261/10.3; Teil c nach Abs 271/10.5:**

a<sub>1</sub>) Gegeben sind die Punkte  $A(2|3|-2)$  und  $B(0|1|6)$ .

Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts der Strecke  $AB$ .  $A$  und  $B$  liegen spiegelbildlich bezüglich einer Ebene  $E$ . Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von  $E$ . Gegeben ist die Ebene  $F : 2x_1 + x_2 = 4$ .

b) <sub>1</sub>) Skizzieren Sie die Ebene  $F$  im Koordinatensystem.

<sub>1-2</sub>) Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden, die sowohl in  $F$  als auch in der  $x_1x_2$  Ebene liegt.

c<sub>3</sub>) Ber. Sie die Größe des Winkels, unter dem  $F$  die  $x_1x_3$ -Ebene schneidet. Durch Ersetzen des Koeffizienten 2 in der Ebenengleichung von  $F$  durch eine reelle Zahl  $a$  mit  $a \neq 0$  verändert sich der Schnittwinkel der Ebene mit der  $x_1x_3$ -Ebene. Bestimmen Sie einen Wert von  $a$ , für den dieser Schnittwinkel  $45^\circ$  groß ist. Untersuchen Sie, welche Größe dieser Schnittwinkel für  $a \neq 0$  annehmen kann.

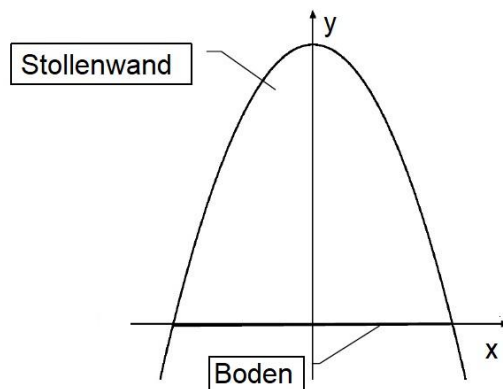
#### Teil 2a nach Kl 10

Der Querschnitt eines Bergstollens wird beschrieben durch die  $x$ -Achse (Boden) und den Teil des Graphen der Funktion  $f$  mit  $f(x) = 8 - \frac{x^2}{2}$ , der oberhalb der  $x$ -Achse verläuft (Stollenwände).

a) (AFB I) <sub>1</sub>) Skalieren Sie die Achsen der Abbildung.

<sub>1</sub>) Erklären Sie, warum der Graph eben jene Form hat.

<sub>1</sub>) Berechnen Sie die Winkel, den die Wände mit dem Boden einschließen. <sub>1-2</sub>) Ermitteln Sie die Stellen, an denen die Wände am steilsten verlaufen.



**Teil b+c nach Abs 178/7.1.10:**

b<sub>1-2</sub>) (AFB II) Schließen Sie auf Eigenschaften von Graphen aus deren Ableitungen. Der Bergstollen ist 50 m lang und läuft voll mit Wasser. Bestimmen Sie das Wasservolumen im Stollen.

c) (AFB III) <sub>2</sub>) Der Bergstollen ist 50 m lang und es steht 3.5 m hoch Wasser im Stollen, bestimmen Sie das Wasservolumens im Stollen. <sub>3</sub>) Ein würfelförmiger Behälter soll so in den Stollen gestellt werden, dass er auf einer seiner Seitenflächen steht. Ermitteln Sie die maximale mögliche Breite des Behälters.

**16.8.9 Aufgabe 9: (Teil 1: Stochastik, Teil 2: Analysis ohne LöVo)**

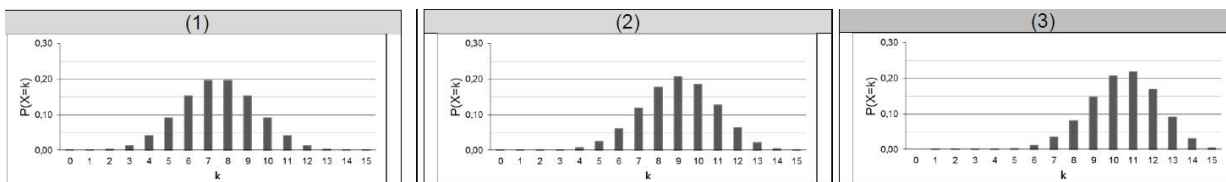
**Teil 1: Nach Kl 10:** In einer Urne befinden sich sechs blaue und vier weiße Kugeln. Betrachtet wird das Zufallsexperiment, bei dem aus der Urne mehrmals nacheinander eine Kugel mit Zurücklegen gezogen wird.

a<sub>1</sub>) Das Zufallsexperiment wird dreimal nacheinander durchgeführt. Geben Sie für die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse jeweils einen Term an:

A : 'Alle Kugeln sind blau.'

B : 'Genau zwei der gezogenen Kugeln sind blau.'

Das Zufallsexperiment wird nun 15 Mal nacheinander durchgeführt. Die Zufallsgröße  $\mathcal{Y}$  gibt die Anzahl der dabei gezogenen blauen Kugeln an.



b<sub>1</sub>) Begründen Sie, dass  $\mathcal{Y}$  binomialverteilt ist. Bestimmen Sie den Erwartungswert von  $\mathcal{Y}$  und erläutern Sie dessen Bedeutung für das durchgeführte Zufallsexperiment. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 5 und höchstens 10 blaue Kugel gezogen werden.

c<sub>2</sub>) Die Histogramme stellen die Binomialverteilungen von Zufallsgrößen bei 15-maliger Durchführung des entsprechenden Bernoulli-Experiments dar. Untersuchen Sie, welches der Diagramme die Verteilung von  $\mathcal{Y}$  darstellt. Untersuchen Sie für die beiden anderen Diagramme, welche Aussagen jeweils über die zugehörige Trefferwahrscheinlichkeit möglich sind.

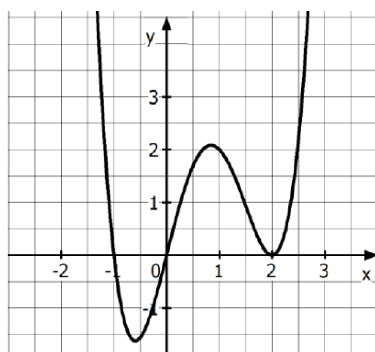


Schaubild von  $f'(x)$

<- Zu Aufgabe 9 Teil 2

Zu Aufgabe 10 Teil 1 ->

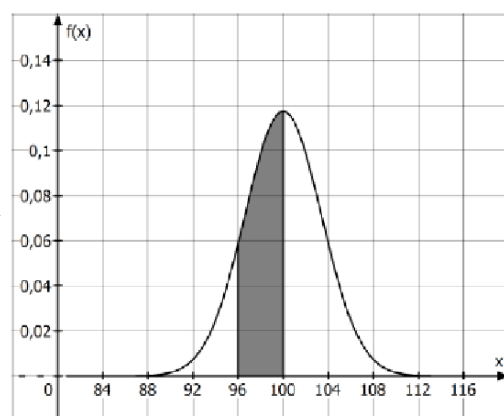


Abb. 573

**Teil 2: Teile a+b nach Kl 10; Teil c+d nach Abs 178/7.1.10:**

In Abb. 990/573 ist ausschnittsweise der Graph der Ableitungsfunktion  $f'$  einer ganzrationalen Funktion  $f$  gegeben.

a<sub>1</sub>) (AFB I) Bestimmen Sie  $f'(1)$ . Erläutern Sie die Bedeutung von  $f'(1) = 2$  für den Graphen von  $f$ . Ermitteln Sie die Nullstellen von  $f'$ .

b) (AFB II) <sub>2</sub>) Erläutern Sie die Bedeutung der Nullstellen von  $f'$  für den Graphen von  $f$ . <sub>2</sub>) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von  $f$ . Bestimmen Sie einen Näherungswert für  $f''(1)$  und erläutern Sie dessen Bedeutung für den Graphen von  $f$ . Untersuchen Sie das Krümmungsverhaltens des Graphen

von  $f$ . <sub>2-3</sub>) Erstellen Sie eine Skizze des Graphen von  $f$  mit den Zusatzinformationen  $f(0) = 0.6$  und  $f(2) = 3$ .

c<sub>2</sub>) Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von  $f'$  im Intervall  $[0; 2]$  mit der  $x$ -Achse einschließt. Begründen, ob  $f(-1) > f(0)$  oder  $f(-1) = f(0)$  oder  $f(-1) < f(0)$ .

d) (AFB III) <sub>2-3</sub>) Bestimmen Sie den minimalen Grad einer Stammfunktion  $F$  von  $f$ .

e) Ermitteln Sie einen möglichen Funktionsterm von  $f'$ .

### 16.8.10 Aufgabe 10: (Teil 1: Stochastik, Teil 2: Analysis mit LöVo)

**Teil 1: Erst nach Abs 353/13.2:** Eine Firma stellt Plastikgussteile her, deren Längen um den Normwert 100 mm schwanken. Messungen zeigen, dass die Länge  $L$  der Gussteile normalverteilt ist mit dem Erwartungswert 100 und der Standardabweichung 3.4 (alle Angaben in mm).

a<sub>1</sub>) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Länge eines Gussteils weniger als 95 mm beträgt. Geben Sie ein anderes Ereignis an, welches dieselbe Wahrscheinlichkeit besitzt.

In Abb. 990/573 ist der Graph der zu dieser Situation gehörenden Glockenkurve dargestellt.

b<sub>1</sub>) Erläutern Sie, wie man mit Hilfe des Graphen den Erwartungswert und die Standardabweichung von  $L$  bestimmen könnte.

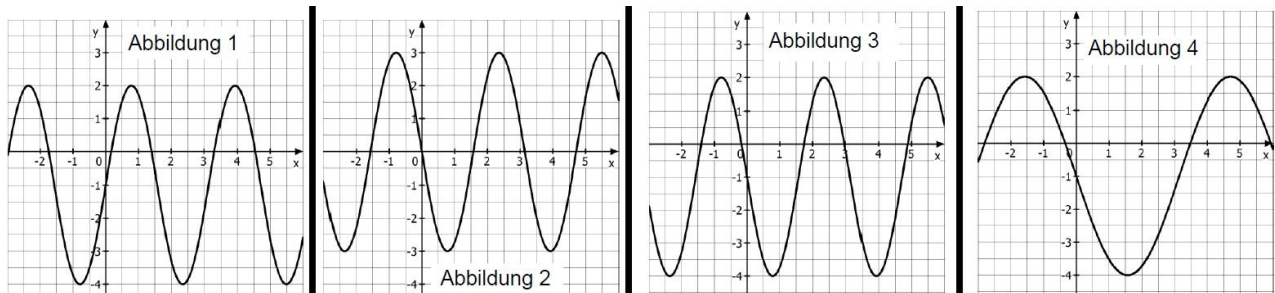
c<sub>1</sub>) In Abb. 990/573 ist eine Fläche grau markiert. Interpretieren Sie diese im Sachzusammenhang.

Die Gussteile werden als mangelhaft eingestuft, wenn deren Länge um mehr als 5 mm vom Normwert abweicht.

d<sub>1-2</sub>) Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit für eine solche Abweichung 14 % beträgt.

e<sub>2</sub>) Beschreiben Sie ein Zufallsexperiment im Sachzusammenhang und geben Sie dazu ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit sich mit dem folgenden Term berechnen lässt:

$$0.14^{200} + 200 \cdot 0.14^{199} \cdot 0.86 + \binom{200}{2} \cdot 0.14^{198} \cdot 0.86^2$$



### Teil 2: Nach Abs 178/7.1.10:

Gegeben sind die Funktion  $f$  mit  $f(x) = -3\sin(2x) - 1$  sowie die obigen vier Graphen.

a<sub>1</sub>) (AFB I+II) Nennen Sie charakteristische Eigenschaften des Graphen von  $f$ , die man ohne Rechnung dem Funktionsterm entnehmen kann. Ordnen Sie einen der vier Graphen der Funktion  $f$  zu. Begründen Sie Ihre Wahl. Bestimmen Sie eine Stammfunktion  $F$  von  $f$ . Untersuchen Sie die Symmetrieeigenschaften des Graphen von  $f'$ .

Zur Abbildung 2 gehört eine trigonometrische Funktion  $g$ . Bestimmen Sie einen Fktnsterm von  $g(x)$ .

b<sub>2</sub>) (AFB II) Es gilt  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx = -3$ . Bestimmen Sie den Wert von  $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} g(x)dx$  ohne weitere Rechnung.

c) (AFB III) <sub>3</sub>) Erläutern Sie z.B. mit Hilfe der Symmetrie, dass die Anzahl der Schnittpunkte einer Ursprungsgerade und des Graphen von  $g$  nicht gerade (z.B. 266) sein kann. <sub>2-3</sub>) Leiten Sie  $\int_{-1}^1 f(x)dx = -2$  ausgehend von der Symmetrie der Sinuskurve her.

## 16.9 Aufgaben aus dem IQB-Pool

Was sollte ich aus dem IQB-Pool nach welcher Unterrichtseinheit können?

- UE 11<sub>2</sub>** 992/16.9.1 A5; 994/16.9.2 A1; 996/16.9.3 A1,A5; 998/16.9.4 Ag I.3;  
1005/16.9.6 Ag III.2 bis III.5, III.7;  
**UE 11<sub>3</sub>** 992/16.9.1 A1 + A3; 994/16.9.2 A2,A3,A5; 996/16.9.3 A3;  
998/16.9.4 Ag I.2, I.4, I.5; 1001/16.9.5 Ag II.1; 1005/16.9.6 Ag III.1, III.8;  
**UE 11<sub>5</sub>** 996/16.9.3 G3; 1001/16.9.5 Ag II.2, II.3; **UE 11<sub>6</sub>** 992/16.9.1 G1, G2, G5;  
**UE 12<sub>1</sub>** 994/16.9.2 G1-G3; 996/16.9.3 G5; 998/16.9.4 Ag I.9, I.10;  
**UE 12<sub>4</sub>** 998/16.9.4 Ag I.6, I.7, I.8, I.11; 1001/16.9.5 Ag II.4 bis II.7; 1005/16.9.6 Ag III.9;  
**UE 11<sub>7</sub>** 1001/16.9.5 Ag II.14, II.15, II.16; **UE 11<sub>8</sub>** 1001/16.9.5 Ag II.8 bis II.13;

Die Aufgaben mit Lösungen finden Sie auch unter IQB21.SLT.biz (oder IQB.slt.biz).

### 16.9.1 IQB 2021 (auch Basiskurs)

**G1)** (Nach Abs 258/10.2; BAg: 253/669 + 260/701d) Gegeben sind die Punkte  $A(2|-3|1)$  und  $B(2|3|1)$ . **a<sub>1</sub>)** (0.5 VP) Begründen Sie, dass die Gerade durch  $A$  und  $B$  parallel zur  $y$ -Achse verläuft. **b<sub>2-3</sub>)** (2 VP) Der Punkt  $C$  liegt auf der  $y$ -Achse. Die Gerade durch  $A$  und  $C$  steht senkrecht zur Gerade durch  $B$  und  $C$ . Bestimmen Sie die Koordinaten aller Punkte, die die beschriebenen Eigenschaften des Punkts  $C$  haben.

**G2)** (Nach Abs 258/10.2, BAg 259/696, 259/697 + 260/701d) Gegeben sind die Punkte  $A(0|0|0)$ ,  $B(3|4|1)$ ,  $C(1|7|3)$  und  $D(-2|3|2)$ . **a<sub>1</sub>)** (0.5 VP) Weisen Sie nach, dass das Viereck  $ABCD$  ein Parallelogramm ist. **b<sub>3</sub>)** (2 VP) Der Punkt  $T$  liegt auf der Strecke  $\overline{AC}$ . Das Dreieck  $\triangle ABT$  hat bei  $B$  einen rechten Winkel. Ermitteln Sie das Verhältnis der Länge der Strecke  $\overline{AT}$  zur Länge der Strecke  $\overline{CT}$ .

**G3)** (Nach Abs 271/10.5, BAg 272/750) Gegeben sind der Punkt  $P(-1|7|2)$  und die Ebene  $E: x_1 + 3x_2 = 0$ . **a<sub>1</sub>)** (0.5 VP) Zeigen Sie, dass  $P$  nicht in  $E$  liegt. **b<sub>2</sub>)** (2 VP) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts, der entsteht, wenn  $P$  an  $E$  gespiegelt wird.

**G4)** (Nur LK, nach Abs 271/10.5, BAg 271/743) Betrachtet werden die Ebene  $E: x_1 - x_2 + x_3 = 0$  und für  $a \in \mathbb{R}$  die Geraden  $g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1+a \\ 2 \end{pmatrix}$  mit  $t \in \mathbb{R}$ .

**a<sub>1-2</sub>)** (1 VP) Bestimmen Sie denjenigen Wert von  $a$ , für den die Gerade  $g_a$  senkrecht zu  $E$  steht.

**b<sub>2</sub>)** (1.5 VP) Untersuchen Sie, ob es einen Wert von  $a$  gibt, für den die Gerade  $g_a$  in  $E$  liegt.

**A1)** (Nach Abs 182/7.1.15; BAg 141/343 + 179/480) Gegeben ist die in  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $f: x \mapsto \sin(x)$ . Abb. 993/574a zeigt den Graphen  $G_f$  von  $f$  sowie die Tangenten an  $G_f$  in den dargestellten Schnittpunkten mit der  $x$ -Achse. **a<sub>1-2</sub>)** (0.5 VP) Zeigen Sie, dass diejenige der beiden Tangenten, die durch den Koordinatenursprung verläuft, die Steigung 1 hat. **b<sub>2</sub>)** (2.5 VP) Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das von  $G_f$  und den beiden Tangenten eingeschlossen wird.

**A2)** (Nur LK, nach Abs 145/6.2; Kl. 10, BAg 146/361 + 156/397) Gegeben ist eine in  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^4 - kx^2$ , wobei  $k$  eine positive reelle Zahl ist. Abb. 993/574b zeigt den Graphen von  $f$ . **a<sub>1-2</sub>)** (0.5 VP) Zeigen Sie, dass  $f'(x) = 2x \cdot (2x^2 - k)$  eine Gleichung der ersten Ableitungsfunktion von  $f$  ist. **b<sub>2</sub>)** (2 VP) Die beiden Tiefpunkte des Graphen von  $f$  haben jeweils die  $y$ -Koordinate  $-1$ . Ermitteln Sie den Wert von  $k$ .

**A3)** (Nach Abs 182/7.1.15, BAg 162/419 + 146/361 + 167/433) Die Verbreitung eines Computervirus lässt sich modellhaft mithilfe der in  $\mathbb{R}$  definierten Funktion  $f$  mit  $f(t) = 2t \cdot e^{-\frac{t}{100}}$  beschreiben. Dabei ist  $t$  die Zeit in Tagen, die seit der ersten Infizierung eines Computers mit dem Virus vergangen ist, und  $f(t)$  die Rate der Infizierungen zum Zeitpunkt  $t$  in der Einheit 'Eintausend Computer pro Tag'. **a<sub>1-2</sub>)** (2 VP) Zeigen Sie, dass  $f'(t) = 2(1 - \frac{t}{100}) \cdot e^{-\frac{t}{100}}$  ein Term der ersten Ableitungsfkt von  $f$  ist. **b<sub>1-2</sub>)** (1 VP) Geben Sie den Zeitpunkt an, zu dem die Rate der Infizierungen am größten ist.



c<sub>2-3</sub>) (2 VP) Betrachtet wird der Zeitraum der zweiten Woche nach der ersten Infizierung eines Computers mit dem Virus. Geben Sie einen Term an, mit dem die Anzahl der Computer berechnet werden kann, die in diesem Zeitraum infiziert werden.

