726

a) $\vec{n} \perp \vec{a}, \ \vec{n} \perp \vec{b}$

$\vec{n} \circ \vec{a} = \vec{n} \circ \vec{b} = 0$

b) $3x - 4y = 0$ 4 | 3

$6x + 11y = 0$ 11 | -6

$ax + by = 0$ b | -a
-b | a

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \rightarrow -3n_1 + 6n_3 = 0$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \vec{n} = 0 \quad 2n_1 + 1n_2 - n_3 = 0$

sei $n = t$

$3n_1 = 6n_3 \Leftrightarrow n_1 = 2n_3 = 2t$

$2n_1 + n_2 - n_3$

$2 \cdot 2t + n_2 - t = 0 \Leftrightarrow n_2 = -3t$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ -3t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ -1 & 6 \\ 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ -1 & 6 \end{array} \quad \begin{array}{l} (1 \cdot 6) - (-1 \cdot 0) \\ (-1 \cdot -3) - (2 \cdot 6) = \\ (2 \cdot 0) - (1 \cdot -3) \end{array} \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

$\vec{n} \cdot \vec{OA} = b = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 6 \cdot 2 - 9 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 0 = b$

d) $\vec{a} \circ \vec{n} = 0 = \vec{b} \circ \vec{n}$

$a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3 = 0 \xrightarrow{\cdot(-b_1)} -a_1 b_1 n_1 - a_1 b_1 n_2 - a_3 b_1 n_3 = 0$

$b_1 n_1 + b_2 n_2 + b_3 n_3 = 0 \xrightarrow{\cdot a_1} a_1 b_1 n_1 + a_1 b_2 n_2 + a_1 b_3 n_3 = 0$

$0 + n_2 (a_1 b_2 - a_2 b_1) + n_3 (a_1 b_3 - b_3 a_3) = 0$

$\Rightarrow n_2 = -a_1 b_3 + b_1 a_3 \quad | \quad n_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1$

$$\boxed{\begin{array}{l} n_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ n_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ n_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{array}}$$

Kreuzprodukt
oder
Vektorprodukt

f) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = 0$

$a_1 a_2 b_3 - a_1 b_2 a_3 + b_1 a_2 a_3 - a_1 a_2 b_3 + a_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 a_3 = 0$ ✓

$\boxed{a_1 b_2 - a_2 b_1}$ = determinante $\left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} b_1 \\ b_2 \end{smallmatrix}\right)$

725

a) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$ $\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{array}$ $\begin{matrix}(2\cdot 6)-(3\cdot 4)\\(3\cdot 2)-(1\cdot 6)\\(1\cdot 4)-(2\cdot 2)\end{matrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \vec{n}$

$\vec{a} \times r\vec{a} = \vec{0}$

$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow$ Es gibt ein r mit $r\vec{a} = \vec{b}$

c) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (Distributiv)

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}b_1+c_1\\b_2+c_2\\b_3+c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_2(b_3+c_3)-a_3(b_2+c_2)\\a_3(b_1+c_1)-a_1(b_3+c_3)\\a_1(b_2+c_2)-a_2(b_1+c_1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_2b_3+a_2c_3-a_3b_2-a_3c_2\\a_3b_1+a_3c_1-a_1b_3-a_1c_3\\a_1b_2+a_1c_2-a_2b_1-a_2c_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2 & + & a_2c_3-a_3c_2\\a_3b_1-a_1b_3 & + & a_3c_1-a_1c_3\\a_1b_2-a_2b_1 & + & a_1c_2-a_2c_1\end{pmatrix}$$

$$= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

d) $r \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (r\vec{a}) \times \vec{b}$

kein echtes Assoziativgesetz wegen Malzeichen

e) $\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $\begin{array}{cc} 4 & 1 \\ 5 & 2 \\ 6 & 3 \\ 4 & 1 \\ 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{array}$ $\begin{matrix}(5\cdot 3)-(6\cdot 2)\\(6\cdot 1)-(4\cdot 3)\\(4\cdot 2)-(5\cdot 1)\end{matrix} = \begin{pmatrix}3\\-6\\3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-6\\3\end{pmatrix}$ $\quad \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} = + \begin{pmatrix}-b_2a_3+b_3a_2\\-b_3a_1+b_1a_3\\-b_1a_2+b_2a_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix} = \vec{a} \times \vec{b}$$

