# ABITURAUFGABEN

15. SEP. 2022

## 2.5 Seite 928

**Aufgabe P 2.5**: Nach Abs. 263/10.5. Gegeben sind die Ebene $E: 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12$ und für jedes $a \in \mathbb{R}$ eine Gerade $g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$.

$a_{1-2}$) Bestimmen Sie den Wert von $a$, für den die Gerade $g_a$ parallel zu $E$ ist. (1 VP), (BAg 264/743e).

$b_2$) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist $P_a$ der Schnittpunkt von $g_a$ mit der $x_1x_3$-Ebene. Bestimmen Sie den Wert von $a$, für den $P_a$ in $E$ liegt. (1.5 VP), (BAg 249/679, 255/707e).

$E: 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12$ $\qquad g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$

**a)** Wert von a für den Gerade parallel zu E ist $\rightarrow g_a \parallel E$

Entweder ...

... Ebene mit Gerade schneiden:

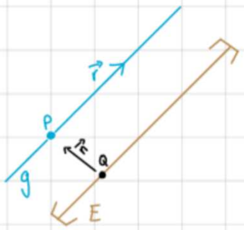
$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -1 + at \\ x_2 &= 5 - 5t \\ x_3 &= 3 - 4t \end{aligned}\right\} \text{ in E einsetzen} \rightarrow$$

$$2\cdot(-1+at) + 3\cdot(5-5t) - 4\cdot(3-4t) = 12$$
$$-2 + 2at + 15 - 15t - 12 + 16t = 12$$
$$1 + 2at + t = 12 \quad |-1$$
$$2at + t = 11$$
$$t(2a+1) = 11$$
$$t = \frac{11}{(2a+1)} \rightarrow 2a+1 \neq 0 \quad |:2 \quad |-1$$
$$a \neq -\frac{1}{2}$$

$\rightarrow$ Für $a = -\frac{1}{2}$ ist $g_a \parallel E$

Oder ...

... zeichnerisch lösen:



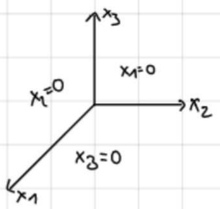

$g_a \parallel E \quad = \quad \vec{n} \perp \vec{r} \quad = \quad \vec{n} \cdot \vec{r} \overset{!}{=} 0$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} = 2a - 15 + 16 = 0 \qquad a = -\frac{1}{2}$

| $P \in E$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $-1$ | $5$ | $3$ | | |
| $2x_1 +$ | $3x_2 -$ | $4x_3$ | $= 12$ | |
| $-2 +$ | $15 -$ | $12$ | $= 1$ | $\neq$ |

$\rightarrow$ Wie gezeigt P nicht auf E und somit nicht identisch

**b)** $P_a = g_a \cap x_1 x_3$ Ebene $\qquad P_a \in E \qquad$ Wert von a für den $P_a$ in E liegt




$x_2 = 0$

$x_2 = 5 - 5t \qquad t = 1 \qquad$ in g einsetzen $\rightarrow g_a(1): \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} a \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+a \\ 5-5 \\ 3-4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow P_a(-1+a \mid 0 \mid -1)$ in E einsetzen

$$E = 2x_1 + 3x_2 - 4x_2 = 12$$
$$2\cdot(-1+a) + 3\cdot 0 - 4 - 4(-1) = 12$$
$$-2 + 2a + 4 = 12$$
$$2a + 2 = 12 \quad |-2$$
$$2a = 10$$
$$a = 5$$

$\Rightarrow P_5 \in E$

**Aufgabe B 2:** Nach Abs. 263/10.5. Gegeben sind die Geradenschar $g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}a\\3\\-1\end{pmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$ und die Gerade $h : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-6\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$, $s \in \mathbf{R}$.