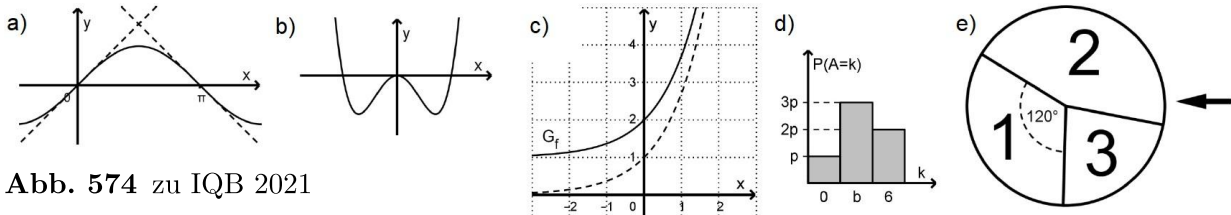


Abb. 574 zu IQB 2021

**A4)** (Nach Abs. 96/5.3, BA<sub>g</sub> 106/274) Gegeben sind die in  $\mathbb{R}$  definierten Funktionen  $f$  und  $g$ . Der Graph von  $f$  ist symmetrisch bezüglich der  $y$ -Achse, der Graph von  $g$  ist symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs. Beide Graphen haben einen Hochpunkt im Punkt  $(2|1)$ . **a<sub>1-2</sub>)** (1 VP) Geben Sie für die Graphen von  $f$  und  $g$  jeweils die Koordinaten und die Art eines weiteren Extrempunkts an. **b<sub>3-4</sub>)** (1.5 VP) Untersuchen Sie die in  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $h$  mit  $h(x) = f(x) \cdot (g(x))^3$  im Hinblick auf eine mögliche Symmetrie ihres Graphen.

**A5)** (Nach Abs. 159/6.3; BA<sub>g</sub> 141/343) Abb. 993/574c zeigt den Graphen  $G_f$  einer in  $\mathbb{R}$  definierten Funktion  $f$  sowie den Graphen der ersten Ableitungsfunktion von  $f$ .

**a<sub>1</sub>)** (0.5 VP) Geben Sie die Steigung der Tangente an  $G_f$  im Punkt  $(0|f(0))$  an.

**b<sub>3</sub>)** (2 VP) Betrachtet wird die Schar der Funktionen  $g_c$  mit  $c \in \mathbb{R}^+$ . Der Graph von  $g_c$  geht aus  $G_f$  durch Streckung mit dem Faktor  $c$  in  $y$ -Richtung hervor. Die Tangente an den Graphen von  $g_c$  im Punkt  $(0|g_c(0))$  schneidet die  $x$ -Achse. Bestimmen Sie rechnerisch die  $x$ -Koordinate des Schnittpunkts.

**W1)** (nach Abs. 320/12.2, Kl. 9; BA<sub>g</sub> 326/822) Die Vierfeldertafel gehört zu einem Zufallsexperiment mit den Ereignissen  $A$  und  $B$ . Für die Wahrscheinlichkeit  $p$  gilt  $p \neq 0$ .

**a<sub>1</sub>)** (3 VP) Vervollständigen Sie die Vierfeldertafel.

**a<sub>2</sub>)** Zeigen Sie, dass  $p$  nicht den Wert  $\frac{1}{5}$  haben kann.

**b<sub>2-3</sub>)** (2 VP) Für einen bestimmten Wert von  $p$  sind  $A$  und  $B$  stochastisch unabhängig. Ermitteln Sie diesen Wert von  $p$ .

	$B$	$\bar{B}$	
$A$	$p$		$3p$
$\bar{A}$	$4p$		$1 - 3p$

**W2)** (Nach Abs. 330/12.3, Kl. 10; BA<sub>g</sub> 340/858) Die Zufallsgröße  $\mathcal{X}$  ist binomialverteilt mit den Parametern  $n = 100$  und  $p$ . Der Erwartungswert von  $\mathcal{X}$  ist 50. **a<sub>1-2</sub>)** (3 VP) Berechnen Sie die Standardabweichung von  $\mathcal{X}$ . **b<sub>2</sub>)** (2 VP) Die Wahrscheinlichkeit  $P(X \geq 61)$  beträgt etwa 2%. Bestimmen Sie unter Verwendung dieses Werts den zugehörigen Wert für die Wahrscheinlichkeit  $P(40 \leq \mathcal{X} \leq 60)$ .

**W3)** (Nach Abs. 320/12.2, Kl. 9; BA<sub>g</sub> 323/813) Bei einem Gewinnspiel beträgt der Einsatz für die Teilnahme 3€. Die Auszahlung in € wird durch die Zufallsgröße  $A$  beschrieben. Abb. 993/574c zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $A$ . **a<sub>1-2</sub>)** (1 VP) Zeigen Sie, dass  $p$  den Wert  $\frac{1}{6}$  hat.

**b<sub>1-2</sub>)** (2 VP) Bei wiederholter Durchführung des Spiels ist zu erwarten, dass sich auf lange Sicht Einsätze und Auszahlungen ausgleichen. Berechnen Sie den Wert von  $b$ .

**c<sub>1-2</sub>)** (2 VP) Beschreiben Sie, wie das Gewinnspiel unter Verwendung eines Behälters sowie roter, grüner und blauer Kugeln durchgeführt werden könnte.

**W4)** (Nach Abs. 312/12.1, Kl. 8; BA<sub>g</sub> 334/845) In einem Behälter befinden sich Kugeln, von denen jede dritte gelb ist. **a<sub>1</sub>)** (1 VP) Aus dem Behälter wird zweimal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Kugeln gelb sind. **b<sub>2-3</sub>)** (4 VP) Im Behälter werden zwei gelbe Kugeln durch zwei blaue Kugeln ersetzt. Anschließend wird aus dem Behälter erneut zweimal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Kugeln gelb sind, beträgt nun  $\frac{1}{16}$ . Ermitteln Sie, wie viele gelbe Kugeln sich nach den beschriebenen Vorgängen im Behälter befinden.

**W5)** (Nach Abs. 320/12.2, Kl. 9; BA<sub>g</sub> 323/813) **a<sub>2-3</sub>)** Für ein Spiel wird ein Glücksrad verwendet. Abb. 993/574e zeigt dieses Glücksrad schematisch. Die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einmaligem Drehen die Zahl 2 zu erzielen, wird mit  $p$  bezeichnet. Bei dem Spiel bezahlt jeder Spieler zunächst einen Einsatz von 1 €. Anschließend dreht er das Glücksrad zweimal. Erzielt er dabei zwei Zahlen, deren Summe

mindestens 5 ist, wird ihm der Wert der Summe als Betrag in € ausgezahlt; ansonsten erfolgt keine Auszahlung. Wird das Spiel wiederholt durchgeführt, so ist zu erwarten, dass sich auf lange Sicht die Einsätze der Spieler und die Auszahlungen ausgleichen. Leiten Sie unter Verwendung der beschriebenen Spielregeln eine Gleichung her, mit der der Wert von  $p$  berechnet werden könnte; erläutern Sie dabei Ihr Vorgehen.

### 16.9.2 IQB 2020

**A1)** (Nach Abs. 159/6.3, BAg 149/375) Abb.994/575i zeigt den Graphen der Funktion  $f$  mit  $f(x) = x \cdot e^{-x}$  und  $x \in \mathbb{R}$ . Betrachtet werden die Dreiecke mit den Eckpunkten  $O(0|0)$ ,  $P(a|0)$  und  $Q(a|f(a))$  mit  $a \in \mathbb{R}^+$ . **a<sub>2</sub>)** (2 VP) Begründen Sie, dass der Flächeninhalt jedes dieser Dreiecke mit dem Term  $\frac{1}{2}a^2e^{-a}$  bestimmt werden kann. **b<sub>2</sub>)** (3 VP) Unter den betrachteten Dreiecken hat eines den größten Flächeninhalt. Bestimmen Sie den zugehörigen Wert von  $a$ .

**A2)** (Nach Abs 182/7.1.15, BAg 141/343 + 179/480) Gegeben sind die in  $\mathbb{R}$  definierten Funktionen  $f : x \mapsto \sin(x)$  und  $g : x \mapsto x$ . Die Graphen von  $f$  und  $g$  haben in ihrem einzigen gemeinsamen Punkt  $O(0|0)$  die gleiche Steigung. **a<sub>2-3</sub>)** (3 VP) Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von  $f$ , der Graph von  $g$  und die Gerade mit der Gleichung  $x = \pi$  einschließen. **b<sub>2-3</sub>)** (2 VP) Geben Sie eine Gleichung einer Tangente an den Graphen von  $f$  an, die die beiden folgenden Eigenschaften hat:

(I) Die Tangente verläuft parallel zum Graphen von  $g$ . (II) Die Tangente enthält nicht den Punkt  $O$ .

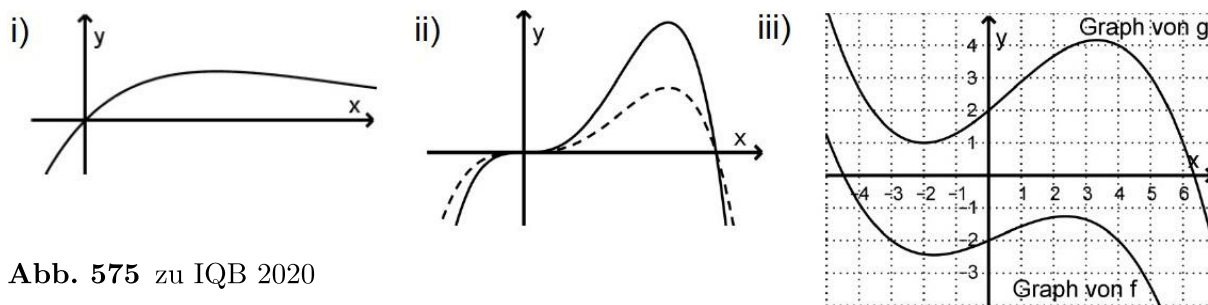


Abb. 575 zu IQB 2020

**A3)** (Nur LK; nach Abs 182/7.1.15, BAg 146/361 + 179/480) Gegeben ist die Schar der in  $\mathbb{R}$  definierten Funktionen  $f_k : x \mapsto -k \cdot (x^4 - 4x^3)$  mit  $k \in \mathbb{R}^+$ . Alle Funktionen der Schar haben die Nullstellen 0 und 4. Die Abbildung 994/575ii stellt zwei Graphen der Schar dar. **a<sub>2</sub>)** (2 VP) Bestimmen Sie die  $x$ -Koordinate des Hochpunkts des Graphen von  $f_k$ . **b<sub>3</sub>)** (3 VP) Zeigen Sie, dass das Flächenstück, das die Graphen von  $f_k$  und  $f_{k+1}$  einschließen, für alle Werte von  $k$  den gleichen Inhalt hat.

**A4)** (Nach Abs 137/6.1; Kl. 10; BAg 142/348 + 93/230) **a<sub>2-3</sub>)** Die Abbildung 994/575iii zeigt die Graphen der ganzrationalen Funktionen  $f$  und  $g$ . Betrachtet wird die Funktion  $h$  mit  $h(x) = g(f(x))$ . Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen von  $h$  im Punkt  $(4|h(4))$ .

**A5)** (Nur LK; nach Abs 182/7.1.15, BAg 161/416 + 100/253) Für jeden Wert von  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ist eine Funktion  $f_a$  gegeben mit  $f_a(x) = a \cdot (x-2)^3$  und  $x \in \mathbb{R}$ . **a<sub>1-2</sub>)** (1 VP) Zeigen Sie, dass die in  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $F$  mit  $F(x) = \frac{1}{2} \cdot (x-2)^4 + 3$  eine Stammfunktion von  $f_2$  ist.

**b<sub>3</sub>)** (nur LK) Untersuchen Sie mithilfe von Skizzen, für welche Werte von  $a$  sich unter den Stammfunktionen von  $f_a$  solche befinden, die nur negative Funktionswerte haben.

**W1)** (nach Abs. 330/12.3; Kl. 10, BAg: 335/849 + 339/857) Gegeben sind die binomialverteilten Zufallsgrößen  $\mathcal{X}$  und  $\mathcal{Y}$ .  $\mathcal{X}$  hat die Parameter  $n = 40$  und  $p_x = 0.65$ . **a<sub>1</sub>)** (1 VP) Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit  $P(\mathcal{X} = 30)$  berechnet werden kann. **b<sub>2-3</sub>)** (2 VP) Abb.995/576i zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $\mathcal{X}$ . Für einen Wert von  $k$  stellen die grau markierten Säulen die Wahrscheinlichkeit  $P(\mathcal{X} \leq k)$  dar. Ermitteln Sie diesen Wert von  $k$ . **c<sub>3</sub>)** (2 VP) Die Zufallsgröße  $\mathcal{Y}$  hat ebenfalls den Parameter  $n = 40$ . Geben Sie alle Werte von  $p_y$  mit  $0 < p_y < 1$  an, für die die Wahrscheinlichkeit  $P(\mathcal{Y} = 10)$  größer ist als die Wahrscheinlichkeit  $P(\mathcal{Y} = 30)$ .

**W2)** (Nach Abs. 320/12.2, Kl. 9; BAg 323/813) Für ein Spiel werden ein Tetraeder und ein Würfel verwendet. Die Seiten des Tetraeders sind mit den Zahlen 1 bis 4 durchnummeriert, die des Würfels

mit den Zahlen 1 bis 6. Ebenso wie beim Werfen des Würfels werden beim Werfen des Tetraeders alle Zahlen mit gleicher Wahrscheinlichkeit erzielt. Zu Beginn des Spiels wird ein Einsatz von 5 € geleistet. Anschließend wird das Tetraeder einmal geworfen. Wird dabei die Zahl 3 erzielt, wird das Tetraeder ein weiteres Mal geworfen, andernfalls einmal der Würfel. Nur dann, wenn bei genau einem der beiden Würfe die Zahl 3 erzielt wird, erfolgt eine Auszahlung.

**a<sub>1-2</sub>**) (2 VP) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einmaliger Durchführung des Spiels mindestens einmal die Zahl 3 zu erzielen,  $\frac{3}{8}$  beträgt. **b<sub>1-2</sub>**) (3 VP) Bei vielfacher Durchführung des Spiels ist zu erwarten, dass sich Einsätze und Auszahlungen mit der Zeit ausgleichen. Ermitteln Sie die Höhe der Auszahlung.

**W3**) (Nach Abs. 320/12.2; Kl. 9, BAg 323/813) Abb.995/576ii zeigt das Netz eines Würfels.

**a<sub>1</sub>**) (2 VP) Der Würfel wird zweimal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der beiden geworfenen Zahlen 4 ist.

**b<sub>2</sub>**) (3 VP) Die Zahlen '1' und '3' werden jeweils durch eine neue Zahl ersetzt. Das Verhältnis der beiden neuen Zahlen ist ebenfalls 1:3. Betrachtet man bei einmaligem Werfen des geänderten Würfels die geworfene Zahl, so ist der zugehörige Erwartungswert 4. Ermitteln Sie die beiden neuen Zahlen.

**W4**) (Nach Abs. 312/12.1, Kl. 8, BAg 334/845) **a<sub>1</sub>**) (1 VP) Eine Urne enthält einhundert Kugeln, davon sind zwanzig weiß. Zwei Kugeln werden nacheinander zufällig gezogen; dabei wird die erste gezogene Kugel nicht zurückgelegt, bevor man die zweite zieht. Geben Sie in diesem Zusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit durch den Term  $\frac{20}{100} \cdot \frac{19}{99}$  angegeben wird.

**b<sub>3</sub>**) (4 VP) Eine andere Urne enthält ebenfalls einhundert Kugeln; für die Anzahl  $w$  der enthaltenen weißen Kugeln gilt  $1 < w < 99$ . Auch aus dieser Urne werden zwei Kugeln nacheinander zufällig gezogen. Die erste gezogene Kugel ist weiß. Betrachtet werden zwei Fälle: 1. Fall: Die erste gezogene Kugel wird nicht zurückgelegt, bevor man die zweite zieht. 2. Fall: Die erste gezogene Kugel wird zurückgelegt, bevor man die zweite zieht. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass auch die zweite gezogene Kugel weiß ist, beträgt im 1. Fall  $p$ , im 2. Fall ist sie 2% von  $p$  größer. Berechnen Sie den Wert von  $w$ .

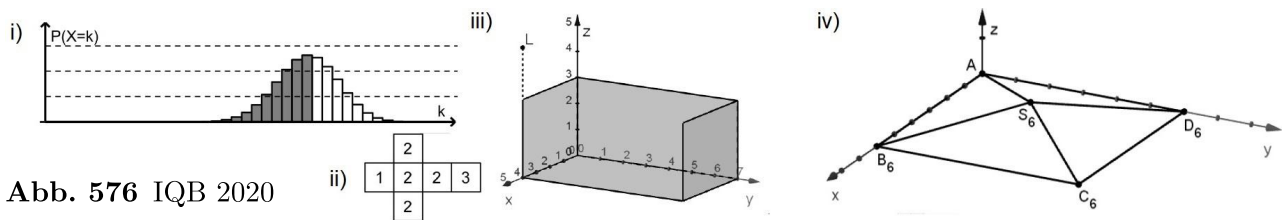


Abb. 576 IQB 2020

**W5**) (nach Abs. 330/12.3; Kl. 10, BAbs 341/12.3.11) Eine Gärtnerei, die Tulpen in den Farben Gelb, Orange und Rot züchtet, stellt Sträuße mit jeweils 15 Tulpen zusammen.

**a<sub>2</sub>**) (2 VP) Einer der Sträuße soll Tulpen in zwei verschiedenen Farben enthalten. Die Anzahl der Möglichkeiten, diesen Strauß zusammenzustellen, kann mit dem Term  $14 \cdot \binom{3}{2}$  berechnet werden. Beschreiben Sie für jeden der beiden Faktoren die Bedeutung im Sachzusammenhang.

**b<sub>2-3</sub>**) (3 VP) In einem der Sträuße sollen zu jeder der drei Farben mindestens vier und höchstens sechs Tulpen enthalten sein. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, diesen Strauß zusammenzustellen.

**G1**) (Nach Abs 261/10.3, BAg 256/683) In einem Koordinatensystem ist ein gerader Zylinder mit dem Radius 5 und der Höhe 10 gegeben, dessen Grundfläche in der  $x_1x_2$ -Ebene liegt.  $M(8|5|10)$  ist der Mittelpunkt der Deckfläche.

**a<sub>2</sub>**) (2 VP) Weisen Sie nach, dass der Punkt  $P(5|1|0)$  auf dem Rand der Grundfläche des Zylinders liegt. **b<sub>1-2</sub>**) (3 VP) Unter allen Punkten auf dem Rand der Deckfläche hat der Punkt  $S$  den kleinsten Abstand von  $P$ , der Punkt  $T$  den größten. Geben Sie die Koordinaten von  $S$  an und bestimmen Sie die Koordinaten von  $T$ .

**G2**) (Nach Abs 261/10.3, BAg 263/713) **a<sub>3</sub>**) Die Abbildung 995/576iii zeigt in einem Koordinatensystem modellhaft eine 7m breite Theaterkulisse. Die linke Seitenwand liegt im Modell in der  $xz$ -Ebene, die rechte Seitenwand ist dazu parallel. Ein auf der Bühne stehender Gegenstand wird von einer Lampe beleuchtet. Die Lampe wird im Modell durch den Punkt  $L(4|0|5)$  dargestellt, die Spitze des Gegenstands durch den Punkt  $S(1|6|2)$ . Untersuchen Sie rechnerisch, ob der Schatten der Spitze auf der rechten Seitenwand liegt.