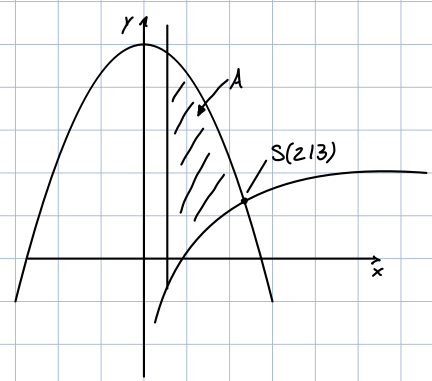
Abiturvorbereitung

927 nr. P1.1

Aufgabe P 1.1: Nach Abs. 176/7.1.15 (Kl. 11) Filme:http://Abi22.slt.biz.
Abb. 928/543a zeigt die Graphen der Funktionen f mit $f(x) = 4 - \frac{4}{x^2}$ und g mit $g(x) = 15 - 3x^2$, $x > 0$, sowie die Gerade mit der Gleichung $x = 1$, (BAg 174/482).

a$_1$) Zeigen Sie, dass sich die Graphen von f und g an der Stelle $x_0 = 2$ schneiden. (0.5 VP)

b$_2$) Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche. (2 VP)



a $x_0 = 2$

b Fläche

$f(x) = 4 - \frac{4}{x^2}$ $\qquad g(x) = 15 - 3x^2$

$f(2) = 4 - \frac{4}{2^2} = 3$ $\qquad g(2) = 15 - 3 \cdot 2^2 = 3$

b $A = \int_1^2 (g(x) - f(x))\,dx$

$= \int_1^2 \left((15-3x) - (4 - \frac{4}{x^2})\right) dx$ $\qquad +\frac{4}{x^2} = 4x^{-2}$

$= \left[15x - 3\frac{x^3}{3} - 4x + 4\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^2$

$= \left[11x - x^3 - \frac{4}{x}\right]_1^2$

$= 11 \cdot 2 - 2^3 - \frac{4}{2} - (11 \cdot 1 - 1^3 - \frac{4}{1})$

$= 22 - 8 - 2 - 11 + 1 + 4 = 6$ (FE)

A: 6 (FE)

P 1.2

Aufgabe P 1.2: Nach Abs. 176/7.1.15 (Kl. 11). Betrachtet werden die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f und F, wobei F eine Stammfunktion von f ist. Abb. 928/543c) zeigt den Graphen G_F von F, BAg: 174/483.

a$_{1-2}$) Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\int_1^7 f(x)dx$. (1 VP)

b$_{1-2}$) Bestimmen Sie den Funktionswert von f an der Stelle $x_0 = 1$. Veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen in Abb. 928/543c). (1.5 VP)

$\int_1^7 f(x)\,dx = 5 - 1 = 4$ FE

P 1.3

Aufgabe P 1.3: Kann mit Stoff Klasse 10 (nach Abs. 142/6.2) gelöst werden. Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktionen f_k mit $f_k(x) = x^4 + (2-k)\cdot x^3 - k\cdot x^2$ mit $k \in \mathbb{R}$.

a_1) Begründen Sie, dass der Graph von f_2 symmetrisch bezüglich der y-Achse ist. (0.5 VP), (BAg 103/276).

b_2) Es gibt einen Wert von k, für den $x_w = 1$ eine Wendestelle von f_k ist. Berechnen Sie diesen Wert von k. (2 VP), (BAg 145/371).

$f_k(x) = x^4 + (2-k)\cdot x^3 - kx^2$ $\qquad$ f_2 as ; $k = x = 1$ (Wendestelle)

$f_2(x) = x^4 + (2-2)x^3 - 2x^2 = x^4 - 2x^2$

$f_2(x)$ hat nur gerade Exponenten und ist damit as zur y-Achse

$f_2(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f_2(x)$

$f_k''(x) = (4x^3 + (2-k)\cdot 3x^2 - k\cdot 2x)' = (4x^3 + 3(2-k)x^2 - 2kx)'$

$= 12x^2 + 3(2-k)\cdot 2x - 2k = 12x^2 + 6(2-k)x - 2k$

$f_k''(1) = 12\cdot 1^2 + 6(2-k)\cdot 1 - 2k = 12 + 12 - 6k - 2k = 24 - 8k \overset{!}{=} 0$