$a_{1-2}$) Beschreiben Sie die besondere Lage der Gerade $h$ im Koordinatensystem. (0.5 VP), (BAg 257/717). Zeigen Sie, dass die Gerade $h$ zur Schar $g_a$ gehört. (1 VP), (BAg 248/678).
Alle Geraden der Schar $g_a$ liegen in einer Ebene $E$. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene $E$. (2 VP), (BAg 265/753 d), (Teilergebnis: $E : x_2 + 3x_3 = -6$).

$g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}a\\3\\-1\end{pmatrix}$ $\quad t \in \mathbb{R} \quad a \in \mathbb{R} \qquad h : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-6\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$ $\quad s \in \mathbb{R}$

$a_1$) Lage von h $\Rightarrow$ h parallel zur $x_2x_3$ Ebene $(x_1=0)$ $\Rightarrow$ $P(1|-6|0)$ liegt in der $x_3=0$

$a_2$) h ist eine $g_a$

$\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}a\\3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-6\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix} \rightarrow$

$1 + at = 1 \iff a \cdot t = 0$ $\quad a=0$ oder $t=0$

$\boxed{\begin{aligned} 3t &= -6+3s \\ -2-t &= -s \end{aligned}} \iff \begin{aligned} t-s &= -2 \\ -t+s &= 2 \\ \hline 0 &= 0 \end{aligned}$

$g_0 : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow (1|-6|0) \in g_0$

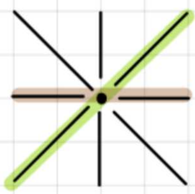
$\begin{pmatrix}1\\-6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$ $\quad \begin{aligned} 1 &= 1 \\ -6 &= 3t \iff t=-2 \\ 0 &= -2-t \iff t=-2 \end{aligned}$ $\Rightarrow h \equiv g_0$

**In kurz:**

1) h und g parallel: $\vec{r}_g \parallel \vec{r}_h$ $\quad \begin{pmatrix}a\\3\\-1\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$ $\quad \left.\begin{aligned} a&=0 \\ 3&=3r \\ -1&=-r \end{aligned}\right\} \begin{aligned} r&=1 \\ r&=1 \end{aligned}$

2) h identisch zu $g_0$: $h \equiv g_0$ $\quad \begin{pmatrix}1\\-6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$ $\quad \left.\begin{aligned} 1&=1 \\ -6&=3t \\ 0&=-2-t \end{aligned}\right\} \begin{aligned} t&=-2 \\ t&=-2 \end{aligned}$ $\Rightarrow P_h \in g_0$

$a_3$) alle $g_a$ liegen in E



irgendwelche Geraden auf der Ebene

$\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{n} \cdot \begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix} = 0$

$\vec{n} \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix} = 0$

$\begin{aligned} n_1 + 3n_2 - n_3 &= 0 \\ -3n_2 + n_3 &= 0 \\ \hline n_1 &= 0 \end{aligned}$ $\qquad$ Sei $n_2 = t \rightarrow -3 \cdot t + n_3 = 0$

$n_3 = -3t$

$\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\t\\3t\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$ $\qquad 0x_1 + 1x_2 + 3x_3 = -6$

$x_2 + 3x_3 = -6$

**Fortsetzung:** $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}a\\3\\-1\end{pmatrix}$ $\quad t,a \in \mathbb{R} \quad x_2 + x_3 = -6$ 16. SEP. 2022

Es gibt eine Gerade $h_1$ mit Aufpunkt $P(1|0|-2)$ die in E verläuft und keine Gerade der Schar ist.
Finden sie diese Gerade.