**G3)** (Nach Abs 261/10.3, BAg 265/724) In einem Koordinatensystem werden die geraden Pyramiden  $AB_tC_tD_tS_t$  mit  $A(0|0|0)$ ,  $B_t(t|0|0)$ ,  $C_t(t|t|0)$  und  $D_t(0|t|0)$  und  $t \in \mathbb{R}^+$  betrachtet; die Punkte  $S_t$  haben jeweils die  $z$ -Koordinate  $\frac{t}{8}$ . Abb.995/576iv zeigt die Pyramide für  $t = 6$ . Die Ebene  $E : 3y + 4z = 24$  enthält den Punkt  $S_t$  für  $t = 12$ . **a<sub>1-2</sub>)** (1 VP) Begründen Sie, dass  $E$  parallel zur  $x$ -Achse verläuft. **b<sub>3</sub>)** (Nur LK; 4 VP) Untersuchen Sie, für welche Werte von  $t$  die Pyramide und die Ebene  $E$  gemeinsame Punkte haben.

**16.9.3 IQB 2019 + früher**

**A1)** (Nur LK; nach Abs. 159/6.3, BAg 163/423) Abb. 996/577i zeigt den Graphen  $G_g$  einer in  $\mathbb{R}$  definierten, differenzierbaren Funktion  $g$ . Betrachtet wird eine in  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $f$ , für deren erste Ableitungsfunktion  $f'(x) = e^{g(x)}$  gilt. **a<sub>3</sub>)** (2 VP) Untersuchen Sie, ob der Graph von  $f$  einen Extrempunkt hat. **b<sub>3</sub>)** (3 VP) Untersuchen Sie, ob der Graph von  $f$  einen Wendepunkt hat.

**A2)** (Nur LK; nach Abs. 137/6.1; Kl. 10, BAg 141/343, 2 VP) Abb. 996/577ii zeigt den Graphen  $G_f$  der in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  definierten Funktion  $f : x \rightarrow \frac{4}{x^2}$ .  $G_f$  ist symmetrisch bezüglich der  $y$ -Achse. **a<sub>2-3</sub>)** (2 VP) Die Gerade, die parallel zur  $x$ -Achse durch den Punkt  $P(0|p)$  verläuft, schneidet  $G_f$  in zwei Punkten. Der Abstand dieser beiden Schnittpunkte ist 1. Berechnen Sie den Wert von  $p$ . **b<sub>2-3</sub>)** (3 VP) Die Koordinatenachsen schließen mit der Tangente an  $G_f$  in einem Punkt  $Q(u|f(u))$  mit  $u > 0$  ein gleichschenkliges Dreieck ein. Berechnen Sie die Koordinaten von  $Q$ .

**A3)** (Nach Abs. 182/7.1.15, BAg 179/480) **a<sub>2-3</sub>)** Das Rechteck  $ABCD$  mit  $A(1|0)$ ,  $B(4|0)$ ,  $C(4|2)$  und  $D(1|2)$  wird durch den Graphen der in  $\mathbb{R}^+$  definierten Funktion  $f$  mit  $f(x) = 2 - \frac{8}{x^2}$  in zwei Teilflächen zerlegt. Ermitteln Sie das Verhältnis der Inhalte der beiden Teilflächen.

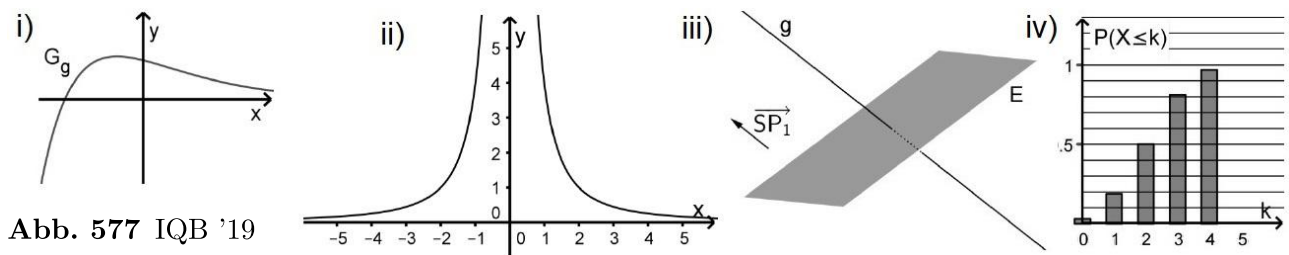


Abb. 577 IQB '19

**A4)** (Nur LK; nach Abs. 159/6.3; BAg 99/249c, 160/411e, 141/343) Gegeben ist die Funktion  $f : x \mapsto \ln(e^2 - x)$  mit maximalem Definitionsbereich  $ID$ . **a<sub>2</sub>)** (1 VP) Geben Sie  $ID$  an. **b<sub>2</sub>)** (1 VP) Bestimmen Sie die Nullstelle von  $f$ . **c<sub>2</sub>)** (3 VP) Weisen Sie rechnerisch nach, dass  $y = \frac{-1}{e^2} \cdot x + 2$  eine Gleichung der Tangente an den Graphen von  $f$  im Punkt  $(0|f(0))$  ist.

**G1)** (Nach Abs. 271/10.5, BAg 272/750) Gegeben sind die Ebene  $E : 2x_1 + x_2 - x_3 - 4 = 0$  sowie der Punkt  $P(-3|0|2)$ . **a<sub>1</sub>)** (1 VP) Zeigen Sie, dass der Punkt  $P$  nicht in der Ebene  $E$  liegt. **b<sub>2</sub>)** (4 VP) Spiegelt man den Punkt  $P$  an der Ebene  $E$ , so erhält man den Punkt  $P'$ . Ermitteln Sie die Koordinaten von  $P'$ .

**G2)** (Nach Abs. 271/10.5, BAg 269/735) Das Dreieck  $ABC$  mit den Punkten  $A(3|3|3)$ ,  $B(6|7|3)$  und  $C(2|10|3)$  ist im Punkt  $B$  rechtwinklig und liegt in der Ebene mit der Gleichung  $z = 3$ . **a<sub>1</sub>)** (2 VP) Weisen Sie nach, dass das Dreieck  $ABC$  den Flächeninhalt 252 besitzt. **b<sub>2</sub>)** (3 VP) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punkts  $D$  so, dass das Volumen der Pyramide  $ABCD$  gleich 25 ist.

**G3)** (Nach Abs. 276/10.6, BAg 280/774) Untersucht werden die Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen. **a<sub>2</sub>)** (2 VP) Bestimmen Sie die Lösungsmenge Gleichungssystems LGS 1.

<b>LGS 1:</b>	$3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 = 13$	<b>LGS 2:</b>	$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 = 4$
	$x_2 + 2 \cdot x_3 = 5$		$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 5$
	$x_2 + x_3 = 3$		$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + p \cdot x_3 = 4$

**b<sub>3</sub>)** (Nur LK; 3 VP) Betrachtet wird das Gleichungssystem LGS 2 mit einem Parameter  $p \in \mathbb{R}$ : Geben Sie einen Wert von  $p$  an, für den das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat. Zeigen Sie, dass es keinen Wert von  $p$  gibt, für den das Gleichungssystem genau eine Lösung hat.

**G4)** (Nach Abs. 261/10.3, BAg 271/740) Gegeben sind die Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ mit } r \in \mathbb{R} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ mit } s \in \mathbb{R}.$$

**a<sub>1</sub>)** (2 VP) Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von  $g$  und  $h$  an. Zeigen Sie, dass  $g$  und  $h$  senkrecht zueinander verlaufen. **b<sub>2</sub>)** (3 VP) Die Ebene  $E$  enthält die Geraden  $g$  und  $h$ . Bestimmen Sie eine Gleichung von  $E$  in Koordinatenform.

**G5)** (Nach Abs 261/10.3, BAg 263/713) Die Gerade  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$  mit  $r \in \mathbb{R}$  und die Ebene  $E: x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2$  schneiden sich im Punkt  $S$ . **a<sub>1-2</sub>)** (3 VP) Berechnen Sie die Koordinaten von  $S$ . **b<sub>1-2</sub>)** (2 VP) Der Punkt  $P$  liegt auf  $g$ , aber nicht in  $E$ . Abb. 996/577iii zeigt die Ebene  $E$ , die Gerade  $g$  sowie einen Repräsentanten des Vektors  $\overrightarrow{SP_1}$ . Für den Punkt  $P_2$  gilt  $\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OP_1} - 4 \cdot \overrightarrow{SP_1}$ , wobei  $O$  den Koordinatenursprung bezeichnet. Zeichnen Sie die Punkte  $S$ ,  $P_1$  und  $P_2$  in Abb. 996/577iii ein.

**W1)** (Nach Abs. 330/12.3; Kl. 10; BAg 335/849; 2 VP)

**a<sub>2</sub>)** Abb. 996/577iv zeigt kumulierte Werte der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße  $\mathcal{X}$  mit dem Parameter  $n = 5$ . Zeichnen Sie in Abb. 996/577iv den zu  $k = 5$  gehörenden Wert ein und ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass  $\mathcal{X}$  den Wert 2 annimmt.

**b<sub>3</sub>)** (3 VP) Betrachtet wird eine binomialverteilte Zufallsgröße  $\mathcal{Y}$  mit den Parametern  $n = 5$  und  $p > 0$ . Es gilt  $P(\mathcal{Y} = 4) = 10 \cdot P(\mathcal{Y} = 5)$ . Berechnen Sie den Wert von  $p$ .

**W2)** (Nach Abs. 312/12.1, Kl. 8; BAg 334/845) Ein Glücksrad besteht aus fünf gleich großen Sektoren. Einer der Sektoren ist mit '0' beschriftet, einer mit '1' und einer mit '2', die beiden anderen Sektoren sind mit '9' beschriftet. **a<sub>1-2</sub>)** (2 VP) Das Glücksrad wird viermal gedreht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zahlen 2, 0, 1 und 9 in der angegebenen Reihenfolge erzielt werden.

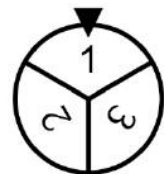
**b<sub>2</sub>)** (3 VP) Das Glücksrad wird zweimal gedreht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der erzielten Zahlen mindestens 11 beträgt.

**W3)** (Nach Abs. 312/12.1, Kl. 8; BAg 334/845) Eine Urne  $A$  ist mit fünf roten und fünf blauen Kugeln gefüllt, eine Urne  $B$  mit  $n$  roten und  $3n$  blauen, wobei  $n > 0$  gilt. Aus der Urne  $A$  wird eine Kugel zufällig entnommen und in die Urne  $B$  gelegt. Danach wird aus der Urne  $B$  eine Kugel zufällig entnommen und in die Urne  $A$  gelegt. Nun befindet sich in der Urne  $A$  eine unbekannte Anzahl roter Kugeln. **a<sub>1-2</sub>)** (1 VP) Geben Sie alle Möglichkeiten für diese unbekannte Anzahl an.

**a<sub>2-3</sub>)** (4 VP) Für einen bestimmten Wert von  $n$  beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die unbekannte Anzahl roter Kugeln in der Urne  $A$  fünf ist,  $\frac{15}{29}$ . Bestimmen Sie diesen Wert von  $n$ .

**W4)** (nach Abs. 320/12.2, Kl. 9; BAg 323/813) Ein Glücksrad mit drei gleich großen Sektoren ist wie abgebildet beschriftet. Das Glücksrad wird zweimal gedreht. **a)** (2 VP) Die Zufallsgröße  $\mathcal{X}$  gibt die Summe der beiden erzielten Zahlen an. Ergänzen Sie in der folgenden Tabelle die fehlenden Werte.

k	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{3}$		



**a)** Betrachtet werden die Ereignisse  $A$  und  $B$ :  $A$ : 'Es wird (1;3), (2;2) oder (3;1) erzielt.'  $B$ : 'Beim ersten Drehen wird eine 2 erzielt.' Untersuchen Sie, ob  $A$  und  $B$  stochastisch unabhängig sind.

**W5)** (nach Abs. 320/12.2, Kl. 9; BAg 323/813) Die Flächen zweier Würfel sind mit jeweils einem Buchstaben beschriftet: Würfel 1:  $B, B, C, C, C, C$  Würfel 2:  $A, A, A, B, B, C$  **a<sub>1-2</sub>)** (2 VP) Würfel 1 wird zweimal geworfen. Eine Zufallsgröße beschreibt, wie oft dabei eine Fläche mit dem Buchstaben  $B$  gewürfelt wird. Berechnen Sie den Erwartungswert dieser Zufallsgröße. **b<sub>2</sub>)** (3 VP) Einer der beiden Würfel wird zufällig ausgewählt und einmal geworfen; es wird eine Fläche mit dem Buchstaben  $C$  gewürfelt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei der Würfel 2 geworfen wurde.

## 16.9.4 Pflichtteilaufgaben

**Aufgabe I.1)** Erst nach Abs. 146/6.2.4 aus Kl. 10 oder 11 bearbeiten.

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x$  und  $x \in \mathbb{R}$ . Abb. 998/578b zeigt ihren Graphen  $G_f$ , der bei  $x = 1$  den Wendepunkt  $W$  hat.

a<sub>1</sub>) (BAg: 141/340) Zeigen Sie, dass die Tangente an  $G_f$  im Punkt  $W$  die Steigung 1 hat.

b<sub>3</sub>) (BAg: 32/60) Betrachtet werden die Geraden mit positiver Steigung  $m$ , die durch  $W$  verlaufen. Geben Sie die Anzahl der Schnittpunkte dieser Geraden mit  $G_f$  in Abhängigkeit von  $m$  an.

**Aufgabe I.2)** (Nach Abs. 182/7.1.15) Gegeben ist die in  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $f$  mit  $f(x) = e^x + 0.5x$ .

a<sub>3</sub>) (BAg: 160/411) Begründen Sie, dass der Graph von  $f$  und der Graph der in  $\mathbb{R}$  definierten Funktion  $g$  mit  $g(x) = 0.5x - 1$  keinen gemeinsamen Punkt besitzen.

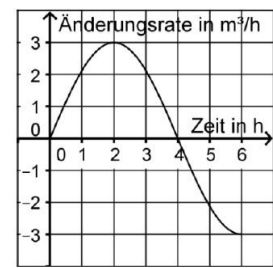
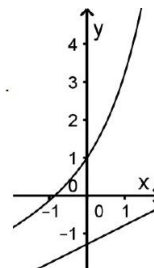
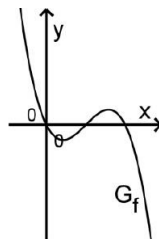
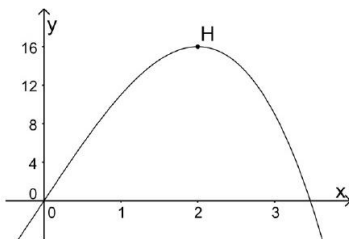
b<sub>3</sub>) (Nur LK; BAg: 179/479c) Für ein  $c \in \mathbb{R}^+$  wird die in  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $g_c$  mit  $g(x) = 0.5x - c$  betrachtet. Abb. 998/578c zeigt die Graphen von  $f$  und  $g_c$ . Die beiden Graphen schließen mit der  $y$ -Achse und der Gerade mit der Gleichung  $x = 1$  eine Fläche mit dem Inhalt 3 ein. Berechnen Sie  $c$ .

**Aufgabe I.3)** Erst nach Abs. 166/6.3.9 aus Kl. 11 bearbeiten

Eine Funktion  $f$  ist durch  $f(x) = 2 \cdot e^{0.5x} - 1$  mit  $x \in \mathbb{R}$  gegeben.

a<sub>2</sub>) (BAg: 160/411) Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion  $f$ .

b<sub>3</sub>) (BAg: 141/340) Die Tangente an den Graphen von  $f$  im Punkt  $S(0|1)$  begrenzt mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck. Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck gleichschenkelig ist.



**Abb. 578** a) zu Aufgabe I.4;    b) zu Aufgabe I.1;    c) zu Aufgabe I.2;    d) zu Aufgabe I.5;

**Aufgabe I.4)** (Nach Abs. 182/7.1.15) (BAg 179/480) Gegeben ist die in  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $f$  mit  $f(x) = -x^3 + 12x$ . Abb. 998/578a zeigt den Graphen von  $f$  sowie dessen Hochpunkt  $H(2|16)$ .

a<sub>2</sub>) Der Graph von  $f$ , die  $x$ -Achse und die Gerade mit der Gleichung  $x = 2$  schließen für  $0 \leq x \leq 2$  eine Fläche ein. Zeigen Sie, dass diese Fläche den Inhalt 20 besitzt.

b<sub>3</sub>) (Nur LK) Die Gerade  $g$  verläuft durch den Punkt  $H$  und besitzt eine negative Steigung. Der Graph von  $f$ , die  $y$ -Achse und die Gerade  $g$  schließen für  $0 \leq x \leq 2$  eine Fläche mit dem Inhalt 20 ein. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts der Geraden  $g$  mit der  $y$ -Achse.

**Aufgabe I.5)** Erst nach Abs. 182/7.1.15 aus Kl. 11 bearbeiten

Abb. 998/578d stellt für einen Wassertank die Zufluss- bzw. Abflussrate (in  $\frac{m^3}{h}$ ) von Wasser für einen Beobachtungszeitraum von sechs Stunden dar. Zu Beginn der Beobachtung enthält der Tank  $2m^3$  Wasser.

a<sub>2</sub>) (BAg 176/464) Bestimmen Sie das Volumen des Wassers, das sich zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn im Tank befindet.

b<sub>3</sub>) (BAg: 154/393) Skizzieren Sie in der Abb. 999/579a den Graphen, der die Entwicklung des Volumens des Wassers im Tank in Abhängigkeit von der Zeit darstellt.

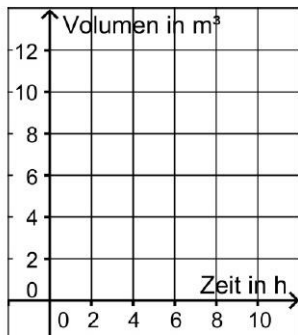
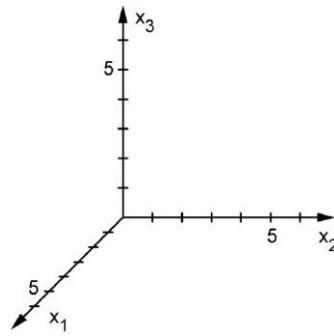
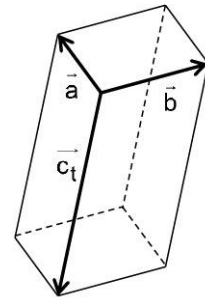


Abb. 579 a) zu Aufgabe I.5;



b) zu Aufgabe I.8;



c) zu Aufgabe I.10;

**Aufgabe I.6)** Erst nach Abs. 271/10.5 aus Kl. 12 bearbeiten

Gegeben sind die Ebene  $E : x_2 - 3x_3 = -19$  sowie die Punkte  $P(1|2|2)$ ,  $Q(1|-1|11)$  und  $S(-2|-4|5)$ .

a<sub>1</sub>) (BAG 262/707) Zeigen Sie, dass  $S$  in der Ebene  $E$  liegt.

b<sub>2</sub>) (BAG 271/743d,e) Weisen Sie nach, dass die Gerade durch  $P$  und  $Q$  senkrecht zu  $E$  steht.

c<sub>2-3</sub>) (Partnerabschnitt 272/10.5.4) Die Punkte  $P$  und  $Q$  haben den gleichen Abstand von der Ebene  $E$ . Die Punkte  $S$  und  $P$  legen die Gerade  $g$  fest. Spiegelt man  $g$  an  $E$ , so erhält man die Gerade  $h$ . Geben Sie eine Gleichung von  $h$  an.