$24 - 8k = 0 \Leftrightarrow k = 3$

$f_k'''(x) = 24x + 6(2-k) \xrightarrow[k=3]{x=1} 24 + 6(2-3) = 18 \neq 0$

P 1.4

Aufgabe P 1.4: Lösbar nach Klasse 10, Abs. 142/6.2 $_{2-3}$) . Ermitteln Sie eine Gleichung derjenigen quadratischen Funktion g, die die beiden folgenden Eigenschaften hat:

(I) Der Graph von g schneidet die Gerade mit der Gleichung $y = -x+1$ im Punkt $P(0|1)$ unter einem rechten Winkel.
(II) Die x- und die y-Koordinate des Extrempunkts des Graphen von g stimmen überein. (2.5 VP), (BAg 152/397).

g quadratisch $\qquad y = -x+1 \qquad P(0|1) \perp \qquad E(x,x)$

$g(x) = ax^2 + bx + c$ $\qquad$ $\boxed{m_1 \cdot m_2 = -1} \Leftrightarrow g_1 \perp g_2$

$g(0) = 1 \qquad g(0) = \underbrace{a\cdot 0^2 + b\cdot 0}_{0} + c = 1 \Rightarrow c = 1$

$$\boxed{\frac{1}{4a} - \frac{2}{4a} = \frac{1-2}{4a} = -\frac{1}{4a}}$$

$g'(0)\cdot(-1) = (-1) \Leftrightarrow g'(0) = +1$

$g'(x) = 2ax + b \qquad g'(0) = 2a\cdot 0 + b = 1 \Leftrightarrow b = 1$

$g'(x) = (ax^2 + x + 1)' = 2ax + 1 = 0 \Leftrightarrow 2ax = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2a}$

$g\left(\frac{-1}{2a}\right) = a\left(\frac{-1}{2a}\right)^2 + \frac{-1}{2a} + 1 = \cancel{a}\,\frac{1}{4a^{\cancel{2}}} - \frac{1}{2a} + 1 = -\frac{1}{4a} + 1 = 1 - \frac{1}{4a}$

$1 - \frac{1}{4a} = \frac{-1}{2a} \overset{\cdot 4a}{\Leftrightarrow} 4a - 1 = -2 \Leftrightarrow 4a = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}$

$y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 1$

P 1.7

Aufgabe P 1.7: Lösbar nach Klasse 10, Abs. 330/12.3.9. Die Zufallsgröße $\mathcal{X}$ ist binomialverteilt mit den Parametern n und $p = 0.5$. Sie hat den Erwartungswert $\mu = 18$, (BAg 328/856).

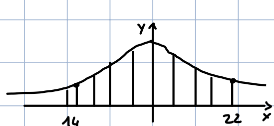
a_{1-2}) Bestimmen Sie den Wert von n und die Standardabweichung von $\mathcal{X}$. (1.5 VP), (BAg 330/858).

b_2) Entscheiden Sie, ob $P(\mathcal{X} = 14) < P(\mathcal{X} = 22)$ ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung. (1 VP), (BAg 327/853).

$P(X=14) < P(X=22)$? $\qquad \overset{18}{E} = n \cdot \overset{0,5}{p} \qquad 18 = n\cdot 0,5 \Leftrightarrow n = 36$

$\sigma = \sqrt{36\cdot 0,5(1-0,5)} = \sqrt{9} = 3$

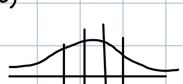
$P(X=14) = P(X=22)$ $\qquad \left[\begin{matrix} 14 = 18-4 \\ 22 = 18+4 \end{matrix}\right]$



$P(X=14) = \binom{36}{14}\cdot 0,5^{14}\cdot(1-0,5)^{36-14}$

$P(X=22) = \binom{36}{22}\cdot 0,5^{22}(1-0,5)^{36-22}$

$P(X=14) < P(X=21)$



$P(X=14) > P(X=23)$

P1.8

Aufgabe P 1.8: $_{4)}$ Lösbar nach Klasse 10 (eigentlich Kl. 9), Abs. 142/6.2 (bzw. 312/12.2.2). Für ein Spiel wird ein Behälter mit 100 Kugeln gefüllt. Dafür stehen rote und blaue Kugeln zur Verfügung. Vor jedem Spiel legt der Spieler die Anzahl der blauen Kugeln im Behälter fest. Anschließend wird dem Behälter eine Kugel zufällig entnommen. Ist diese Kugel rot, so wird dem Spieler die festgelegte Anzahl blauer Kugeln in Cent ausgezahlt; ist die Kugel blau, so beträgt die Auszahlung 10 Cent. Ermitteln Sie, wie der Spieler die Anzahl blauer Kugeln für ein Spiel festlegen muss, damit der Erwartungswert der Auszahlung möglichst groß ist. (2.5 VP), (BAg 312/810).