1. Welchen Wert darf ich für a nicht einsetzen?

$a = \infty$
↳ einzige Zahl die nicht reell ist

$\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}\infty\\3\\-1\end{pmatrix}$ → mit $\frac{1}{a}$ erweitern

$\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}a/a\\3/a\\-1/a\end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\3/a\\-1/a\end{pmatrix} \xrightarrow{a\to\infty}$
$= \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\3/\infty\\-1/\infty\end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

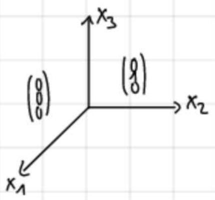
$x_1 = 1 + t$
$x_2 = 0$
$x_3 = -2$

→ in $x_2 + 3x_3 = 6$ einsetzen
$0 + 3\cdot(-2) = 6$
$6 = 6$
⇒ t fällt weg ⇒ $h_1 \equiv E$

## B 2 Seite 931

$b_{2-3}$) Bestimmen Sie denjenigen Wert von $a$, für den $g_a$ die $x_2$-Achse schneidet. (1.5 VP), (BAg 257/717).
Es gibt zwei Geraden der Schar $g_a$, die die Gerade $h$ im Winkel 45° schneiden. Ermitteln Sie die zugehörigen Werte von $a$. (2.5 VP), (BAg 263/740).

$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}a\\3\\-1\end{pmatrix}$




**$b_1$) Wert von a für den $g_a$ die $x_2$-Achse schneidet**

- $x_2$-Achse Formel: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\t\\0\end{pmatrix}$
- Weil "schneidet" → Gleichsetzen u. Parameter ändern:

$\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}a\\3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\t\\0\end{pmatrix}$

lineares Gleichungssystem:
$1 + sa = 0$
$3s = t$
$-2 - s = 0 \iff s = -2$

$t = 3\cdot(-2) = -6$

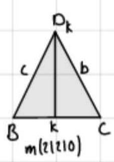
$1 + (-2)\cdot a = 0$
$2a = 1$
$a = 1/2$

$S_2(0|-6|0)$

## B 1 Seite 931

**Aufgabe B 1:** Nach Abs. 263/10.5. Für $k \in \mathbf{R}$ mit $0 < k \le 6$ werden die Pyramiden $ABCD_k$ mit $A(0|0|0)$, $B(4|0|0)$, $C(0|4|0)$ und $D_k(0|0|k)$ betrachtet (vgl. Abb. 931/546 1). $a_1$) Begründen Sie, dass das Dreieck $BCD_k$ gleichschenklig ist. (1 VP), (BAg 253/696).
Der Mittelpunkt der Strecke $BC$ ist $M(2|2|0)$. $\overrightarrow{MD_k} = \left|\begin{pmatrix}-2\\-2\\k\end{pmatrix}\right|$ ist die Länge einer Höhe des Dreiecks $BCD_k$. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks $BCD_k$. (1VP), (BAg 260/731).
Für jeden Wert von $k$ liegt die Seitenfläche $BCD_k$ in der Ebene $L_k : kx_1 + kx_2 + 4x_3 = 4k$.

a) $A(0|0|0) \quad B(4|0|0) \quad C(0|4|0) \quad D(0|0|k)$ $\quad \Delta BCD_k$ gleichschenklig




$b = |\overrightarrow{D_kC}| = \left|\begin{pmatrix}0\\-4\\k\end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + k^2} = \sqrt{k^2+16}$
$c = |\overrightarrow{D_kB}| = \left|\begin{pmatrix}-4\\0\\k\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + k^2} = \sqrt{k^2+16}$

$$\overrightarrow{MD_k} = \vec{h} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ k \end{pmatrix}$$

$$A_\Delta = \frac{g \cdot h}{2}$$
$$= \frac{|\overrightarrow{BC}| \cdot \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ k \end{pmatrix}\right|}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{32} \cdot \sqrt{k^2+8}}{2}$$
$$= \frac{\cancel{4}^{2}\sqrt{2(k^2+8)}}{\cancel{2}}$$
$$= 2\sqrt{2(k^2+8)}$$
$$= 2\sqrt{2k+16}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-4)^2+4^2+0^2} = \sqrt{32}$$

$$\left|\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ k \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2+k^2} = \sqrt{k^2+8}$$