**Aufgabe I.7)** Erst nach Abs. 258/10.2 aus Kl. 11 oder 12 bearbeiten

Der Punkt  $P(0|1|5)$  ist Eckpunkt eines Quadrats. Orthogonal zu der Ebene, in der dieses Quadrat liegt, verläuft die Gerade  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  mit  $t \in \mathbb{R}$ .

a<sub>1</sub>) (Partnerabschnitt 262/10.3.2) Begründen Sie, dass das Quadrat in der  $x_2x_3$ -Ebene liegt.

b<sub>2-3</sub>) Der Schnittpunkt der beiden Diagonalen des Quadrats liegt auf der Geraden  $g$ , der Punkt  $Q(0|8|4)$  in der  $x_2x_3$ -Ebene. Zeigen Sie, dass  $Q$  einer der beiden Eckpunkte des Quadrats ist, die dem Eckpunkt  $P$  benachbart sind.

**Aufgabe I.8)** Erst nach Abs. 261/10.3 aus Kl. 12 bearbeiten

Gegeben sind die Ebene  $E: x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$  und die Gerade  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$  mit  $t \in \mathbb{R}$ .

a<sub>1-2</sub>) (BAG 264/717) Zeichnen Sie in Abb. 999/579b die Schnittgerade von  $E$  mit der  $x_2x_3$ -Ebene ein.

b<sub>2</sub>) (BAG 263/713) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von  $E$  und  $g$ .

**Aufgabe I.9)** Erst nach Abs. 261/10.3 aus Kl. 12 bearbeiten

Gegeben ist die Ebene  $E : 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -18$ .

a<sub>1-2</sub>) (BAG: 263/713 + 268/731) Der Schnittpunkt von  $E$  mit der  $x_1$ -Achse, der Schnittpunkt von  $E$  mit der  $x_2$ -Achse und der Koordinatenursprung sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

b<sub>2-3</sub>) (BAG 262/708) Ermitteln Sie die Koordinaten des Vektors, der sowohl ein Normalenvektor von  $E$  als auch der Ortsvektor eines Punkts der Ebene  $E$  ist.

**Aufgabe I.10) Nur LK**, nach Abs. 261/10.3 BAG 259/695) Die Vektoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ -5t \end{pmatrix}$  spannen für jeden Wert von  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  einen Körper [Spat]

auf. Abb. 999/579c zeigt den Sachverhalt beispielhaft für einen Wert von  $t$ .

a<sub>2</sub>) Zeigen Sie, dass die aufgespannten Körper Quader sind.

b<sub>2</sub>) Bestimmen Sie diejenigen Werte von  $t$ , für die der zugehörige Quader das Volumen 15 besitzt.

**Aufgabe I.11) Nur LK**, erst nach Abs. 271/10.5 aus Kl. 12 bearbeiten

(BAg 259/695) <sub>3</sub>) Der Punkt  $A(-2|3|\sqrt{12})$  ist bezüglich des Koordinatenursprungs symmetrisch zum Punkt  $B$ . Die Punkte  $C_r(3r|2r|0)$  mit  $r \in \mathbb{R}$  bilden eine Gerade  $g$ , die im Koordinatenursprung senkrecht zur Geraden durch  $A$  und  $B$  steht. Bestimmen Sie alle Werte von  $r$ , für die  $A, B$  und  $C_r$  Eckpunkte eines Dreiecks mit dem Flächeninhalt 65 sind.

**Aufgabe I.12)** (nach Abs. 321/12.2.2 (Kl. 9); BAg 323/813)

Die Zufallsgrößen  $\mathcal{X}$  und  $\mathcal{Y}$  können jeweils die Werte 3, 4 und 5 annehmen.

**a<sub>2</sub>)** Für die Zufallsgröße  $\mathcal{X}$  gilt:  $P(\mathcal{X} = 3) = \frac{1}{3}$  und  $P(\mathcal{X} = 4) = \frac{1}{4}$ . Bestimmen Sie den Erwartungswert von  $\mathcal{X}$ .

**b<sub>4</sub>)** Für die Zufallsgröße  $\mathcal{Y}$  gilt:  $P(\mathcal{Y} = 3) = \frac{1}{3}$ ,  $P(\mathcal{Y} = 4) \geq \frac{1}{6}$  und  $P(\mathcal{Y} = 5) \geq \frac{1}{6}$ . Bestimmen Sie alle Werte, die für den Erwartungswert von  $\mathcal{Y}$  infrage kommen.

**Aufgabe I.13)** (Nach Abs. 335/12.3.5 (Kl. 10); BAg 341/862;) Ein Glücksrad hat drei Sektoren, einen blauen, einen gelben und einen roten. Diese sind unterschiedlich groß. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim einmaligen Drehen der blaue Sektor getroffen wird, beträgt  $p$ .

**a<sub>1-2</sub>)** (Partnerabschnitt 328/12.2.6) Interpretieren Sie den Term  $(1 - p)^7$  im Sachzusammenhang.

**b<sub>1</sub>)** (BAg 337/854) Das Glücksrad wird zehnmal gedreht. Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden kann, dass der blaue Sektor genau zweimal getroffen wird.

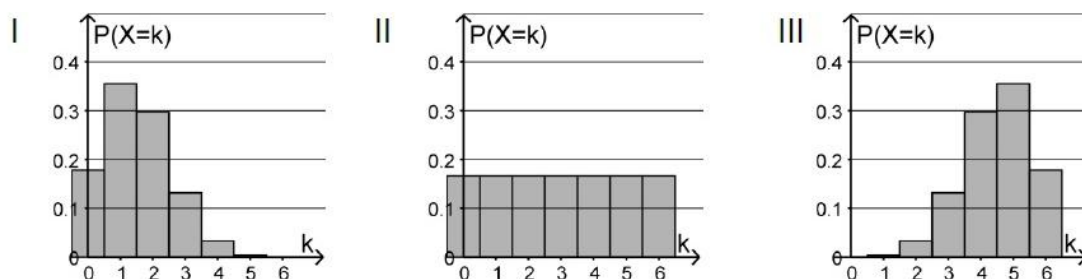
**c<sub>3</sub>)** (Partnerabschnitte (BAg 326/12.2.5) + (BAg 346/13.1.1)) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim einmaligen Drehen der gelbe Sektor getroffen wird, beträgt 50 %. Felix hat 100 Drehungen des Glücksrads beobachtet und festgestellt, dass bei diesen der Anteil der Drehungen, bei denen der gelbe Sektor getroffen wurde, deutlich geringer als 50 % war. Er folgert: 'Der Anteil der Drehungen, bei denen der gelbe Sektor getroffen wird, muss also bei den nächsten 100 Drehungen deutlich größer als 50 % sein.' Beurteilen Sie die Aussage von Felix.

**Aufgabe I.14)** Nach Abs. 335/12.3.5 (Kl. 10);

Jedes Überraschungsei eines Herstellers enthält entweder eine Figur oder keine Figur, wobei der Anteil der Überraschungseier mit einer Figur 25 % beträgt.

**a<sub>1</sub>)** (Partnerabschnitt: 335/12.3.5) Zehn Überraschungseier werden nacheinander zufällig ausgewählt. Geben Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit dafür an, dass nur in den letzten beiden Überraschungseiern jeweils eine Figur enthalten ist.

**b<sub>2-3</sub>)** (BAg 339/857) Sechs Überraschungseier werden zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße  $\mathcal{X}$  gibt an, wie viele dieser Überraschungseier eine Figur enthalten. Eine der Abbildungen aus 1000/580 stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallsgröße  $\mathcal{X}$  dar: Geben Sie an, welche Abbildung dies ist. Begründen Sie, dass die beiden anderen Abbildungen dies nicht sind.



**Abb. 580** mögliche Zufallsgrößen aus Aufgabe I.14;

**Aufgabe I.15)** Nach Abs. 335/12.3.5 (Kl. 10); BAg 323/813)

Schwarze und weiße Kugeln sind wie folgt auf drei Urnen verteilt:

**a<sub>1</sub>)** Aus Urne  $A$  wird zunächst eine Kugel zufällig entnommen und in Urne  $B$  gelegt. Anschließend wird aus Urne  $B$  eine Kugel zufällig entnommen und in Urne  $C$  gelegt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich danach in Urne  $C$  zwei weiße Kugeln und eine schwarze Kugel befinden.



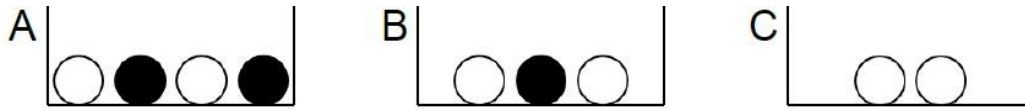


Abb. 581 Urne aus Aufgabe I.15;

b<sub>2</sub>) Die drei Urnen mit den in der Abbildung dargestellten Inhalten bilden den Ausgangspunkt für folgendes Spiel: Es wird zunächst ein Einsatz von 1 € eingezahlt. Anschließend wird eine der drei Urnen zufällig ausgewählt und danach aus dieser Urne eine Kugel zufällig gezogen. Nur dann, wenn diese Kugel schwarz ist, wird ein bestimmter Geldbetrag ausgezahlt. Ermitteln Sie, wie groß dieser Geldbetrag sein muss, damit bei diesem Spiel auf lange Sicht Einsätze und Auszahlungen ausgeglichen sind.

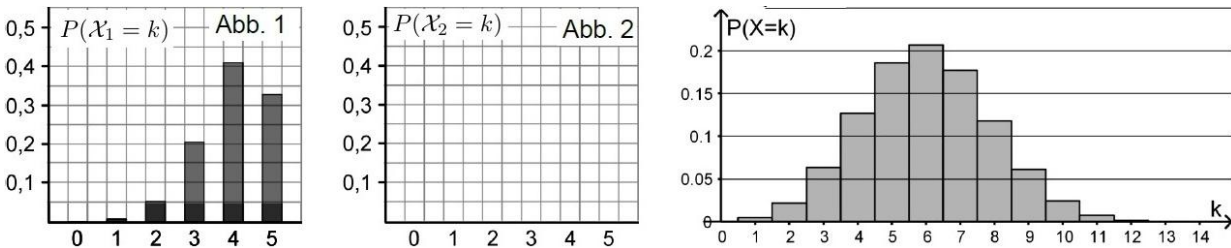


Abb. 582 Wkvert aus Aufgabe I.16;

Wkvert aus Aufgabe I.17;

**Aufgabe I.16)** (Nach Abs. 335/12.3.5 (Kl. 10);)

Die binomialverteilten Zufallsgrößen  $\mathcal{X}_1$  und  $\mathcal{X}_2$  geben für Trefferwahrscheinlichkeiten von  $p_1 = 0.8$  bzw.  $p_2 = 0.2$  jeweils die Anzahl der Treffer bei fünf Versuchen an.

a<sub>1-2</sub>) (BAg 337/854) Betrachtet wird die Zufallsgröße  $\mathcal{X}_1$ . Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit für genau einen Treffer berechnet werden kann.

b<sub>2</sub>) (Partneraufgabe 341/862) Geben Sie für eine der beiden Zufallsgrößen ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit durch den Term  $1 - \binom{5}{3} \cdot 0.8^3 \cdot 0.2^2 + \binom{5}{4} \cdot 0.8^4 \cdot 0.2 + \binom{5}{5} \cdot 0.8^5$  angegeben wird.

c<sub>2</sub>) (Partneraufgabe 338/855) Abbildung 1 (aus Abb. 1001/582) zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $\mathcal{X}_1$ . Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $\mathcal{X}_2$  in Abbildung 2 dar.

**Aufgabe I.17)** (Nach Abs. 335/12.3.5 (Kl. 10); (BAg 339/857) Abb. 1001/582.3 zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße  $\mathcal{X}$  mit den Parametern  $n$  und  $p$ .

a<sub>1</sub>) Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung die Wahrscheinlichkeit  $P(5 \leq \mathcal{X} \leq 7)$ . b<sub>2-3</sub>)  $\mathcal{X}$  hat den Erwartungswert 6 und die Standardabweichung  $\sqrt{3.6}$ . Ermitteln Sie die zugehörigen Werte von  $n$  und  $p$ .

**16.9.5 Aufgaben mit 'neuen' inhaltlichen Anforderungen, ab hier nur LK-Aufgaben**

BK-Stoff sind noch Ag II.9a-c, II.10, II.12 und II.14a.

**Aufgabe II.1)** Kann erst nach Abs. 182/7.1.15 aus Kl. 11 bearbeitet werden.

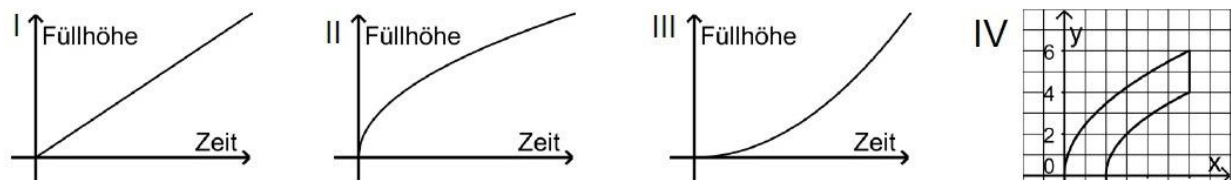


Abb. 583 Rotationskörper

(Basisabschnitt 181/7.1.14) Betrachtet wird eine große rotationssymmetrische Schale, die aus einem Steinblock gefertigt wurde. Ein Kubikmeter des Steins hat eine Masse von 2700kg. In einem Koordinatensystem kann ein Querschnitt der Schale mithilfe der Graphen der Funktionen  $p$  und  $q$  mit

$$p(x) = \sqrt{6x}, \quad 0 \leq x \leq 6 \quad \text{und} \quad q(x) = \sqrt{4x - 8}, \quad 2 \leq x \leq 6.$$

modellhaft dargestellt werden. Dabei beschreibt die  $x$ -Achse die Rotationsachse der Schale; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht  $1dm$  (vgl. Abbildung 1001/583 IV).

**a<sub>2</sub>)** Interpretieren Sie den Term  $p(6) - q(6)$  im Sachzusammenhang.

**b<sub>2-3</sub>)** In die aufrecht stehende Schale wird mit konstanter Zuflussrate Wasser gefüllt. Entscheiden Sie, welcher der abgebildeten Graphen I, II und III aus Abb. 1001/583 für diesen Vorgang die Füllhöhe in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

**c<sub>3-4</sub>)** Weisen Sie nach, dass sich bei dem beschriebenen Füllvorgang der Flächeninhalt  $A$  der Wasseroberfläche (in  $dm^2$ ) in Abhängigkeit von der Füllhöhe  $h$  (in  $dm$ ) mithilfe der Gleichung  $A(h) = 4\pi h$  berechnen lässt.

**d<sub>3-4</sub>)** Interpretieren Sie im Sachzusammenhang die Funktion  $s$  mit  $s(x) = \pi \int_2^{2+x} (q^2(t))dt$  und geben Sie den größten Definitionsbereich von  $s$  an, der im Sachzusammenhang sinnvoll ist.

**e<sub>3-4</sub>)** Berechnen Sie die Masse der Schale.

**Aufgabe II.2)** Nach Abs. 276/10.6 aus Kl. 11

(⊙) (Partnerag. 280/774) <sub>2-3</sub>) Bestimmen Sie für  $r \in \mathbb{R}$  die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rclcrcl} 2x_1 & -2x_2 & +x_3 & = & 6 \\ 4x_1 & +x_2 & -3x_3 & = & 4r \\ 2x_1 & +3x_2 & -3x_3 & = & 8r \end{array}$$

**Aufgabe II.3)** Kann erst nach Abs. 276/10.6 aus Kl. 11 bearbeitet werden. (BAG 254/675)

<sub>2-3</sub>) Zwei Schüler lösen dasselbe lineare Gleichungssystem. Sie erhalten die Lösungsmengen

$$L_1 = \{(2+r; 1+r; 3-r) | r \in \mathbb{R}\} \quad \text{bzw.} \quad L_2 = \{(1+s; -s; 4+s) | s \in \mathbb{R}\}.$$

Untersuchen Sie, ob diese Lösungsmengen identisch sind.

**Aufgabe II.4)** Kann erst nach Abs. 258/10.2 aus Kl. 11 bearbeitet werden.

(Partnerabschnitt 261/10.2.4) <sub>3</sub>) Beweisen Sie: Wenn in einem gleichschenkligen Dreieck  $\Delta(A, B, C)$  der Punkt  $M_c$  der Mittelpunkt der Basis  $\overline{AB}$  ist, dann ist die Strecke  $\overline{CM_c}$  orthogonal zu  $\overline{AB}$ .

**Aufgabe II.5)** Kann erst nach Abs. 258/10.2 aus Kl. 11 bearbeitet werden.

(Partnerabschnitt 261/10.2.4) <sub>3</sub>) Beweisen Sie: Die Seitenmitten eines Vierecks  $ABCD$  bilden die Eckpunkte eines Parallelogramms (Satz von Varignon).

**Aufgabe II.6)** kann erst nach Abs. 271/10.5 aus Kl. 12 bearbeitet werden.

(BAG 271/743) Gegeben sind eine Ebenenschar  $E_k : 3x_1 + kx_2 - kx_3 = 6, (k \in \mathbb{R})$  sowie die Gerade  $g$  durch die Punkte  $P(4|7|7)$  und  $Q(1|2|9)$ .

**a<sub>2</sub>)** Untersuchen Sie die Ebenen  $E_k$  der Schar auf Parallelität zur Geraden  $g$  und Orthogonalität zur Geraden  $g$ .

b) **i<sub>2</sub>)** Bestimmen Sie  $k$  so, dass  $E_k$  orthogonal zu  $E_1$  ist.

**ii<sub>3</sub>)** Untersuchen Sie, ob es eine Ebene  $E_k$  gibt, die zu keiner anderen Ebene der Schar orthogonal ist.

c) (BAG 272/752) **i<sub>3</sub>)** Es gibt genau einen Wert von  $k$ , für den der Abstand des Punktes  $P$  von der Ebene  $E_k$  maximal wird. Untersuchen Sie, welche besondere Lage die zugehörige Ebene hat.

**ii<sub>3-4</sub>)** Die Kugel  $K$  besitzt den Mittelpunkt  $P$  und hat den Radius 1. Bestimmen Sie Werte für  $k$  so, dass die Ebene  $E_k$  keinen gemeinsamen Punkt mit der Kugel  $K$  hat.

d) (BAG: 272/753 ab e) **i<sub>3</sub>)** Zeigen Sie, dass es eine Gerade  $h$  gibt, die in allen Ebenen  $E_k$  liegt.

**ii<sub>3-4</sub>)** Ermitteln Sie die Gleichung einer Ebene  $F$ , die  $h$  enthält, aber nicht zur Ebenenschar  $E_k$  gehört.

**e<sub>4</sub>)** (BAG: 272/753 ab e) Untersuchen Sie, welche Punkte der  $x_2x_3$ -Ebene in keiner Ebene  $E_k$  liegen.

**Aufgabe II.7)** Kann erst nach Abs. 271/10.5 aus Kl. 12 bearbeitet werden.

(BAg: 253/670 + 255/680) Gegeben sind die Punkte  $P(2| - 1|0)$  und  $Q(1|2| - 11)$ , die Geradenschar  $g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2-a \\ 3a-1 \\ -11a \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  ( $a, t \in \mathbb{R}$ ) und die Ebene  $E : x_1 + 4x_2 + x_3 = -2$ .