Ers	r	b
P	$\frac{100-b}{100}$	$\frac{b}{100}$
Gewinn	b	10

100 Kugeln   b blaue   100-b rote
10   b

$E(b) = 10 \cdot \frac{b}{100} + b\left(\frac{100-b}{100}\right) = \frac{b}{10} + b - \frac{b^2}{100} = \frac{11b}{10} - \frac{b^2}{100}$

$E'(b) = \frac{11}{10} - \frac{2b}{100} = -\frac{b}{50} + \frac{11}{10} \overset{!}{=} 0$

$-\frac{b}{50} + \frac{11}{10} = 0 \iff -b + 55 = 0 \iff \underline{\underline{b = 55}}$

Bei 55 blauen Kugeln ist der Erwartungswert maximal

$E''(b) = -\frac{1}{50} < 0 \implies$ Maximum

P2.1

Aufgabe P 2.1: $_{1-2)}$ Nach Abs. 155/6.3 (Kl. 11). Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{0.5x^2}$. Bestimmen Sie den Wert der zweiten Ableitung von f an der Stelle $x_0 = 0$. (2.5 VP), (BAg 158/422).

$f(x) = e^{0{,}5x^2}$ $f''(0)$

$f'(x) = x \cdot e^{0{,}5x^2}$

$f''(x) = 1 \cdot e^{0{,}5x^2} + x \cdot x \cdot e^{0{,}5x^2}$
$= e^{0{,}5x^2}(x^2+1)\Big|_{x=0}$
$= e^{0{,}5\cdot 0}(0^2+1) = 1$

P2.2

Aufgabe P 2.2: Nach Abs. 176/7.1.15 (Kl. 11). Abgebildet sind die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = 4 - 3x^2$ und $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, BAg: 174/482.

a$_1$) Zeigen Sie, dass sich die beiden Graphen an der Stelle $x_0 = 1$ schneiden. (0.5 VP)

b$_2$) Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche. (2 VP)

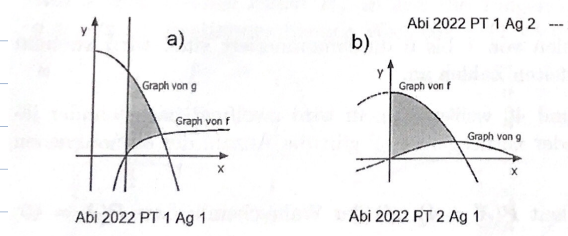
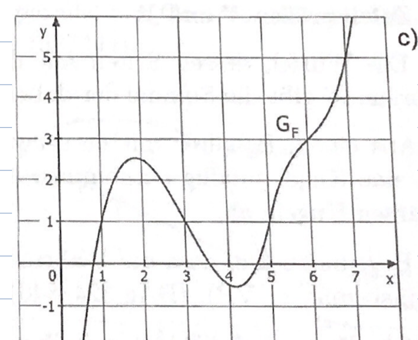


Abb. 543 Aufgaben PT 1.1, PT 2.2, PT 1.2



$f(x) = 4 - 3x^2$ $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

a) $f(1) = 4 - 3 \cdot 1^2 = 1 = g(1) = \sin\left(\frac{\pi \cdot 1}{2}\right)$

b) $A = \int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx$

$= \int_0^1 \left((4-3x^2) - \left(\sin \frac{\pi}{2}x\right)\right)dx$

$= \left[4x - 3\frac{x^3}{3} - \frac{-\cos \frac{\pi}{2}x}{\pi/2}\right]_0^1 = 4 - 1^3 + \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{\pi/2} - \frac{\cos(0)}{\pi/2}$

$= 3 - \frac{2}{\pi}$