**a)** (BAg: 273/755) **i)** Zeigen Sie, dass der Pkt  $P$  auf der Geraden  $g_0$  liegt. **ii)** Ermitteln Sie die Koordinaten der Pkte auf  $g_0$ , die von  $P$  den Abstand 12 haben. **iii)** Bestimmen Sie, auf welcher Geraden  $g_a$  der Pkt  $Q$  liegt. **b)** **i)** Begründen Sie, dass die Geraden  $g_0$  und die  $x_1$ -Achse zueinander windschief sind. **ii)** Bestimmen Sie den Abstand der Geraden  $g_0$  von der  $x_1$ -Achse.

**c)** (BAg 263/713) Untersuchen Sie, welche gegenseitige Lage die Geraden  $g_{a_1}$  und  $g_{a_2}$  ( $a_1 \neq a_2$ ) haben. Zeigen Sie, dass durch die Geradenschar  $g_a$  und die Ebene  $E$  dieselbe Punktmenge beschrieben wird.

**d)** (BAg 274/759) Der Punkt  $T$  liegt auf keiner Geraden der Schar. Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem diejenige Gerade der Schar ermittelt werden kann, die den kleinsten Abstand von  $T$  hat.

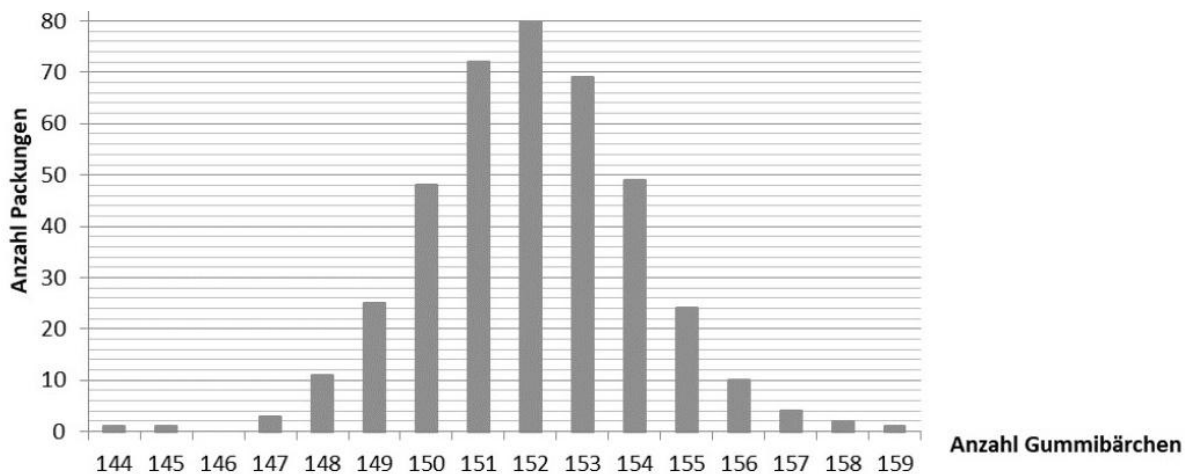
**Aufgabe II.8)** Erst nach Abs. 353/13.2 (nur SemQ oder LK) aus Kl. 11 oder 12 bearbeiten.

(BAg 356/907) Die Zufallsgröße  $\mathcal{X}$  beschreibt die Körpergröße von Neugeborenen in  $mm$ . Sie wird als normalverteilt mit dem Erwartungswert  $\mu = 522$  und der Standardabweichung  $\sigma = 19$  angenommen. Ein Neugeborenes wird zufällig ausgewählt.

**a)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass seine Körpergröße kleiner als  $500 mm$  ist.

**b)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass seine Körpergröße um höchstens  $20 mm$  vom Erwartungswert von  $\mathcal{X}$  abweicht.

**c)** Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass seine Körpergröße um höchstens  $a mm$  vom Erwartungswert von  $\mathcal{X}$  abweicht, beträgt mindestens  $80\%$ . Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl  $a$ , für die diese Aussage zutrifft.



**Abb. 584** Säulendiagramm aus Aufgabe II.9;

**Aufgabe II.9)** Erst nach Abs. 353/13.2 aus Kl. 11 oder 12 bearbeiten; Teile a-c auch BK.

(Basisabschnitt: 339/12.3.8) Es wurden stichprobenartig 400 Standardpackungen Gummibärchen untersucht und das Ergebnis in einem Säulendiagramm (Abb. 1003/584) festgehalten.

**a)** Ermitteln Sie auf der Basis der Stichprobe die Wahrscheinlichkeit, dass eine Standardpackung mindestens 150 und höchstens 152 Gummibärchen enthält.

Die Anzahl der Gummibärchen in einer Standardpackung aus der laufenden Produktion soll durch eine normalverteilte Zufallsgröße  $\mathcal{X}$  mit den Parametern  $\mu$  und  $\sigma$  modelliert werden.

**b)** Beschreiben Sie, wie man mit Hilfe des Säulendiagramms einen Näherungswert für  $\mu$  bestimmen kann.

(BAg:358/910 +357/909) Aus den Daten des Diagramms erhält man etwa  $\mu = 152$  und  $\sigma = 2$ .

c<sub>1</sub>) (BAg 356/907) Berechnen Sie mit Hilfe der Normalverteilung die Wahrscheinlichkeit, dass eine Standardpackung mindestens 150 und höchstens 152 Gummibärchen enthält.

d<sub>4</sub>) Der laufenden Produktion werden 100 Standardpackungen zufällig entnommen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich darunter höchstens vier Standardpackungen mit weniger als 149 Gummibärchen befinden.

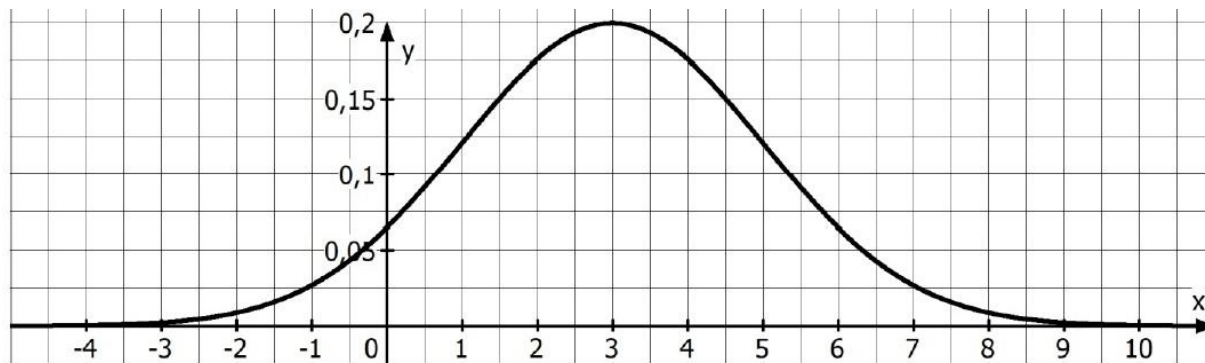


Abb. 585 Dichte der Normalverteilung aus Aufgabe II.10;

**Aufgabe II.10)** Erst nach Abs. 353/13.2 aus Kl. 11 oder 12 bearbeiten, auch BK.

(BAg 357/909) Von einer normalverteilten Zufallsgröße  $\mathcal{X}$  ist der Graph der zugehörigen Dichtefunktion gegeben (siehe Abbildung 1004/585).

a<sub>1</sub>) Ermitteln Sie näherungsweise den zugehörigen Erwartungswert und die zugehörige Standardabweichung und berechnen Sie  $P(\mathcal{X} \geq 1)$ .

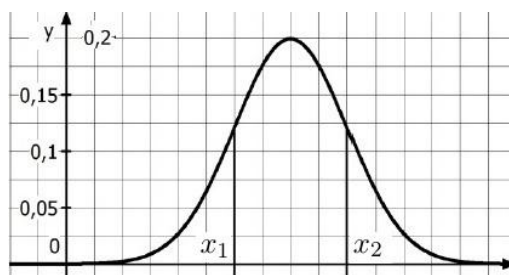
b<sub>1</sub>) Veranschaulichen Sie  $P(\mathcal{X} \geq 1)$  in der Abbildung.

**Aufgabe II.11)** Erst nach Abs. 353/13.2 aus Kl. 11 oder 12 bearbeiten.

(BAg 357/909) <sub>2</sub>)  $\mathcal{X}$  sei eine normalverteilte Zufallsgröße, für welche gilt:

(I)  $P(X \leq -4) = 0.151$  und (II)  $P(X \geq 9) = 0.151$

Berechnen Sie den Erwartungswert und bestimmen Sie die Standardabweichung auf eine Dezimale gerundet.



**Aufgabe II.12)** Erst nach Abs. 353/13.2 aus Kl. 11 oder 12 bearbeiten (auch BK). (BAg 357/909)

<sub>2-3</sub>) Die Abbildung zeigt den Graphen der Dichtefunktion  $\varphi_{\mu;\sigma}$  einer normalverteilten Zufallsvariable  $\mathcal{X}$ . Die Stellen  $x_1$  und  $x_2$  sind die Wendestellen des Graphen. Bestimmen Sie mit Hilfe der Abbildung je einen Näherungswert für  $\sigma$  und  $\mu$  jeweils auf eine Dezimale.

**Aufgabe II.13)** Erst nach Abs. 353/13.2 (nur SemQ oder LK) aus Kl. 11 oder 12 bearbeiten.

a<sub>2</sub>) (BAg: 355/903j) Die Funktion  $g$  ist eine Dichtefunktion über dem Intervall  $[-1; 1]$ . Geben Sie zwei Eigenschaften an, die  $g$  besitzt.

b<sub>2-3</sub>) (BAg 355/904) Für jedes  $a \in \mathbb{R}$  ist eine Funktion  $f_a$  gegeben durch  $f_a(x) = \frac{1}{8}(ax^4 - ax^2)$ . Untersuchen Sie, ob es einen Wert für  $a$  gibt, so dass  $f_a$  eine Dichtefunktion über dem Intervall  $[-1; 1]$  ist.

**Aufgabe II.14)** Erst nach Abs. 346/13.1 aus Kl. 11 oder 12 bearbeiten (nur LK).

Eine Lotteriegesellschaft bietet im großen Stil Rubbellose an. Auf einem Lotterielos sind vier Felder, die jeweils entweder ein Fragezeichen oder ein Ausrufezeichen enthalten. Die Lotteriegesellschaft erklärt in ihrem Gewinnplan, dass alle möglichen Kombinationen gleichwahrscheinlich sind. Bei vier Ausrufezeichen erhält man einen Gewinn.

**a<sub>1</sub>)** (auch BK=GK) Weisen Sie nach, dass nach den Angaben der Lotteriegesellschaft die Wahrscheinlichkeit für den Gewinn  $\frac{1}{16}$  beträgt.

(BAg 350/886) Eine Spielervereinigung befürchtet, dass die Wahrscheinlichkeit für den Gewinn kleiner ist als von der Lotterie angegeben. Um dies zu untermauern, soll ein Signifikanztest durchgeführt werden.

**b<sub>3</sub>)** (BAg 346/878) Formulieren Sie die Nullhypothese und die Alternativhypothese so, dass der Test der Zielsetzung der Spielervereinigung entspricht. Erläutern Sie Ihre Wahl. Der Test wird mit einem Stichprobenumfang von 200 Losen und einem Signifikanzniveau von 5 % durchgeführt. Bestimmen Sie die Entscheidungsregel.

**c<sub>4</sub>)** Die Spielervereinigung wollte ursprünglich die Nullhypothese 'Die Wahrscheinlichkeit für den Gewinn beträgt mindestens  $\frac{1}{16}$ ' bei einem Stichprobenumfang von 40 Losen auf einem Signifikanzniveau von 5 % testen. Untersuchen Sie, ob der so konzipierte Test eine brauchbare Information geliefert hätte.

**Aufgabe II.15)** Erst nach Abs. 346/13.1 aus Kl. 11 oder 12 bearbeiten (nur LK).

Es gibt zwei Güteklassen Fliesen. Bei Premiumfliesen beträgt die Wahrscheinlichkeit für Verfärbungen maximal 1%. Bei Standardfliesen ist die Wahrscheinlichkeit für verfärbte Fliesen höher. Ein Händler erhält eine große Lieferung, bei der die Information, ob es sich um Premiumfliesen handelt, verloren gegangen ist. Anhand einer Stichprobe von 100 zufällig entnommenen Fliesen will der Händler entscheiden, welche Güteklasse die gelieferten Fliesen haben. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Lieferung aufgrund des Tests fälschlicherweise der Güteklasse Standard zugeordnet wird, soll höchstens 2 % betragen. Der Händler wählt als Nullhypothese: 'Es handelt sich um eine Lieferung Premiumfliesen.'

**a<sub>3</sub>)** (BAg: 346/878 + 350/886 + 352/891e) Begründen Sie, dass diese Wahl der Nullhypothese der vom Händler gegebenen Zielsetzung entspricht. Bestimmen Sie den zugehörigen Ablehnungsbereich und geben Sie die maximale Irrtumswahrscheinlichkeit an. Beurteilen Sie folgende Aussage: 'Liegt bei der Durchführung des Tests die Anzahl der verfärbten Fliesen außerhalb des Ablehnungsbereichs, dann trifft die Nullhypothese mit hoher Wahrscheinlichkeit zu.'

**b<sub>3</sub>)** (BAg 352/896) Der Händler erhält von der Herstellerfirma die Information, dass bei den Standardfliesen die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Verfärbungen bei 7.5% liegt. Beschreiben Sie den Fehler 2. Art im Sachzusammenhang. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art.

**Aufgabe II.16)** Erst nach Abs. 346/13.1 aus Kl. 11 oder 12 bearbeiten (nur LK).

Ein Würfel soll darauf hin untersucht werden, ob er 'gezinkt' ist. Man einigt sich darauf, ihn in einem Test mehrmals zu werfen und die Anzahl der dabei gewürfelten 'Sechser' zu zählen.

**a<sub>2</sub>)** (Partnerabschnitt 350/13.1.4) Ein Vorschlag hierzu lautet: Der Würfel wird als 'gezinkt' angesehen, wenn bei 150 Würfeln weniger als 20-mal oder mehr als 30-mal ein 'Sechser' gewürfelt wird. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Würfel als 'gezinkt' angesehen wird, obwohl die Wahrscheinlichkeit für einen 'Sechser' tatsächlich  $\frac{1}{6}$  ist.

**b<sub>3</sub>)** (BAg 351/888) Ein anderer Vorschlag hierzu lautet: Es soll ein Signifikanztest mit einem Signifikanzniveau von 1% durchgeführt werden, bei dem der Würfel 500-mal geworfen wird. Erläutern Sie, welche Art von Signifikanztest geeignet ist, bestimmen Sie eine Entscheidungsregel und berechnen Sie die Irrtumswahrscheinlichkeit.

### 16.9.6 Vertieft verständnisorientierte Aufgaben (nur LK)

**Aufgabe III.1<sub>4</sub>)** Erst nach Abs. 182/7.1.15 aus Kl. 11 bearbeiten (Partneraufgabe: 184/503b).

Die Funktion  $u$  ist auf  $\mathbb{R}$  definiert und differenzierbar. Bilden Sie die Ableitung der Funktion  $f$  mit  $f(x) = e^{u(x)}$ . Bestimmen Sie damit eine Stammfunktion der Funktion  $g$  mit  $g(x) = 2x^2 \cdot e^{4x^3}$ .

**Aufgabe III.2<sub>3</sub>)** Erst nach Abs. 166/6.3.9 aus Kl. 11 bearbeiten (Partneraufgabe: 67/177).

Für jedes  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ist die Funktion  $f_a$  gegeben durch  $f_a(x) = \sin(a \cdot x)$ .

a) Bilden Sie die erste, dritte und fünfte Ableitung der Funktion  $f_a$ .

b) Bestimmen Sie die 51. Ableitung der Funktion  $f_a$ .

**Aufgabe III.3<sub>3</sub>)** Erst nach Abs. 166/6.3.9 aus Kl. 11 bearbeiten (übernommen: 163/426d).

Die Funktion  $g$  ist auf  $\mathbb{R}$  definiert und differenzierbar. Die Funktion  $f$  ist gegeben durch  $f(x) = (x - x_0)^2 \cdot g(x)$ . Zeigen Sie, dass der Graph von  $f$  im Punkt  $P(x_0|f(x_0))$  die  $x$ -Achse als Tangente besitzt.

**Aufgabe III.4<sub>3</sub>)** Erst nach Abs. 166/6.3.9 aus Kl. 11 bearbeiten (übernommen: 163/426e).

Die auf  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $f$  ist zweimal differenzierbar. Es gilt  $f'(5) = 0$  und  $f''(5) = 2$ . Zeigen Sie, dass die Funktion  $g$  mit  $g(x) = e^{-f(x)}$  an der Stelle  $x = 5$  ein lokales Maximum besitzt.

**Aufgabe III.5<sub>4</sub>)** Erst nach Abs. 166/6.3.9 aus Kl. 11 bearbeiten (übernommen: 163/426f).

Die Funktion  $g$  ist auf  $\mathbb{R}$  zweimal differenzierbar. Es gilt  $g(4) = 2$ ,  $g'(4) = 0,5$  und  $g''(x) < 0$  im Intervall  $[0; 6]$ . Untersuchen Sie, ob  $g$  im Intervall  $[0; 6]$  eine Nullstelle besitzt.

**Aufgabe III.6<sub>3</sub>)** Schon zu Beginn Klasse 11 lösbar (übernommen 144/353d).

Gegeben ist die auf  $\mathbb{R}^+$  definierte Funktion  $f$  durch  $f(x) = b - \frac{a^2}{x^2}$  mit  $a, b \in \mathbb{R}^+$ . Untersuchen Sie, welche Beziehung zwischen  $a$  und  $b$  bestehen muss, damit der Graph von  $f$  den Graphen der Funktion  $g$  mit  $g(x) = x^2$  berührt.

**Aufgabe III.7<sub>3-4</sub>)** Erst nach Abs. 166/6.3.9 aus Kl. 11 bearbeiten (Basisaufgabe (= BAG): 144/353e).

Gegeben sind die auf  $\mathbb{R}$  definierten Funktionen  $f_a$  mit  $f_a(x) = e^{ax}$ , ( $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ). Die zugehörigen Graphen werden mit  $K_a$  bezeichnet. Untersuchen Sie, welche Beziehung zwischen  $a_1$  und  $a_2$  bestehen muss, damit sich  $K_{a_1}$  und  $K_{a_2}$  senkrecht schneiden.

**Aufgabe III.8<sub>4</sub>)** Erst nach Abs. 182/7.1.15 aus Kl. 11 bearbeiten.

Gegeben sind die Punkte  $P_a(0|a|4 - a^2)$  und  $Q_a(6|a|4 - a^2)$  für  $a \in [-2; 2]$ . Die Strecken  $\overline{P_a Q_a}$  bilden mit einem Teil der  $x_1 x_2$ -Ebene den Mantel eines Körpers. Bestimmen Sie das Volumen dieses Körpers

**Aufgabe III.9)** Erst nach Abs. 258/10.2 aus Kl. 11 bearbeiten (Basisaufgabe (= BAG): 259/698).

Gegeben sind zwei nicht kollineare Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  sowie eine reelle Zahl  $r$  mit  $0 \leq r \leq 1$ , für die gilt:  $(\vec{a} - r \cdot \vec{b}) \perp \vec{b}$ .

a<sub>3</sub>) Stellen Sie die Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $r \cdot \vec{b}$  und  $\vec{a} - r \cdot \vec{b}$  in einer beschrifteten Skizze dar.

b<sub>2</sub>) Bestimmen Sie  $r$  für  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe III.10)** Erst nach Abs. 271/10.5 aus Kl. 12 bearbeiten.

Gegeben sind die Ebenen  $E : ax_1 + bx_2 + x_3 = d$  und  $F : ax_1 + bx_2 + x_3 = d + 2$  und

a<sub>3</sub>) (BAG: 271/745+272/753) Zeigen Sie, dass der Abstand der beiden Ebenen kleiner oder gleich 2 ist.

b<sub>4</sub>) Untersuchen Sie, welche besondere Lage die Ebene  $E$  hat, wenn ihr Abstand zu  $F$  genau 2 ist.

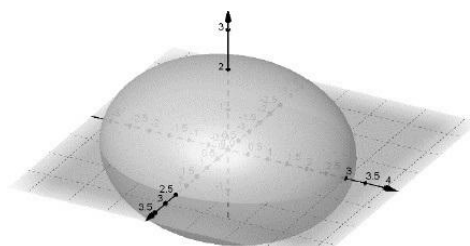
**Aufgabe III.11)** Schon zu Beginn Klasse 11 lösbar.

Alle Punkte  $P(x_1 | x_2 | x_3)$ , für die

$$144x_1^2 + 100x_2^2 + 225x_3^2 = 900 \text{ gilt, bilden ein}$$

sogenanntes Ellipsoid (siehe Abbildung).

a<sub>2</sub>) Entscheiden Sie, welche der Koordinatenachsen die  $x_2$ -Achse ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung.



b<sub>3</sub>) Die Gerade  $g$  enthält  $Q(2|0|0)$  und verläuft parallel zur  $x_3$ -Achse. Sie schneidet das Ellipsoid in zwei Punkten. Berechnen Sie den Abstand dieser beiden Punkte.

**Aufgabe III.12** Kann mit dem Stoff Klasse 10 (incl. Abs. 340/12.3.9) bearbeitet werden

Eine Binomialverteilung hat die Parameter  $n_1 = 100$  und  $p_1 = 0.8$ .

a<sub>2-3</sub>) 340/858a Ermitteln Sie die Parameter einer anderen Binomialverteilung, die den gleichen Erwartungswert und die doppelte Standardabweichung hat.

b<sub>3</sub>) (BAg: 339/857i) Beschreiben Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Histogramme dieser beiden Binomialverteilungen.

**Aufgabe III.13** Kann mit dem Stoff Klasse 10 bearbeitet werden (Partnerabschnitt: 342/12.4.1 b).

Die sechs Seiten eines Würfels tragen die Zahlen 0 - 0 - 0 - 2 - 2 - 5.

a<sub>3</sub>) Der Würfel wird zehnmal geworfen. Betrachtet wird das Ereignis  $A$ : 'Es wird insgesamt fünfmal die 0, dreimal die 2 und zweimal die 5 geworfen.' Begründen Sie, dass

$$P(A) = \binom{10}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \text{ gilt.}$$

b<sub>3</sub>) Der Würfel wird zwanzigmal geworfen. Betrachtet wird das Ereignis  $B$ : 'Es wird insgesamt zwölfmal die 0, fünfmal die 2 und dreimal die 5 geworfen.' Geben Sie einen Term für  $P(B)$  an.

**16.9.7 Funktionen aus dem Analysisteil des Leistungskurses**

Jahr	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Ag I.1	$\frac{x^3+2x^2}{3(x-1)}$	$\frac{2}{(1+2x)^2}$	$0.5x + 2 - 3\frac{ x }{x^2-4}$	$\frac{tx^2+t}{(x+1)^2}$	$\frac{ax^2-6x}{x^2-2x-3}$	$\frac{2x+1}{x^2+x+a}$
Ag I.2	$\frac{3t}{t+e^x}$	$4e^{tx} - e^{2tx}$	$\sqrt{x} \cdot e^{-0.5x}$	$e^{2x} - 2se^x - 3s^2$	$(\ln(x) - t)^2$	$\frac{a}{e^{2x}+a}$
Ag I.3	$\frac{18x}{x^2+18^2} + 18$	$\ln\left(\frac{1+x}{t-x}\right)$	$\frac{\ln(ax)}{x^2}$	$0.5x \cdot \sqrt{4-x^2}$	$\frac{a \cdot e^x}{a+e^x}$	$2\frac{\ln(x)+t}{x}$

Jahr	1999	2000	2001	(2001)	2002	2003
Ag I.1	$\frac{16(x-t)}{(1+x)^2}$	$\frac{(x-2)^2}{x \cdot (x-4)}$	$\frac{6x^2}{1+x^2}$		$\frac{x^2+x+t}{4(x+1)}$	$\frac{6}{2x-3}$
Ag I.2	$2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)$	$x \cdot (\ln(x))^2$	$\frac{2}{1+e^x}$	$\frac{2}{1+e^{t-x}}$	$\frac{a \cdot e^x}{(1+e^x)^2}$	$20e^{-x} \sin(x)$
Ag I.3	$\frac{5e^x-4}{e^x+1}$	$0.5(x+3) \cdot e^{-x}$	$\frac{1}{128}x^4 + \frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{8}$	$1 + \ln\left(\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}\right)$	$\frac{4(\ln(x))^2}{x}$	$x^2(t - \ln(x))$

**16.9.8 Aufgaben aus dem Mathe Känguru ohne WTR**

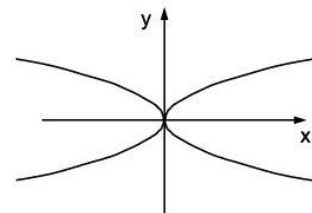
10. Für wie viele der Funktionen

$$y = x^2; \quad y = \sqrt{x}; \quad y = \sqrt{-x}; \quad y = -\sqrt{x}; \quad y = -\sqrt{-x};$$

$$y = \sqrt{|x|}; \quad y = \sqrt{-|x|}; \quad y = -\sqrt{|x|}$$

ist der Graph in der folgenden Figur enthalten?

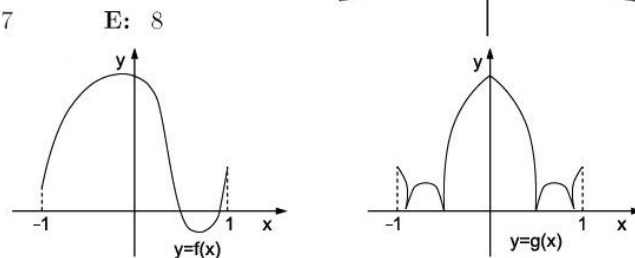
- A: 4      B: 5      C: 6      D: 7      E: 8



16. Die Abbildung stellt die Graphen der Funktionen  $f$  und  $g$  auf dem Intervall  $[-1, 1]$  dar.

Welche der folgenden Relationen

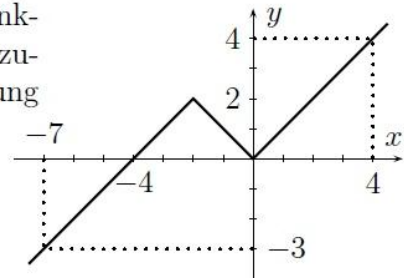
gilt im Intervall  $[-1, 1]$ ?



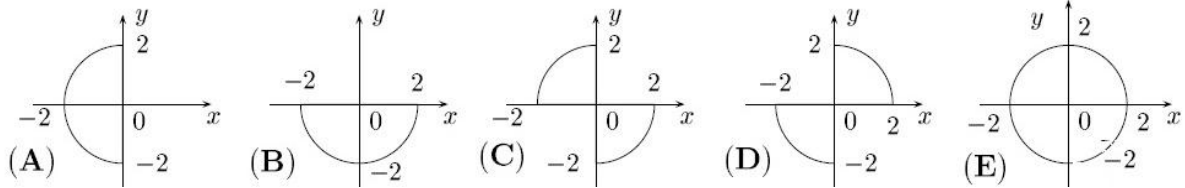
- A:  $g(x) = f(|x|)$     B:  $g(x) = |f(|x|)|$     C:  $g(x) = |f(x)|$     D:  $g(x) = f^2(x)$     E: keine der aufgeführten

20. Der Graph der für alle reellen Zahlen definierten Funktion  $f$  setzt sich aus 2 Halbgeraden und einer Strecke zusammen (s. Abb.). Dann ist die Lösungsmenge der Gleichung  $f(f(f(x))) = 0$

- (A)  $\{-4; 0\}$       (B)  $\{-8; -4; 0\}$       (C)  $\emptyset$   
 (D)  $\{-12; -8; -4; 0\}$       (E)  $\{-16; -12; -8; -4; 0\}$

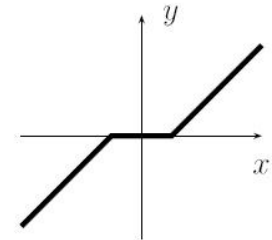


12. Welches ist die graphische Darstellung der Menge aller Punkte  $(x, y)$  der Ebene, für die  $x^2 + y^2 = 4$  und  $x \cdot y \leq 0$  gilt?



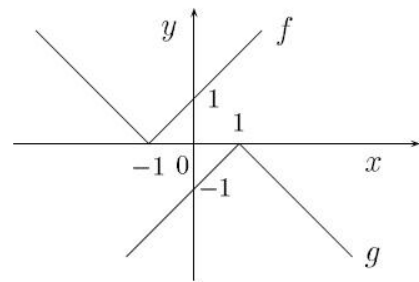
19. Zu welcher Funktion gehört der abgebildete Graph?

- (A)  $y = \frac{1}{2}|x - 1| - \frac{1}{2}|x + 1|$       (B)  $y = |x|$   
 (C)  $y = x + 1$       (D)  $y = \frac{1}{2}|x - 1| + \frac{1}{2}|x + 1|$   
 (E)  $y = \frac{1}{2}|x - 1| - \frac{1}{2}|x + 1| + x$

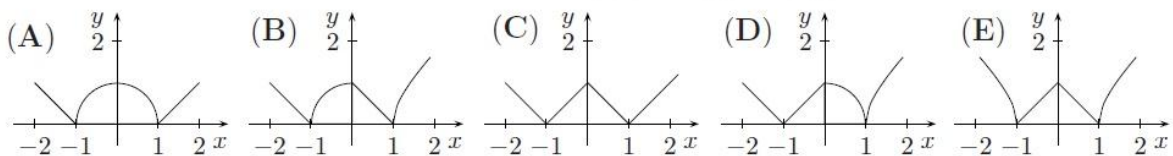


26. Die nebenstehende Zeichnung zeigt die Graphen der Funktionen  $f$  und  $g$ , die für alle reellen Zahlen definiert sind. Welche der folgenden Gleichungen ist dann für jede reelle Zahl  $x$  erfüllt?

- (A)  $f(x) = -g(x) + 2$       (B)  $f(x) = -g(x) - 2$   
 (C)  $f(x) = -g(x + 2)$       (D)  $f(x + 2) = -g(x)$   
 (E)  $f(x + 1) = -g(x - 1)$

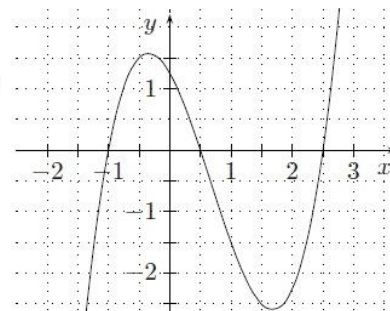


20. Welcher Graph gehört zur Funktion  $y = \sqrt{|(1 + x)(1 - |x|)|}$ ?



25. Die Figur zeigt einen Ausschnitt des Graphen zur Funktion  $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ . Dann gilt:  $b \approx$

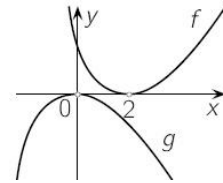
- (A) -4      (B) -2      (C) 0      (D) 0,5      (E) 2,5



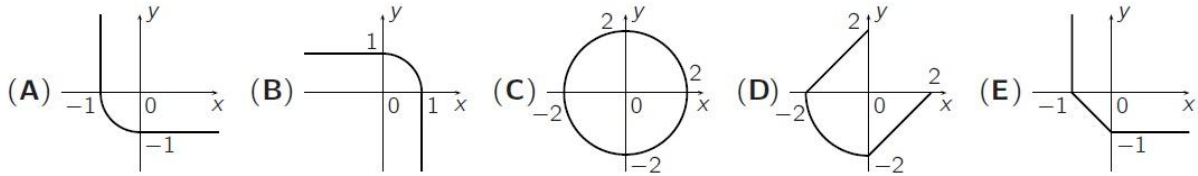


18. Die Abbildung rechts zeigt die Graphen der reellen Funktionen  $f$  und  $g$ . Welche der folgenden Relationen könnte zwischen den beiden Funktionen bestehen?

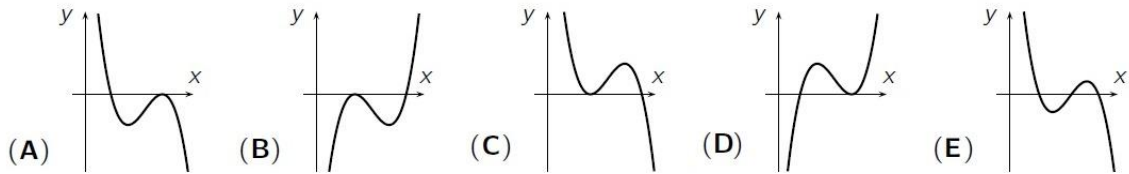
- (A)  $g(x-2) = -f(x)$     (B)  $g(x) = f(x+2)$     (C)  $g(x) = -f(-x+2)$   
 (D)  $g(-x) = f(-x+2)$     (E)  $g(2-x) = -f(x)$



29. Welcher der Graphen gehört zur Lösungsmenge der Gleichung  $(x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 = 4$ ?

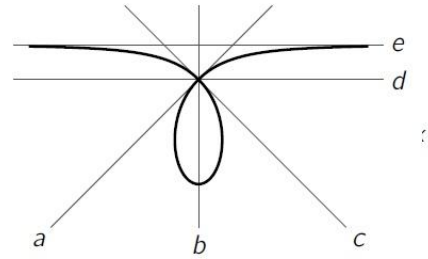


C2 Es sei  $a < b$ . Welcher der folgenden Graphen gehört zur Funktion  $W(x) = (a-x)(b-x)^2$ ?

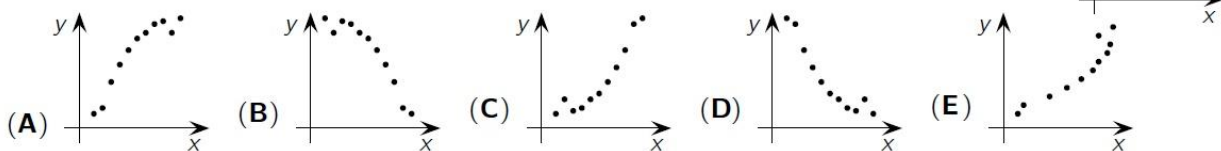


C7 Die Abbildung zeigt fünf Geraden und eine sogenannte *algebraische Kurve*, die aus genau denjenigen Punkten  $(x, y)$  besteht, welche die Gleichung  $x^3 + y^3 = 2xy$  erfüllen. Eine der fünf Geraden ist die  $x$ -Achse des Koordinatensystems. Welche?

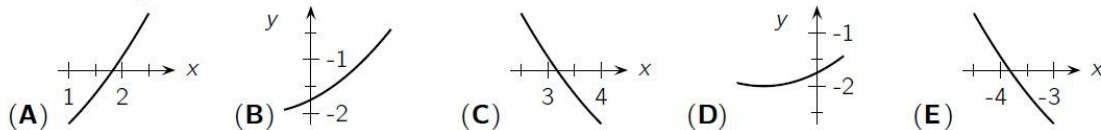
- (A)  $a$     (B)  $b$     (C)  $c$     (D)  $d$     (E)  $e$



A6 Felix hat die Ergebnisse eines Experiments in ein Diagramm eingetragen, aber dabei versehentlich die Werte für die Messgrößen  $x$  und  $y$  vertauscht (s. Abb. rechts). Wie müsste das Diagramm richtig aussehen?



A10 Vier der folgenden fünf Bilder zeigen einen Ausschnitt des Graphen derselben quadratischen Funktion. Welches Bild gehört zum Graphen einer anderen Funktion?



12. Die Funktion  $f$  genügt für alle  $x \neq 0$  der Gleichung  $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2 + 1}{x}$ . Dann ergibt sich für  $f(\sqrt{x}) \cdot f(-\sqrt{x})$  bei  $x > 0$  der Wert

- A:  $-\frac{(x+1)^2}{x}$     B:  $\sqrt{\frac{x}{x+1}}$     C:  $\frac{x}{x^2+1}$     D:  $-\frac{x^2+1}{x}$     E:  $\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x}$

20. Es sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine nichtnegative Funktion, die die zwei Bedingungen

$$f(1) = 2, \quad f(x+y) = f(x)f(y).$$

erfüllt. Welchen Wert hat  $f$  an der Stelle  $\frac{1}{2}$ ?

- (A) 0                      (B)  $\frac{1}{2}$                       (C)  $\frac{1}{2}\sqrt{2}$                       (D) 1                      (E)  $\sqrt{2}$

22. Es gilt:  $f(x) = \frac{2x}{3x+4}$ . Wenn  $f(g(x)) = x$  gelten soll, dann ist  $g(x)$  gleich

- (A)  $\frac{4x}{2-3x}$                       (B)  $\frac{3x}{2x+4}$                       (C)  $\frac{2x+4}{4x}$                       (D)  $\frac{3x+4}{2x}$                       (E)  $\frac{3x}{2x-4}$

**B7** Für eine der folgenden Funktionen gilt: Wird  $\frac{1}{x}$  anstelle von  $x$  in die Funktion  $f(x)$  eingesetzt, dann erhält man  $\frac{1}{f(x)}$ . Für welche?

- (A)  $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$     (B)  $f(x) = \frac{1}{x}$                       (C)  $f(x) = \frac{1}{x+1}$     (D)  $f(x) = \frac{2}{x}$                       (E)  $f(x) = x + \frac{1}{x}$

Aufgabe (Nr):    10    16    19    20    12    26    20    25    18    29    C2    C7    A6    A10    12    20    22    B7  
 Buchstabe:        D    B    E    D    C    C    D    B    A    A    A    A    C    C    A    E    A    B

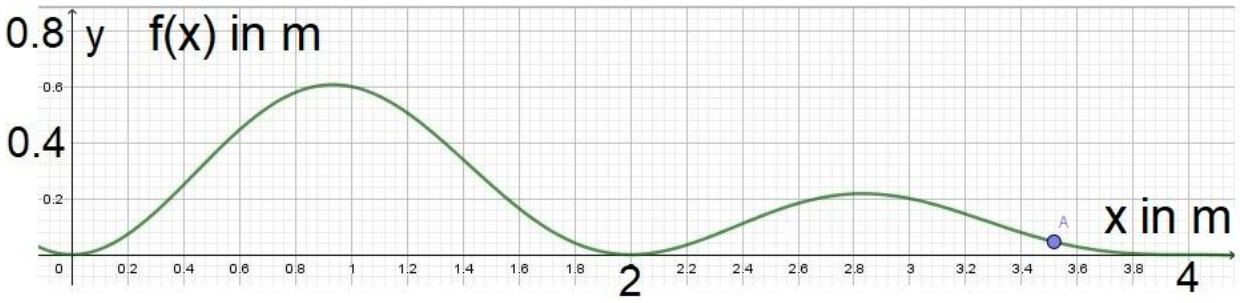
AgNr 1-10 oder A = leicht; AgNr 11-20 oder B = mittel; AgNr 21-30 oder C = schwer.

Die Seiten allen Unterrichtsmaterials sind (Alice):

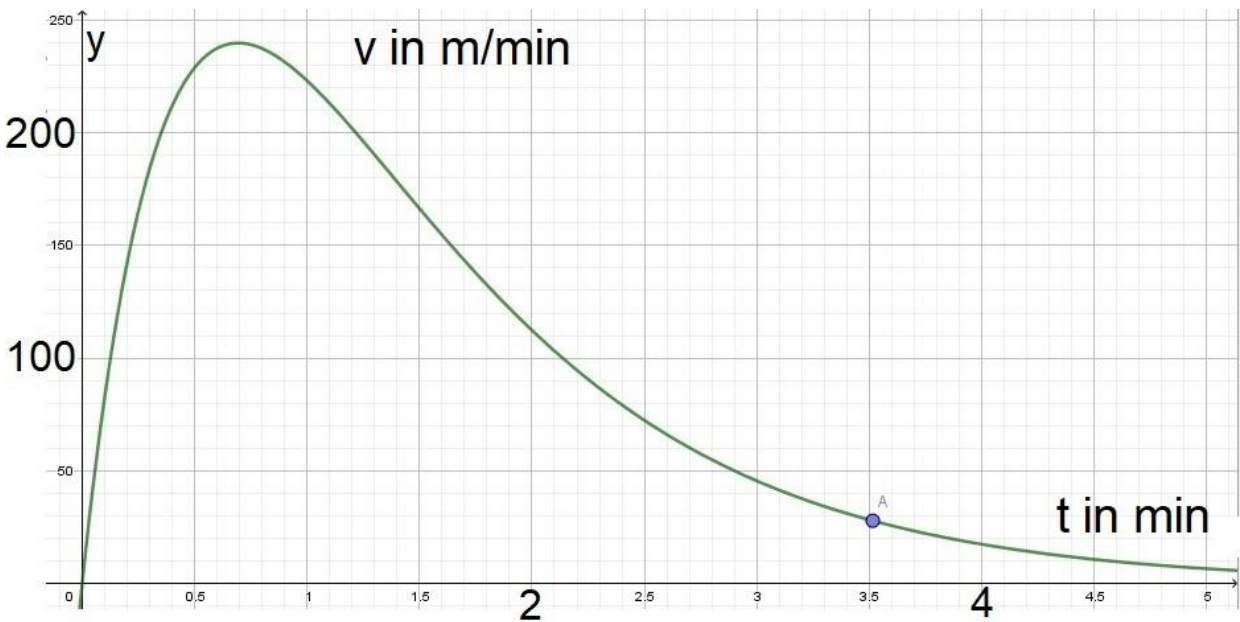
19-42, 49-52, 54-71, 87-121,    137-170, 173-184, 200-207, 225-249,    249-283, 312-371

16.9.9 Vergrößerte Graphen zu gewissen Analysis-Wahlteil-Abiaufgaben

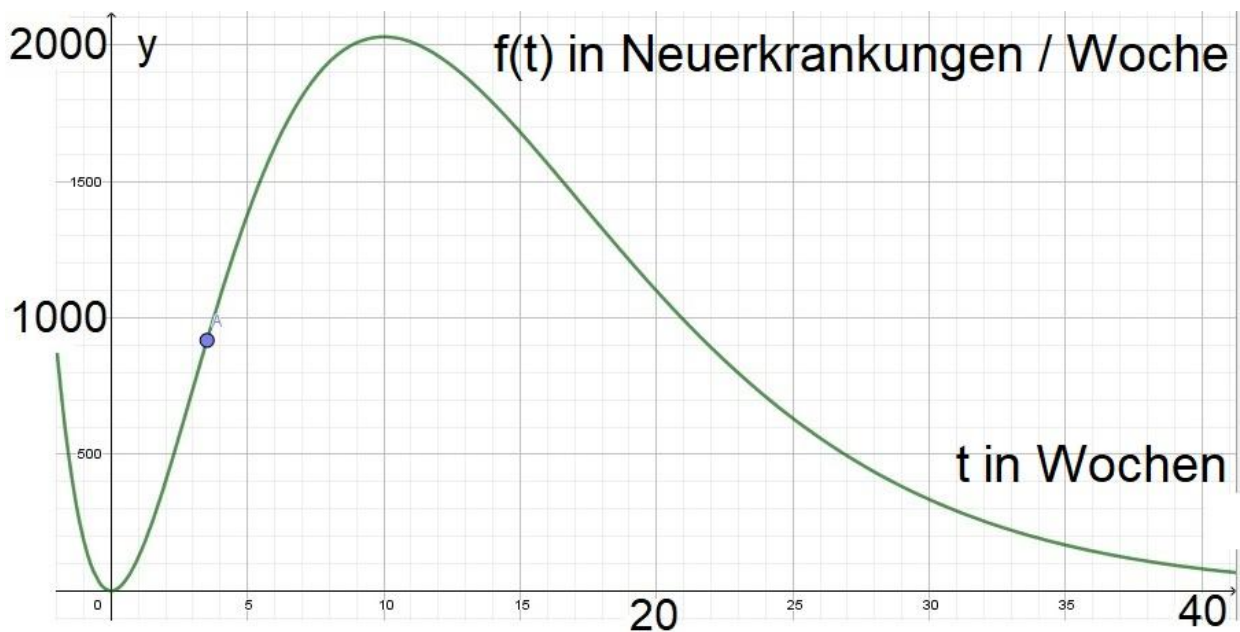
Graph zur Aufgabe 115/301, Minigolfbahn, Abschnitt 5.4.9:



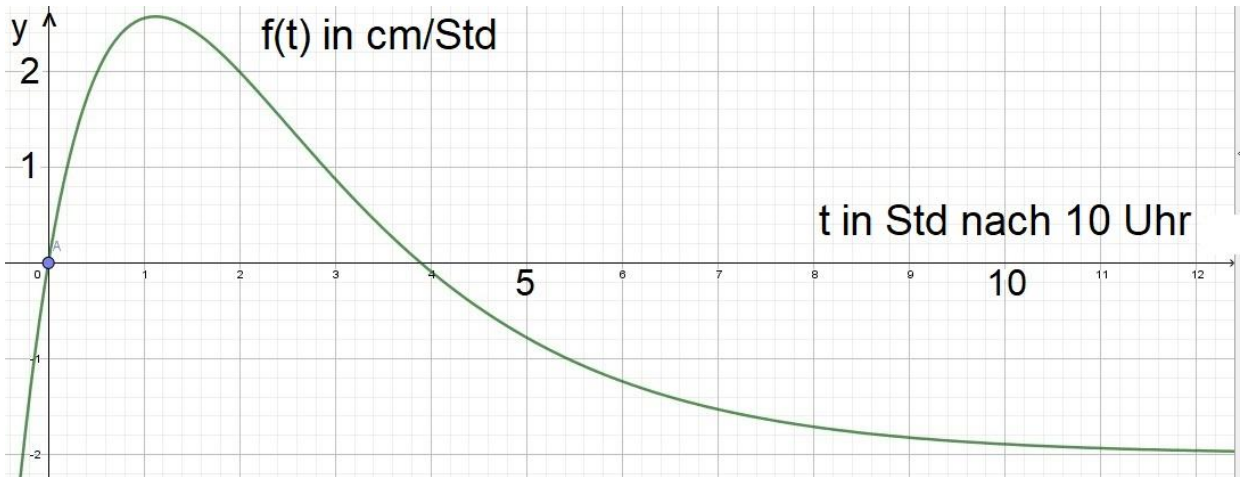
Graph zur Aufgabe 169/437, Boote, Abs 6.3.10:



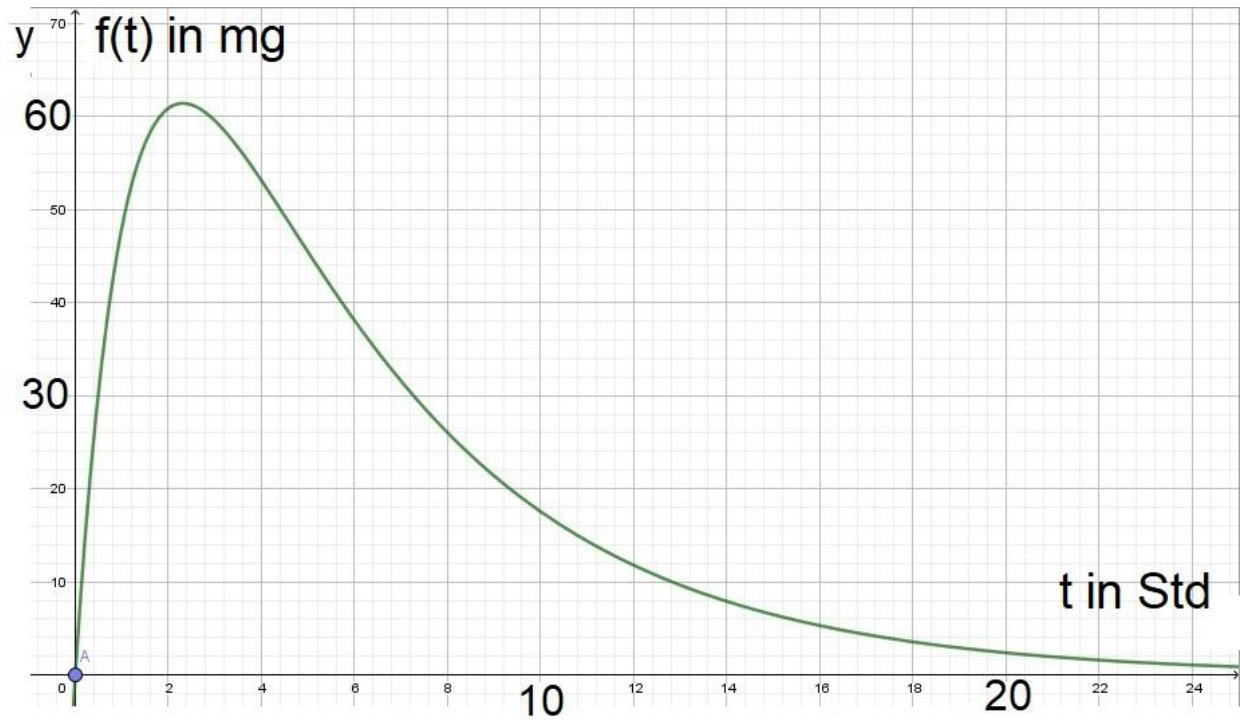
Graph zur Aufgabe 177/470, Virus, Abs 7.1.9 Integralrechnung:



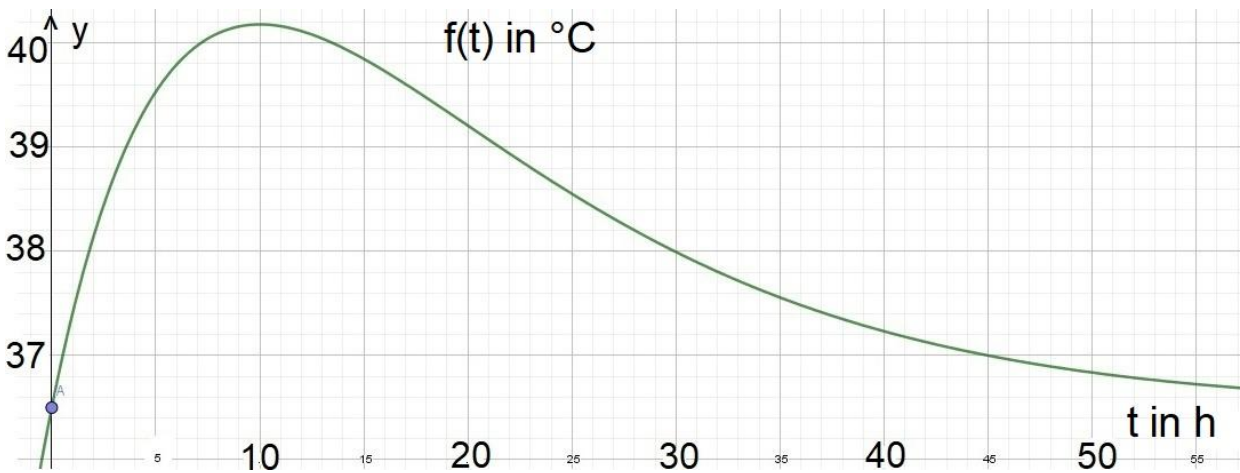
Graph zur Aufgabe 167/434, Skigebiet, Abs 6.3.10 e-Funktion:



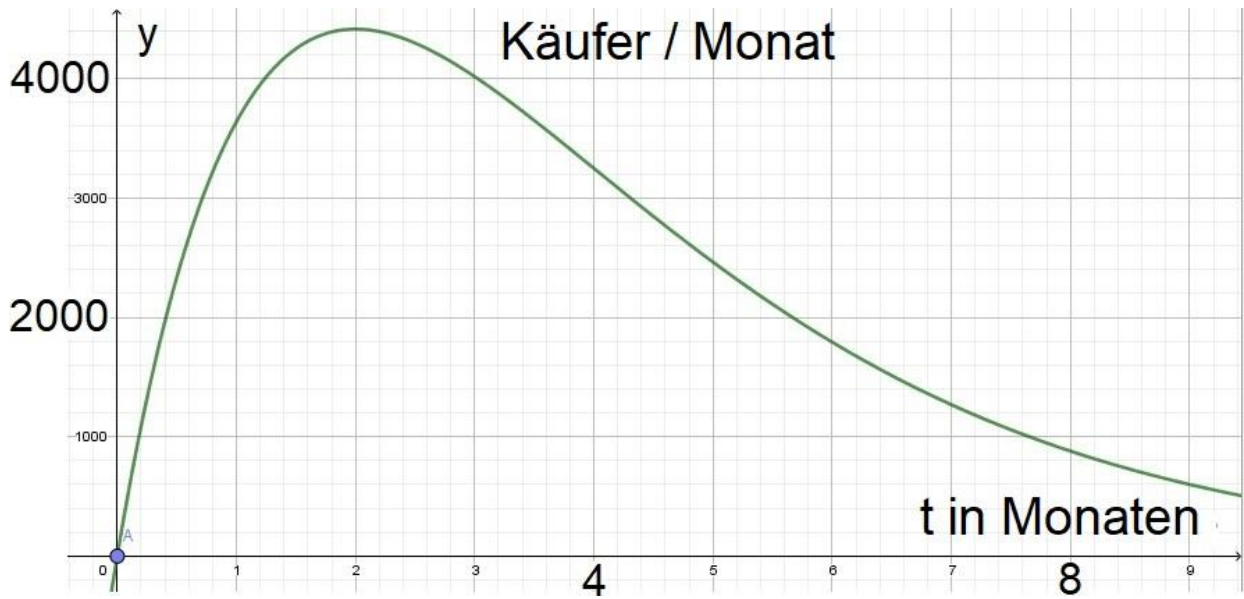
Graph zur Aufgabe 168/435, Medikament, Abs 6.3.10:



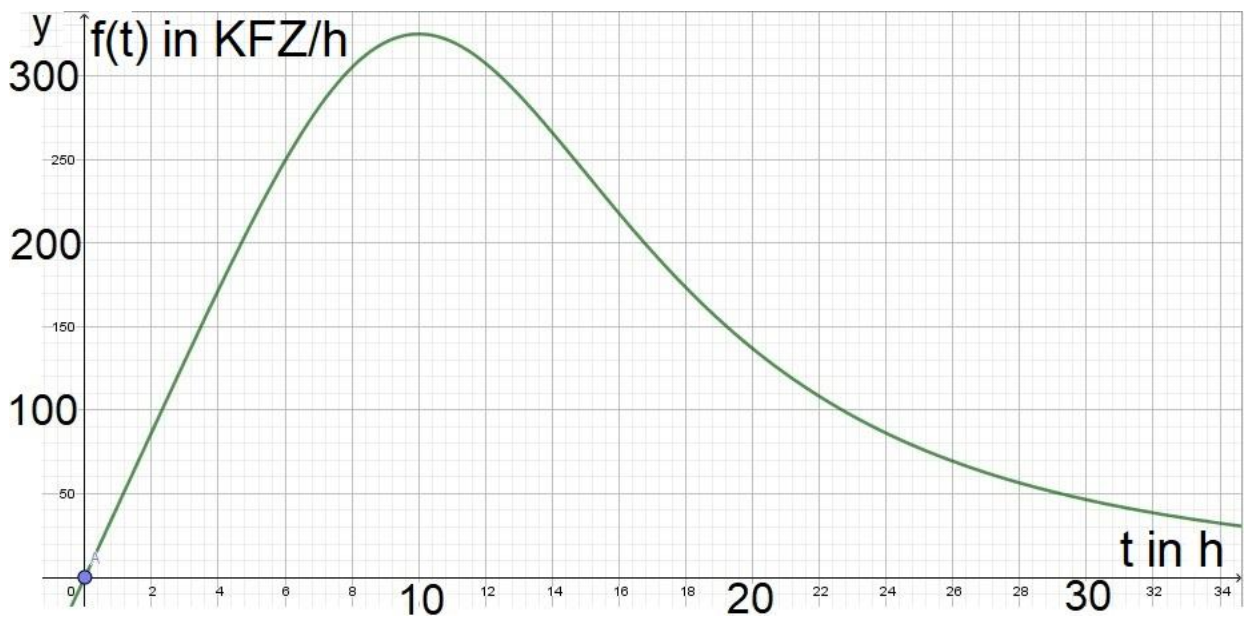
Graph zur Aufgabe 169/436, Fieberkurve, Abs 6.3.10:



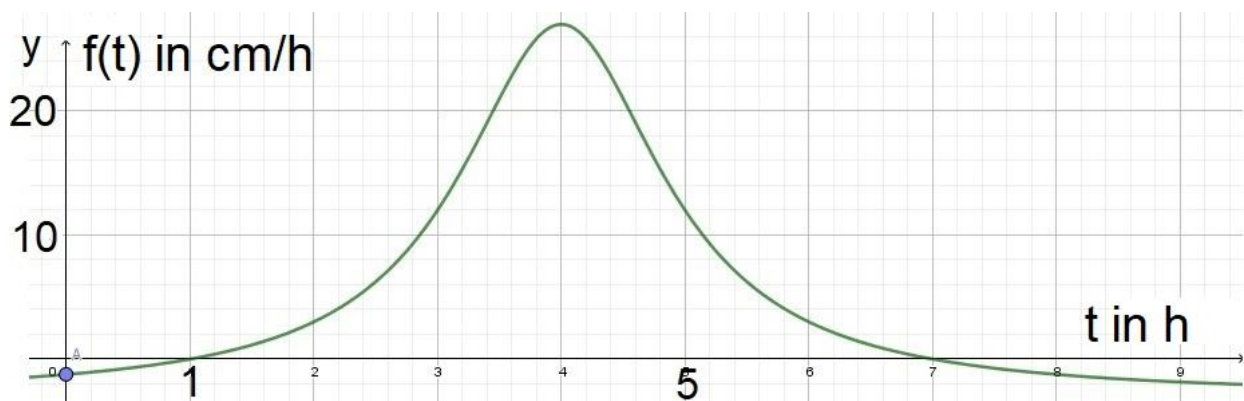
Graph zur Aufgabe 177/471, Smartphone-App, Abs 7.1.9:



Graph zur Aufgabe 120/320, Stau an der Grenze, Abs 5.5.4:



Graph zur Aufgabe 120/321, Schnee im Günter Spät-Stadion, Abs 5.5.4:



## 16.10 Englisch Mathe Vokabeln Danke an Frau Hambsch

### 16.10.1 Analysis - Vokabeln

anti-derivative	Stammfunktion	(Ag 175/455)
area	Fläche	(Ag 175/455)
asymptote	Asymptote	(Ag 153/390)
average rate of change	durchschnittliche Änderung	(Ag 138/328)
chain rule	Kettenregel	(Abs 161/6.3.3)
concaved down / up	rechts / linksgekrümmt	(Ag 148/369)
continous	stetig	(Ag 151/383)
degree	Grad (der Funktion)	(Ag 98/247)
derivation from first principles	Ableiten mit der h-Methode	(Ag 139/331)
derivative	Ableitung	(Ag 140/338)
derived function	Ableitungsfunktion	(Ag 140/338)
differentiable	differenzierbar	(Ag 143/349)
domain	Definitionsmenge	(Ag 98/248)
end behaviour	Globalverlauf	(Abs 100/5.3.7)
equation	Gleichung	(Ag 21/10)
extreme point	Extrempunkt	(Ag 145/355)
Fundamental Theorem of Calculus	Hauptsatz der Diff.u.Integralrechnung	(Ag 174/454)
higher order derivative	höhere Ableitung	
increasing	monoton wachsend	(Ag 150/379)
inflexion point	Wendepunkt	(Abs 146/6.2.4)
integral	Integral	(Ag 175/455)
leading term	dominanter Summand	(Ag 101/256)
gradient/slope	Steigung	(Ag 96/242)
graph	Schaubild	(Ag 98/247)
instantaneous rate of change	momentane Änderungsrate	(Ag 139/329)
inverse function	Umkehrfunktion	(Ag 93/231)
normal line	Normale	(Ag 141/342)
parabola	Parabel	(Ag 87/208)
perpendicular	senkrecht	(Ag 141/342)
polynomial function	ganzrationale Funktion	(Abs 96/5.3)
power rule	Potenzregel	(Abs 139/6.1.5)
product rule	Produktregel	(Abs 162/6.3.5)
quadratic formula	Mitternachtsformel	(Abs 31/2.2.6)
range	Wertemenge	(Ag 98/248)
rational function	gebr.rationale Funktion	(Abs 116/5.5)
reflection (in s.th.)	Spiegelung	(Abs 100/5.3.6)
secant line	Sekante	(Ag 233/576)
second derivative	zweite Ableitung	(Ag 147/365)
saddle point	Sattelpunkt (gemeint ist Terrassenpunkt)	(Ag 145/358)
solid of revolution	Rotationskörper	(Ag 181/487)
stationary point	Punkt mit waager. Tangente	(Ag 145/355)
strictly decreasing	streng monoton fallend	(Ag 150/379)
symmetry	Symmetrie	(Abs 106/5.3.13)
tangent line	Tangente	(Ag 140/338)
translation, shifting	Verschiebung	(Abs 100/5.3.5)
trigonometric function	trigonometr. Funktion	(Abs 108/5.4)
vertex	Scheitelpunkt	(Ag 87/208)
x-intercept, zero, root	Nullstelle	(Ag 31/55)
y-intercept	y-Achsenabschnitt	(Ag 31/55)

**16.10.2 Vektorrechnung - Vokabeln**

cartesian form	Koordinatenform	(Ag 262/710)
cross product	Kreuzprodukt	(Abs 266/10.4.1)
direction	Richtung	(Ag 253/669)
direction vector	Richtungsvektor	(Ag 253/669)
line of intersection	Schnittgerade	(Ag 265/721)
magnitude	Betrag des Vektors	(Ag 256/683)
normal equation	Normalenform	(Ag 262/707)
normal vector	Normalenvektor	(Ag 262/707)
opposite/negative vector	Gegenvektor	(Ag 249/653)
parallel	parallel	(Ag 254/674)
parametric form	Parameterform	(Abs 261/10.3.1)
point of intersection	Schnittpunkt	(Ag 254/673)
plane	Ebene	(Ag 261/705)
position vector	Ortsvektor	(Ag 251/658)
scalar	Skalar	(Ag 250/655)
scalar product	Skalarprodukt	(Ag 258/692)
skew	windschief	(Ag 254/675)
vector equation of a line	Parametergleichung einer Geraden	(Ag 253/669)
unit vector	Einheitsvektor	(Ag 256/683)

**16.10.3 Stochastik - Vokabeln**

binomial distribution	Binomialverteilung	(Ag 335/848)
binomial experiment	Bernoulli Experiment	(Ag 335/849)
experiment	Experiment	(Ag 312/782)
probability	Wahrscheinlichkeit	(Ag 316/791)
event	Ereignis	(Ag 312/782)
expected value	Erwartungswert	(Abs 321/12.2.2)
failure	Misserfolg	(Ag 335/849)
Gaussian curve	Gauss'sche Glockenkurve	(Ag 340/858)
independent	unabhängig	(Ag 326/820)
intersection	Schnittmenge	(Ag 314/785)
mean/average	Mittelwert	(Ag 322/810)
multi trial experiment	mehrstufiges Experiment	(Abs 419/14.16.5)
normal distribution	Normalverteilung	(Abs 340/12.3.9)
opposite/complementary ev.	Gegenereignis	(Ag 317/796)
outcome	Ergebnis	(Ag 312/782)
probability distribution	Wahrscheinlichkeitsverteilung	(Ag 316/794)
random variable	Zufallsvariable	(Ag 321/809)
replacement	Zurücklegen	(Ag 318/799)
rolling a die	würfeln	(Ag 312/783)
standard deviation	Standardabweichung	(Ag 324/817)
success	Erfolg	(Ag 335/849)
tree diagram	Baumdiagramm	(Ag 314/785)
trial	Durchführung	(Ag 335/849)
tossing a coin	Münze werfen	(Ag 317/798)
two-ways-table	Vierfeldertafel	(Ag 321/808)
union	Vereinigung	(Ag 314/785)
variance	Varianz	(Ag 324/817)

### 16.10.4 Ein kleines Axiomensystem für Abibücher

Nachdem man mich bat, für das Abibuch 2014 (A14) einen Artikel zu schreiben und sich die Proteste über mein pädagogisches Handbuch aus Hurra Mathe 6.5 in Grenzen hielten (ok, ich werde diesen Text diesmal **vorher** korrekturlesen lassen), möchte ich heute wieder einen Artikel für das künftige Abibuch schreiben. An dieser Stelle möchte ich allen danken, die in Abibüchern etwas Nettes über mich geschrieben haben und die bei einer Abstimmung für mich gestimmt haben.

Ein Abibuch wird in der Regel von zwei Gruppen gekauft: **Abiturienten** im Jahre 2014 waren dies: Anzahl Steckbriefe · Quote aus (A14 S.246) =  $(198 - 8 + 1) \cdot \frac{162}{162+6} \approx 184$  (Kaufquote 96 %) und **Lehrer** (Potential am FSG ca. 200) gekaufte Exemplare =  $200 - 184 \approx 16$  (Kaufquote knapp 8 %). Was ist zu tun, um diese Kaufquote zu erhöhen? Heute haben mehrere Kollegen meine Abizeitung angeschaut und sich dann entschlossen keine Abizeitung zu kaufen, weil sie sie langweilig fanden. Aber würden Sie ein Buch kaufen, wenn in diesem etwa ein Satz (A14 S.203-204) über Sie steht, den Sie in einem schwachen unbedachten Augenblick gemurmelt haben?

Als Mathematiker definiere ich Ihnen jetzt das folgende Axiomensystem (siehe HM S. 30) für ein oft gekauftes Abibuch. Noch fehlende Grundsätze werden mit dem Gödelschen Unvollständigkeitssatz (siehe HM S. 30) ('Jedes endliche Axiomensystem ist unvollständig') begründet.

**Axiom 0:** (Prolog) Es gilt der Grundsatz: Kleine Änderung, große Wirkung. Verschlimmbessern Sie nicht, denn im Großen und Ganzen sind Ihre Abibücher richtig gut.

**Axiom 1:** (Vollständigkeitsaxiom) Jeder potentielle Käufer sollte mehrmals im Abibuch vorkommen.

**Axiom 2:** (Minimalitätsprinzip) Platz = Geld = Preis (und der sollte eben minimal sein): Viele Schülersteckbriefe passen auf  $\frac{1}{2}$  Seite - nicht jeder ist Lea oder Nico (Nico, Sie haben ein gutes Motto<sup>1</sup> - haben Sie das von mir?) (A14 S.113 und 192). Geben Sie jedem Schüler nur  $\frac{1}{2}$  Seite und im Leafall noch  $\frac{1}{2}$  Seite dazu. Verzichten Sie auf Leerseiten und fassen Sie kleine Seiten zusammen (A14 S. 199 bis 202). Um Geld zu sparen besorgen Sie sich Sponsoren (die finden Sie in alten Abibüchern oder in der Schülerzeitung) - 2012 war ein Abibuch mit 816 Seiten für 11 Euro zu haben (A12 S. 816).

**Axiom 3:** (Reichhaltigkeitsaxiom) Lehrer und Schüler-Rankings sollten massiv erhöht werden, bis näherungsweise der Zustand von Axiom 1 erreicht ist - beachten Sie aber auch Axiom 2. Analog zu den Studienfahrten kann es Berichte aus vielen Kursen geben - diese werden vom Kurssprecher erstellt oder koordiniert. Tipps für weitere Inhalte wird Ihnen auch die Schülerzeitung geben.

**Axiom 4:** (Nettikette) Alles was gesagt wird sollte freundlich gesagt werden. Verzichten Sie auf unklare (Kraft-) Ausdrücke auch wenn diese dem Eingeweihten klar sind (A14 S.25, Abimotto). (Implizite) Kritik ist nicht ausgeschlossen und soll natürlich bei der künftigen Unterrichtsplanung helfen.

**Axiom 5:** (Rechtzeitigkeitsbedingung) Es gilt Murphys Gesetz: Alles, was schiefgehen kann, geht schief. Und schief gehen kostet Zeit (+ Geld). Versuchen Sie einen Großteil des Buches schon in 12/1 fertig zu stellen. Ein Manager sollte auch Sanguiniker (siehe Temperamente oder HM 14) sein, der vor allem einen schnellen Beginn garantiert. Erscheinungsdatum sollte spätestens die Parkplatzparty sein. Das späte Abibuch wird weniger gekauft. Halten Sie sich nicht zu sehr an Douglas Adams: 'I love deadlines. I like the whooshing sound they make as they fly by.'

Gestern + morgen  
kannst Du nichts tun...



**Epilog:** Die resultierenden Sätze sind Ihnen zur Übung selbst überlassen. Ich würde mich freuen, wenn ich Ihnen ein paar Tipps geben konnte.

Wolfgang Schmid

**Literatur:** zum Abschnitt Axiomensystem für Abibücher

A14	Abijahrgang 2014:	Sch .. auf Schule - Hauptsache gutABIzeps	www.abibuch.de	2014
A12	Abijahrgang 2012:	Doppelkorn 2012	KDD GmbH	2012
HM:	Wolfgang Schmid:	Hurra Mathematik 6.5	Eigenverlag	2014

<sup>1</sup>Liebe vergeht, Hektar besteht



### 16.10.5 Checkliste für Abiball, Abibuch + Abischerz

Ein guter Unterricht ist das Ergebnis eines guten Zeitmanagements (Abs. 377/14.1.1), gleiches gilt auch für gute Abituraktionen. Für alle Ihre Aktivitäten haben Sie knapp zwei Jahre Zeit zur Planung. Wann haben Sie am wenigsten Zeit dazu? Und wann haben Sie keine Motivation mehr? Richtig, deshalb sollten Sie alles frühzeitig abschließen (O.K. für mich als Sanguiniker ist das eher einfach). Daher gilt: Deadline für Vorschläge und Beiträge aus dem Jahrgang ist 'direkt nach den Sommerferien' - da sind die Studienfahrten vorbei + der Abistress noch eher in weiter Ferne. Weil Sie bis dahin eher nichts bekommen, gilt die zweite (rote) Deadline ist nach den Herbstferien. Sie haben dann bis zu den Weihnachtsferien Zeit auf die Nachzügler Druck zu machen und in den Weihnachtsferien einen groben Projektplan zu erstellen und ggf zu publizieren. In den Faschingsferien können Sie dann alle Nachzügler einbauen. Dann ist alles fertig. Für einen gelungenen Abiball (auch Abistreich) brauchen Sie drei Dinge: Programm, Programm, Programm.

Abiball = G8 Gipfel



**Abiball:** Das Wichtigste ist (wie schon erwähnt) Programm. Dieses sollte möglichst viele kurze Programmpunkte beinhalten (statt viele lange) und optimalerweise Lehrer einbinden: Steht Lieschen Müller auf der Bühne finden das iA deren Eltern und deren Freunde (beachte Mathematiker haben nur Feinde + Todfeinde) toll. Steht hingegen Frau Mustermann auf der Bühne, so wollen diese iA 28 Familien ihrer Abiturienten, sowie auch einige Familien von Ex-Schülern sehen.

Lehrertisch: Überlegen Sie, ob Sie einen Lehrer (zB mich) den ganzen Abend bespaßen wollen; und selbst wenn Sie sich den ganzen Abend nur um mich kümmern wollen, so sollten Lehrer (für andere Schüler + Eltern) leicht auffindbar (und auch erreichbar) sein  $\Rightarrow$  Bitte machen Sie einen eigenen Lehrertisch in exponierter Lage. Exponiert bedeutet nicht unbedingt zentral, sondern vorne am Rand um eine hohe Fluktuationsrate zu ermöglichen und den Zugang zur Bühne zu erleichtern. Bitte stellen Sie auch mehr Tische auf, als Sie brauchen. Oftmals suchen später ankommende Verbände nach einem Platz.

Ich sehe das Kommen zum Abiball schon als Dienstverpflichtung an, nicht aber, dafür 58 € (Abiball 2019) zu bezahlen. Weil das Annehmen von Geschenken nicht ganz unproblematisch ist, sollten Sie optimalerweise die Karten um  $\varepsilon$  (epsilon) verteuern und gleichzeitig Lehrern **freien** Eintritt ermöglichen.

**Abischerz:** Als Vorbild kann hier der Jahrgang 2017 dienen, Hier wurde der Rektor entführt und die Lehrer mussten durch Spiele Lehrer gegen Schüler versuchen, ihn zu befreien (was dann sogar gelang). Sind Sie respektvoll; wir Lehrer müssen nach dem Abischerz wieder an die Schule kommen; Sie nicht. Meiden Sie Wasser, denn nach dem Scherz sollte noch Unterricht stattfinden können.

**Abibuch:** In meinen Kursen benenne ich iA einen Reporter, der einen Kursbericht verfasst (Lieber Reporter, bitte seien Sie gnädig). Dies sollten Sie in allen Kursen anregen, denn diese Berichte werden bevorzugt gelesen (Lob an das Abibuch 2019). Bitten Sie ruhig (aber nicht zu fordernd) die Kollegen, etwas für das Abibuch zu schreiben. Auch ich bin dazu bereit, allerdings nur, wenn Sie mir vor dem Druck die Möglichkeit geben, den Artikel zu kontrollieren (im Jahr 2018 wurden meine Artikel +  $M \cup M \in M$  'vergessen' und für solch einen Artikel brauche ich etwa einen Arbeitstag). Sortieren Sie bitte die Schülersteckbriefe alphabetisch und nicht nach Tutorkursen; woher soll ich wissen, wer der Tutor ist (wenn ich es nicht selber bin).

Bitte verzichten Sie bei Lehrerzitaten auf Namen. Beispiel: Aus dem Sd Zitat: 'Dr. Engel hat immer dasselbe an' sollte: 'Der (Deutsch-) Kollege ... hat immer dasselbe an' werden. Außerdem sollten (müssen) jedem Kollegen individuell seine eigenen Sprüche zur Kontrolle vorlegen. Das ist Zensur; leider, denn wie schon erwähnt wollen wir nach Erscheinen der Abizeitung hier weiterarbeiten.

**16.10.6 Vorwort für Eltern**

Wolfgang Schmid

FSG Marbach

Liebe Eltern,

sd@slt.biz

ich freue mich ihr Kind in diesem Schuljahr im Fach Mathematik unterrichten zu dürfen und möchte Ihnen im Folgenden ein paar Informationen zu meinem Unterricht geben. Mathematik ist ein Kernfach und in hohem Maße versetzungsrelevant. Um in Mathematik eine gute Note zu bekommen, sollte ihr Kind sehr viel üben und Üben bedeutet nicht das Nachvollziehen einer vorhandenen Musterlösung. Zu jeder Mathestunde in der Schule sollte Ihr Kind 45 Minuten zu Hause Aufgaben rechnen; dies darf auch in Kleingruppen geschehen. Zu diesem Zweck bekommt Ihr Kind am Anfang des Schuljahres einen Auszug meines Buches *Hurra Mathematik* mit vielen Übungsaufgaben und zugehörigen Ergebnissen / Lösungsvorschlägen.

Meine Stoffverteilungspläne und mein Unterrichtsbuch finden Sie im Internet auf [sd.slt.biz](http://sd.slt.biz) Auf dieser Seite finden Sie auch alte Manuskripte zum Nachlernen, Klassenarbeitstermine und andere nützliche Informationen. Der Username ist Schueler, das Passwort wird im Unterricht bekanntgegeben.

Im Unterricht wird der Unterrichtsstoff normalerweise anhand von zielführenden Fragestellungen erarbeitet (entdeckendes Lernen). *Hurra Mathematik* stellt (in den Überschriften) einen Bezug zu den eingeführten Lehrwerken her. Hausaufgabe sind grundsätzlich alle Aufgaben (aus Hurra Mathematik), die im Unterricht ausgelassen wurden. Bei allen Übungsaufgaben (Türmchenaufgaben) gilt folgende Faustregel: Wer auf Note '1' steht, macht eine, wer auf Note '2' steht macht zwei usw. Der Schwierigkeitsgrad der Übungsaufgaben ist ansteigend, so wird Binnendifferenzierung gewährleistet. Grundsätzlich werden die Hausaufgaben im Unterricht nur auf Anfrage besprochen; die umrahmten Hausaufgaben werden (maximal) ein Mal pro Woche kontrolliert.

Damit sich Ihr Kind regelmäßig mit Mathematik beschäftigt, schreibe ich jedes Halbjahr etwa 2 Klassenarbeiten und 1 bis 3 Tests (in der Regel angesagt). Bei schlechter Arbeitshaltung der Klasse behalte ich mir jedoch vor, die Tests nicht mehr anzusetzen. Jede Klassenarbeit zählt wie zwei Tests.

Hinzu kommt eine mündliche Note, die ich ebenfalls jeweils wie einen Test werte. Die mündliche Note kann durch Sonderleistungen (in der Regel Vorträge) aufgewertet werden. Sollte sich Ihr Kind dafür entscheiden, bei mir eine GFS zu machen, dann muss es bei mir eine Schulstunde zu einem noch nicht behandelten mathematischen Thema durchführen. Wenn die Zeugnisnote 'ausreichend' angestrebt wird, ohne dass eine Klassenarbeit mit 'ausreichend' oder besser erreicht wurde, gehört zur GFS auch eine mündliche Prüfung, die zu 50% in die Gesamtnote einfließt. Informationen zur GFS finden Sie auf meiner Internetseite.

Nach diesen vielen Informationen freue ich mich auf eine fruchtbare Zusammenarbeit, denn Mathematik macht Spaß.

Freundliche Grüße,

*W. Schmid*